

VECTEURS ET DROITES



En 1837, le mathématicien italien *Giusto BELLAVITIS*, ci-contre, (1803 ; 1880) publie des travaux préfigurant la notion de vecteurs qu'il nomme "segments équipollents".

Puis plus tard au XIXe siècle, le mathématicien et physicien allemand *Hermann GRASSMANN* (1809 ; 1877) pose les bases des opérations sur les segments orientés pour les besoins de la mécanique : addition de forces, de vitesses... Le calcul vectoriel prend alors réellement son essor.

I. Colinéarité de deux vecteurs

Définition :

Deux vecteurs non nuls u et v sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel k tel que $u = kv$.

Critère de colinéarité :

Soit u et v deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, i, j) .

Dire que u et v sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration :

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.

- Supposons maintenant que les vecteurs u et v soient non nuls.

Dire que les vecteurs u et v sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $u = kv$.

Les coordonnées des vecteurs u et v sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.

Le vecteur v étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que

$x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$ et donc $u = kv$.

Exemple :

Vérifier si les vecteurs $u \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$5 \times 5 - (-4) \times (-7) = -3 \neq 0.$$

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.

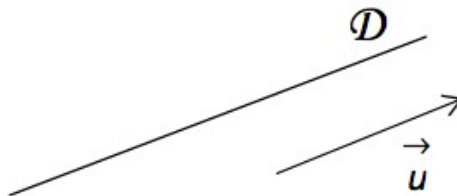
II. Equations de droite

1) Vecteur directeur d'une droite

Définition :

D est une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul u qui possède la même direction que la droite D .



2) Equation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Un vecteur directeur de D est $u(-b; a)$.

Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite D .

Démonstration :

Soit $A(x_0; y_0)$ un point de la droite D et $u(\alpha; \beta)$ un vecteur directeur de D .

Un point $M(x; y)$ appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

et $u \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit : $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$.

Soit encore : $\beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0$

Et donc : $\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$

Cette équation peut s'écrire : $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.

Les coordonnées de u sont donc $(\alpha ; \beta) = (-b ; a)$.

Exemple :

Soit une droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.

Alors le vecteur u de coordonnées $(5 ; 4)$ est un vecteur directeur de d .

Théorème réciproque :

L'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite D de vecteur directeur $u(-b ; a)$.

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O ; i ; j)$ du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3 ; 1)$ et de vecteur directeur $u(-1 ; 5)$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5 ; 3)$ et $C(1 ; -3)$.

1) Soit un point $M(x ; y)$ de la droite d .

Les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit : $5(x-3) - (-1)(y-1) = 0$.

Soit encore : $5x + y - 16 = 0$.

Une équation cartésienne de d est : $5x + y - 16 = 0$.

Remarque :

Une autre méthode consiste à appliquer le premier théorème énoncé plus haut.

Ainsi, comme $u(-1 ; 5)$ est un vecteur directeur de d , une équation de d est de la forme : $5x + 1y + c = 0$.

Pour déterminer c , il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d' .

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

$B(5 ; 3)$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

3) Equation cartésienne et équation réduite

Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Le coefficient directeur de D est $-\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $-\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur de D est $\left(1; -\frac{a}{b}\right)$.

Exemple :

Soit d dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

4) Parallélisme de droites

Propriété :

Les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Démonstration :

Les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si leur vecteur directeur respectif $u \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont colinéaires soit :
 $-ba' - a(-b') = 0$ soit encore : $ab' - a'b = 0$.

Exemple :

Les droites d'équations $3x - y + 5 = 0$ et $-6x + 2y + 7 = 0$ sont parallèles.
En effet, $3 \times 2 - (-1) \times (-6) = 0$.

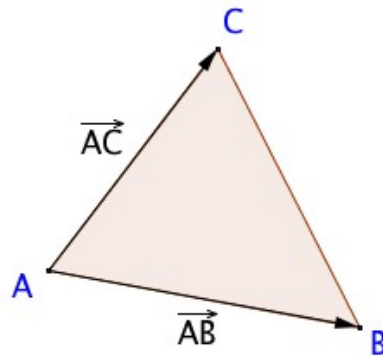
III. Décomposition d'un vecteur

Définition :

On appelle base du plan tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Exemples :

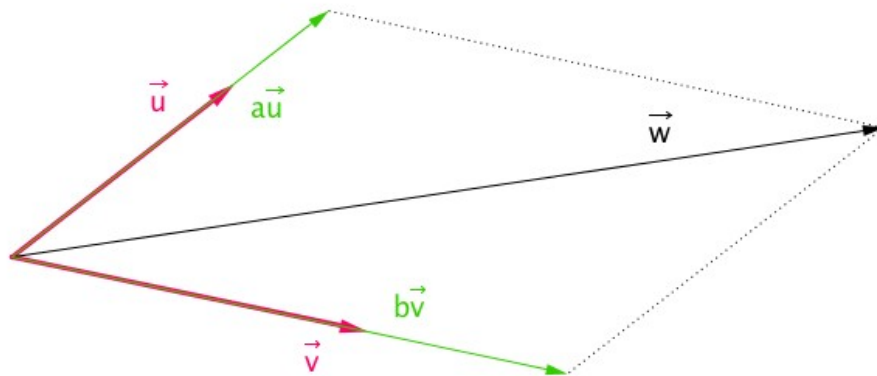
- Lorsqu'on considère un repère $(O; i; j)$ du plan, le couple de vecteurs i et j , notée $(i; j)$, est une base du plan.
- Lorsqu'on considère un triangle non aplati ABC, le couple $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ par exemple est une base du plan.



Propriété :

Soit $(u; v)$ une base du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un unique couple de nombres réels $(a; b)$ tel que :
 $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.



- Admis -

Remarque :

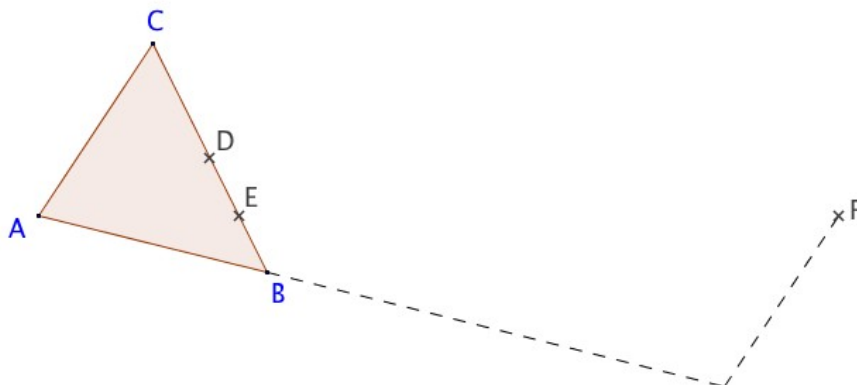
La décomposition $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ signifie que le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(a; b)$ dans la base $(u; v)$.

Méthode : Choisir une décomposition pertinente pour résoudre un problème

Soit un triangle ABC. D est le milieu de [BC] et E est le milieu de [BD].

Le point F est défini par : $\vec{AF} = 3\vec{AB} + \vec{AC}$.

Démontrer que les points A, E et F sont alignés.



Par définition, le vecteur $\vec{AF}$ est exprimé en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

On va exprimer également le vecteur $\vec{AE}$ dans la base $(\vec{AB} ; \vec{AC})$ et démontrer que les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ sont colinéaires.

D est le milieu de [BC] donc $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

E est le milieu de [BD] donc $\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$.

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= \frac{1}{2} \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} \\ &= \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}\end{aligned}$$

On a ainsi : $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$ et $\vec{AF} = 3\vec{AB} + \vec{AC}$

Donc : $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AF}$.

Les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ sont colinéaires et donc les points A, E et F sont alignés.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales