

Fonctions numériques d'une variable réelle

Site Pédagogique de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Opérations sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions d'ensembles de définitions respectives D_f et D_g .

Nous retiendrons les résultats suivants :

	Notation	Ensemble de définition	Formule explicite
Somme	$f + g$	$D_f \cap D_g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit	$f \times g$	$D_f \cap D_g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$\{D_f \cap D_g / \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemples

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{x+3}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1°) calculer la fonction somme $s = f + g$

$$s(x) = f(x) + g(x) \Leftrightarrow s(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+3)(x-2)} ;$$

2°) calculer la fonction produit $P = f \times g$

$$P(x) = f(x) \times g(x) \Leftrightarrow P(x) = \frac{x+1}{(x+3)(x-2)} ;$$

3°) calculer la fonction quotient $q = \frac{f}{g}$. $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow q(x) = \frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$.

II – Fonctions associées

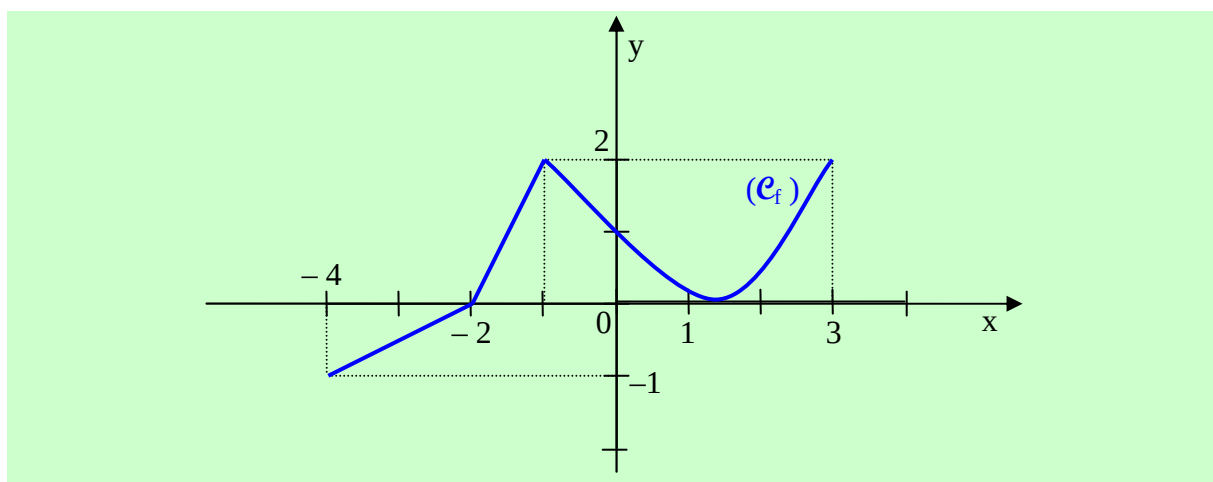
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on considère une fonction f de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$; a et b deux nombres réels.

On appelle **fonctions associées** à la fonction f les fonctions qui à :

$$x \mapsto |f(x)| ; x \mapsto f(x-a) ; x \mapsto f(x) + b ; x \mapsto kf(x) ; x \mapsto f(kx)$$

1°) Fonction $g : x \mapsto |f(x)|$

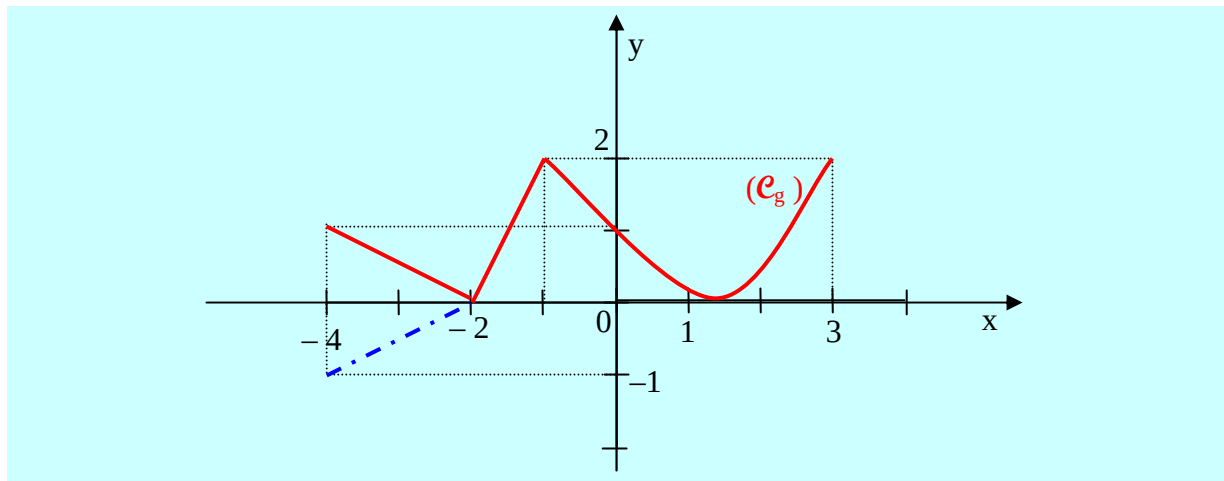
Soit la fonction f définie par sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous



- Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
- Quel est le signe $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$?
- Représenter la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g dans un repère
- Que peut-on conclure ?

– 0 –

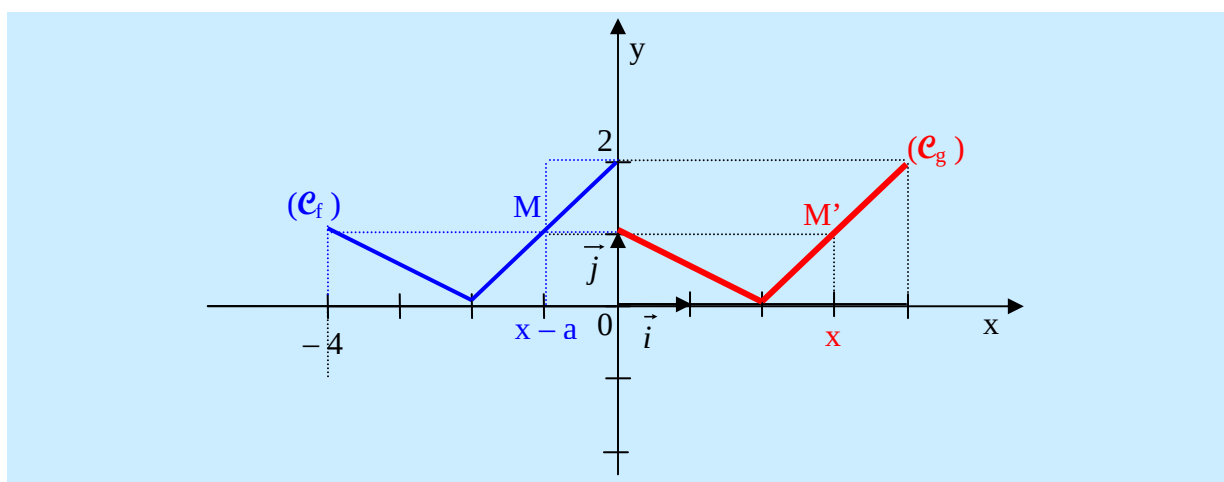
- $\mathcal{D}_f = [-4, 3]$
- Dans $[-4, 2]$ $f(x) \leq 0$; Dans $[-2, 3]$ $f(x) \geq 0$.
- Représentation de la courbe de g



- Pour tout élément x de $\mathcal{D}_f$ on a
$$\begin{cases} |f(x)| = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Donc la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de g est la réunion des parties de courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées au dessus de l'axe des abscisses (ox).

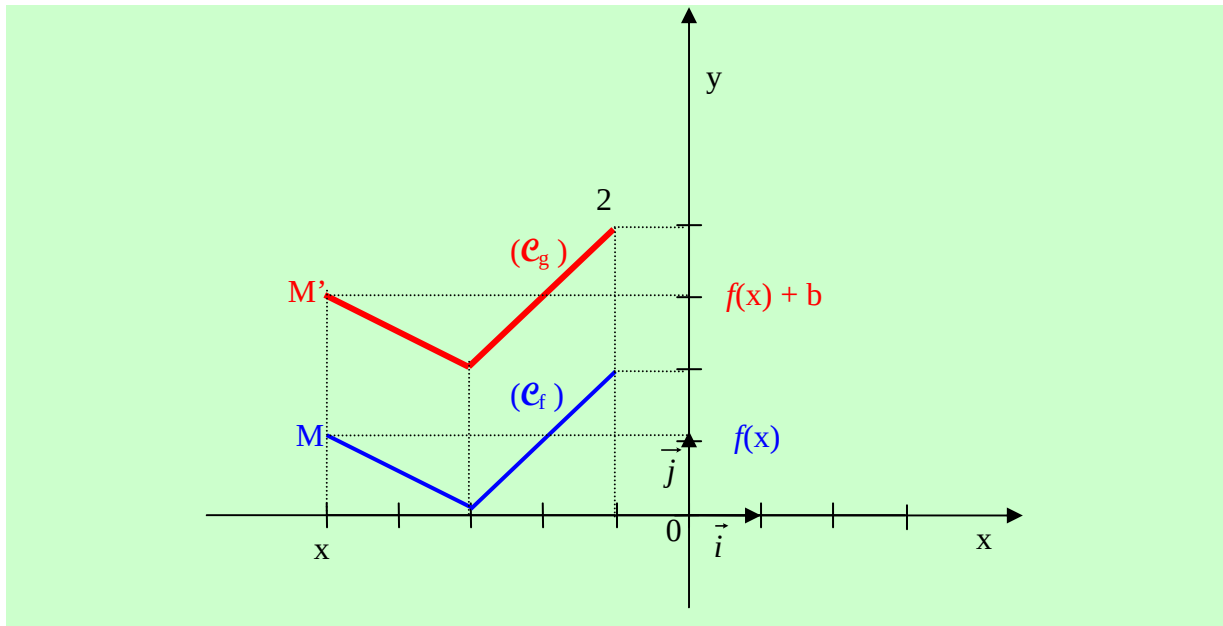
2°) Fonction $g : x \mapsto f(x-a)$, a nombre réel



Soit $M(x-a ; f(x-a))$ un point de $(\mathcal{C}_f)$. Le point $M'(x ; f(x-a))$ de $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de M par la translation de vecteur $a\vec{i}$.

D'où $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $a\vec{i}$.

3°) Fonction $g : x \mapsto f(x) + b$, b nombre réel

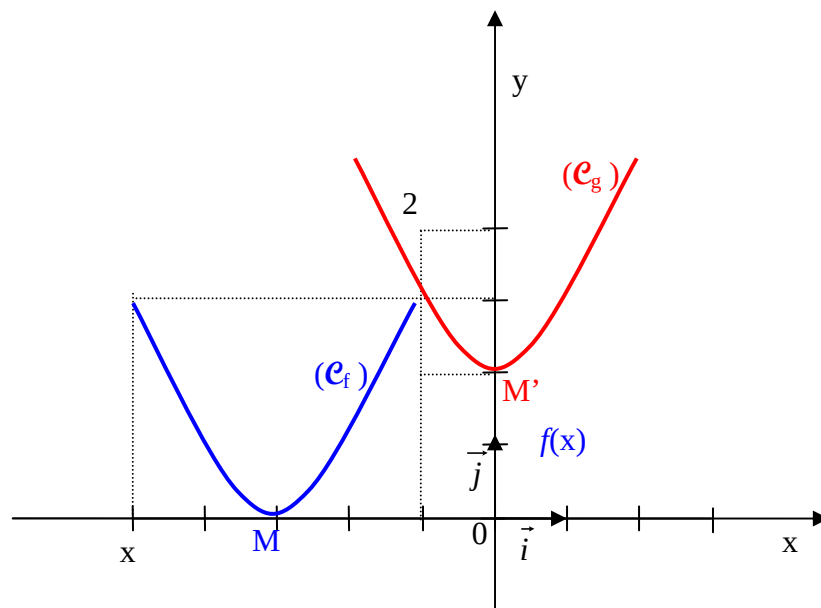


Soit $M(x-a ; f(x-a))$ un point de (C_f) . Le point $M'(x ; f(x)+b)$ de (C_g) est l'image de M par la translation de vecteur $b\vec{j}$.

D'où (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $b\vec{j}$.

Propriété :

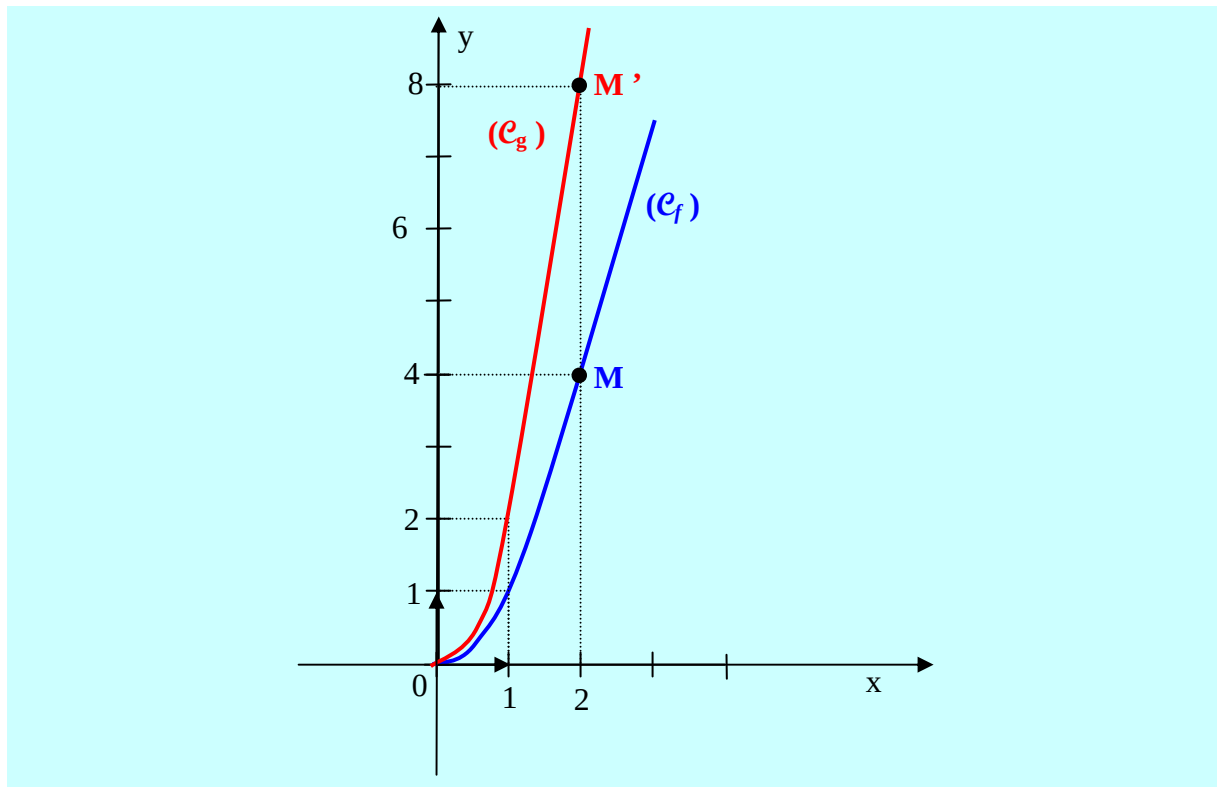
La courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto f(x-a) + b$ se déduit de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.



D'où (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

4°) Fonction $g : x \mapsto k \times f(x)$, k nombre réel

Soit $f : [0 ; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ qui a x associe $f(x) = x^2$ et la fonction $g : [0 ; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ qui a x associe $g(x) = 2 f(x)$.



Soit l'application $A_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x \\ 2z \end{pmatrix}$$

A_2 s'appelle l'affinité orthogonale d'axe $D(O ; \vec{i})$ et de rapport 2.

M et M' ont même abscisse, mais l'ordonnée de M' est le double de celle de M

D'où (C_g) est l'image de (C_f) par l'affinité A_k de rapport k définie par

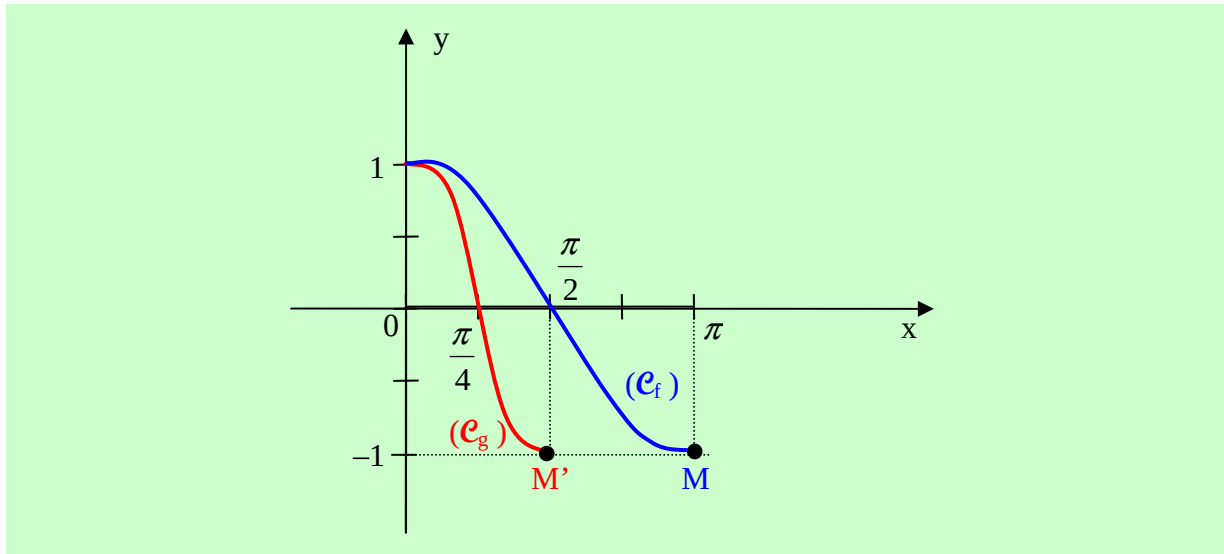
$$A_k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x \\ kz \end{pmatrix}$$

$$(C_g) = A_k(C_f).$$

5°) Fonction $g : x \mapsto f(k \times x)$, k nombre réel

Soit $f : [0 ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \cos(x)$ et la fonction $g : [0 ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $g(x) = f(2x) = \cos(2x)$.



M et M' ont même ordonnée, mais l'abscisse de M' est la moitié de celle de M

D'où $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par l'affinité $A_{1/k}$ définie par.

$$A_{1/k} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

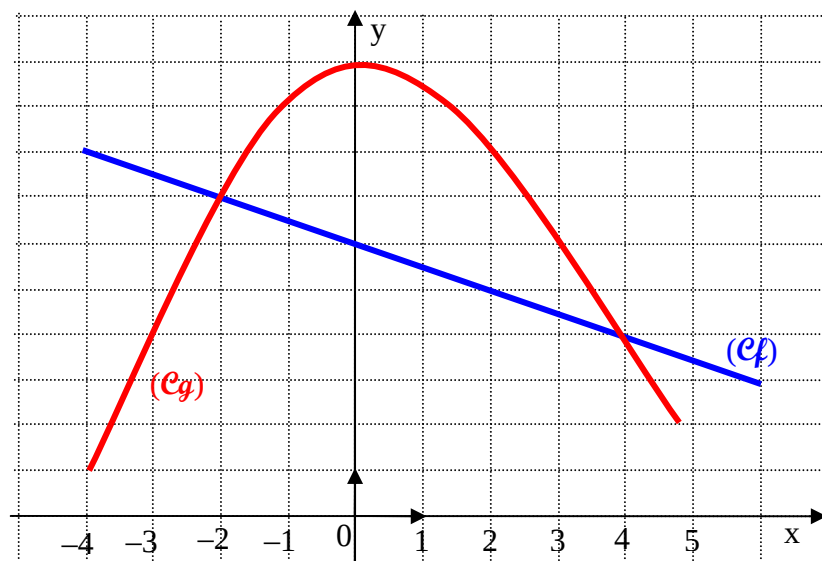
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x/k \\ y \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{C}_g) = A_{1/k}(\mathcal{C}_f).$$

III – Comparaison de fonctions

1- Activité

Soient les fonctions f et g définies respectivement par leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormé.



Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) > g(x)$

2- Minoration, majoration

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$

- f est minorée sur I s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall x \in I, m \leq f(x)$;
- f est majorée sur I s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall x \in I, f(x) \leq M$
- f est majorée sur I si elle est à la fois minorée et majorée sur I c'est-à-dire $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$.

Exemple:

Dans l'activité ci-dessus déterminer un minorant et un majorant de chacune des fonctions f et g .

— 0 —

0 ; 1 sont des minorants de g ; 10 ; 11 sont des majorants de g .

2 ; 3 sont des minorants de f ; 10 ; 11 sont des majorants de f .

IV – Quelques propriétés géométriques

1. Fonctions paires :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite paire si, et seulement si $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f ; f(-x) = f(x)$.

La courbe (C_f) de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Fonction impaire :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite impaire si, et seulement si $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f ; f(-x) = -f(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f dans un repère cartésien.

3. Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation $x = a, (a \in \mathbb{R})$ est axe de symétrie pour la courbe (C_f) de f , si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$.

4. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point $I(a ; b)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f si et seulement si, $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

5. Fonctions périodiques :

Une fonction numérique f est périodique si, seulement si il existe un réel strictement positif t tel que $\forall x \in D_f \quad f(x+t) = f(x)$.

On dit alors que t est une période de f .

- Si $f(x) = \cos(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si $f(x) = \sin(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si $f(x) = \tan(ax + b)$ alors la période $T = \frac{\pi}{|a|}$.

V – Représentations graphiques de deux bijections réciproques:

Pour représenter la courbe (C_f^{-1}) de la bijection réciproque de la bijection f ; on trace le symétrique orthogonal de la courbe (C_f) de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

