

OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

I. Fonction associée $u + k$

Exemples :

- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 5$ est la fonction $u + 5$.

- Soit v la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x$.

Alors la fonction $v - 3$ est définie sur $]0; +\infty[$ par $(v - 3)(x) = v(x) - 3 = \frac{1}{\sqrt{x}} + x - 3$

Propriété : Soit un réel k et une fonction monotone u définie sur intervalle I .
Les fonctions $u + k$ et u ont le même sens de variation sur I .

Démonstration :

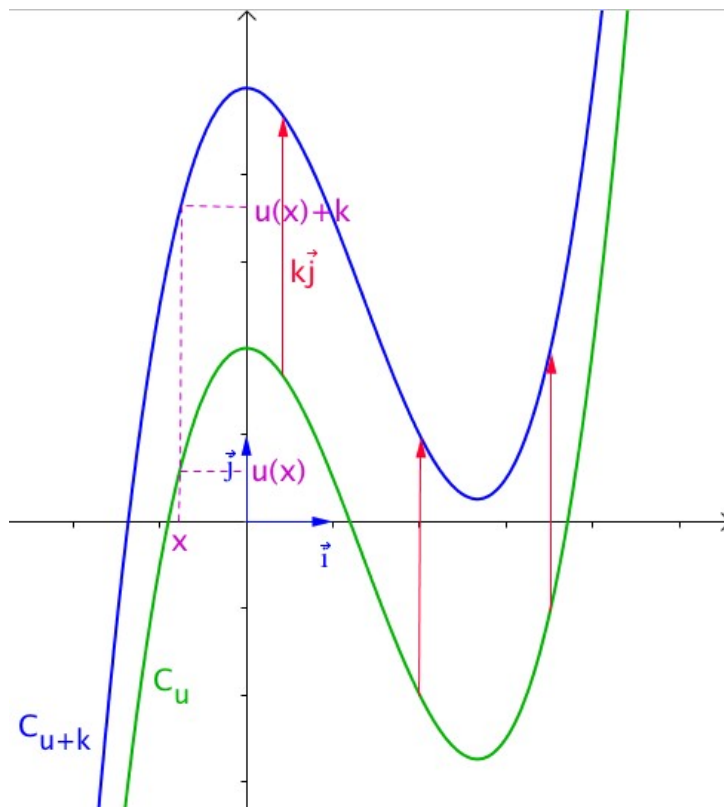
- u est croissante sur I signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $u(a) \leq u(b)$.

On ajoute k au deux membres de l'égalité et on a : $u(a) + k \leq u(b) + k$, soit :

$(u + k)(a) \leq (u + k)(b)$. Ce qui signifie que $u + k$ est croissante sur I .

- La démonstration est analogue pour la décroissance.

Dans un repère orthogonal $(O; i, j)$,
la courbe représentative de la
fonction $u + k$ est l'image de la courbe
représentative de la fonction u par la
translation de vecteur kj .



II. Fonction associée ku

Exemples :

- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^3$ est la fonction $2u$.

- Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x + 1$.

Alors la fonction $3v$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(3v)(x) = 3v(x) = 3(x + 1) = 3x + 3$

Propriété : Soit un réel k et une fonction monotone u définie sur intervalle I .

- Si $k > 0$: Les fonctions ku et u ont le même sens de variation sur I .

- Si $k < 0$: Les fonctions ku et u ont des sens de variation contraire sur I .

Démonstration dans le cas où u croissante et $k < 0$:

u est croissante sur I signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $u(a) \leq u(b)$.

On multiplie les deux membres de l'égalité par k et on a : $ku(a) \geq ku(b)$ car $k < 0$.

Soit : $(ku)(a) \geq (ku)(b)$. Ce qui signifie que ku est décroissante sur I .

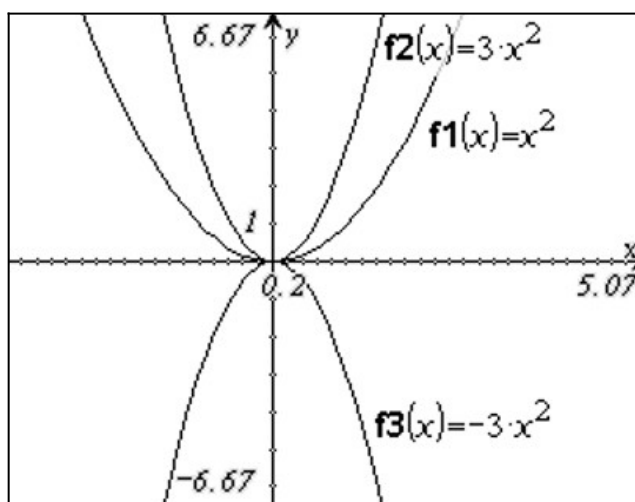
Exemple :

On représente à l'aide la calculatrice les fonctions f_1 , f_2 et f_3 telles que :

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = 3x^2$$

$$f_3(x) = -3x^2$$



Pour une même abscisse, un point de la courbe représentative de f_2 possède une ordonnée égale au triple de l'ordonnée du point de la courbe de f_1 .

Les courbes représentatives de f_2 et de f_3 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

III. Fonction associée $\sqrt{u}$

Exemples :

- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2 + x^2$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2 + x^2}$ est la fonction $\sqrt{u}$.

- Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = |x| + 1$.

Alors la fonction $\sqrt{v}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(\sqrt{v})(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{|x| + 1}$

Propriété : Soit une fonction monotone u définie sur intervalle I telle que pour tout x de I , $u(x) \geq 0$.

Les fonctions $\sqrt{u}$ et u ont le même sens de variation sur I .

Démonstration :

- u est croissante sur I et à valeurs positives signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $0 \leq u(a) \leq u(b)$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ donc on a : $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$, soit : $(\sqrt{u})(a) \leq (\sqrt{u})(b)$. Ce qui signifie que $\sqrt{u}$ est croissante sur I .

- La démonstration est analogue pour la décroissance.

Méthode : Déterminer les variations d'une fonction à l'aide d'une fonction associée

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x - 6}$ est croissante sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

La fonction u définie sur $[3; +\infty[$ par $u(x) = 2x - 6$ est positive et strictement croissante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction $\sqrt{u} = f$ est également strictement croissante sur $[3; +\infty[$.

IV. Fonction associée $\frac{1}{u}$

Exemple :

- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 + 1$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 1}$ est la fonction $\frac{1}{u}$.

- Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Propriété : Soit une fonction monotone u définie sur intervalle I sur lequel u a un signe constant et ne s'annule pas.

Les fonctions $\frac{1}{u}$ et u ont des sens de variation contraire sur I .

Démonstration pour u croissante et à valeurs strictement positive :

u est croissante sur I et à valeurs strictement positives signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $0 < u(a) \leq u(b)$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc on a : $0 < \frac{1}{u(b)} \leq \frac{1}{u(a)}$, soit :

$0 < \left(\frac{1}{u}\right)(a) \leq \left(\frac{1}{u}\right)(b)$. Ce qui signifie que $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I .

Méthode : Déterminer les variations d'une fonction à l'aide de fonctions associées

1) Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2-x}$ est croissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

2) Démontrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{-2}{x} + 1$ est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1) La fonction u définie sur $]2; +\infty[$ par $u(x) = 2 - x$ est négative et strictement décroissante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction $\frac{1}{u} = f$ est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

2) La fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

La fonction $-2u$ est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction $-2u + 1 = f$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales