

Etude de quelques exemples de fonctions :

Classe : 11^{ème} Sciences

Durée : 05 heures (3+2)

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Compétences :

- Résoudre une situation problème ;
- Communiquer un message en utilisant le langage et le symbolisme mathématique ;
- Mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques ;
- ✓ Modéliser :
Traduire en langage mathématique une situation réelle.
- ✓ Communiquer :
*Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel.
S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.*
- ✓ Raisonner :
Utiliser les mots de la logique (« ou » et « et ») pour bâtir un raisonnement.
- ✓ Représenter :
Représenter par un arbre l'ensemble des cas possibles d'un tirage.

Contenu : Etude de quelques exemples de fonctions

Ressources éducatives :

- **Ressources humaines :** Professeur, élèves.
- **Ressources matérielles :** Règle – Equerre – Compas, ...
- **Ressources financières :** Rien à signaler

Stratégie d'animation : Travaux de groupes.

Prérequis :

- Etude locale d'une fonction numérique (limite – continuité – dérivation).

Pré-évaluation :

On donne les fonctions suivantes : $f(x) = -2x^5 - 3x + 5$, $g(t) = \frac{t-1}{3-2t}$, $h(q) = \frac{q^2-2q+3}{1-q}$.

- 1) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de chacune des fonctions ci-dessus ;
- 2) Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessus.

Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour l'étude d'une fonction numérique, nous adoptons le plan suivant :

- **Etude de la fonction f :**
 - a- Ensemble de définition Df de f
 - b- Dérivabilité et continuité de f :
 - Dérivabilité et continuité de f sur des intervalles de Df
 - Calcul de $f'(x)$
 - Etude du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x
 - Dérivabilité et continuité de f aux points particuliers
 - c- Limite de f aux bornes de Df
 - d- Tableau de variation de f
- **Représentation graphique de f :**
 - a- Axe ou centre de symétrie de (C)
 - b- Les asymptotes à la courbe (C)
 - c- Tangentes à (C) aux points particuliers
 - d- Construction de (C) :

- Intersection de (C) avec les axes :
 - $(C) \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$
 - $(C) \cap (Oy) \Leftrightarrow f(0)$
- Le tableau de valeur approché de $f(x)$
- Repère
- Unités graphiques.

➤ **Remarque :**

Pour des fonctions telles que les fonctions trigonométriques, on pourra étudier les particularités de f et de (C) :

- Parité ou périodicité de f

Axe ou centre de symétrie $\Rightarrow$ la restriction de f à un sous-ensemble de Df .

1°) Fonctions polynômes :

Exemple : Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f ;
- Calculer f' , dérivée de la fonction f ;
- Etudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de f ;
- Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x = -1$.
- Montrer que le point $I(-1, -2)$ est un centre de symétrie pour la courbe de f .
- Tracer dans un repère orthonormé, la tangente (T) et la courbe représentative (C) de f .

2°) Fonctions homographiques :

Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{2x+1}$.

- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f ;
- Donner une équation de chaque asymptote.
- Montrer que le point d'intersection des asymptotes à (C) est centre de symétrie pour (C) ;
- Etudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique.
- Soit (D) la droite de coefficient directeur m passant par le point $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
 - Avant tout calcul prévoir, d'après le graphique, le nombre de points de $(C) \cap (D)$ lorsque m est strictement négatif ;
 - Donner une équation de (D) ;
 - Calculer le nombre de points de $(C) \cap (D)$ lorsque m appartient à $\mathbb{R}^+$.

3°) Fonctions du type : $\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$

Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit la fonction $x \mapsto \frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

On désigne par (D) l'ensemble de définition de f et par (C) sa représentation graphique.

- Etudier le sens de variation de f ;
 - Préciser l'asymptote verticale à (C) ;
 - Déterminer l'asymptote oblique à (C) ;
 - Construire (C) .

2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes à (C) est un centre de symétrie pour (C) .

3) Résoudre graphiquement l'équation : $x \in \mathbb{R}, \frac{x^2+2x-3}{x-2} = m$ où m est un paramètre.

4°) Fonction sinus et fonctions cosinus :

Exemple : le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit la fonction $x \mapsto \sin(-2x + \frac{\pi}{6})$

1) a) montrer que f est une fonction périodique de période π .

b) Soit f' la fonction dérivée de f .

On considère l'équation $(E): x \in [0; \pi], f'(x) = 0$.

Montrer que (E) admet les deux solutions : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

c) Etudier le signe de $\cos(-2x + \frac{\pi}{6})$ dans chacun des cas suivants :

$$x \in [0; \frac{\pi}{3}], \quad x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}], \quad x \in [\frac{5\pi}{6}, \pi].$$

d) En déduire le sens de variation de la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction f . Donner son tableau de variation. Calculer $f'(0)$ et $f'(\pi)$.

e) On considère l'équation $(F): x \in [0, \pi], f(x) = 0$.

Montrer que (F) admet les deux solutions : $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

f) Donner un tableau de valeurs de $f|_{[0, \pi]}$.

2) Construire la représentation graphique de $f|_{[0, \pi]}$

En déduire celle de la fonction f .

3) Résoudre graphiquement

a) L'inéquation : $x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi], f(x) \geq -\frac{1}{2}$;

b) L'équation : $x \in [-\pi, \pi], f(x) = m$, où m est un paramètre.