

SECOND DEGRE (Partie 2)

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une équation du second degré est une équation de la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Propriété démontrée dans le paragraphe II.

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$

b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

$$a = 2, b = -3 \text{ et } c = \frac{9}{8} \text{ donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$$a = 1, b = 3 \text{ et } c = 10 \text{ donc } \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

II. Factorisation d'un trinôme

On a vu dans le chapitre "Second degré (partie 1)" que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Donc :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- Si $\Delta < 0$: L'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

L'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

L'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, on n'a pas de forme factorisée de f .

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

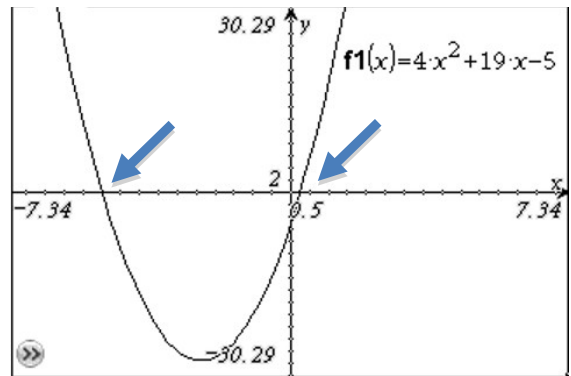
Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$

On a donc :

$$4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5)) \left(x - \frac{1}{4}\right) \\ = (x + 5)(4x - 1)$$

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

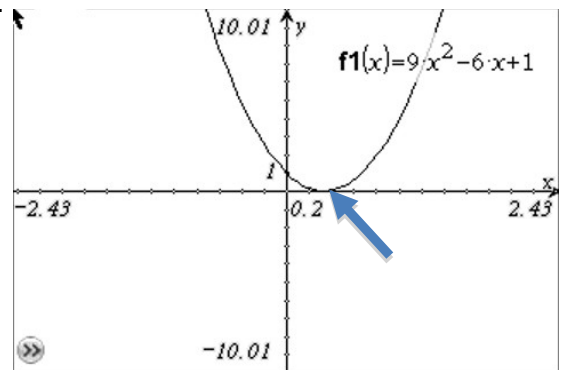


b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine (double) est : $x_0 = -\frac{-6}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$

On a donc : $9x^2 - 6x + 1 = 9 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2$
 $= (3x - 1)^2$



Méthode : Résoudre une équation

Résoudre l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x^2}{2x^2+13x+6} = 0$

- On commence par factoriser les expressions $2x^2 - 3x - 2$ et $2x^2 + 13x + 6$:

Le discriminant de $2x^2 - 3x - 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2$$

On a donc : $2x^2 - 3x - 2 = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 2) = (2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2 + 13x + 6$ est $\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-13 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -6 \text{ et } x_2' = \frac{-13 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

On a donc : $2x^2 + 13x + 6 = 2(x+6) \left(x + \frac{1}{2} \right) = (x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

Les valeurs -6 , $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur. On résout alors (E) sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ -6; -\frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$$\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)} = 0$$

$$x+6-x^2 = 0$$

car $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq -6$.

Le discriminant de $-x^2 + x + 6$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$.

Les racines sont : $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 3$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = -2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3 .

III. Signe d'un trinôme

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

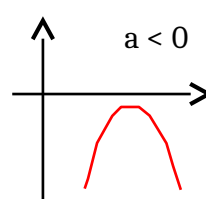
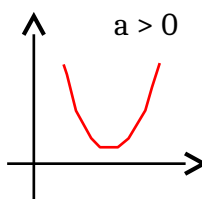
- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 

- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

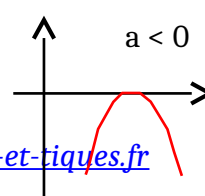
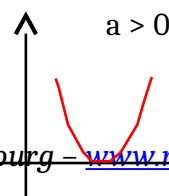
- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	



- Si $\Delta = 0$:

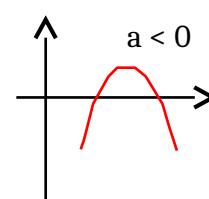
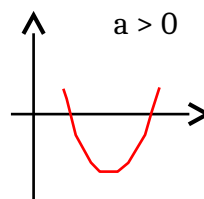
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$			



	Signe de a O Signe de a
--	-------------------------------

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a	O	Signe de $-a$	O	Signe de a



Méthode : Résoudre une inéquation

Résoudre les inéquations suivantes : a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ b) $\frac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11} \text{ et } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$$

On obtient le tableau de signes :

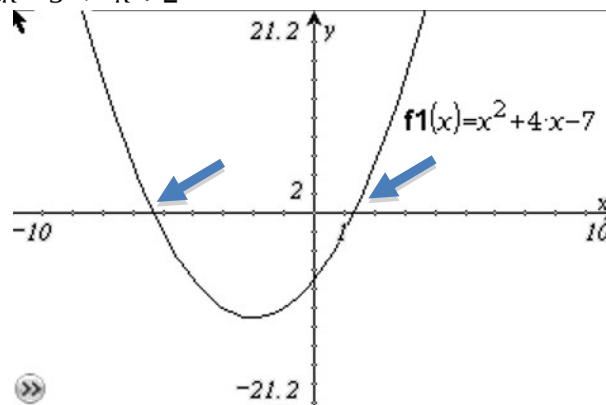
x	$-\infty$	$-2-\sqrt{11}$	$-2+\sqrt{11}$	$+\infty$	
$f(x)$	+	O	-	O	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc

$$]-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}[.$$

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !

On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.



Un logiciel de calcul formel permet également de contrôler le résultat :

$$\text{solve}(x^2 + 3x - 5 < -x + 2, x)$$

$$-(\sqrt{11} + 2) < x < \sqrt{11} - 2$$

b) $\frac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$ équivaut à $\frac{1}{x^2 - x - 6} - 2 \geq 0$

Soit : $\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0$

- On commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans

$$\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}.$$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2 + 2x + 13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2' = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$	-2	3	$\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 13$	-	O	+	+	+	-
$x^2 - x - 6$	+	+	O	-	O	+
$\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}$	-	O	+	-	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$ est :

$$\left[\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}; -2 \right[\cup \left] 3; \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \right]$$

Un logiciel de calcul formel permet de contrôler le résultat :

$$\text{solve}\left(\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2, x\right)$$

$$\frac{-(3\sqrt{3}-1)}{2} \leq x < -2 \text{ or } 3 < x \leq \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales