

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Classe : 11^{ème} Sciences

Durée : 20H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Fonctions numériques

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenus

Aucune entrée de table des matières n'a été trouvée.

Déroulement des activités

Chapitre : Etude locale d'une fonction numérique.

Séquence 1 : Limites –Continuités

I. Limites d'une fonction numérique :

1. Limite d'une fonction en un point :

Activité :

Soit p désignant un entier naturel :

Compléter le tableau suivant :

p	1	2	3	6	7	9	10	13	20
10^p									
10^{-p}									

Que constatez-vous ?

Synthèse :

Plus p est grand, plus 10^p est grand.

Plus p est grand, plus 10^{-p} est proche de 0.

a) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de centre x_0 , sauf peut être au point x_0 . On dit que la fonction f admet un réel l comme limite au point x_0 , si pour tout $x \in I$, $f(x)$ devient suffisamment voisin de l , lorsque x est de plus en plus proche de x_0 .

On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Exemple : $f : x \mapsto 2x^2 + x + 1$; $x_0 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

Théorème : La limite d'une fonction en un point si elle existe, est unique.

b) Opérations sur la limite en un point :

Théorèmes :

- Si f et g sont deux fonctions admettant chacune une limite en un point x_0 , alors les fonctions $f + g$, $f \times g$ et λf ou λ est un réel quelconque admettent une limite en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Si en plus $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ admettent une limite en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

- Si f est une fonction admettant le réel l comme limite en un point x_0 et g une fonction admettant une limite au point l , alors la fonction composée $g \circ f$ admet une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow l} g(x)$

Exemple :

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) ; x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Evaluation :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{19}} 4\sqrt{3} ; \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-7}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. Limite à droite, limite à gauche en un point :

Activité :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x-1)(x+3)}{|x+3|}$

- 1) Etudier le signe $x + 3$ et puis écrire $f(x)$ sans la valeur absolue ;
- 2) Etudier la limite de f avec la valeur absolue et puis sans la valeur absolue au point $x_0 = -3$.

Synthèse :

- Définition :
 - La $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 4$ est appelée la limite à gauche de f au point -3 ;
 - La $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -4$ est appelée la limite à droite de f au point -3 .
- Théorème :
Une fonction admet une limite en un point x_0 si et si seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 qui sont égales, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$.

Evaluation :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{|x|}; \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$$

3. Règles de calcul des limites:

Soit $a \in \mathbb{R}$:

- R₁) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;
- R₂) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$;
- R₃) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;

Démonstration :

x	0,01	0,001	0,0001	0	x	-0,01	-0,001	-0,0001	0
$\frac{1}{x}$					$\frac{1}{x}$				

- R₄) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$;

Démonstration :

x	10	100	1000	x	-10	-100	-1000
$\frac{1}{x}$				$\frac{1}{x}$			

- R₅) $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$;
- R₆) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$;

• $R_7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ;$

Remarque :

- la limite à l'infini d'une fonction polynôme est la limite à l'infini du monôme de plus haut degré.
- La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient du monôme de plus haut degré au numérateur par le monôme de plus haut degré au dénominateur.

Exemple :

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 \left(1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 = +\infty$

❖ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{7x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{7x^2\left(1-\frac{3}{7x}+\frac{2}{7x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{7x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{7x} = 0$

Evaluation :

4. Formes indéterminées :

Activité :

Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} ;$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} ;$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} + x) ;$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}\right).$

Synthèse :

Dans la recherche de la limite, si nous obtenons l'une des formes suivantes :

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \times \infty; (+\infty) + (-\infty)$, aucun théorème Mathématiques ne nous permet de conclure. On dit qu'on a une forme indéterminée.

Lorsqu'on a une forme indéterminée, on lève l'indétermination.

Par exemple dans b) on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} = \frac{\sqrt{3+1}-\sqrt{5-1}}{\sqrt{2+7}-\sqrt{10-1}} = \frac{2-2}{3-3} = \frac{0}{0}$ Forme Indéterminée.

Levons l'indétermination en utilisant les formules des produits remarquables :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x})}{(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x})(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{(3x-3)(\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x})}$$

En simplifiant le numérateur et dénominateur par $(x-1)$ on aura :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x})} = \frac{2(\sqrt{2+7} + \sqrt{10-1})}{3(\sqrt{3+1} + \sqrt{5-1})} = \frac{6}{6}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = 1$

II. Fonction continue :

1. Fonction continue en un point :

Synthèse :

Définitions :

- Soit f une fonction définie en un point x_0 :
On dit que f continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Soit $r \in \mathbb{R}, r > 0$:
 - Si f est définie sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0]$, on dit f est continue à gauche au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
 - Si f est définie sur l'intervalle $[x_0, x_0 + r[$, on dit f est continue à droite au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. Prolongement par continuité :

Activité :

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

- Trouver l'ensemble de définition de f .
- La fonction f admet-elle une limite au point $x_0 = 3$.

Synthèse :

- La fonction $g: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ qui coïncide avec la fonction f sur Df , admet une limite en $x_0 = 3$ et est continue en ce point.
On dit que la fonction g est la fonction prolongement par continuité de f au point $x_0 = 3$; et on a $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{4}$.
- Définition :
 $\cdot (f \text{ est prolongeable par continuité au point } x_0)$ si et seulement si $\begin{cases} x_0 \notin Df \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \end{cases}$

3. Fonctions continues sur un intervalle :

Activité :

- Définition :

Une fonction est continue sur intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Théorème :

- Une fonction polynôme en tout point de $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto |x|$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

b) Propriétés :

- ❖ Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $f + g$; $f \cdot g$ et λf où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont continues sur I .
Et si en plus g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I, g(x) \neq 0$) alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- ❖ Si f est fonction continue en un point x_0 et g une fonction continue au point $f(x_0)$ alors la composée $g \circ f$ est continue au point x_0 .

III. Dérivées :

1. Fonction dérivable en un point :

a) Définition :

Soit f une fonction définie en un point x_0 , on dit que f dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 .

Autre définition ; en posant $h = x - x_0$, $h \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x_0 + h$, f dérivable au point x_0 si et seulement si la limite : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$ existe.

Exemple : $f(x) = x^2 + x$; $x_0 = -1$

b) Nombre dérivé à gauche et à droite d'un point :

- Une fonction f est dérivable à gauche en un point x_0 si et seulement si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Cette limite si elle existe, est appelée nombre dérivé à gauche au point x_0 de la fonction, on la note $f'_g(x_0)$.

- Une fonction f est dérivable à droite en un point x_0 si et seulement si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

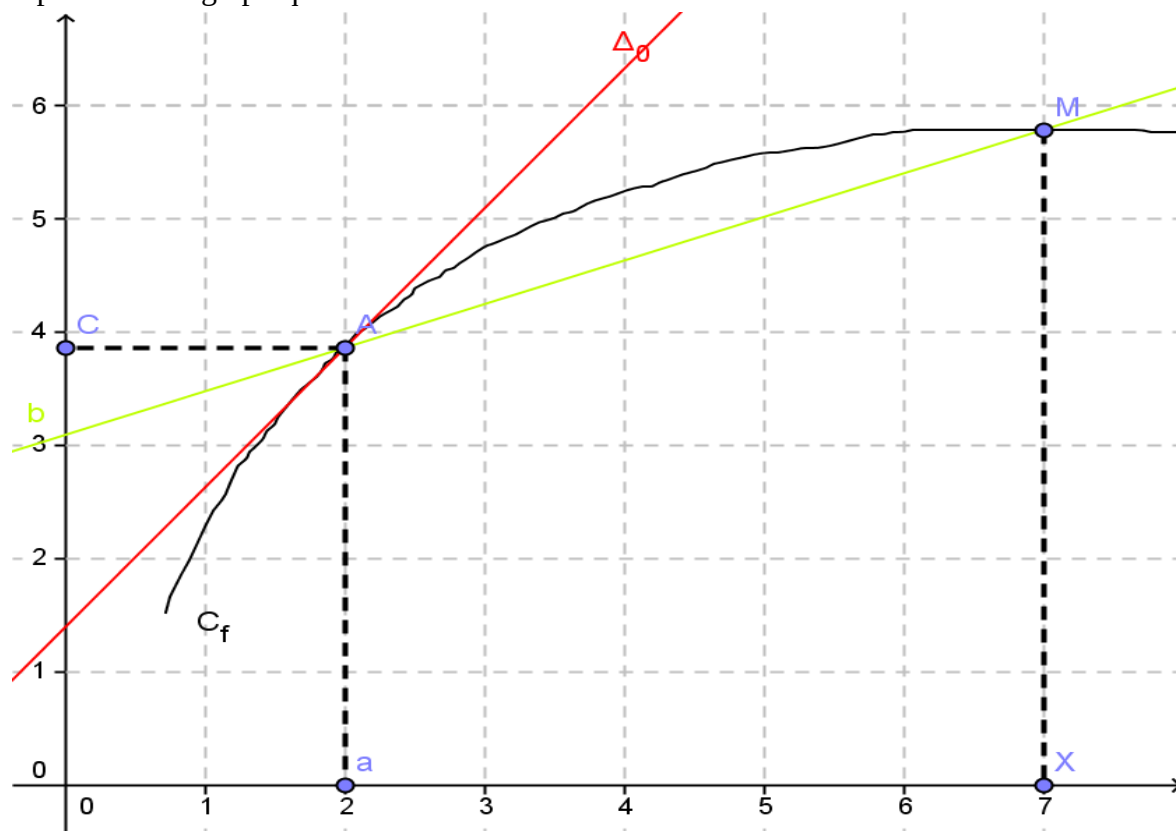
Cette limite si elle existe, est appelée nombre dérivé à droite au point x_0 de la fonction, on la note $f'_d(x_0)$.

Théorème :

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

2. Interprétation géométrique :

- a. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable au point A d'abscisse a de I , de représentation graphique ci-dessous :



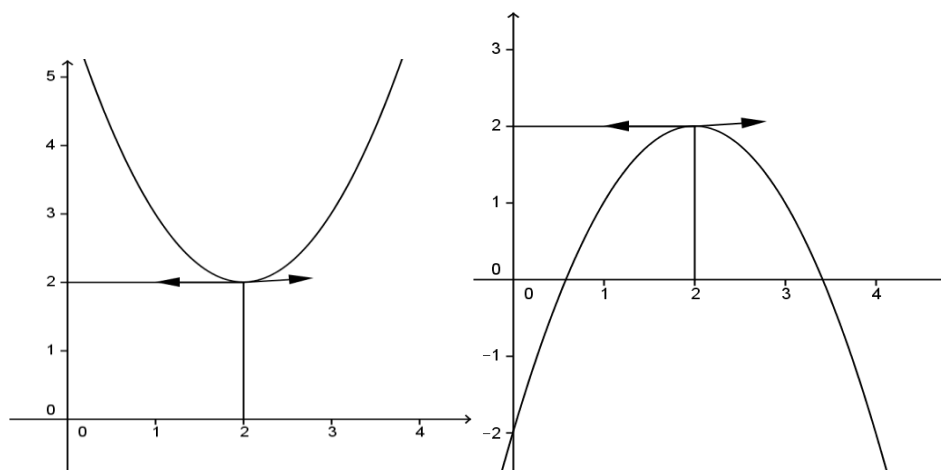
Soit $A(a ; f(a))$ un point fixe de C_f . Considérons le point $M(x ; f(x))$ mobile sur C_f . Le rapport $r = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) . Lorsque M tend vers $A(x \rightarrow a)$ la droite (AM) tourne autour du point A et tend vers une position limite qui est celle de la droite (Δ_0) . (Δ_0) est appelé la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a de coefficient directeur ou de pente $f'(a)$.

- b. Equation de la tangente à la courbe en un point a :

L'équation de la tangente (Δ_0) à la courbe C_f de f au point d'abscisse a est :

$$(\Delta_0) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque : si le coefficient directeur $f'(x_0)$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisse en x_0 .



3. Fonction dérivable sur un intervalle :

a) Définition :

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I .

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors l'application $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée (ou dérivée première) de f sur l'intervalle I .

Exemple : $f : x \mapsto x^2 + 3x + 2$

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 2 - x_0^2 - 3x_0 - 2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - x_0^2 - 3x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 3)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 3) = 2x_0 + 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0 + 3$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' est définie par $\forall x_0 \in \mathbb{R} f'(x) = 2x + 3$.

Remarque :

- Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle est dérivable en tout point de son domaine de définition.
- Les fonction $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivées successives :

- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors sa fonction dérivée sur I est notée f' qu'on appelle aussi dérivée premier de f sur I .
- Si f' est aussi dérivable I , alors sa fonction dérivée sur I est appelée dérivée second sur I que l'on note f'' .
- Si f'' est aussi dérivable I , alors sa fonction dérivée sur I est appelée dérivée troisième sur I que l'on note f''' . De proches en proche, si f est n fois dérivable sur I , alors sa dérivée $n^{\text{ième}}$ ou dérivée d'ordre n est notée $f^{(n)}$.

On note aussi $f' = \frac{df}{dx}$; $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$... ; $f^n = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple :

$$f : x \mapsto 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 8x + 1$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 8$$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$$f^4(x) = 72$$

$$f^5(x) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ n \geq 5 \ f^n(x) = 0$$

c) Sens de variation d'une fonction :

Activité :

Soit $f: x \mapsto x^2 - 4$

- Etudier le signe f' ;
- Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

En déduire la sens variation f sur l'intervalle $[-3; 3]$

Que remarquez-vous ?

Théorème :

Soit f un fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I .
- si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I /
- si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I .