

## Etude locale d'une fonction numérique :

### Prérequis :

- ✓ Fonction numérique d'une variable réelle ;
- ✓ Calcul dans  $\mathbb{R}$  ;
- ✓ Equations et inéquations dans  $\mathbb{R}$  ;
- ✓ Fonctions trigonométriques.

### Pré évaluation :

Soient les fonctions numériques suivantes définies par :

$$f(x) = 2x + 1 \quad h(x) = |x - 1| \quad I(x) = \sqrt{3 - 2x}.$$

1. Trouvez le domaine de définition de chacune des fonctions ci-dessus ;
2. Calculez  $(I \circ f)(x)$  puis en déduisez  $(I \circ f)(0)$  ;
3. Déterminez l'image indirecte par  $I$  de  $[0; 1]$ .

## Séquence 1 : Limite d'une fonction en un point – Continuité

### Situation problème :

Soit la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

1. Vérifiez que  $f$  est une fonction paire ;
2. Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif.  
Démontrez qu'il existe un réel strictement positif  $\delta$  tel que la relation  $|x| \leq \delta$  entraîne la relation  $|f(x)| \leq \varepsilon$  ;
3. Soit  $M$  un réel strictement positif. On suppose  $|x| \leq \frac{1}{M^2}$  ;  
Montrez qu'alors  $\frac{1}{\sqrt{|x|}} \geq M$ . En déduisez qu'il n'existe pas de nombre  $r$  strictement positif tel que la relation  $|x| \leq r$  entraîne la relation  $|f(x)| \leq M|x|$ .

### Activité 1 : limite nulle en zéro

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .

#### Tâche :

Complétez le tableau suivant puis interprétez :

|        |    |      |      |       |   |      |     |     |   |
|--------|----|------|------|-------|---|------|-----|-----|---|
| $x$    | -1 | -0,5 | -0,1 | -0,01 | 0 | 0,01 | 0,1 | 0,5 | 1 |
| $f(x)$ |    |      |      |       |   |      |     |     |   |

#### Solution

### Synthèse partielle :

On constate que quand  $x$  s'approche de zéro,  $f(x)$  s'approche de zéro. On dit que la **limite de  $f$  en  $x = 0$  est 0** ou encore  **$f$  admet une limite nulle en zéro**. On note  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  (**la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers zéro est 0**).

### Activité 2 : limite d'une fonction en un point

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 3x^2 + 1$ .

#### Tâche :

1. Déterminez l'ensemble des réels  $x$  tels que :  $4 - 0,1 \leq g(x) \leq 4 + 0,1$  ;
2. Déterminez un réel  $a$  strictement positif tel que :  $|x - 1| \leq a$  entraîne  $|g(x) - 4| \leq 0,1$ .

#### Solution

1.  $4 - 0,1 \leq g(x) \leq 4 + 0,1 \Leftrightarrow 4 - 0,1 \leq 3x^2 + 1 \leq 4 + 0,1$   
 $\Leftrightarrow 3 - 0,1 \leq 3x^2 \leq 3 + 0,1 \Leftrightarrow 1 - \frac{0,1}{3} \leq x^2 \leq 1 + \frac{0,1}{3}$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,033 \leq x^2 \leq 1 + 0,0033 \quad \Leftrightarrow 0,967 \leq x^2 \leq 1,033$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{0,967} \Rightarrow x \leq \sqrt{1,033} \quad \Leftrightarrow 0,98 \leq x \leq 1,01$$

$$\Leftrightarrow x \in [0,98 ; 1,01].$$

$$2. \Leftrightarrow x \in [0,98 ; 1,01] \Leftrightarrow 0,98 \leq x \leq 1,01 \Leftrightarrow -0,1 \leq x - 1 \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| \leq 0,01 \Rightarrow a = 0,01$$

### Synthèse partielle :

Dans la proposition «  $|x - 1| \leq 0,01$  entraîne  $|g(x) - 4| \leq 0,1$  ». 0,01 et 0,1 étant des réels infiniment petits, on pose  $\alpha = 0,01$  et  $\varepsilon = 0,1$ . On a donc :

$|x - 1| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - 4| \leq \varepsilon$ . On dit que la fonction  $g$  admet 4 comme limite au point  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4..$$

### Synthèse générale :

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son domaine de définition et soient  $l \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  et.

On dit que  **$f$  admet  $l$  comme limite en  $x_0$**  lorsque  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \text{ On note } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

### Exercice d'application :

1. Démontrer, en utilisant la définition de «  $f$  admet  $l$  comme limite de  $f$  en  $x_0$  »

a)  $f(x) = 5x - 1$  ;  $x_0 = 2$  et  $l = 9$

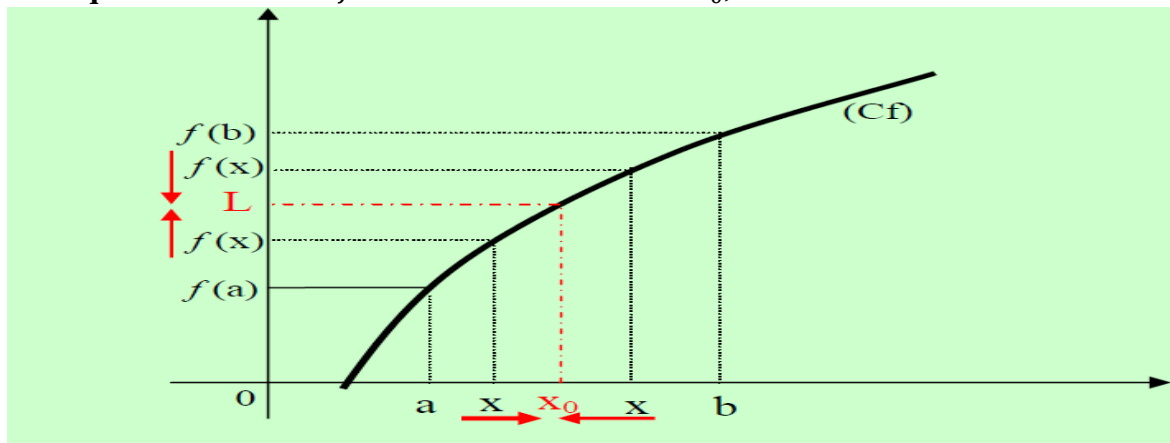
b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  ;  $x_0 = -1$  et  $l = -2$ .

2. Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 3}{2x - 1}$ .

a) Trouver le domaine de définition de  $g$  ;

b) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -2$ .

**Remarque :** Si la fonction  $f$  admet  $l$  comme limite en  $x_0$ , la courbe est semblable à :



**NB :** La limite d'une fonction peut être finie ou une infinie ; dans le cas d'une limite infinie, on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

### Activité 3 : Limite à droite – Limite à gauche

Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = |x^2 + 2x - 3|$ .

#### Tâche :

a) Ecrire  $g(x)$  sans le symbole de la valeur absolue ;

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

### Synthèse partielle :

On constate que la fonction  $g$  admet deux expressions différentes sur les intervalles :

$[-3; 1]$  et  $[1; +\infty[$  chacune des restrictions admet une limite au point  $x_0 = 1$ , on dit alors que  $g$  admet une limite à droite et à gauche au point  $x_0 = 1$ .

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - 2x + 3) = 0$$

### Synthèse générale :

Soit  $x_0$  un nombre réel et  $f$  une fonction numérique définie sur un ensemble  $J$  contenant l'intervalle ouvert de centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$  (avec  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ).

- On dit que  **$f$  admet le nombre  $l$  comme limite à droite en  $x_0$** , si la restriction de  $f$  sur  $]x_0; x_0 + \varepsilon[$  admet  $l$  comme limite en  $x_0$ . On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^+ f(x) = l.$$

- On dit que  **$f$  admet le nombre  $l$  comme limite à gauche en  $x_0$** , si la restriction de  $f$  sur  $]x_0 - \varepsilon; x_0[$  admet  $l$  comme limite en  $x_0$ . On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^- f(x) = l.$$

### Exercice d'application :

Etudier la limite de la fonction  $f$  en  $x_0$  dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = |x + 1|$ ;  $x_0 = -1$

b)  $f(x) = \frac{2x+|x|}{x}$ ;  $x_0 = 0$ .

### Remarque :

- Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  en  $x_0$  si, et seulement si  $f$  admet une limite à droite et une limite à gauche de  $x_0$  et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

- **Limites élémentaires :**

|                                                   |                                                     |                                                  |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} k = k, k = cte$           | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$    | $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} x = a$                    | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$       | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$    |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$ |                                                  |

- **Théorèmes généraux sur les limites :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques et  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ . On a :

- **Limite d'une somme :**

|                                             |          |           |           |           |           |           |
|---------------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$             | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$             | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ////      |

• **Limite d'un produit :**

|                                           |        |           |           |           |           |           |           |           |             |
|-------------------------------------------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$           | $l$    | $l > 0$   | $l < 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$         |
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$           | $l'$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) =$ | $l.l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $///$       |

• **Limite d'un produit :**

**1<sup>er</sup> cas : le dénominateur  $g$  ne s'annule pas :**

|                                           |             |                        |           |           |           |           |             |
|-------------------------------------------|-------------|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$           | $l$         | $l$                    | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$           | $l' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $\pm\infty$ |
| Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) =$ | $l/l'$      | $0$                    | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $////$      |

**2<sup>è</sup> cas : le dénominateur  $g$  s'annule :**

|                                           |           |                      |                      |                      |       |
|-------------------------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$           | $l$       | $l > 0$ ou $+\infty$ | $l < 0$ ou $-\infty$ | $l < 0$ ou $-\infty$ | $0$   |
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$           | $0^+$     | $0^-$                | $0^+$                | $0^-$                | $0$   |
| Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) =$ | $+\infty$ | $-\infty$            | $+\infty$            | $-\infty$            | $///$ |

• **Formes indéterminées :**

Dans la recherche de la limite, si nous obtenons l'une des formes suivantes :  $\frac{0}{0}$ ;  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $0 \times$

$\infty$ ;  $(+\infty) + (-\infty)$ , aucun théorème mathématique ne nous permet de conclure. On dit qu'on a une forme indéterminée.

•  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$  avec  $(l_1 > 0)$

**Exemples de calculs de limites :**

✓ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

✓  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$

**Continuité d'une fonction en un point :**

On dit qu'une fonction numérique est **continue** en un point  $x_0$  ssi  $x_0 \in Df$  et

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ce qui se traduit par :

$\forall \varepsilon > 0; \exists \alpha > 0; \forall x \in Df: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$

**( $f$  continue en  $x_0$  de  $Df$ )  $\Leftrightarrow$  ( $f(x_0)$  est définie et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ )**

**Exemple :**

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction  $f$  est continue en  $x_0$

1)  $f(x) = 3x^2 - 2x - 7$ ;  $x_0 = 3$

2)  $f(x) = \frac{x^2+4}{x-2}$ ;  $x_0 = 2$

3)  $f(x) = x - 3 + \sqrt{3x^2 + 1}$ ;  $x_0 = 1$

• **Continuité à droite – Continuité à gauche :**

On dit que  $f$  est **continue à gauche** au point  $x_0$  ssi  $x_0 \in Df$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$

On dit que  $f$  est **continue à droite** au point  $x_0$  ssi  $x_0 \in Df$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$

**Activité 4 : Fonction dérivable en un point, Nombre dérivée**

**Tâche :** Calculez la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  des fonctions suivantes

- 1)  $f(x) = 3x + 4$  pour  $a = 2$
- 2)  $f(x) = x^4$  pour  $a = 1$

**Solution :**

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+4-10}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x-2} = \frac{6-6}{2-2} = \frac{0}{0} \text{ (FI)}, \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)} = 3$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3}$$

$$2. f(x) = x^4; f(1) = 1^4 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} =$$

$$\frac{0}{0} \text{ (FI)}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + x^2 + x + 1 = 4$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4}$$

**Synthèse:**

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $x_0$  et telle que  $f$  est continue en  $x_0$  ;  $(Cf)$  sa représentation graphique. Le coefficient directeur de la droite  $T$  tangente à la courbe  $(Cf)$  au point  $M_0 \left( \begin{smallmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{smallmatrix} \right)$  est appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ . On le note  $f'(x_0)$  et on a

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

La fonction sera dite dérivable en  $x_0$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  existe et est finie.

**Courbe obligatoire**

**Exercice d'application :**

Etudiez la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$

$$1) f(x) = x^2; x_0 = 2$$

$$2) h(x) = \frac{2x+1}{x-2}; x_0 = 1$$

**Activité 5 : Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche**

Soit  $f : x \mapsto |x|$

**Tâche :**

- 1) Ecrivez  $f$  sans le symbole de la valeur absolue
- 2) Etudiez la dérivabilité de  $f$  en 0

**Solution :**

**Synthèse :**

**Exemple :** Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-2$

$$f(x) = |2x^2 + 3x - 2|$$

**Fonction dérivable sur un intervalle :**

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .

On écrit  $\forall x \in I; \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  existe et finie—

## Fonctions dérivées :

### Dérivées de quelques fonctions élémentaires :

| Fonction $f$                       | Dérivée $f'$                    | Dérivable sur                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------------------|
| $x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$ | $x \mapsto 0$                   | $\mathbb{R}$                                  |
| $x \mapsto ax$                     | $x \mapsto a$                   | $\mathbb{R}$                                  |
| $x \mapsto ax + b$                 | $x \mapsto a$                   | $\mathbb{R}$                                  |
| $x \mapsto x^n$                    | $x \mapsto nx^{n-1}$            | $n > 1, n \in \mathbb{N}$                     |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}$          | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$  | $n > 1, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$               | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \in ]0; +\infty[$                          |
| $x \mapsto \sin x$                 | $\cos x$                        | $\mathbb{R}$                                  |
| $x \mapsto \cos x$                 | $x \mapsto -\sin x$             | $\mathbb{R}$                                  |

### Opérations sur les fonctions dérivables :

Si  $U$  et  $V$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  alors on a :

|                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(U + V)' = U' + V'</math></li> <li>• <math>(UV)' = U'V + V'U</math></li> <li>• <math>(\alpha U)' = \alpha U'</math></li> <li>• <math>\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\left(\frac{U}{V}\right)' = -\frac{U'V - V'U}{V^2}</math></li> <li>• <math>[U(ax + b)]' = aU'(ax + b)</math></li> <li>• <math>U \circ V = V' \times U' \circ V</math></li> </ul> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Exercice d'application :

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ;
- $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- $h(x) = \cos(x) + \sin(x)$
- $k(x) = \sqrt{3x+1}$

### Dérivées successives :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  telle que sa dérivée  $f'$  soit dérivable sur  $I$ .

La dérivée seconde de  $f$  notée  $f''$  est :  $f''(x) = (f'(x))'$  ; de même  $f'''(x) = (f''(x))'$ . On

utilise aussi les notations  $\frac{df}{d(x)} = f'(x)$  ;  $\frac{d^2f}{dx^2} = f''(x)$  ;  $\frac{d^3f}{d(x^3)} = f'''(x)$

D'une manière générale  $\frac{d^n f}{d(x^n)} = f^n(x)$

### Exercice d'application :

Soit  $f(x) = x^4 + x^2 + 2x^2 - 3x + 1$

Calculez  $f'(x)$  ;  $f''(x)$  ;  $f'''(x)$

### Activité 7 : Interprétation géométrique du nombre de dérivée : Equation de la tangente

Soit  $f$  une fonction  $x \mapsto x^2$

#### Tâche :

- Démontrez que  $f$  est dérivable en  $-1$  et déduisez  $f'(-1)$  ;
- Tracez la courbe  $(\mathcal{C}f)$  de  $f$  ;
- Déterminer  $y$  tel que :  $f'(-1) = \frac{y-f(-1)}{x+1}$ .

#### Solution :

#### Synthèse :

La relation  $y$  telle que :  $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$  est l'équation de la droite tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = -1$ .

Dans cette relation  $f'(-1)$  apparaît comme le coefficient directeur de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = -1$ .

### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et dérivable en un point  $x_0$  de  $I$  ; soit  $(C_f)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère. On appelle **tangente à  $(C_f)$  au point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$** , la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dans cette équation,  $f'(x_0)$  est le **coefficient directeur** de la pente en  $x_0$ .

### Activité 8 : Fonction dérivée et Sens de variation d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

#### Tâche :

- Représentez graphiquement la courbe de  $f$  puis en déduisez le sens de variation de la fonction  $f$  ;
- Calculez la dérivée  $f'$  de  $f$ .  
Que constatez-vous ?

#### Synthèse :

On constate que sur  $] - \infty; 0]$ ,  $f'(x) \geq 0$  et  $f$  est **croissante** et que sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) \leq 0$  et  $f$  est **décroissante**.

#### Théorème :

Soit  $f$  une fonction numérique dérivable sur un intervalle  $I$ .

- ✓ Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$  ;
- ✓ Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$  ;
- ✓ Si  $f$  est **constante** alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

Réciproquement,

- ✓ Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est **croissante** ;
- ✓ Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$  alors  $f$  est **décroissante** ;
- ✓ Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$  alors  $f$  est **constante**.

On a le tableau de variation suivant :

Posons  $I = [a, b]$  et soit  $x_0 \in I$  tel que  $f'(x_0) = 0$ . On a :

| $x$     | $a$ | $x_0$    | $b$ |
|---------|-----|----------|-----|
| $f'(x)$ |     | +        | -   |
| $f(x)$  |     | $f(x_0)$ |     |

1

| $x$     | $a$ | $x_0$    | $b$ |
|---------|-----|----------|-----|
| $f'(x)$ |     | -        | +   |
| $f(x)$  |     | $f(x_0)$ |     |

2

**Remarque :** Dans le cas 1,  $f(x_0)$  est un **maximum** de  $f(x)$

Dans le cas 2,  $f(x_0)$  est un **minimum** de  $f(x)$ .

On retient donc que si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe alors  $f$  admet un **extremum**