

SECOND DEGRE (Partie 1)

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a , b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$,
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$,
- $h(x) = 4 - 2x^2$
- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

$$f(x) = \text{😊}(x - \text{😬})^2 + \text{😊}$$

où 😊, 😬 et 😊 sont des nombres réels.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\
&= 2[x^2 - 10x] + 10 \\
&= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10 \\
&= 2[(x - 5)^2 - 25] + 10 \\
&= 2(x - 5)^2 - 50 + 10 \\
&= 2(x - 5)^2 - 40
\end{aligned}$$

car $x^2 - 10x$ est le début du développement de $(x - 5)^2$
et $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$ est la forme canonique de f .

Propriété : Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette dernière écriture s'appelle la forme canonique de f .

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a(x - \alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2(x - 1)^2$ est positif.

Or $f(1) = 3$ donc pour tout x , $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en 1 . Ce minimum est égal à 3 .

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β .

- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β .

Remarque :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\frac{b}{2a}$.

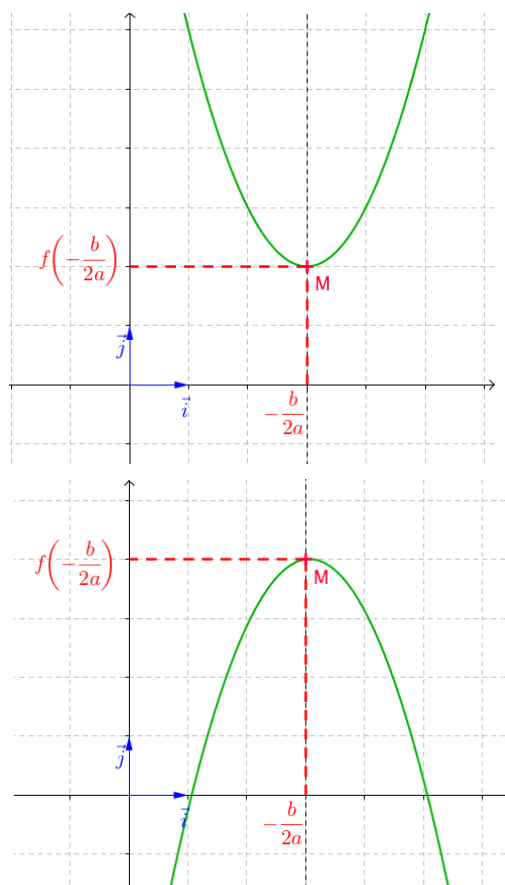
(voir résultat de la démonstration dans II.)

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\swarrow \quad \quad \searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow \quad \quad \searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		



Dans un repère orthogonal (O, i, j) , la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

M est le sommet de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f .

La parabole possède un axe de symétrie. Il s'agit de la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

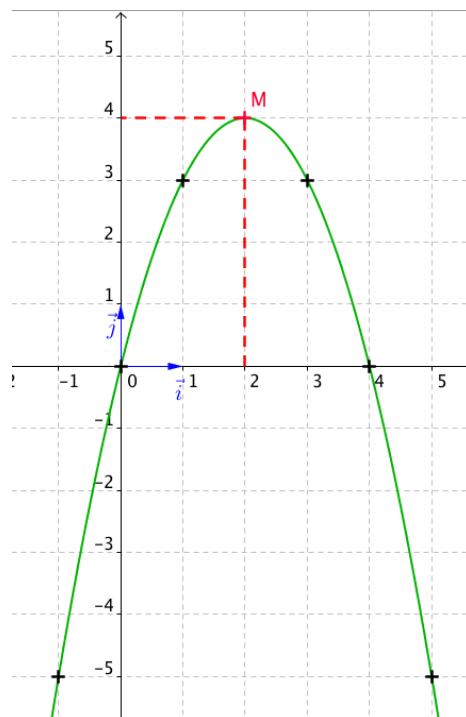
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -((x - 2)^2 - 4) \\ &= -(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

f admet donc un maximum en 2 égal à $f(2) = -(2 - 2)^2 + 4 = 4$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f		4	

On obtient la courbe représentative de f :





Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales