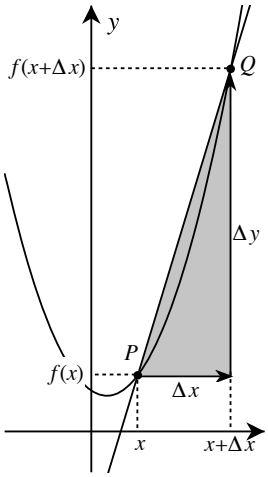
Thème 15: Dérivée d'une fonction, les règles de calcul

15.1 Les règles de dérivation

Introduction



Dans le chapitre précédent, nous nous sommes concentrés sur la recherche de la *pente de la tangente* en chaque point $P(x\,;f(x))$ d'une courbe donnée. Plusieurs démarches vous ont été présentées. La première était de type graphique suivie d'une méthode utilisant un calcul assez répétitif pour finalement nous amener à la définition suivante:

- La **dérivée** d'une fonction f est une **nouvelle fonction** f' définie par :

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{lorsque } \Delta x \to 0$$

Ceci se note plus formellement : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Cette méthode, reposant toujours sur un développement algébrique, n'est pas très efficace. Il est donc souhaitable de pouvoir utiliser des **règles générales** de dérivation.

Les *7 règles* de dérivation qui suivent se démontrent en utilisant systématiquement la formule ci-dessus. Nous nous contenterons de leur utilisation.

1ère règle: *Pour dériver x à une certaine puissance, on écrit l'exposant devant, on reproduit x avec l'exposant diminué de 1.*

dérivée d'une puissance

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Exemples :

1) $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$

2) $f(x) = x^7$ alors $f'(x) = 7x^6$

2ème règle: *La dérivée d'un nombre vaut 0.*

dérivée d'un nombre

$$f(x) = nbre \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Exemple : $f(x) = 10'000$ alors $f'(x) = 0$

3ème règle: *Pour dériver une expression du type "un nombre fois une fonction", on garde le nombre et on dérive la fonction.*

dérivée de nbre · fct

$$f(x) = nbre \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nbre \cdot g'(x)$$

Exemples :

1) $f(x) = 5x^4$ alors $f'(x) = 5\left(x^4\right)' = 5\left(4x^3\right) = 20x^3$

2) $f(t) = \frac{3}{4}t^2$ alors $f'(t) = \frac{3}{4}\left(t^2\right)' = \frac{3}{4}(2t) = \frac{6}{4}t = \frac{3}{2}t$

4ème règle: *La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.*
La dérivée d'une différence est la différence des dérivées.

dérivée d'une somme (diff.)

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Exemples

1) $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ alors $f'(x) = 10x + 2$

2) $f(s) = \frac{7}{5}s^3 + \frac{1}{2}s^2 + 4s + 7$ alors $f'(x) = \frac{21}{5}s^2 + s + 4$

Modèle 1 : Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous :

Les 4 premières règles de dérivation

a) $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) =$

b) $f(u) = 23$ alors $f'(u) =$

c) $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{2}{7}$ alors $g'(x) =$

d) $f(t) = -3t$ alors $f'(t) =$

e) $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 5x + 7)$ alors $f'(x) =$

f) $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{5}$ alors $f'(x) =$

Exercice 15.1: Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = 3x$ **b)** $f(t) = 7t^6$ **c)** $f(x) = \sqrt{2}\,x^7$

d) $f(x) = ax^2$ **e)** $f(x) = (m-1)x^2$ **f)** $f(x) = 56$

g) $f(x) = \frac{3}{4}x^4$ **h)** $g(u) = \frac{2}{5}u^2$ **i)** $f(x) = a^2$

Exercice 15.2: Déterminer une fonction f dont on donne sa dérivée f':

a) $f'(x) = 34x$ **b)** $f'(x) = x^3$

c) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$ **d)** $f'(x) = 0$

Exercice 15.3: Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = 3x + 6$ **b)** $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$ **d)** $f(x) = ax + b$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6$ **f)** $f(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$

g) $f(x) = \frac{1}{5}(3x^3 - 2x + 7)$ **h)** $f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 7}{5}$

i) $f(x) = \frac{-5x^3 + 3x^2 + 2}{6}$ **j)** $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 15.4: Déterminer une fonction f dont on donne sa dérivée f':

a) $f'(x) = x - 2$ **b)** $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

Exercice 15.5: On considère la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

a) Calculer sa dérivée.

b) Déterminer la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $P(2\,;f(2))$.

c) En quel point de cette courbe a-t-on une dérivée nulle ?

d) Esquisser graphiquement la situation après avoir cherché les zéros de $f(x)$.

Exercice 15.6: Mêmes questions pour $f(x) = -2x^2 + x + 15$.

5ème règle: *La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !!!!*

Il s'agit de la dérivée de la première · la deuxième + la première · la dérivée de la seconde.

dérivée d'un produit

Comment retenir des formules telles que celle-ci ?

- Certains plus « visuels » vont véritablement la photographier et seront capables de la « redessiner » quand le besoin s'en fera sentir.
- D'autres se l'écoutent dire, en utilisant une ritournelle ressemblant à celles qui vous sont également proposées.

À vous de trouver votre méthode.

$$f(x) = g(x)\cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$$

Exemple : $f(x) = (3x^2 - 2)(2x + 1)$

alors $f'(x) = \left(3x^2 - 2\right)'(2x+1) + \left(3x^2 - 2\right)(2x+1)'$

$= (6x)(2x + 1) + (3x^2 - 2)\cdot 2$

$= 12x^2 + 6x + 6x^2 - 4$

$= 18x^2 + 6x - 4 = 2(9x^2 + 3x - 2)$ **qui se factorise en**

$= 2(3x + 2)(3x - 1)$

Modèle 2 : Calculer la dérivée de $f(x) = 2(x^2 + 8)(x + 5)$.

La dérivée d'une multiplication

Exercice 15.7: Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = (x^2 - 3)(4x - 5)$ **b)** $f(x) = (x + 4)^2$

c) $f(x) = (x - 4)(3x + 2)$ **d)** $f(x) = (10x^2 - 1)(5x^2 - 2)$

e) $f(x) = (3x^2 + 4)(2x - 7)$ **f)** $f(x) = \frac{3}{2}(2x^2 - 5)(x^2 + 8)$

g) $f(x) = (2x + 1)(x - 4)(2x + 1)$ **h)** $f(x) = \frac{(3x - 2)(5x - 4)}{5}$

6ème règle: *La dérivée d'une "fraction" est:*

la dérivée du numérateur · le dénominateur – le numérateur · la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

dérivée d'une fraction

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Exemples : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-5}$

alors $f'(x) = \dfrac{(2x-3)'(x-5) - (2x-3)(x-5)'}{(x-5)^2}$

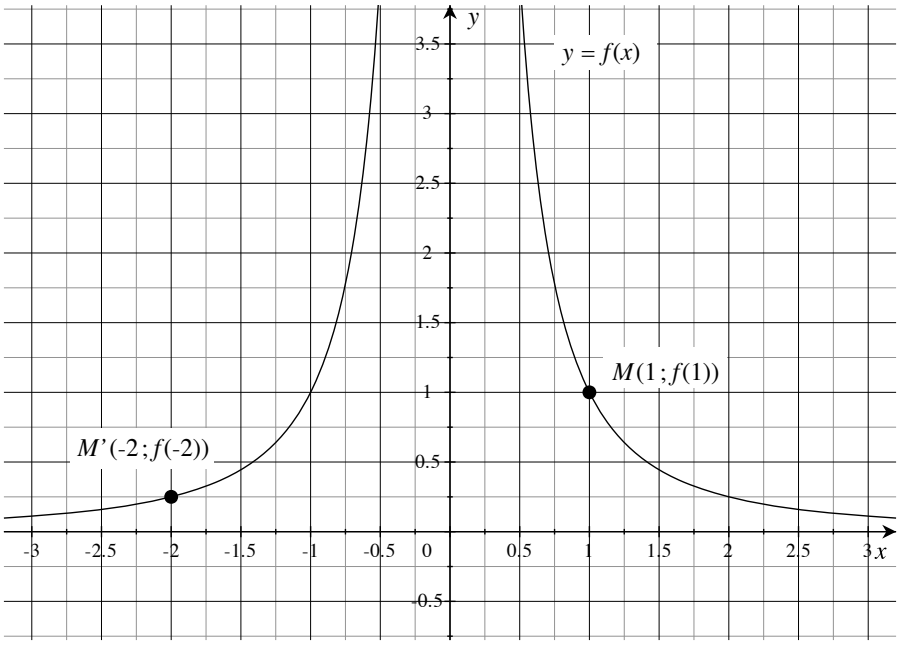
$= \dfrac{2(x-5) - (2x-3)1}{(x-5)^2}$

$= \dfrac{-7}{(x-5)^2}$

Modèle 3 : Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{1-x^2}{2x-1}$.

La dérivée d'une fraction

Exercice 15.16: Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ représentée ci-dessous.



- *1ère étape: À l'aide du graphique*

  a) Tracer la tangente à la courbe par le point $M(1\,;f\,(1))$.

  b) Déterminer grâce à ce graphique l'équation de la droite tangente à f en M.

- *2ème étape: À l'aide du calcul de la dérivée*

  c) Déterminer algébriquement la pente de la tangente au point $M(1\,;f\,(1))$.

  d) Déterminer algébriquement l'équation de la tangente à $f\,(x)$ au point M.

- *3ème étape : Réaliser les mêmes démarches pour le point $M'(-2\,;f\,(-2))$.*

- *4ème étape:*

  En quel point P de $y = f\,(x)$ la tangente à cette courbe admet-elle une pente -1/4. Compléter ensuite le graphique ci-dessus avec cette tangente.

Exercice 15.17: On considère la fonction $f(x) = x^2$.
Déterminer les coordonnées du point P sur la courbe $y = f(x)$ où la tangente admet une pente de –3.

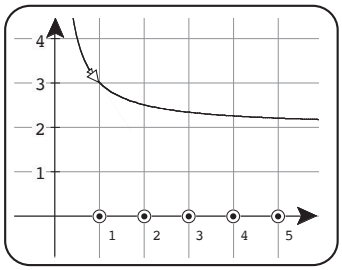
Exercice 15.18: On considère la fonction $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 1$.

a) Déterminer les coordonnées des points sur la courbe $y = f(x)$ où les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.

b) Déterminer l'équation de ces tangentes.

Exercice 15.19: On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
Déterminer les équations des tangentes au graphe de f dont la pente est m = -1/4.

Exercice 15.20: Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure, on peut voir un avion qui descend de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation $y = \dfrac{2x+1}{x}$ et qui tire des obus qui partent selon la tangente à la trajectoire de l'avion. Des cibles sont placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5.



Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en:

1) $P(1\ ;\ 3)$? **2)** $Q(\frac{3}{2};\frac{8}{3})$?

Indication : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point P puis chercher les points de cette tangente situés à la hauteur y = 0.