

4. Opérations sur les limites :

Soient f et g deux fonctions numériques, L et L' deux nombres réels et x_0 un nombre réel ou l'infini.

		Somme	Produit	Quotient
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
$L \neq 0$	$L' \neq 0$	$L + L'$	$L \times L'$	$\frac{L}{L'}$
0	$L' \neq 0$	L'	0	0
$L \neq 0$	0	L	0	$\pm\infty$ suivant la règle des signes
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$+\infty$			
$+\infty$	0	$+\infty$	Forme indéterminée	$\pm\infty$ suivant la règle des signes
$-\infty$		$-\infty$		
0	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	0
	$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$L' \neq 0$	$+\infty$	$\pm\infty$ suivant la règle des signes	$\pm\infty$ suivant la règle des signes
$-\infty$		$-\infty$		
$L \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$ suivant la règle des signes	0
	$-\infty$	$-\infty$		

Remarque :

Dans la recherche de la limite, si on obtient l'une des quatre formes suivantes :

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$ et $0 \times \infty$, alors on dit qu'on a une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, on peut utiliser des factorisations, rendre rationnel numérateur (si le radical est présent au numérateur) ou dénominateur (si le radical est présent au dénominateur) ou rendre rationnel par – ci – par – là (si le radical est présent par tout)

Astuce² :

Les formes suivantes ne sont pas des formes indéterminées : $\frac{\infty}{\text{Réal}}$; $\frac{0}{\text{Réal}}$; $\frac{\text{Réal}}{0}$; $\frac{\text{Réal}}{\infty}$.

Pour ne pas les oublier on peut se servir de la phrase : « **IRI** de **ORO** est le **ROI** de **RIO** ».

- ✓ **IRI** : Infini sur Réel donne Infini
- ✓ **ORO** : Zéro sur Réel donne Zéro
- ✓ **ROI** : Réel sur Zéro donne Infini
- ✓ **RIO** : Réel sur Infini donne Zéro

5. Théorèmes généraux :

5.1. Limite d'une fonction polynôme :

Pour calculer la limite à l'infini d'une fonction polynôme, on calcule la limite à l'infini de son monôme du plus haut degré.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^4 = -3(+\infty)^4 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 2x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 = -(-\infty)^5 = -(-\infty) = +\infty$

5.2. Limite d'une fonction rationnelle :

Pour calculer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle, on calcule la limite à l'infini du quotient de ses monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Astuce³ : Si la limite d'une fonction rationnelle en x_0 est de la forme $\frac{0}{0}$, on met $x - x_0$ en facteur et on simplifie.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \frac{2}{-\infty} = 0$

5.3. Limite d'une fonction irrationnelle :

Si $f(x) \geq 0$ dans un intervalle ouvert contenant x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}.$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Astuce³ : Si la limite d'une fonction irrationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $+\infty - \infty$, on lève l'indétermination en multipliant les termes du rapport par l'expression conjuguée du terme comportant la racine carrée.

Si elle est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on met les termes de plus haut degré en facteur.

5.4. Limite des fonctions trigonométriques :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ avec $a \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$ avec $a \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Evaluation :

Exercice1 :

En utilisant les limites classiques, calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{\sin 3t \cdot \tan 3t}$$

Exercice2 :

Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}; b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}; c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}; d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 5}{12 - 4x}.$$

Exercice3 :

$$\text{Calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}.$$