

# FONCTION DERIVÉE

## I. Dérivées des fonctions usuelles

Exemple :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

Calculons le nombre dérivé de la fonction  $f$  en un nombre réel quelconque  $a$ .

$$\text{Pour } h \neq 0 : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

$$\text{Or : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$$

Pour tout nombre  $a$ , on associe le nombre dérivé de la fonction  $f$  égal à  $2a$ .

On a donc défini sur  $\mathbb{R}$  une fonction, notée  $f'$  dont l'expression est  $f'(x) = 2x$ .

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de  $f$ .



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Définitions : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout réel  $x$  de  $I$ .

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est appelée fonction dérivée de  $f$  et se note  $f'$ .

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

| Fonction $f$                                | Ensemble de définition de $f$ | Dérivée $f'$                  | Ensemble de définition de $f'$ |
|---------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| $f(x) = a, a \in \mathbb{R}$                | $\mathbb{R}$                  | $f'(x) = 0$                   | $\mathbb{R}$                   |
| $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$               | $\mathbb{R}$                  | $f'(x) = a$                   | $\mathbb{R}$                   |
| $f(x) = x^2$                                | $\mathbb{R}$                  | $f'(x) = 2x$                  | $\mathbb{R}$                   |
| $f(x) = x^n$<br>$n \geq 1$ entier           | $\mathbb{R}$                  | $f'(x) = nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$                   |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                        | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$      | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$<br>$n \geq 1$ entier | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$  | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   |
| $f(x) = \sqrt{x}$                           | $[0; +\infty[$                | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$                 |

### Exemples :

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4$  alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 4x^3$ .

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^5}$  alors  $f$  est dérivable sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $] 0; +\infty[$  et on a pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$ .

### Démonstration pour la fonction inverse :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\text{Pour } h \neq 0 \text{ et } h \neq -a : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - a - h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\text{Or : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Pour tout nombre  $a$ , on associe le nombre dérivé de la fonction  $f$  égal à  $-\frac{1}{a^2}$ .

Ainsi, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on a :  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

## II. Opérations sur les fonctions dérivées

### Exemple :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + x^2$ .

Pour  $h \neq 0$  :

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{a+h + (a+h)^2 - a - a^2}{h} \\ &= \frac{a+h + a^2 + 2ah + h^2 - a - a^2}{h} \\ &= \frac{h + 2ah + h^2}{h} = 1 + 2a + h \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + 2a + h = 1 + 2a$$

alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 1 + 2x$ .

On pose pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $u(x) = x$  et  $v(x) = x^2$ . On a ainsi :  $f(x) = u(x) + v(x)$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = 2x$ .

On constate sur cet exemple que :  $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ .

Soit encore :  $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

### Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

|                                                                      |                                                     |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $u + v$ est dérivable sur $I$                                        | $(u + v)' = u' + v'$                                |
| $ku$ est dérivable sur $I$ , où $k$ est une constante                | $(ku)' = ku'$                                       |
| $uv$ est dérivable sur $I$                                           | $(uv)' = u'v + uv'$                                 |
| $\frac{1}{u}$ est dérivable sur $I$ , où $u$ ne s'annule pas sur $I$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$       |
| $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $I$ , où $v$ ne s'annule pas sur $I$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |

### Démonstration pour la somme et l'inverse :

- On veut démontrer que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$ .

$$\frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = \frac{u(a + h) + v(a + h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a + h) - u(a)}{h} + \frac{v(a + h) - v(a)}{h}$$

Comme  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a + h) - u(a)}{h} = u'(a) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a + h) - v(a)}{h} = v'(a)$$

$$\text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a).$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a + h) - \left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h} = \frac{\frac{1}{u(a + h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} \\ & = \frac{\frac{u(a) - u(a + h)}{u(a)u(a + h)}}{h} = -\frac{u(a + h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{u(a)u(a + h)} \\ & \text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a + h) - \left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h} = -u'(a) \times \frac{1}{u(a)u(a)} = -\frac{u'(a)}{(u(a))^2}. \end{aligned}$$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$1) f_1(x) = 5x^3 \quad 2) f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x} \quad 3) f_3(x) = \frac{1}{2x^2 + 5x}$$

$$4) f_4(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1) \quad 5) f_5(x) = \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}.$$

$$1) f_1(x) = 5u(x) \text{ avec } u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$$

$$\text{Donc : } f_1'(x) = 5u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2.$$

$$2) f_2(x) = u(x) + v(x) \text{ avec } u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 6x$$

$$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Donc : } f_2'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$3) f_3(x) = \frac{1}{u(x)} \text{ avec } u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$$

$$\text{Donc : } f_3'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{4x + 5}{(2x^2 + 5x)^2}.$$

$$4) f_4(x) = u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$$

$$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$$

Donc :

$$f_4'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$$

$$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$$

$$= 45x^2 + 34x - 4$$

$$5) f_5(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$$

$$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$$

Donc :

$$f_5'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

Un logiciel de calcul formel permet de vérifier les résultats :

|                                                             |                                                         |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\frac{d}{dx} \left( (3x^2 + 4x) \cdot (5x - 1) \right)$    | $45x^2 + 34x - 4$                                       |
| $\frac{d}{dx} \left( \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1} \right)$ | $\frac{-(12x^3 - 27x^2 + 20x + 6)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$ |

### III. Application à l'étude des variations d'une fonction

**Théorème :** Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) \leq 0$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) \geq 0$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

- Admis -

#### Méthode : Dresser le tableau de variations d'une fonction

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.
- 2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction  $f$ .

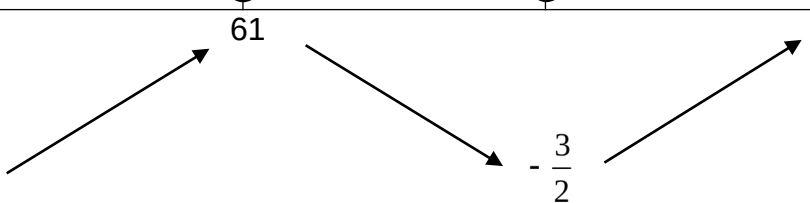
1) Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$ .

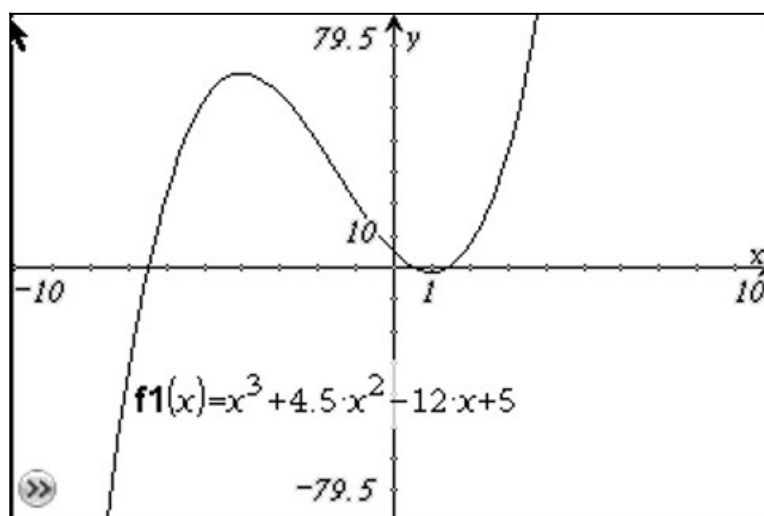
Commençons par résoudre l'équation  $f'(x) = 0$  :

Le discriminant du trinôme  $3x^2 + 9x - 12$  est égal à  $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions :  $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$  et  $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$

On en déduit le tableau de variations de  $f$  :

| $x$     | $-\infty$                                                                          | $-4$      | $1$       | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | +                                                                                  | $\ominus$ | $\ominus$ | +         |
| $f$     |  |           |           |           |



#### IV. Extremum d'une fonction

**Théorème :** Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .  
Si la dérivée  $f'$  de  $f$  s'annule et change de signe en un réel  $c$  de  $I$  alors  $f$  admet un extremum en  $x = c$ .

- Admis -

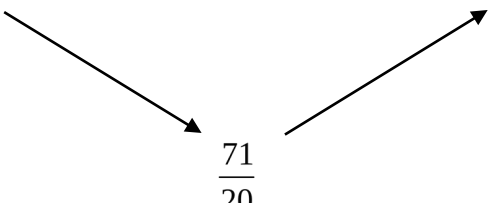
#### Méthode : Rechercher un extremum

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$  admet-elle un extremum sur  $\mathbb{R}$  ?

Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 10x - 3$

Et :  $f'(x) = 0$  pour  $x = \frac{3}{10}$ .

On dresse alors le tableau de variations :

|         |                                                                                   |                 |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                         | $\frac{3}{10}$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -                                                                                 | $\bigcirc$      | +         |
| $f$     |  |                 |           |
|         |                                                                                   | $\frac{71}{20}$ |           |

En effet :  $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$

La fonction  $f$  admet donc un minimum égal à  $\frac{71}{20}$  en  $x = \frac{3}{10}$ .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.  
[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)