

NOMBRE DERIVE

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

2) Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

Définition : On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et on lit : "La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L ."

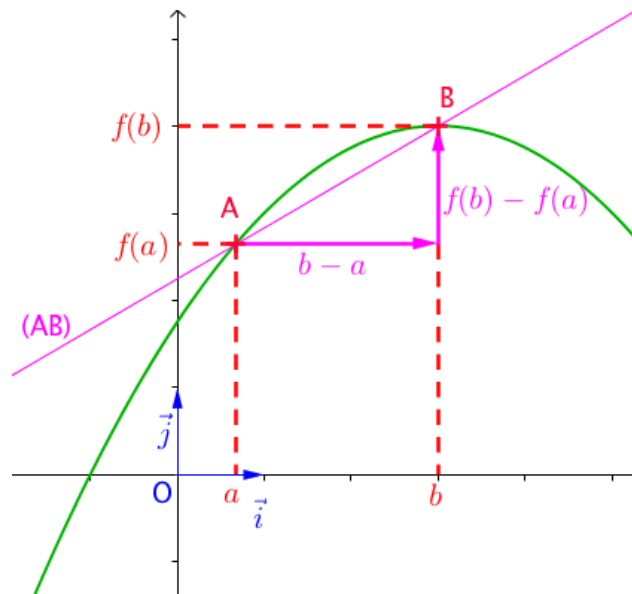
II. Dérivabilité

1) Rappel : Coefficient directeur d'une droite

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.

Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b .

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



2) Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

Soit un réel a appartenant à I .

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est

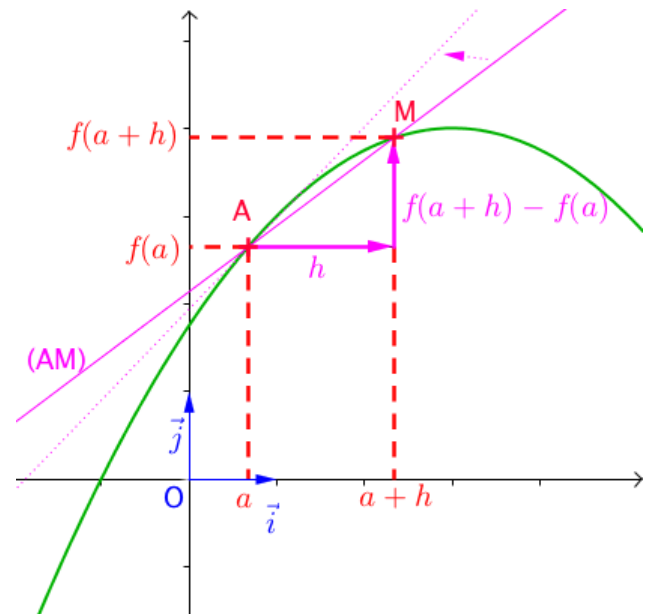
égal à : $\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est

égal à la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h

tend vers 0.

Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a .



Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L , tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$.

L est appelé le nombre dérivé de f en a .

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

1) Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x - 5|$.
La fonction g est-elle dérivable en $x = 5$?

1) On commence par calculer $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$\begin{aligned} &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2 \times 2 + 3}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} = h + 6 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 6 = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.

2) On commence par calculer $\frac{g(5+h) - g(5)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$\begin{aligned} &= \frac{|5+h-5| - |5-5|}{h} \\ &= \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{g(5+h) - g(5)}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1, & \text{pour } h > 0 \\ -\frac{h}{h} = -1, & \text{pour } h < 0 \end{cases}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(5+h) - g(5)}{h}$ n'est pas égale à un unique nombre réel.

g n'est pas dérivable en $x = 5$.

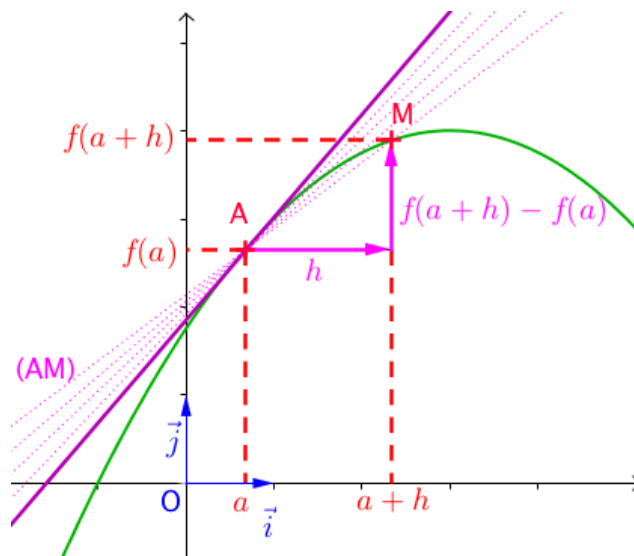
III. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

L est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L .



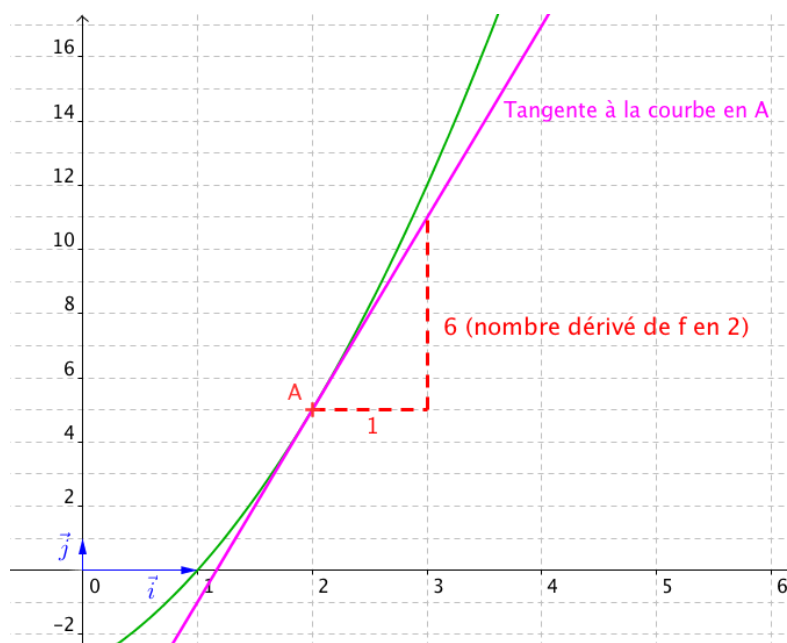
Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = L(x - a) + f(a)$$

Démonstration :

La tangente a pour coefficient directeur L donc son équation est de la forme :
 $y = Lx + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :

La tangente passe par le point $A(a; f(a))$, donc :

$$f(a) = La + b \text{ soit : } b = f(a) - La$$

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :

$$y = Lx + f(a) - La$$

$$y = L(x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu plus haut que le coefficient directeur de la tangente est égal à 6.

Donc son équation est de la forme : $y = 6(x - 2) + f(2)$, soit :

$$y = 6(x - 2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$$

$$y = 6x - 7$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales