

FONCTIONS DE REFERENCE

I. Rappels de la classe de seconde

1) Sens de variation d'une fonction

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Dire que f est croissante sur I (respectivement strictement croissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I :

si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$).

- Dire que f est décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I :

si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$).

- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

Remarques :

- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I .

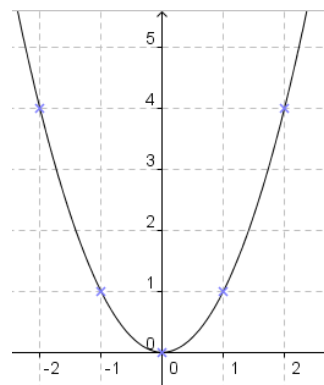
2) Fonction carré

Définition : La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété : La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Remarques :

- La courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O .
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



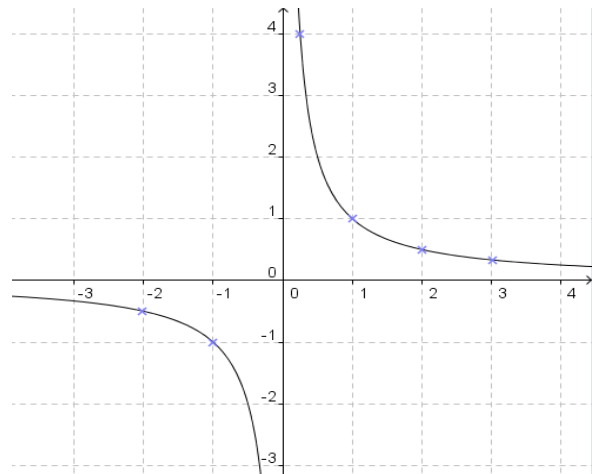
3) Fonction inverse

Définition : La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété : La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.

Remarques :

- La courbe de la fonction inverse est appelée une hyperbole de centre O.
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport au centre du repère.



Méthode : Etudier le sens de variation d'une fonction

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$ est strictement croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$.

Soit a et b deux nombres réels tels que : $4 \leq a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - 8a + 3 - b^2 + 8b - 3 \\ &= a^2 - b^2 - 8a + 8b \\ &= (a - b)(a + b) - 8(a - b) \\ &= (a - b)(a + b - 8) \end{aligned}$$

Comme $a < b$, on a : $a - b < 0$.

Comme $a \geq 4$ et $b > 4$, on a : $a + b > 8$, soit : $a + b - 8 > 0$

On en déduit que : $f(a) - f(b) < 0$ et donc : $f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$.

II. Etude de la fonction racine carrée

Définition : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

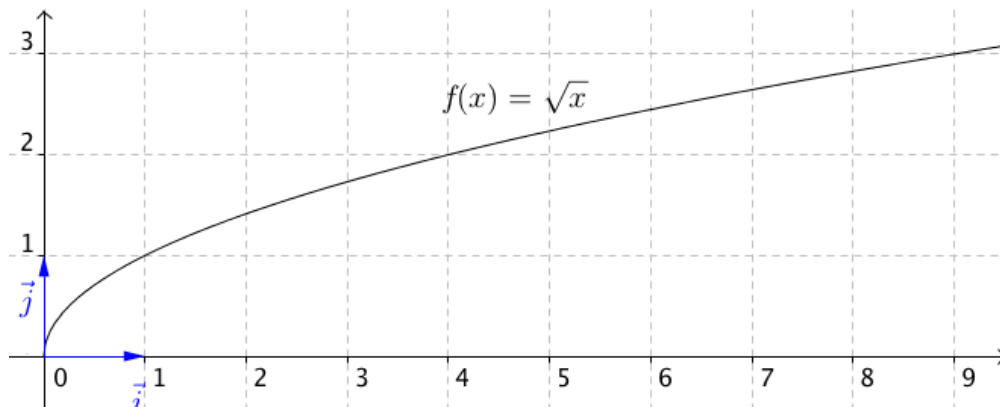
Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démonstration :

Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0$$

Donc $f(a) < f(b)$.



III. Etude de la fonction valeur absolue

1) Valeur absolue d'un nombre

Exemples :

- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition : La valeur absolue d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre $-A$ si A est négatif.

La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemple :

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$$

Propriétés : Soit x et y deux nombres réels.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$ 3) $\sqrt{x^2} = |x|$ 4) $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$

5) $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$

6) $|xy| = |x| \times |y|$ 7) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples :

1) $|-3| = 3$ et $|3| = 3$ donc $|-3| = |3|$.

2) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

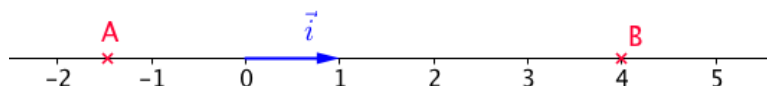
2) Distance et valeur absolue

Définition : Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée munie d'un repère (O, i) , la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre $|a - b|$.
Ce nombre s'appelle aussi la distance entre les réels a et b et se note $d(a ; b)$.

Exemple :

Calculer la distance entre les nombres -1,5 et 4.

$d(-1,5 ; 4) = |4 - (-1,5)| = 5,5$



Propriété de l'inégalité triangulaire : Soit x et y deux nombres réels. On a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration :

Dans un repère (O, i) , soit A et B deux points d'abscisses respectives x et $-y$.

On a : $AB \leq AO + OB$, soit :

$|x - (-y)| \leq |x - 0| + |0 - (-y)|$, soit encore : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3) Fonction valeur absolue

Définition : La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

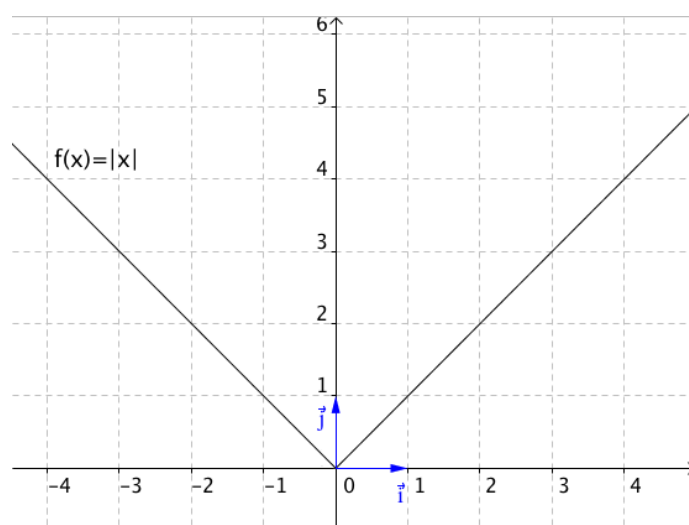
Éléments de démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{sur }]-\infty; 0] \\ x & \text{sur } [0; +\infty[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$, la fonction f est une fonction affine.

Représentation graphique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x $		0	



Remarque :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

IV. Positions relatives de courbes

Propriété : - Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$
 - Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Démonstration :

Dans un repère $(O; i; j)$, on appelle C_f , C_g et C_h les courbes représentatives respectives des fonctions f , g et h telles que : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$ et $h(x) = x^2$.

- $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = h(1) = 1$. Les courbes C_f , C_g et C_h sont donc sécantes au point O et au point A(1 ; 1)

- Si $0 < x < 1$: On a alors : $0 < \sqrt{x} < \sqrt{1}$,

$$\text{soit : } 0 < \sqrt{x} < 1$$

$$0 < \sqrt{x} \times \sqrt{x} < 1 \times \sqrt{x}$$

$$0 < (\sqrt{x})^2 < \sqrt{x} \quad \text{car } x > 0$$

$$0 < x < \sqrt{x}$$

$$\text{soit encore : } 0 < x^2 < (\sqrt{x})^2 \quad \text{car } x > 0$$

$$\text{donc : } 0 < x^2 < x$$

Sur l'intervalle $]0;1[$, la courbe C_g est strictement au dessus de la courbe C_h et strictement en dessous de la courbe C_f .

- Si $x > 1$: On a alors : $\sqrt{1} < \sqrt{x}$,

$$\text{soit : } 1 < \sqrt{x}$$

$$1 \times \sqrt{x} < \sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} < (\sqrt{x})^2 \quad \text{car } x > 0$$

$$\sqrt{x} < x$$

$$\text{soit encore : } (\sqrt{x})^2 < x^2 \quad \text{car } x > 0$$

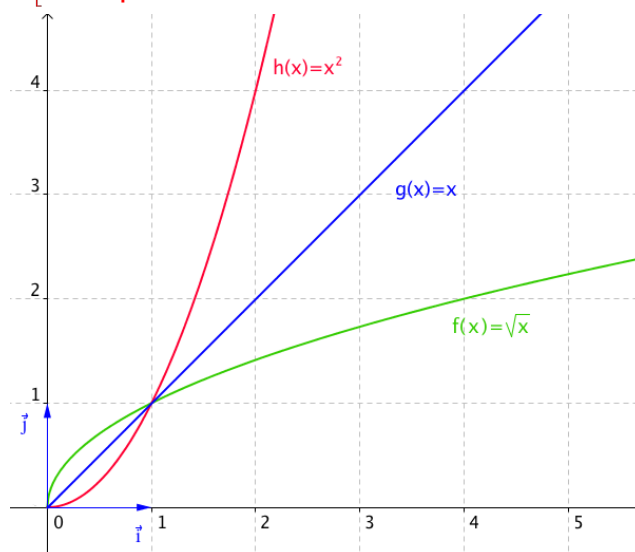
$$\text{donc : } x < x^2$$

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la courbe C_g est strictement au dessus de la courbe C_f et strictement en dessous de la courbe C_h .

Propriété :

- Sur l'intervalle $]0;1[$, la droite d'équation $y = x$ est au dessus de la courbe de la fonction carré et en dessous de la courbe de la fonction racine carrée.

- Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, les position de ces trois courbes sont inversées.



Méthode : Etudier la position de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Etudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g .

On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 11 - (x - 1) = -x^2 + 7x - 10.$$

Le discriminant du trinôme $-x^2 + 7x - 10$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$

Le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 2.$$

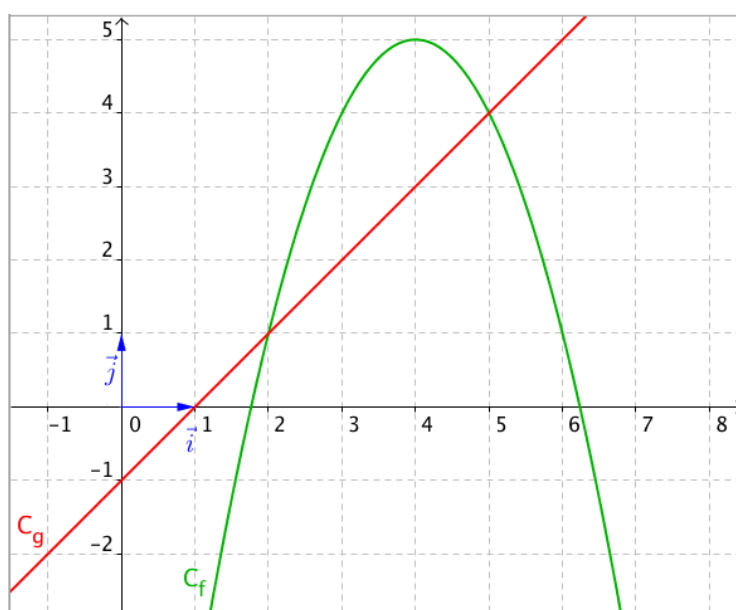
On dresse le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 7x - 10$:

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-

On conclut :

La courbe C_f est en dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty; 2] \cup [5; +\infty[$.

La courbe C_f est en dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2; 5]$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales