

5. Dérivée de la bijection réciproque

Soit f une fonction dérivable strictement monotone sur un intervalle I tel que $f' \neq 0$.

La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$;

$\forall x \in I$.

6. Sens de variation d'une fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si sa dérivée f' est strictement positive sur I , alors f est strictement croissante sur I
- Si sa dérivée f' est nulle sur I , alors f est constante sur I
- Si sa dérivée f' est strictement négative sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Théorème de la bijection :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ si f est croissante, et sur $[f(b), f(a)]$ si f est décroissante.

De plus si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

7. Extremums relatifs :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; $x_0 \in I$.

Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant du signe, alors f admet un extremum relatif en x_0 qui est $f(x_0)$. Un extremum est soit un maximum, soit un minimum.

Remarque : si c'est de $+$ à $-$ on l'appelle maximum et si de $-$ à $+$ on l'appelle minimum.

8. Dérivées successives :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7$.

- $f'(x) = 12x^2 - 10x + 3$
- $f''(x) = 24x - 10$
- $f'''(x) = 24$
- $f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0$.

Les fonctions f' ; f'' ; ... ; $f^{(n)}$ sont les fonctions dérivées de f .

$f^{(n)}$ est appelé dérivée d'ordre n .

Séquence4 : Etude locale d'une fonction numérique

1. Parité d'une fonction :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition Df et (Cf) sa courbe représentative.

- Une fonction f est paire si, et seulement si $\forall x \in Df, -x \in Df ; f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est impaire si, et seulement si ; $\forall x \in Df, -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$.

Remarque :

- Si f est paire, alors la courbe (Cf) de f admet l'axe des ordonnées du repère comme axe de symétrie.
- Si f est impaire, alors l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe (Cf) .
Dans ces deux situations, on peut restreindre l'étude de f à $D_e = Df \cap [0; +\infty[$ et on complète la construction de la courbe par la symétrie axiale.

2. Axes de symétrie d'une représentation graphique :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On dit que (C) admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si, pour tout $x \in Df, 2a - x \in Df$ et $f(2a - x) = f(x)$.

3. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On dit que le point $I(a ; b)$ est centre de symétrie pour la courbe (C) si, pour tout $x \in Df$, $2a - x \in Df$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

4. Fonction périodique :

Une fonction f est dite périodique de période T si, pour tout $x \in Df$, $x + T \in Df$ et $f(x + T) = f(x)$.

Remarque : Si f est périodique de période T , on peut choisir comme intervalle d'étude un intervalle d'amplitude T .

5. Point d'inflexion :

Soit f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I contenant x_0 .

Le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de (C_f) si la dérivée seconde f'' de f s'annule en x_0 en changeant de signe ($f''(x_0) = 0$). Dans ce cas, la courbe (C_f) traverse la tangente.

6. Branches infinies- Asymptotes

6.1. Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées :

6.1.1. Asymptote verticale :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe (C_f) de f .

6.1.2. Asymptote horizontale :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$, alors la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe (C_f) de f .

Exemple :

$$\text{Soit } f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

- Détermine Df puis calcule les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

Solution :

- Déterminons Df puis les limites de f aux bornes de Df .

$$Df = \{x | x \in \mathbb{R}, x - 1 \neq 0\}$$

$$Df =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

Limites de f aux bornes de Df .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2-3}{1-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2-3}{1-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

b. Interprétation graphique :

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$ alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe (C_f) .

6.2. Branches infinies- Asymptote oblique :

6.2.1. Asymptote oblique :

La droite (D) d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe (C_f) de f si et seulement $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = 0$

6.2.2. Méthode de recherche systématique de l'A.O :

Soit f une fonction numérique de variable réelle.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on a une possibilité d'asymptote oblique (P.A.O).

On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$ avec a et b des réels et a non nul

On dit alors que la droite $(D): y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) de f au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans cette recherche, d'autres cas de figures peuvent se présenter que l'on résume dans le tableau ci-dessous.

		Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b \ (b \in \mathbb{R}^*)$	La droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f
	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$	C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite $(D): y = ax$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$		C_f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$		C_f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées
Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas		C_f n'admet ni une asymptote ni une branche parabolique

7. Position relative de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f

Pour étudier la position de (C_f) par rapport à la droite $(D): y = ax + b$, on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$.

✓ Si $f(x) - (ax + b) > 0$ sur un intervalle I alors (C_f) est au dessus de (D) sur I .

✓ Si $f(x) - (ax + b) < 0$ sur un intervalle I alors (C_f) est au dessous de (D) sur I .

✓ Si $f(x) - (ax + b) = 0$ alors (C_f) est coupe (D) en un point d'abscisse x_0 .

8. Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous pouvons procéder comme suit :

- Déterminer l'ensemble de définition (éventuellement la continuité).
- Etudier la parité et/ou la périodicité, des symétries afin de réduire le domaine d'étude.
- Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition (éventuellement les équations des branches infinies et asymptotes).

- Calculer la fonction dérivée, étudier son signe et indiquer le sens de variation de la fonction
- Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
- Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction (Extremums ; Points d'intersections avec les axes de coordonnées etc.).
 - ✓ Pour l'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses d'équation $y = 0$, on résout l'équation $f(x) = 0$.
 - ✓ Pour l'intersection de (C_f) et l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$, on calcule $f(0)$ et on obtient le point $M(0 ; f(0))$.
- Traçage.

NB : Si les points particuliers et les droites particulières ne sont pas suffisants pour tracer la courbe, on peut dresser un tableau de valeurs permettant de représenter quelques points.

Evaluation :

Exercice1 :

soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. Détermine D_f puis les limites aux bornes de D_f .
2. Calcule la fonction dérivée f' de la fonction f puis étudie son signe.
3. En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
4. Donne les extrémums locaux et leur nature.

Exercice2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

1. Détermine D_f puis les limites aux bornes de D_f .
2. Etudie le sens de variations f puis dresse son tableau de variations.
3. Détermine les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
4. Démontre que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. La courbe C_f admet-elle une autre asymptote ? si oui précise cette asymptote.
6. Montre que le point $A(1 ; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f .
7. Trace la courbe C_f et la droite D dans le même repère.