

2. Dérivabilité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur l'intervalle I , si le nombre de f existe en tout point x de I .

3. Dérivabilité et continuité :

Théorème (admis)

Soit f une fonction numérique et x_0 un nombre réel.

- Si f est dérivable en x_0 , alors la fonction f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est continue sur I .

Attention : La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie.

4. Fonctions dérivées d'une fonction :

4.1. Définition :

La fonction dérivée de la fonction f est la fonction notée f' et définie pour tout réel x de I par : $f' : x \mapsto$ Nombre dérivé de f en x .

4.2. Dérivées usuelles :

Nous admettons les formules consignées dans le tableau ci – dessus :

Fonctions f	Fonctions f'	Ensemble de définition
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{a}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\mathbb{R} \setminus \{ \pi(k+1) ; k \in \mathbb{Z} \}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a \cdot \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a \cdot \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

4.3. Opérations sur les fonctions dérivées :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables, a un réel non nul et $n \in \mathbb{Q} - \{0; 1\}$.

Nous admettons également :

Opérations	Fonctions f	Fonctions dérivées f'
Somme	$f = U + V$	$f' = U' + V'$
Produit	$f = a \times U$	$f' = a \times U'$
	$f = U \times V$	$f' = U' \times V + V' \times U$
Inverse	$f = \frac{a}{V}$	$f' = -\frac{aV'}{V^2}$
Quotient	$f = \frac{U}{V}$	$f' = \frac{U' \times V - V' \times U}{V^2}$
Puissance	$f = U^n$	$f' = nU'U^{n-1}$
Racine carrée	$f = \sqrt{U}$	$f' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
Fonction cosinus	$f = \cos u$	$f' = -u' \cdot \sin u$
Fonction sinus	$f = \sin u$	$f' = u' \cdot \cos u$
Fonction tangente	$f = \tan u$	$f' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
Fonction cotangente	$f = \cot u$	$f' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
Fonction composée	$f = U \circ V$	$f' = V' \times U' \circ V$

Evaluation :

Calcule la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = 20 ; f_1(x) = 3x ; f_2(x) = x^4 ; f_3(x) = x^4 + 3x^2 - 5 ; f_4(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^4} ;$$

$$f_5(x) = \sin x \cdot \cos x ; f_6(x) = \frac{1-3x}{2x+3} ; f_6(x) = \tan x ; f_7(x) = (2x-3)^5 ;$$

$$f_8(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 1} ; f_9(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 2x + 3 ; f_{10}(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) ;$$

$$f_{11}(x) = (\sin 2x)^3 ; f_{12}(x) = \cos 4x ; f_{13}(x) = (4x+5)(1-2x) ;$$

$$f_{14}(x) = 3x\sqrt{2x-5} ; f_{15}(x) = \frac{x-4}{x^2+5} ; f_{16}(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} ; f_{16}(x) = \frac{x^2-3x-5}{x^2-5x+1}$$