

LES APPLICATIONS

Classe : 11^{ème} Sciences

Durée : 12 H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Applications

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenu

Séquence 1 : Définitions d'une application et d'une fonction :...	2
1.1. Définition d'une fonction :.....	2
1.2. Ensemble de définition d'une fonction	2
1.3. Définition d'une application	3
Séquences 2 : Applications particulières	4
2.1. Application injective :.....	4
2.2. Application surjective :	5
2.3. Application bijective :.....	6
Séquence 3: Application réciproque d'une bijection.....	8
3.1. Définition :.....	9
3.2. Représentation graphique de deux bijections réciproques : .	9
Séquence 4 : Composition des fonctions.....	10
4.1. Définition:.....	10
4.2. Propriétés :	11
Séquence 5 : Image directe - Image réciproque par une application :.....	11
5.1. Image directe	11
5.2. Image réciproque	11

2. Soit $h : x \mapsto f(x) = x + 3x + 4$. Trouve les images réciproques par h de :	12
$A =]2; 2[$; $B =]-\infty; -6[$	12
Séquence 6 : Coïncidence et restriction	12
6.1. Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble	12
6.2. Restriction et prolongement d'une application	12

Déroulement des activités

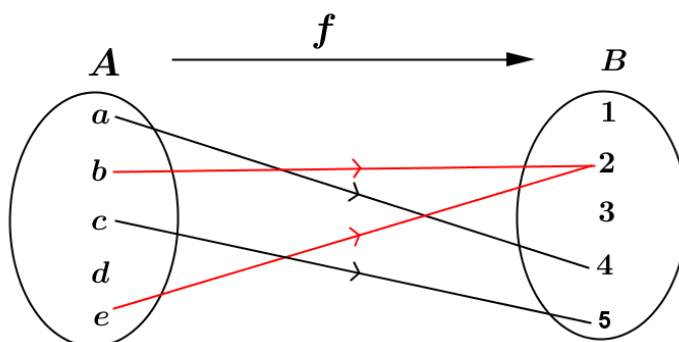
Séquence 1 : Définitions d'une application et d'une fonction :

1.1. Définition d'une fonction :

Soient A et B deux ensembles non vides.

Une relation de A vers B est une fonction de A vers B , si chaque élément de l'ensemble de départ A possède au **plus une (o ou une)** image dans l'ensemble d'arrivée B .

Diagramme sagittal :



A = ensemble de départ ou source, B = ensemble d'arrivée ou but

Notation :

$f: A \rightarrow B$ " f envoie A dans B "

$a \mapsto 4$ " a a pour image 4 "

$f: x \mapsto y$ Signifie que « x a pour image y » ou « x est l'antécédent de y » avec x et y des nombres réels.

On écrit : $f(a) = 4$; $f(x) = y$.

N.B : Si A et B sont des sous ensemble de $\mathbb{R}$ alors on parle de fonction numérique d'une variable réel.

1.2. Ensemble de définition d'une fonction

Soient A et B deux ensembles non vides. On appelle ensemble de définition d'une fonction de A vers B , l'ensemble des éléments de A ayant une image dans B par la fonction. Si f est la fonction on note D_f .

Exemple : dans le diagramme sagittal : $D_f = A \setminus \{d\} = \{a; b; c; e\}$

1.2.1. Fonction polynôme :

☞ L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de A vers B est : $D_f = A$

☞ L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

1.2.2. Fonctions rationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère la fonction rationnelle f de A vers B définie par : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in A, v(x) \neq 0\}$.

- Si l'équation $v(x) = 0$ admet des solutions $x_1, x_2, \dots$, alors $D_f = A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$.
- Si l'équation $v(x) = 0$ n'admet pas de solution, alors $D_f = A$.

1.2.3. Fonctions irrationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions irrationnelles f et g de A vers B définies par :

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}.$$

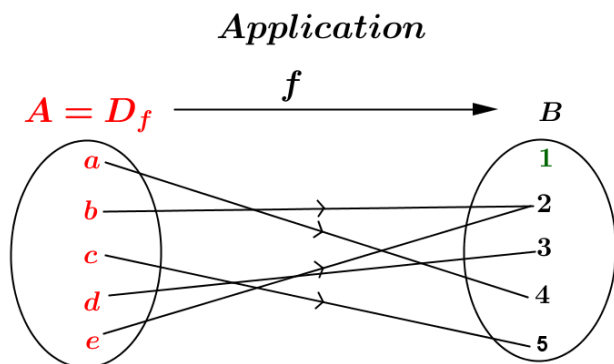
L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in A; v(x) \geq 0\}$.

L'ensemble de définition de g est : $D_g = \{x/x \in A; \frac{u(x)}{v(x)} \geq 0 \text{ et } v(x) \neq 0\}$.

1.3. Définition d'une application

Soient A et B deux ensembles non vides. Une application de A dans B est une relation de A vers B qui à chaque élément de l'ensemble de départ A associe un seul élément de l'ensemble d'arrivée B .

Exemple de représentation sagittale :



Remarque :

- ☞ Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.
- ☞ Une fonction est une application si et seulement si son ensemble de définition est égal à son ensemble de départ.

Évaluation : Détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis déduis en celles qui sont une application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 3$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 3$$

$$h: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2-x}{3x+6}$$

$$i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2-x}{3x+6}$$

$$j: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x-2}$$

Séquences 2 : Applications particulières

2.1. Application injective :

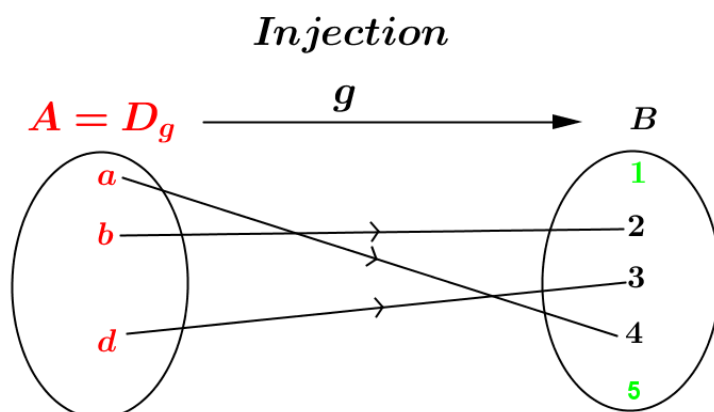
- Définition : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application g de A dans B est une application injective (ou injection), si tout élément de B possède au plus 1 (0 ou 1) antécédent dans A par g .

- Formulation :

$$(g: A \rightarrow B \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Exemples de fonctions injectives :

- a) Le diagramme sagittal :



- b) La fonction :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ est une injection sur $\mathbb{R}$.
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^a$ (a impair) est injective sur $\mathbb{R}$.
- $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$ est une injection sur $\mathbb{R}_+$.

Savoir faire :

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et
 $x \mapsto 3x - 5$

$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x^2 + 3$

f et g sont-elles injectives ?

Solution :

- $f(x) = 3x - 5$; $D_f = \mathbb{R}$.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Donc f est une injection.

- $g(x) = 2x^2 + 3$; $D_g = \mathbb{R}_+$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$.

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 2x_1^2 + 3 = 2x_2^2 + 3 \Leftrightarrow x_1^2 + 3 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2.$$

Mais $-x_2 \notin \mathbb{R}_+$; alors $x_1 = x_2$. Donc g est une injection.

2.2. Application surjective :

- Définition : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application h de A dans B est une application surjective (ou surjection), si tout élément de B possède **au moins 1 (1 ou plusieurs)** antécédent dans A par h .

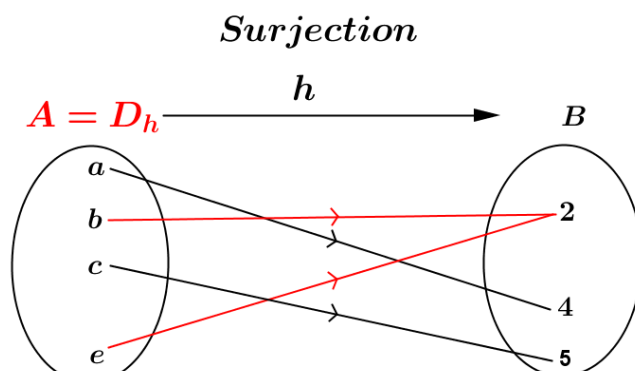
- **Formulation :**

$$(h: A \rightarrow B \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x))$$

Le symbole $\exists$ signifie : « il existe au moins »

Exemples de fonctions surjectives :

- a) Le diagramme sagittal :



- b) La fonction :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ est une surjection sur $\mathbb{R}$.
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^a$ ($a \in \mathbb{N}$) est surjective sur $\mathbb{R}$.
- $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$ est une injection sur $\mathbb{R}_+$.
- $p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt[a]{x}$ est une injection sur $\mathbb{R}_+$.

Savoir faire :

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - 3$$

et

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

$$x \mapsto x^2 + 3x + 2$$

f et g sont-elles surjectives ?

Solution :

- $f(x) = 2x - 3$; $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = b$.

$$f(x) = b \Leftrightarrow 2x - 3 = b \Leftrightarrow x = \frac{b + 3}{2}$$

x existe ; donc f est une surjection.

- $g(x) = x^2 + 3x + 2$; $D_g = \mathbb{R}$

Soit $b \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ tel que $g(x) = b$.

$$g(x) = b \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = b \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - b = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + 4b \quad \text{et} \quad b \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4b}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$$

x existe ; donc g est une surjection.

2.3. Application bijective :

- Définition : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application f de A dans B est une application bijective (ou bijection), si tout élément de B possède un unique antécédent dans A par f .

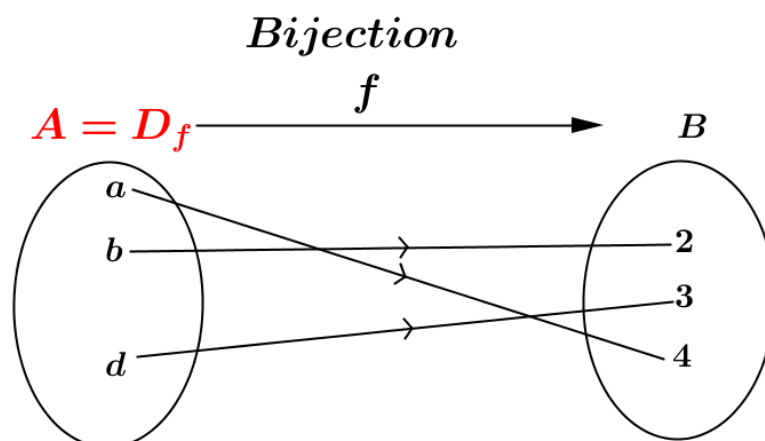
➤ **Formulation :**

$$(f: A \rightarrow B \text{ est bijective}) \Leftrightarrow (\forall y \in B \exists! x \in A / y = f(x))$$

Le symbole $\exists!$ signifie : « il existe un unique »

Exemples :

a) Le diagramme sagittal :



b) La fonction :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ est une bijection sur $\mathbb{R}$.
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^a$ (**a impair**) est bijective sur $\mathbb{R}$.
- $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection sur $\mathbb{R}_+$.

Savoir faire :

Soient $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$$x \mapsto \frac{3x-5}{2x+7}$$

et $g:]0; 2] \rightarrow]1; 5]$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

f et g sont-elles bijectives ?

Solution :

➤ $f(x) = \frac{3x-5}{2x+7}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

Soit $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ tel que $f(x) = b$.

$$\begin{aligned} f(x) = b &\Leftrightarrow \frac{3x-5}{2x+7} = b \Leftrightarrow 3x-5 = b(2x+7) \Leftrightarrow x(3-2b) = 7b+5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7b+5}{3-2b} \quad (\text{avec } b \neq \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

x existe et est unique ; donc f est une bijection.

➤ $g(x) = x^2 + 1$; $D_g =]0; 2]$

Soit $b \in]1; 5]$ tel que $g(x) = b$.

$$\begin{aligned} g(x) = b &\Leftrightarrow x^2 + 1 = b \Leftrightarrow x^2 = b - 1 \\ \Rightarrow x &= \sqrt{b-1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{b-1} \quad \text{et} \quad x \in]0; 2] \end{aligned}$$

Vérification :

- pour $x = \sqrt{b-1}$

$$\begin{aligned} 1 &< b \leq 5 \\ \Rightarrow 0 &< b-1 \leq 4 \\ \Rightarrow 0 &< x \leq 2 \\ \text{Soit } x &\in]0; 2] \quad \text{vrai} \end{aligned}$$

- pour $x = -\sqrt{b-1}$

$$\begin{aligned} 1 &< b \leq 5 \\ \Rightarrow 0 &< b-1 \leq 4 \\ \Rightarrow 0 &< \sqrt{b-1} \leq 2 \\ \Rightarrow -2 &\leq -\sqrt{b-1} < 0 \\ \Rightarrow -2 &\leq x < 0 \\ \text{Soit } x &\in [-2; 0[\quad \text{faux} \end{aligned}$$

Finalement $x = \sqrt{b-1}$ d'où g est bijective.

Théorème :

Une application f de A dans B est **bijective** si elle est **à la fois injective** et **surjective**.

Retenons : soit $f: A \rightarrow B$ une application.

Dans la pratique pour montrer qu'une application est soit bijective, soit injective, soit surjective, on résout : $\forall y \in B$ l'équation $f(x) = y$.

- Si $f(x) = y$ admet 1 solution unique x , alors f est bijective.
- Si $f(x) = y$ admet 0 ou 1 solution x , alors f est injective.
- Si $f(x) = y$ admet 1 ou plusieurs solution(s) x , alors f est surjective.

Evaluation : Dans les cas suivants dit si f est injective, surjective ou bijective.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 3x$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto (x - y, 3 + y)$$

i: $]0; \pi] \rightarrow [0; 1]$
 $x \mapsto \sin x$

k: $[-1; 2] \rightarrow [0; 4]$
 $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$

j: $[-2; 2] \rightarrow [1; 5]$
 $x \mapsto x^2 + 1$

l: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $(x, y) \mapsto (x - y, 3 + y)$

j: $[0; 2] \rightarrow [0; 4]$
 $x \mapsto x^2$

m: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto 2x + 3y$

Séquence 3: Application réciproque d'une bijection

Activité :

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

et

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x - 3$

$x \mapsto \frac{x+3}{2}$

a) Vérifie que f et g sont bijectives.

b) Complète les tableaux suivants :

x								
$f(x)$								

x								
$g(x)$								

Que constates-tu ?

Synthèse partielle :

a) $f(x) = 2x - 3$; $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = b$.

$$f(x) = b \Leftrightarrow 2x - 3 = b \Leftrightarrow x = \frac{b+3}{2}$$

x existe et est unique ; donc f est une bijection.

$g(x) = \frac{x+3}{2}$; $D_g = \mathbb{R}$

Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = b$.

$$g(x) = b \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = b \Leftrightarrow x = 2b - 3$$

x existe et est unique ; donc g est une bijection.

b)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	-7	-5	-4	-3	-2	-1	1	3

x	-7	-5	-4	-3	-2	-1	1	3
$g(x)$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

On remarque que les images par f sont que les antécédents par g et vis versa.

3.1. Définition :

Soient A et B deux ensembles non vides.

On appelle application réciproque d'une bijection f de A sur B , la bijection notée : f^{-1} de B sur A .

$$f : A \rightarrow B ; \quad f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$\forall y \in B, \forall x \in A, y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Savoir faire :

Soient $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

$$x \mapsto \frac{x-5}{3x+6}$$

Montre que f est bijective, puis déterminer f^{-1} .

Solution :

$$\triangleright f(x) = \frac{x-5}{3x+6} ; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Soit $b \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ tel que $f(x) = b$.

$$f(x) = b \Leftrightarrow \frac{x-5}{3x+6} = b \Leftrightarrow x-5 = b(3x+6) \Leftrightarrow x(1-3b) = 6b+5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6b+5}{1-3b} \quad (\text{avec } b \neq \frac{1}{3})$$

x existe et est unique ; donc f est une bijection.

$$\triangleright f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

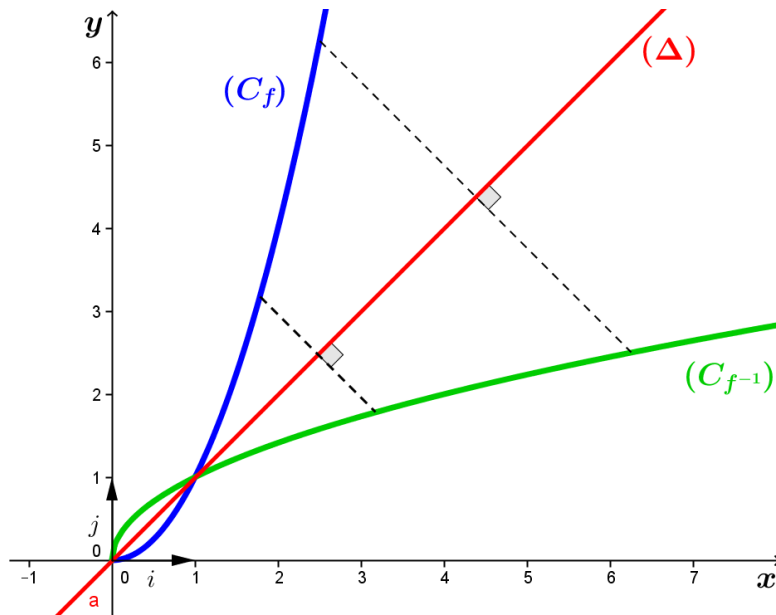
$$x \mapsto \frac{6x+5}{1-x}$$

Remarque :

- Si f^{-1} est la bijection réciproque de f , alors f est la bijection réciproque de f^{-1} .

3.2. Représentation graphique de deux bijections réciproques :

Soient $(C_{f^{-1}})$ la courbe de la bijection réciproque de la fonction bijective f de courbe (C_f) . Pour tracer $(C_{f^{-1}})$; on trace le symétrique orthogonal de la courbe (C_f) par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$. Cette symétrique est la courbe $(C_{f^{-1}})$.



A vous de jouer :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$ une fonction numérique.

- Montre que f est bijective puis explicite sa réciproque f^{-1} .
- Représente dans un repère orthonormé les courbes de f et f^{-1} .

Séquence 4 : Composition des fonctions

4.1. Définition :

Soient A , B et C trois ensembles non vides, f une fonction de A vers B , g une fonction de B vers C . on appelle composée de f par g la fonction A vers C ; notée **gof** et définie, pour tout élément a de A tel que $a \in D_f$ et $g(a) \in D_g$, par :

$$(gof)(a) = g[f(a)]$$

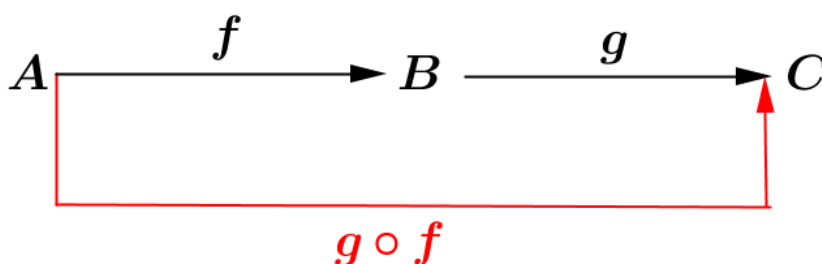
$$f : A \rightarrow B$$

et

$$g : B \rightarrow C,$$

$$gof : A \rightarrow C$$

$$x \mapsto (gof)(x) = g[f(x)]$$



Savoir faire :

Soient $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x - 1;$ $x \mapsto \frac{2}{x};$ $x \mapsto x^2$

- Trouve les ensembles de définition de chacune des fonctions f ; g et h puis de gof ; hof , goh , foh ; fog .
- Explicite les fonctions : gof ; hof , goh , foh ; fog .

Activité : on donne $f(x) = \sin x$; $g(x) = x^2 + 2$; $h(x) = -3x + 1$.

Compare $\text{ho}(\text{gof})$ et $(\text{hog})\text{of}$.

4.2. Propriétés :

Soient A, B, C, D des ensembles non vides ; f une fonction de A vers B , g de B vers C et h de C vers D .

- La composition des fonctions est associative : $\text{ho}(\text{gof}) = (\text{hog})\text{of} = \text{hogof}$

Séquence 5 : Image directe - Image réciproque par une application :

5.1. Image directe

Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f , et A une partie de E . On appelle image directe (ou image) de A par f notée $f(A)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de $A \cap D_f$.

Exemple : $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{2}{x-1}$

Trouver les images par f de chacun des intervalles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = [2; 7]; B =]1; 3]; C = [-3; 4]; \text{ et } D = [-5; 6]$$

5.2. Image réciproque

Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f , et B une partie de F . On appelle image réciproque de B par f , la partie de D_f , notée : $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f de tous les éléments de B .

Retenons : Comment chercher l'image réciproque ?

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle B de $\mathbb{R}$ par une fonction f d'ensemble de définition D_f on résout l'un des systèmes d'inconnue x suivants :

- Si $B = [a, b]$ on résout $x \in D_f; a \leq f(x) \leq b$.
- Si $B =]a, b[$ on résout $x \in D_f; a < f(x) < b$.
- Si $B = [a, b[$ on résout $x \in D_f; a \leq f(x) < b$.
- Si $B = \{b\}$ on résout $x \in D_f; f(x) = b$
- Si $B =]-\infty, a]$ on résout $x \in D_f; f(x) \leq a$.

- Si $B =]a, +\infty[$ on résout $x \in Df$; $a < f(x)$.

Exemple :

1. $f: x \mapsto f(x) = 2x - 1$; $g: x \mapsto g(x) = x^2 - x - 2$

Trouver l'image réciproque par f et par g de $A = \{0\}$; $B = [1; 3]$; $C = [-2; +\infty[$

2. Soit $h: x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{x+4}$. Trouve les images réciproques par h de :

$$A = \left[\frac{3}{2}; 2\right]; B =]-\infty; -6[$$

Séquence 6 : Coïncidence et restriction

6.1. Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$ $x \mapsto g(x)$

Soit C un sous-ensemble de $D_f \cap D_g$. On dit que f et g coïncident sur C si et seulement si :

$$\forall x \in C; f(x) = g(x)$$

Exemple : Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |2x - 1| + |1 - x|$ $x \mapsto 3x - 2$

- Trouver la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

6.2. Restriction et prolongement d'une application

Soit f une application de A dans B , et E une partie de A . On appelle restriction de f à E l'application de E dans B notée : f/E définie par :

$$(\forall x \in E; (f/E)(x) = f(x)).$$

$g = f/E$ est dite restriction de f à E et f est dite prolongement de g dans A .

Exemple : Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |2x - 1| + |1 - x|$ $x \mapsto 3x - 2$

$g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la restriction de f à $[1; +\infty[$; et f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.

A vous de jouer :

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x} + 2$ $x \mapsto \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$