

Première – Chapitre 4

DÉRIVATION

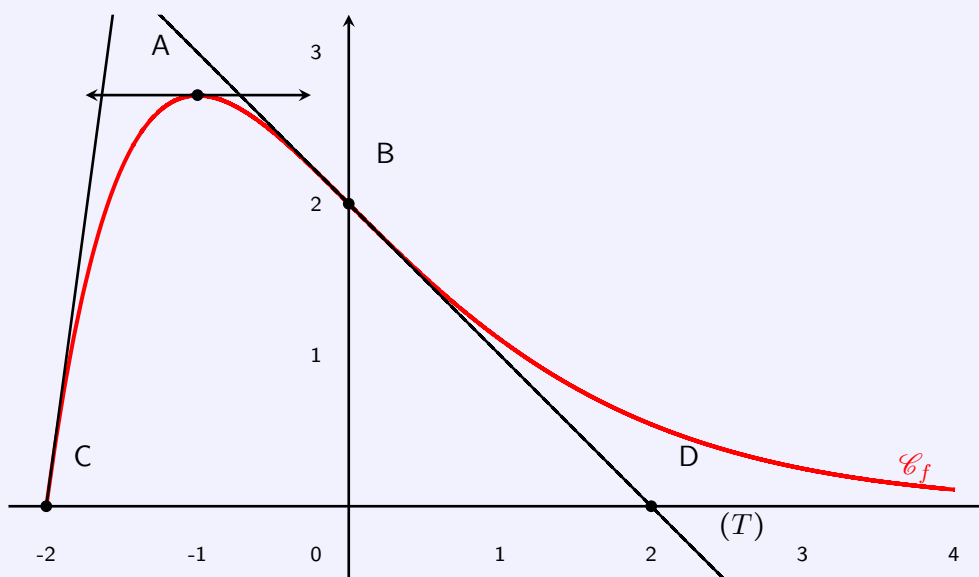


Table des matières

I	Nombre dérivé d'une fonction en un réel	3
1)	Taux de variation	3
2)	Interprétation graphique du taux de variation	3
3)	Nombre dérivé	3
4)	Interprétation graphique du nombre dérivé	4
II	Dérivées des fonctions usuelles	4
1)	Exemple	4
2)	Fonction dérivée	5
3)	Dérivée d'une fonction constante	5
4)	Dérivée d'une fonction affine	5
5)	Dérivée de la fonction carrée	6
6)	Dérivée de la fonction cube	6
7)	Dérivée de la fonction inverse	7
8)	Dérivées des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$	7
9)	Dérivée de la fonction racine carrée	8
10)	Dérivée de la fonction valeur absolue	9
11)	Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles	9
III	Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient	10
1)	Dérivée d'une somme	10
2)	Dérivée de ku	10
3)	Conséquences des dérivées d'une somme et de ku	11
a	Dérivée d'une différence	11
b	Dérivée d'une fonction polynôme	11

4)	Dérivée d'un produit	11
5)	Dérivée d'un quotient	12
a	Dérivée de l'inverse d'une fonction non nulle	12
b	Dérivée d'un quotient	13
c	Conséquence pour les fonctions rationnelles	13
6)	Dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$	14
7)	Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées	14
IV	Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée	15
1)	Du sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée	15
2)	Du signe de la dérivée d'une fonction à son sens de variation	15
V	Extremum d'une fonction	16
1)	Extremum local d'une fonction	16
2)	Extremum local et fonction dérivée	16

I Nombre dérivé d'une fonction en un réel

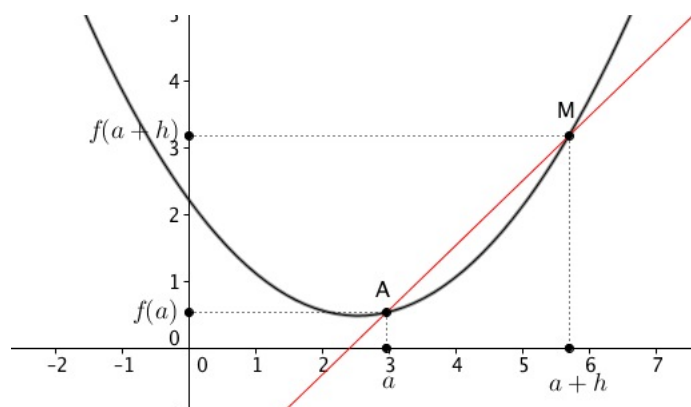
Dans cette partie, f désigne une fonction définie au moins sur un intervalle I , C_f désigne sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et a et b désignent deux réels appartenant à I avec $a \neq b$.

1) Taux de variation

DÉFINITION

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
En posant $b = a + h$, avec h un réel **non nul**, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2) Interprétation graphique du taux de variation



Notons A le point de coordonnées $(a; f(a))$ et M le point de coordonnées $(a+h; f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la sécante (AM) est égal à $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

On a ainsi la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est égal au coefficient directeur de la sécante (AM) .

3) Nombre dérivé

DÉFINITION

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro (mais toujours avec $h \neq 0$), les nombres $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre **réel** fixé noté l .
Alors on dit que la fonction f est **dérivable en a** et que l est le **nombre dérivé** de f en a .
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

REMARQUE

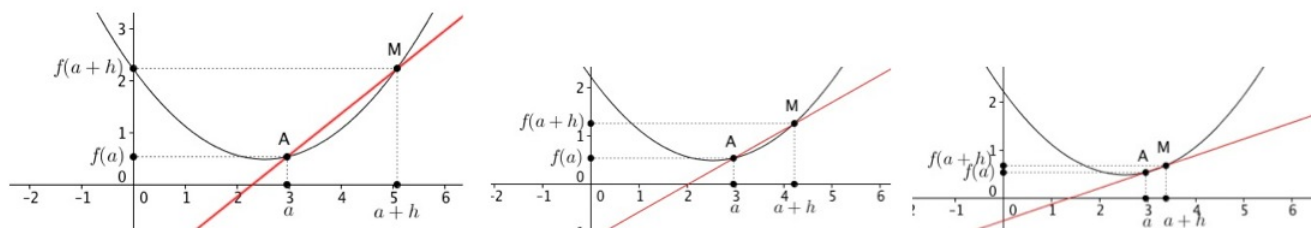
On peut alors noter $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

4) Interprétation graphique du nombre dérivé

On suppose ici que la fonction f est dérivable en un réel a de l'intervalle I .

DÉFINITION

La droite qui passe par le point $A(a; f(a))$ et dont le coefficient directeur est le réel $f'(a)$ est la **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .



REMARQUE

Autrement dit, quand il existe, $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

PROPRIÉTÉ

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

DÉMONSTRATION

Nommons T_a cette tangente. Par définition, $f'(a)$ est le coefficient directeur de T_a , donc il existe un réel b tel que l'équation de T_a soit $y = f'(a)x + b$.

Or $A(a; f(a)) \in T_a$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a , c'est-à-dire $y_A = f'(a)x_A + b$, d'où $f(a) = f'(a) \times a + b$, donc $b = f(a) - af'(a)$.

L'équation de T_a est donc : $T_a : y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$, soit $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

II Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

1. Démontrer que f est dérivable en 2 et justifier que $f'(2) = 12$.
2. Démontrer que f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ et justifier que $f'(x) = 6x$.

Faire alors le lien avec la notion de fonction dérivée et la dérivabilité **sur** un intervalle.

2) Fonction dérivée

DÉFINITION

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle I .

La fonction f est dite **dérivable sur** I si et seulement si pour tout réel $a \in I$, f est dérivable en a .

La fonction définie sur I qui, à tout réel x de I , associe le nombre dérivé de f en x est appelée la **fonction dérivée** de f . Cette fonction est notée f' .

EXEMPLE

démontrer que la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $2x \in \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x .

Or ceci est vrai pour tout réel x , donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel x , $f'(x) = 2x$.

3) Dérivée d'une fonction constante

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0.$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $0 \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x .

Or ceci est vrai pour tout réel x , donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x , $f'(x) = 0$.

4) Dérivée d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax + b$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et a non nul.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x + h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $a \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x .

Or ceci est vrai pour tout réel x , donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x , $f'(x) = a$.

5) Dérivée de la fonction carrée

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

DÉMONSTRATION

faite dans le II 1.

6) Dérivée de la fonction cube

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

Pré-requis utile pour la démonstration :

Pour tous réels a et b , on a :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En effet :

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

DÉMONSTRATION

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x + h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $3x^2 \in \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x . Or ceci est vrai pour tout réel x , donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$.

7) Dérivée de la fonction inverse

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Alors f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

REMARQUE

Par définition, une fonction est dérivable **sur un intervalle** uniquement. C'est pour cela qu'on évite de dire que la fonction inverse est « dérivable sur $\mathbb{R}^*$ » car $\mathbb{R}^*$ est une réunion d'intervalles et non un intervalle ($\mathbb{R}^* =] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$).

DÉMONSTRATION

Soit $x \in]0 ; +\infty[$. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h > 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{x - x - h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $-\frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc f est dérivable en x .

Or ceci est vrai pour tout réel $x > 0$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On démontre de même que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

On a alors, pour tout réel x non nul, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

8) Dérivées des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$

PROPRIÉTÉ

admise

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$.

REMARQUE

Cette propriété reste vraie si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (c'est-à-dire si n est un entier strictement négatif) en restreignant l'ensemble de définition de f à $\mathbb{R}^*$. f est alors dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

EXEMPLES

- Si $n = 2$, alors $f(x) = x^2$.

f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$.
(On retrouve le résultat vu pour la fonction carrée).

- Si $n = 3$, alors $f(x) = x^3$.

f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.
(On retrouve le résultat vu pour la fonction cube).

- Si $n = -1$, alors $f(x) = x^{-1} \left(= \frac{1}{x} \right)$. f est donc définie et dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} \left(= -\frac{1}{x^2} \right)$.

(On retrouve le résultat vu pour la fonction inverse).

EXERCICE

Démontrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Donc d'après la propriété précédente, f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

9) Dérivée de la fonction racine carrée

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction racine carrée définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Alors f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

DÉMONSTRATION

• **Montrons que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$:**

Soit x un réel de $]0 ; +\infty[$.

Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel $x+h \in]0 ; +\infty[$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$ car $x \in]0 ; +\infty[$.

Donc f est dérivable en x .

Or ceci est vrai pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On a alors, pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• **Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :**

Calculons pour cela le taux de variations de f entre 0 et $0+h$ avec $h \neq 0$ tel que $0+h \in [0 ; +\infty[$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 et le quotient $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ tend vers un quotient dont le dénominateur serait nul, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Or f est dérivable en 0 si et seulement si $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ tend vers un nombre réel.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

REMARQUES

• En fait, quand h tend vers 0, $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ tend vers l'inverse d'un nombre aussi proche de 0 que l'on veut (tout en restant positif), donc il tend vers $+\infty$. Or $+\infty \notin \mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{R} =] -\infty ; +\infty[$, intervalle **ouvert** !) donc f n'est pas dérivable en 0.

• $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et la formule vue pour x^n s'applique pour $n = \frac{1}{2}$.

10) Dérivée de la fonction valeur absolue

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction **valeur absolue** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Alors la fonction f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

En particulier, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

DÉMONSTRATION

- Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :

Posons, pour tout réel h non nul, $t(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$. On a alors $t(h) = \frac{|0+h|}{h} = \frac{|h|}{h}$.

Si $h > 0$, $t(h) = \frac{h}{h} = 1$ mais si $h < 0$, $t(h) = \frac{-h}{h} = -1$.

Ainsi, selon si h est positif ou négatif, le taux de variations de f en 0 tend vers deux réels différents, ce qui est contraire à la définition de la dérivabilité en un réel. Donc f n'est pas dérivable en 0.

- Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = |x| = x$.

Or la fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est $x \mapsto 1$.

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$.

- Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

Pour tout réel $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$.

Or la fonction $x \mapsto -x$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est $x \mapsto -1$.

Donc f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.

11) Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$	Conditions
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a, b réels
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	
$ x $	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	

EXERCICE

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et l'expression de la dérivée :

$$f : x \mapsto 2x + 3$$

$$g : x \mapsto x^4$$

$$h : x \mapsto 4 - 5x$$

$$k : x \mapsto 17$$

$$\ell : x \mapsto \frac{1}{x^5}$$

III Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient**1) Dérivée d'une somme****PROPRIÉTÉ**

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I .
Alors la fonction $u + v$ est définie et dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I .

Calculons le taux de variations de la fonction $u + v$ entre x et $x + h$, avec $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$:

$$\frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} = \frac{u(x + h) + v(x + h) - u(x) - v(x)}{h}.$$

$$\frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \frac{v(x + h) - v(x)}{h}.$$

Or u est dérivable sur I , donc en x , donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x + h) - u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

De même, v est dérivable sur I , donc en x , donc quand h tend vers 0, $\frac{v(x + h) - v(x)}{h}$ tend vers $v'(x) \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h}$ tend vers $u'(x) + v'(x) \in \mathbb{R}$.

Donc $u + v$ est dérivable en x . Or ceci est vrai pour tout réel x de I , donc $u + v$ est dérivable sur I et, $(u + v)' = u' + v'$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 + 5x$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Dérivée de ku **PROPRIÉTÉ**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un réel.

Alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I .

Calculons le taux de variations de la fonction ku entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\frac{(ku)(x+h) - (ku)(x)}{h} = \frac{ku(x+h) - ku(x)}{h} = \frac{k(u(x+h) - u(x))}{h} = k \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Or u est dérivable sur I , donc en x , donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{(ku)(x+h) - (ku)(x)}{h}$ tend vers $k \times u'(x) \in \mathbb{R}$.

Donc ku est dérivable en x . Or ceci est vrai pour tout réel x de I , donc ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 3x^5$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

3) Conséquences des dérivées d'une somme et de ku

a Dérivée d'une différence

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I .

Alors la fonction $u - v$ est définie et dérivable sur I et $(u - v)' = u' - v'$.

DÉMONSTRATION

$u - v = u + (-v)$ donc à l'aide de la dérivée de kv avec $k = -1$ et de la dérivée d'une somme, le résultat est immédiat.

b Dérivée d'une fonction polynôme

PROPRIÉTÉ

admise

Toute fonction polynôme est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 5x^3 - 4x^2 + 5x - 178$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4) Dérivée d'un produit

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I .

Alors la fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I .

Calculons le taux de variations de la fonction uv entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} u(x).$$

Or u est dérivable sur I , donc en x , donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

De même, v est dérivable sur I , donc en x , donc quand h tend vers 0, $\frac{v(x+h) - v(x)}{h}$ tend vers $v'(x) \in \mathbb{R}$.

Enfin, on admet que si h tend vers 0, alors $v(x+h)$ tend vers $v(x)$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h}$ tend vers $u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \in \mathbb{R}$.

Donc uv est dérivable en x . Or ceci est vrai pour tout réel x de I , donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

EXERCICE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Montrer que la fonction u^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(u^2)' = 2u'u$.

5) Dérivée d'un quotient

a Dérivée de l'inverse d'une fonction non nulle

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout réel x de I , $u(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I .

Calculons le taux de variations de la fonction $\frac{1}{u}$ entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h} = \frac{\frac{u(x)}{u(x)u(x+h)} - \frac{u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h} = \frac{u(x) - u(x+h)}{hu(x)u(x+h)} = -\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x)u(x+h)}.$$

Or u est dérivable sur I , donc en x , donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

On admet de plus que si h tend vers 0, alors $u(x+h)$ tend vers $u(x)$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h}$ tend vers $-u'(x) \times \frac{1}{u(x) \times u(x)} = \frac{-u'(x)}{u(x)^2} \in \mathbb{R}$.

Donc $\frac{1}{u}$ est dérivable en x . Or ceci est vrai pour tout réel x de I , donc $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b Dérivée d'un quotient

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et telles que pour tout réel x de I , $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

DÉMONSTRATION

$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ est dérivable sur I (via la propriété de la dérivée du produit) et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{x-1}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et calculer sa dérivée.

c Conséquence pour les fonctions rationnelles

PROPRIÉTÉ

admise

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

6) Dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J , $ax + b$ appartient à I .

Alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout réel x de J , $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de J . Calculons le taux de variations de f entre x et $x + h$, avec $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in J$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{g(a(x+h) + b) - g(ax + b)}{h} = \frac{g(ax + ah + b) - g(ax + b)}{h} \\ &= \frac{a [g((ax + b) + ah) - g(ax + b)]}{ah}. \end{aligned}$$

En posant $H = ah$ et $X = ax + b$, ce taux de variations s'écrit alors $a \times \frac{g(X + H) - g(X)}{H}$.

Or quand h tend vers 0, ah tend aussi vers 0, donc H tend également vers 0.

Or d'après l'énoncé, $x \in J$, donc $X \in I$ et la fonction g est dérivable sur I . Ainsi, quand H tend vers 0, le taux de variations de g entre X et $X + H$ tend vers $g'(X)$.

Ainsi, quand H tend vers 0, $a \times \frac{g(X + H) - g(X)}{H}$ tend vers $a \times g'(X)$, réel fixe.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $a \times g'(ax + b)$, réel fixe.

Donc f est bien dérivable en $x \in J$.

Or ceci est vrai pour tout réel x de J , donc f est bien dérivable sur J et pour tout réel $x \in J$, $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x + 5)^3$.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7) Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

f	f'	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	k réel
$u - v$	$u' - v'$	
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
$g(ax + b)$	$a \times g'(ax + b)$	$a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

IV Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée

1) Du sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- (1) Si f est croissante (ou strictement croissante) sur I , alors $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- (2) Si f est décroissante (ou strictement décroissante) sur I , alors $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- (3) Si f est constante sur I , alors $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I et h un réel non nul tel que $x + h \in I$.

- (1) f est croissante sur I , donc :

- si $h > 0$, alors $x + h > x$ et $f(x + h) \geq f(x)$, c'est-à-dire $f(x + h) - f(x) \geq 0$;

- si $h < 0$, alors $x + h < x$ et $f(x + h) \leq f(x)$, c'est-à-dire $f(x + h) - f(x) \leq 0$.

Dans les deux cas, $f(x + h) - f(x)$ et h sont de même signe, donc $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$.

Or f est dérivable en x , donc $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ tend vers le nombre réel $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.

Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ prend des valeurs positives. On admet alors que la limite de ce taux de variations, quand h tend vers 0, est aussi positive, c'est-à-dire $f'(x) \geq 0$.

- (2) On démontre cette fois, puisque f est décroissante sur I , que $f(x + h) - f(x)$ et h sont de signes contraires, donc $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0$.

On admet alors que la limite de ce taux de variations, quand h tend vers 0, est aussi négative, c'est-à-dire que $f'(x) \leq 0$.

- (3) f est constante sur I , donc $f(x + h) = f(x)$ et ainsi $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0$, donc $f'(x) = 0$.

2) Du signe de la dérivée d'une fonction à son sens de variation

PROPRIÉTÉ

admise

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Si f' est positive (≥ 0) et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est strictement croissante sur I .

Si f' est négative (≤ 0) et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est strictement décroissante sur I .

Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .

REMARQUE

Cette propriété est l'une des plus utilisées en analyse ! En effet, elle permet de déterminer les variations de nombreuses fonctions.

EXEMPLES

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.
Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - Déterminer le sens de variations de g sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
- Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 1}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition de h .
 - Déterminer le sens de variations de h sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

V Extremum d'une fonction

1) Extremum local d'une fonction

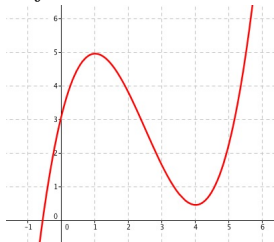
DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I .

- Dire que $f(x_0)$ est un **maximum local** (resp. minimum local) de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout réel x de J , $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- Dire que $f(x_0)$ est un **extremum local** de f signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local de f .

EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur $[-1; 6]$. Sa courbe représentative est tracée ci-dessous :



- $f(1) = 5$ est un maximum local de f . En effet, pour tout $x \in]0; 2[$, $f(x) \leq 5$.
- $f(4) = 0,5$ est minimum local de f . En effet, pour tout $x \in]3; 5[$, $f(x) \geq 0,5$.

REMARQUE

Attention au vocabulaire ! Dans l'exemple précédent, on dit que f admet un maximum local **en 1** et que ce maximum **est égal à 5**.

2) Extremum local et fonction dérivée

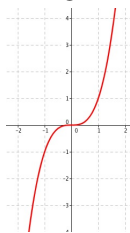
PROPRIÉTÉ

admise

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I . Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.

REMARQUES

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).
- ATTENTION ! La réciproque de cette propriété est fausse :



Exemple : soit la fonction f cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$:
 $f'(0) = 0$ mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f .

Il manque en effet une condition... :

PROPRIÉTÉ

admise

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I . Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .