

SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.

Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 3,$$

$$u_1 = 8,$$

$$u_2 = 13,$$

$$u_3 = 18.$$

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

Définition : Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - (7 - 9n) = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9.$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.

(u_n) est une suite arithmétique de raison -9.

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - (n^2 + 3) = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1.$

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration :

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

En calculant les premiers termes :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr.$$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .

2) Exprimer u_n en fonction de n .

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et

$$u_9 = u_0 + 9r = 19.$$

On soustrayant membre à membre, on obtient : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.

- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.

- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

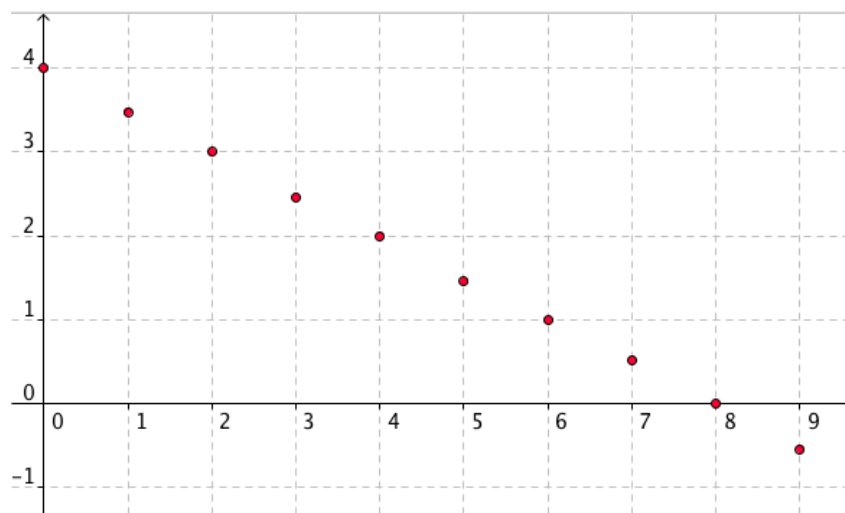
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à -4 .

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ

	(u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0.	Exemple : $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 5,$$

$$u_1 = 10,$$

$$u_2 = 20,$$

$$u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La est donc définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}.$$

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5.$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520 \quad u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80 \quad u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1,04^n$

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration :

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

En calculant les premiers termes :

$$u_1 = q \times u_0$$

$$u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$$

$$u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^3 \times u_0$$

...

$$u_n = q \times u_{n-1} = q \times (q^{n-1} u_0) = q^n \times u_0.$$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = q^n \times u_0$.

Ainsi $u_4 = q^4 \times u_0 = 8$ et

$$u_7 = q^7 \times u_0 = 512.$$

Ainsi : $\frac{u_7}{u_4} = \frac{q^7 \times u_0}{q^4 \times u_0} = q^3$ et $\frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$

Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $4^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 = \frac{1}{32}$.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0 .

Pour $u_0 > 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

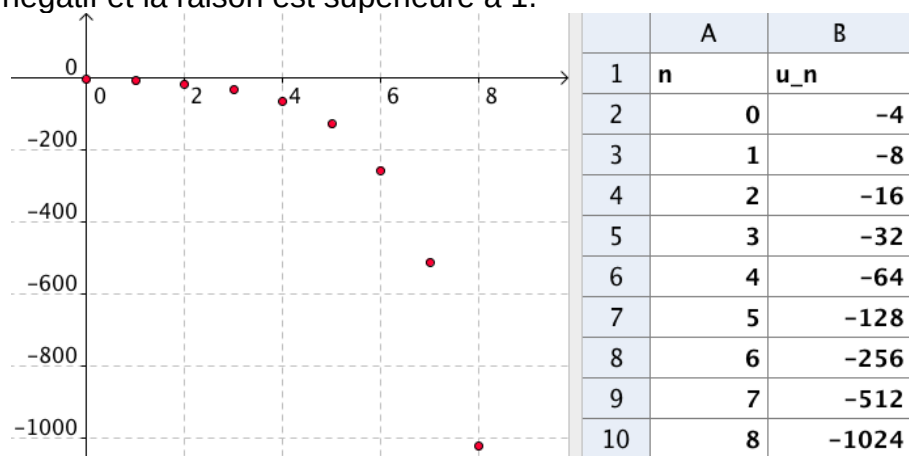
$$u_{n+1} - u_n = q^{n+1} u_0 - q^n u_0 = u_0 q^n (q - 1).$$

- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

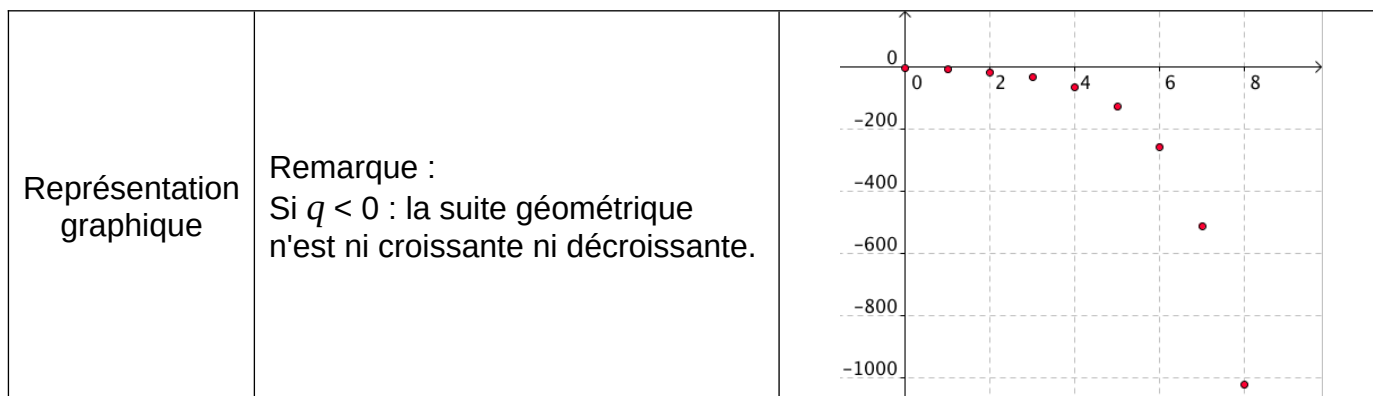
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

RÉSUMÉ

	(u_n) une suite géométrique de raison q de premier terme u_0 .	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si $q > 1$: (u_n) est décroissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.



III. Sommes de termes consécutifs

1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété : n est un entier naturel non nul alors on a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration :

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\
 + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1)
 \end{array}$$

$$= n \times (n+1)$$

$$\text{donc : } 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)$$

$$\text{et donc : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 348$$

$$S_2 = 33 + 36 + 39 + \dots + 267$$

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 348$$

$$= \frac{348 \times 349}{2}$$

$$= 60726$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= 33 + 36 + 39 + \dots + 267 \\
&= 3 \times (11 + 12 + \dots + 89) \\
&= 3 \times ((1 + 2 + \dots + 89) - (1 + 2 + \dots + 10)) \\
&= 3 \times \left(\frac{89 \times 90}{2} - \frac{10 \times 11}{2} \right) \\
&= 11850
\end{aligned}$$



Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration :

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

Ainsi :

$$S - q \times S = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1})$$

$$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$$

$$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Calculer la somme S suivante :

$$S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$$

$$= \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3} = 2391484$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales