

On rapporte le plan à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur D_f . On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans ce repère.

Par la suite, le symbole « * » désigne « + » ou « - ».

1 Introduction

En Français, une asymptote est, dans un langage soutenu, *un but vers lequel on tend sans jamais espérer l'atteindre*. La notion mathématique d'asymptote s'est d'abord appuyée sur cette définition littéraire puis a évolué au fil du temps pour se donner un sens plus moderne. Mathématiquement parlant, une asymptote est une notion graphique s'appuyant sur celle de limites.

Définition 1.1 Une courbe asymptote est une courbe de « tendance », courbe dont la représentation graphique d'une fonction va se rapprocher vers l'infini en la coupant éventuellement, les deux courbes pouvant même se confondre.

Au lycée, on parle de *droite asymptote* en omettant même la plupart du temps le terme de droite. On distingue principalement trois types d'asymptotes :

- asymptote horizontale ;
- asymptote verticale ;
- asymptote oblique.

2 Asymptote horizontale

Définition 2.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $\Delta(y = a)$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si :

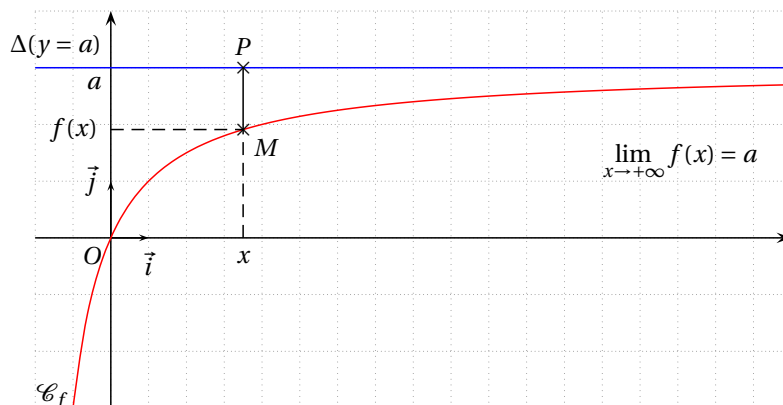
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Interprétation graphique :

Soient M et P les points d'abscisse x situés respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et Δ . Ces points ont pour ordonnées respectives $f(x)$ et a . La distance PM a pour expression :

$$|f(x) - a|$$

D'après la définition 2.1, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, la distance PM tend vers 0. $\mathcal{C}_f$ se rapproche alors très intimement de Δ .



Remarque. On parle d'asymptote horizontale lorsqu'en calculant une limite en l'infini, on trouve un résultat fini. Sa détermination découle donc directement du calcul des limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

La droite $\Delta(y = 2)$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

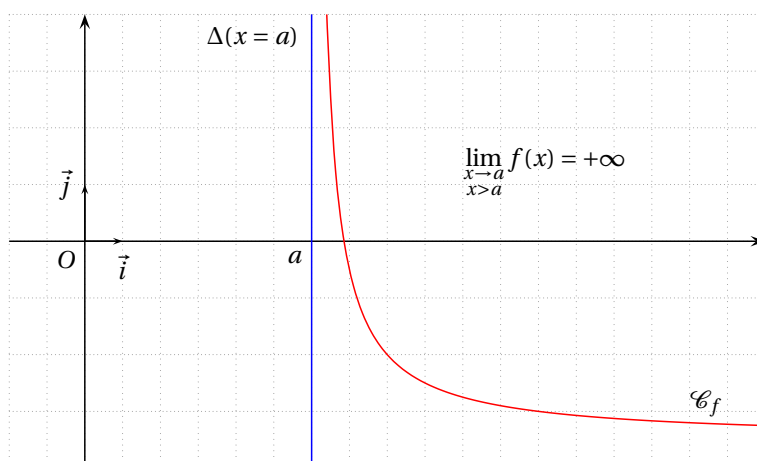
3 Asymptote verticale

Définition 3.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $\Delta(x = a)$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique :

D'après la définition 3.1, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de a , $f(x)$ prend, en valeur absolue, des valeurs aussi grandes que l'on souhaite. $\mathcal{C}_f$ se rapproche alors très intimement de Δ .



Remarques. • On parle d'asymptote verticale lorsqu'en calculant une limite en une valeur finie, on trouve un résultat infini. Sa détermination découle, comme dans le cas d'une asymptote horizontale, directement du calcul des limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- Dire que a est une valeur interdite de la fonction f ne suffit pas pour avoir une asymptote verticale. Il faut aussi que la limite soit infinie en cette valeur.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x+4 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x+2 = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient,} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x+4 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x+2 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient,} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty \end{array}$$

La droite $\Delta(x = -2)$ est donc asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

4 Asymptote oblique

Définition 4.1 Soit a et b deux réels ($a \neq 0$). On dit que la droite $\Delta(y = ax + b)$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si :

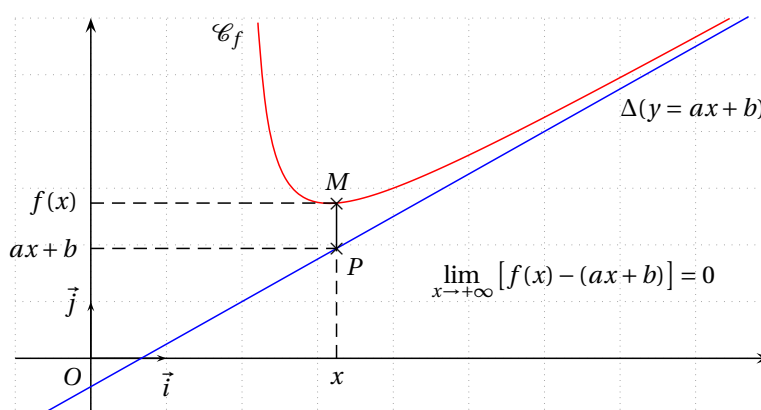
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Interprétation graphique :

Soient M et P les points d'abscisse x situés respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et Δ . Ces points ont pour ordonnées respectives $f(x)$ et $ax + b$. La distance PM a pour expression :

$$|f(x) - (ax + b)|$$

D'après la définition 4.1, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, la distance PM tend vers 0. $\mathcal{C}_f$ se rapproche alors très intimement de Δ .



Remarque. Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ sans que sa courbe ne possède une asymptote oblique (c'est le cas, par exemple, de la fonction carré).

Point méthode Pour démontrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative d'une fonction f au voisinage de $+\infty$:

- ① on exprime $f(x) - (ax + b)$ en fonction de x ;
- ② on montre que la limite de cette différence en $+\infty$ est égale à 0.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x}$. Montrer que la droite $\Delta(y = x - 2)$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

① On commence par établir l'expression algébrique de $f(x) - (x - 2)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) - (x - 2) = x - 2 + \frac{3}{x} - (x - 2) = \frac{3}{x}$.

② On calcule ensuite les limites en l'infini de $f(x) - (x - 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$$

La droite $\Delta(y = x - 2)$ est donc asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.