

## GENERALITES SUR LES SUITES

Dès l'Antiquité, *Archimède de Syracuse* (-287 ; -212), met en œuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre  $\pi$ . Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, *Archimède* donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.



Vers la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, ...

Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaîtra qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle avec le mathématicien français *Augustin Louis Cauchy* (1789 ; 1857) – *ci-contre*.

### I. Définition et représentation graphique

#### 1) Définition d'une suite numérique

##### Exemple d'introduction :

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, ...

On note  $(u_n)$  l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \dots$$

On a ainsi défini une suite numérique.

On peut lui associer une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

**Définitions :** Une suite numérique  $(u_n)$  est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier  $n$  on associe un nombre réel noté  $u_n$ .

$u_n$  est appelé le terme de rang  $n$  de cette suite (ou d'indice  $n$ ).

#### 2) Générer une suite numérique par une formule explicite

##### Exemples :

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne :  $u_n = 2n$  qui définit la suite des nombres pairs.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$u_0 = 2 \times 0 = 0,$$

$$u_1 = 2 \times 1 = 2,$$

$$u_2 = 2 \times 2 = 4,$$

$$u_3 = 2 \times 3 = 6.$$

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne :  $v_n = 3n^2 - 1$ .

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1,$$

$$v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2,$$

$$v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11,$$

$$v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26.$$

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de  $n$  et indépendamment des termes précédents.

### 3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemples :

- On définit la suite  $(u_n)$  par :

$u_0 = 5$  et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$u_0 = 5,$$

$$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15,$$

$$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45.$$

- On définit la suite  $(v_n)$  par :

$$v_0 = 3 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_{n+1} = 4v_n - 6$$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$v_0 = 3,$$

$$v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6,$$

$$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18,$$

$$v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66.$$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple  $v_{13}$  sans connaître  $v_{12}$ .

Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

**Sur TI :**

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u-6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
67108866
Fait
```

**Sur Casio :**

```
=====SUITE=====
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u-6→u↵
Next↵
u↵
```

```
?
13
67108866
-Disp-
```

- On définit la suite  $(w_n)$  par :

pour tout  $n$  de  $\mathbb{N} - \{0\}$ ,  $w_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$w_1 = 1,$$

$$w_2 = w_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$w_3 = w_2 + 3 = 3 + 3 = 6,$$

$$w_4 = w_3 + 4 = 6 + 4 = 10.$$

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

A noter : Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

#### 4) Représentation graphique d'une suite

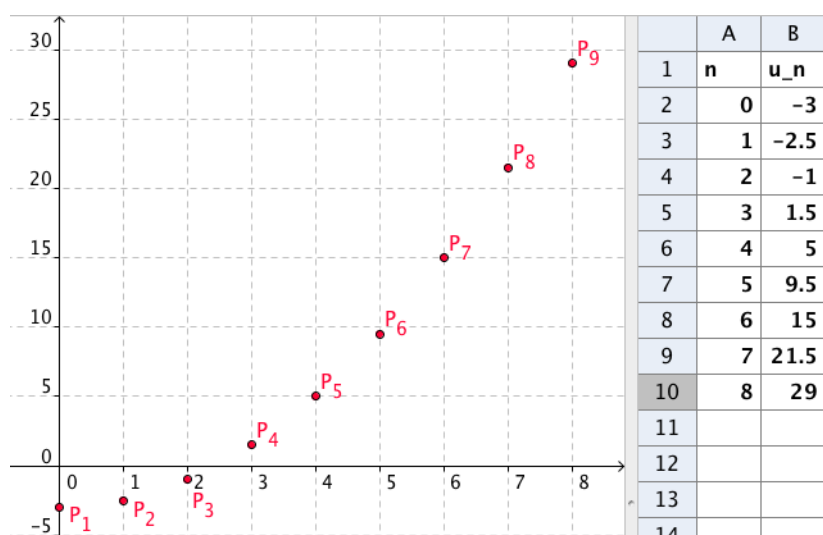
Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées  $(n; u_n)$ .

Exemple :

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne :  $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$ .

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

| $n$   | 0  | 1    | 2  | 3   | 4 | 5   | 6  | 7    | 8  |
|-------|----|------|----|-----|---|-----|----|------|----|
| $u_n$ | -3 | -2,5 | -1 | 1,5 | 5 | 9,5 | 15 | 21,5 | 29 |

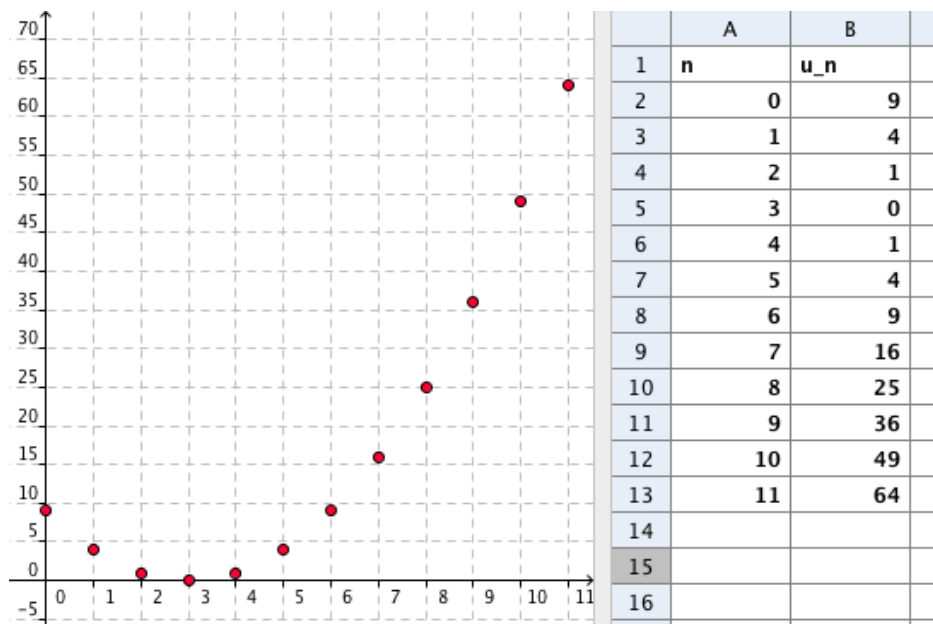


*Il est aisé d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.*

## II. Sens de variation d'une suite numérique

### Exemple :

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite  $(u_n)$  :



On peut conjecturer que cette suite est croissante pour  $n \geq 3$ .

**Définitions :** Soit un entier  $p$  et une suite numérique  $(u_n)$ .

- La suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang  $p$  signifie que pour  $n \geq p$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$ .

- La suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang  $p$  signifie que pour  $n \geq p$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$ .

### Méthode : Etudier les variations d'une suite

1) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n^2 - 4n + 4$ .

Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante à partir d'un certain rang.

On commence par calculer la différence  $u_{n+1} - u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - n^2 + 4n - 4 \\ &= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4 \\ &= 2n - 3 \end{aligned}$$

On étudie ensuite le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ pour } 2n - 3 \geq 0 \text{ donc pour } n \geq 1,5.$$

Ainsi pour  $n \geq 2$  ( $n$  est entier), on a  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite  $(u_n)$  est croissante.

2) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

Démontrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

On commence par calculer le rapport  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

Or  $0 \leq n < n+2$ , on a :  $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$  et donc  $v_{n+1} - v_n < 0$ .

On en déduit que  $(v_n)$  est décroissante.

**Propriété :** Soit une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  et une suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = f(n)$ . Soit un entier  $p$ .

- Si  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[p; +\infty[$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang  $p$ .

- Si  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[p; +\infty[$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang  $p$ .

**Démonstration :**

-  $f$  est croissante sur  $[p; +\infty[$  donc par définition d'une fonction croissante, on a pour tout entier  $n \geq p$  : comme  $n+1 > n$ ,  $f(n+1) \geq f(n)$  et donc  $u_{n+1} \geq u_n$ .

- Démonstration analogue pour la décroissance.

**Méthode :** Etudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{1}{n+1}$ .

Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

On considère la fonction associée  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

Ainsi  $u_n = f(n)$ .

Etudions les variations de  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

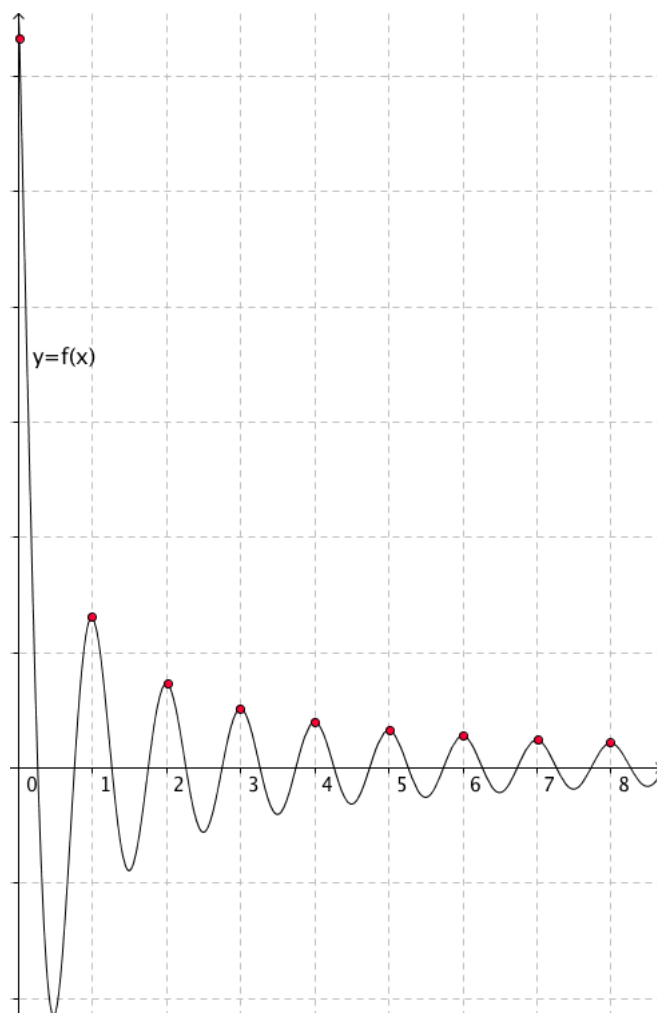
Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , on a :  $f'(x) < 0$ .

Donc  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ . On en déduit que  $(u_n)$  est décroissante.

Remarque :

La réciproque de la propriété énoncée plus haut est fausse.

La représentation suivante montre une suite décroissante alors que la fonction  $f$  n'est pas monotone.



### III. Notion de limite d'une suite

#### 1) Suite convergente

Exemple :

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}-\{0\}$ , on considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{2n+1}{n}$ .

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

| $n$   | 1 | 2   | 3     | 4    | 5   | 10  | 15    | 50   | 500   |
|-------|---|-----|-------|------|-----|-----|-------|------|-------|
| $u_n$ | 3 | 2,5 | 2,333 | 2,25 | 2,2 | 2,1 | 2,067 | 2,02 | 2,002 |

Plus  $n$  devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.

On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers 2 et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

#### 2) Suite divergente

Exemples :

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n^2 + 1$ .

Calculons quelques termes de cette suite :

$$u_0 = 0^2 + 1 = 1,$$

$$u_1 = 1^2 + 1 = 2,$$

$$u_2 = 2^2 + 1 = 5,$$

$$u_{10} = 10^2 + 1 = 101,$$

$$u_{100} = 100^2 + 1 = 10001,$$

Plus  $n$  devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_{n+1} = (-1)^n v_n$  et  $v_0 = 2$

Calculons les premiers termes de cette suite :

$$v_1 = (-1)^0 v_0 = 2$$

$$v_2 = (-1)^1 v_1 = -2$$

$$v_3 = (-1)^2 v_2 = -2$$

$$v_4 = (-1)^3 v_3 = 2$$

$$v_5 = (-1)^4 v_4 = 2$$

Lorsque  $n$  devient grand, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. On dit que la suite  $(u_n)$  diverge.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.  
[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)