

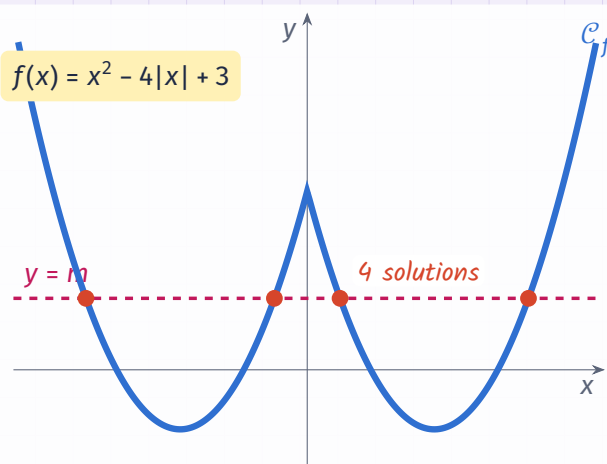
Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur f paire : $f(-x) = f(x)$; f impaire : $f(-x) = -f(x)$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Défi de concours $x^2 - 4|x| + 3 = m$: combien de solutions ? Et $f(f(x)) = 0$?*Une courbe, une droite : combien de points communs ?*

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	19 Niveau 4 · Concours	27
1 Fonction et domaine de définition	5	20 Domaines et lectures graphiques	29
2 Égalité, courbe représentative	6	21 Parité	31
3 Fonctions paires et impaires	8	22 Majorants, minorants, extremums	32
4 Majorée, minorée, bornée	9	23 Sens de variation	34
5 Les extremums	10	24 Fonctions usuelles et composées	36
6 Le sens de variation	11	25 Défis de concours	37
7 Variations et parité	13	26 Corrigés du niveau 1	40
8 Comparer, résoudre graphiquement	14	27 Corrigés du niveau 2	42
9 La fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$	15	28 Corrigés du niveau 3	45
10 La fonction homographique	16	29 Corrigés du niveau 4	48
11 Les fonctions $\sqrt{x+a}$ et ax^3	17	30 Corrigés : domaines et lectures	50
12 Composée de deux fonctions	18	31 Corrigés : parité et symétries	53
13 Les pièges classiques	19	32 Corrigés : majorants, extremums	57
14 Les astuces des concours	20	33 Corrigés : sens de variation	60
15 L'essentiel du chapitre en une page	22	34 Corrigés : usuelles et composées	63
16 Niveau 1 · Bases	23	35 Corrigés : défis de concours	67
17 Niveau 2 · Bac	24	26 Corrigé du test d'entrée	70
18 Niveau 3 · Approfondissement	26		

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

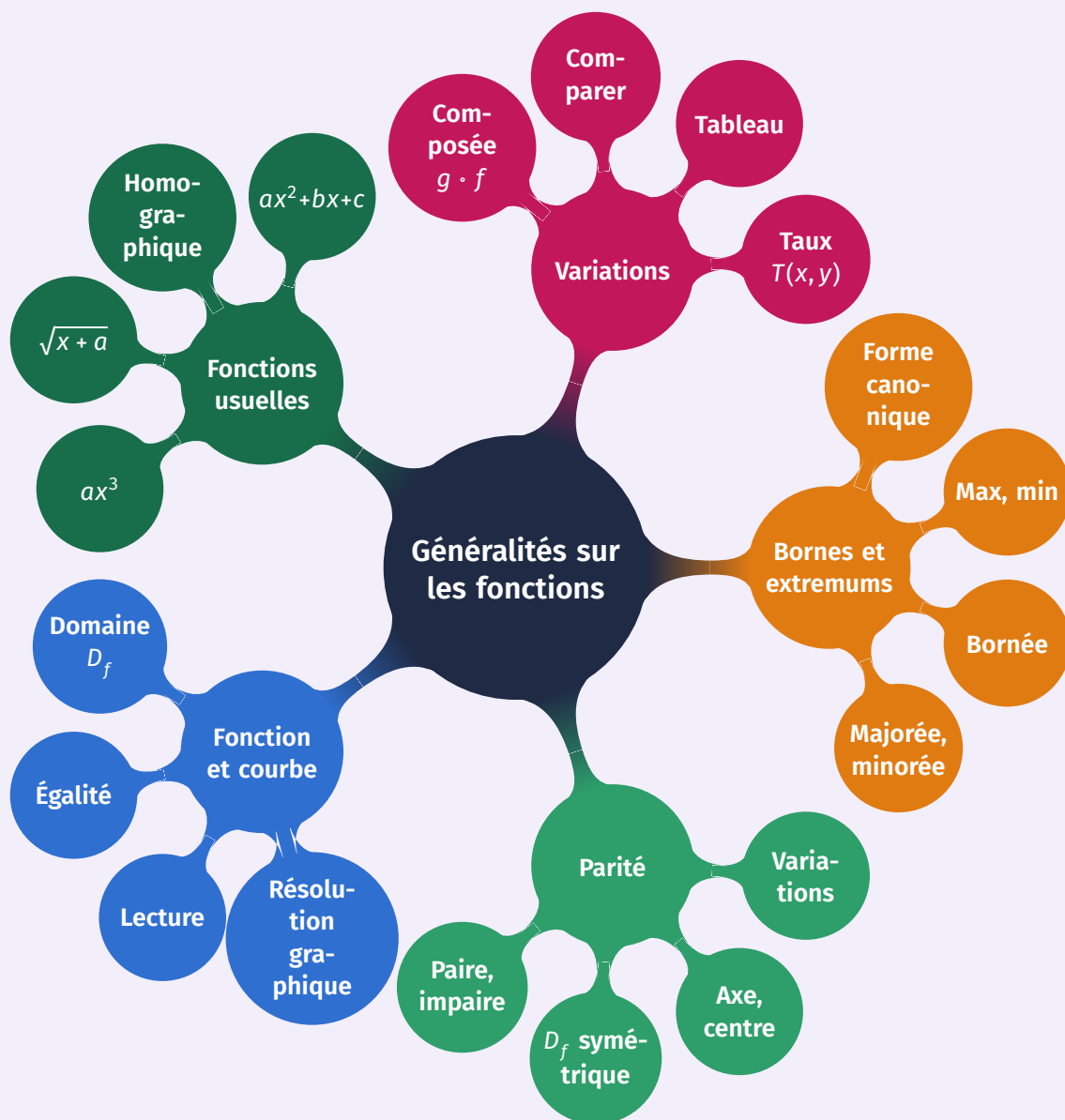
Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Domaines et lectures graphiques, Parité, Majorants, minorants, extremums, Sens de variation, Fonctions usuelles et composées, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|--|
| ☐ trouver le domaine de définition ; | ☐ dresser et lire un tableau de variations ; |
| ☐ reconnaître deux fonctions égales ; | ☐ déduire les variations par parité ; |
| ☐ lire images, antécédents et signe sur une courbe ; | ☐ comparer deux fonctions, deux courbes ; |
| ☐ étudier la parité, compléter une courbe ; | ☐ résoudre graphiquement $f(x) = m, f(x) \leq g(x)$; |
| ☐ majorer, minorer, encadrer une fonction ; | ☐ étudier une parabole et une hyperbole ; |
| ☐ trouver un extremum par la forme canonique ; | ☐ utiliser $\sqrt{x + a}$ et ax^3 ; |
| ☐ étudier les variations avec le taux $T(x, y)$; | ☐ étudier une composée $g \circ f$. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point sur tes acquis du **tronc commun** utiles au chapitre ; aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : **page 70**.

Bloc 1 · Calcul algébrique

___ / 4

① Factoriser Factoriser le plus possible
 $A = (x - 3)^2 - 16$ et $B = x^3 - 4x^2 + 4x$.

② Fractions (a) Pour $x \neq \pm 1$, écrire $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ en une seule fraction. (b) Trouver le réel k tel que $\frac{5-6x}{3x-1} = -2 + \frac{k}{3x-1}$ pour tout $x \neq \frac{1}{3}$.

③ Forme canonique (a) Écrire $-2x^2 + 8x - 3$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. (b) En déduire que $-2x^2 + 8x - 3 \leq 5$ pour tout réel x .

④ Avec deux lettres a et b sont réels.
 (a) Factoriser $a^2 - b^2 + 2(a - b)$. (b) Pour $a \neq -1$ et $b \neq -1$, réduire $\frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}$.

Bloc 2 · Équations, inéquations, signes

___ / 4

⑤ Second degré (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x^2 + x - 6 = 0$. (b) En déduire une factorisation de $2x^2 + x - 6$.

⑥ Signe d'un trinôme Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 (a) $x^2 + x - 20 \leq 0$; (b) $9x^2 + 6x + 1 > 0$.

⑦ Un quotient Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\frac{x+3}{x-1} \geq 2$ ($x \neq 1$) ; écrire les solutions avec un intervalle.

⑧ Valeur absolue Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 (a) $|3x + 2| < 4$; (b) $|x - 4| = |x + 2|$.

Bloc 3 · Fonctions du tronc commun

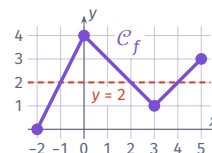
___ / 4

⑨ Fonction affine f est affine, $f(-2) = 7$ et $f(4) = -2$. (a) Donner $f(x)$. (b) Résoudre $f(x) > 1$.

⑩ La fonction $x \mapsto ax^2$ $f(x) = ax^2$; sa courbe passe par $A(6; -12)$. (a) Trouver a .
 (b) Résoudre $f(x) \leq -3$.

⑪ La fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ $g(x) = \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$) ; sa courbe passe par $A(-4; 1,5)$. (a) Trouver a .
 (b) Points communs à cette courbe et à la droite $y = x - 5$?

⑫ Lire une courbe
 Ci-contre : la courbe $\mathcal{C}_f$ de f sur $[-2, 5]$ et la droite $y = 2$. (a) Lire $f(-1)$, $f(0)$ et $f(3)$. (b) Pour quels x la courbe est-elle strictement au-dessus de la droite ?



Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 70**.

Bloc 1
___ / 4

+

Bloc 2
___ / 4

+

Bloc 3
___ / 4

=

Mon score
___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Fonction et domaine de définition

Au tronc commun, tu as étudié trois fonctions de référence : $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto ax^2$ (définies sur $\mathbb{R}$), $x \mapsto \frac{a}{x}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$). Ce chapitre donne le **vocabulaire commun** à toutes les fonctions (domaine, courbe, parité, bornes, extremums, sens de variation) et des **méthodes pas à pas**, sans calcul savant, pour les étudier et les représenter.

Définition : fonction numérique, image, antécédent, domaine

Une **fonction numérique d'une variable réelle** f associe à chaque réel x **au plus un** réel, noté $f(x)$ et appelé **l'image** de x par f . Si $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent** de y . Le **domaine de définition** de f est l'ensemble des réels qui ont une image : $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \text{ existe}\}$.

Exemple. $f(x) = x^2 - 3$: l'image de -2 est $f(-2) = 4 - 3 = 1$; les antécédents de 6 sont les solutions de $x^2 - 3 = 6$, soit $x^2 = 9$: 3 et -3 ; -5 n'a **aucun** antécédent, car $x^2 - 3 \geq -3$ pour tout réel x . Un réel a **une seule** image, mais il peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

si l'expression contient...	on impose...
un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
une racine $\sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
une racine en bas $\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$ (strict)
un polynôme, $ A(x) $	aucune condition
plusieurs morceaux	toutes les conditions

Méthode : Comment trouver le domaine de définition

1. Repérer les dénominateurs et les racines carrées. **2.** Écrire **une condition** pour chacun (tableau ci-contre). **3.** Résoudre chaque condition (second degré, signe d'un trinôme, valeur absolue). **4.** Garder les réels qui vérifient **toutes** les conditions (intersection) et conclure « $D_f = \dots$ » avec des intervalles. **5.** Contrôler avec une valeur.

Exemple : huit domaines, rédigés comme sur une copie

- $f_1(x) = 3x^2 - 5x + 1$, polynôme : $D_{f_1} = \mathbb{R}$. $f_4(x) = \sqrt{3x+12}$: $3x+12 \geq 0 \iff x \geq -4$, $D_{f_4} = [-4, +\infty[$.
- $f_2(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$: on impose $x^2-5x+6 \neq 0$; $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $\frac{5-1}{2} = 2$ et $\frac{5+1}{2} = 3$: $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.
- $f_3(x) = \frac{2x+3}{x^2+2x+5}$: $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, le dénominateur ne s'annule jamais (d'ailleurs

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 \geq 4 : D_{f_3} = \mathbb{R}.$$

• $f_5(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$: 1 est racine ($1 + 1 - 2 = 0$) et le produit des racines vaut -2 , donc l'autre racine est -2 ; le trinôme ($a = 1 > 0$) est positif à l'**extérieur** des racines : $D_{f_5} =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

• $f_6(x) = \frac{x+1}{\sqrt{10-2x}}$: racine au dénominateur, condition **stricte** : $10 - 2x > 0 \iff x < 5$: $D_{f_6} =]-\infty, 5[$.

• $f_7(x) = \frac{1}{|x| - 2}$: $|x| - 2 \neq 0 \iff |x| \neq 2 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$: $D_{f_7} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Deux conditions à la fois. $f_8(x) = \sqrt{12 - 3x} + \frac{2}{x+1}$: il faut $12 - 3x \geq 0$, soit $x \leq 4$, **et** $x + 1 \neq 0$, soit $x \neq -1$. On garde les réels qui vérifient les deux (figure) : $D_{f_8} =]-\infty, -1[\cup]-1, 4]$. Contrôle : $f_8(0) = \sqrt{12} + 2$ existe ; $f_8(5)$ et $f_8(-1)$ n'existent pas.



point plein : compris ; point vide : exclu

Exemple : en physique, la situation fixe le domaine

Une balle lancée verticalement depuis le sol à 20 m/s (avec $g \approx 10 \text{ m/s}^2$) est à l'altitude $h(t) = -5t^2 + 20t$ (en m, t en s). La formule a un sens pour tout réel t , mais le mouvement n'existe que pour $t \geq 0$ et tant que la balle est en l'air : $h(t) \geq 0 \iff 5t(4-t) \geq 0 \iff 0 \leq t \leq 4$. Le **domaine d'étude** est $[0, 4]$.

Remarque. Un peu d'histoire. Le mot *fonction* apparaît chez **Leibniz** à la fin du ^{xvii}^e siècle, pour des grandeurs attachées aux points d'une courbe. **Euler**, dans son *Introductio in analysin infinitorum* (1748), appelle fonction une *expression analytique* formée d'une variable et de constantes. En 1837, **Dirichlet** donne la définition moderne : à chaque x correspond un seul y , *peu importe la manière* dont on l'obtient. Sa célèbre fonction, égale à 1 si x est rationnel et à 0 sinon, n'a pas de formule simple et ne peut pas être dessinée.

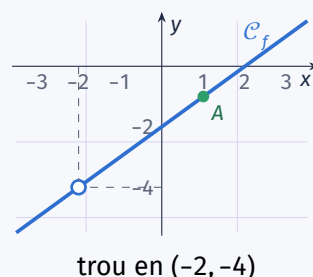
2 Égalité, courbe représentative

Définition : égalité de deux fonctions

$f = g \iff D_f = D_g$ **et** pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$. (Deux conditions : même domaine, mêmes images.)

Exemple : égales ou non ?

- $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ et $g(x) = x - 2$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $D_g = \mathbb{R}$, donc $f \neq g$. Pourtant, pour $x \neq -2$, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$: f et g ont les mêmes images sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et $\mathcal{C}_f$ est la droite $y = x - 2$ **privée du point** $(-2, -4)$ (figure).
- $u(x) = \sqrt{x^2}$ et $v(x) = |x|$: $D_u = D_v = \mathbb{R}$ et $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x : $u = v$.
- $w(x) = (\sqrt{x})^2$ et $i(x) = x$: $w(x) = x$ pour $x \geq 0$, mais $D_w = [0, +\infty[\neq \mathbb{R} = D_i$: $w \neq i$.



Règle : on calcule le domaine **avant** de simplifier : une simplification peut faire disparaître une valeur interdite.

 Définition : courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) ; x \in D_f\}$; son **équation** est $y = f(x)$: $M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff (a \in D_f \text{ et } b = f(a))$.
Une droite verticale coupe $\mathcal{C}_f$ en **au plus un** point.

Un point est-il sur la courbe ? Avec $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$: $A(1, -1)$: $1 \in D_f$ et $f(1) = \frac{-3}{3} = -1$, donc $A \in \mathcal{C}_f$; $B(-2, -4)$: $-2 \notin D_f$, donc $B \notin \mathcal{C}_f$ (c'est le trou) ; $C(3, 2)$: $f(3) = 1 \neq 2$, donc $C \notin \mathcal{C}_f$.

pour trouver...	je regarde sur la figure...
l'image $f(a)$	l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a
les antécédents de k (les solutions de $f(x) = k$)	les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = k$
le signe de $f(x)$	où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus (+) ou au-dessous (-) de l'axe des abscisses
les solutions de $f(x) > k$	les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement au-dessus de la droite $y = k$
D_f ; l'ensemble des images	l'« ombre » de $\mathcal{C}_f$ sur l'axe des abscisses ; sur l'axe des ordonnées

 Exemple : lire la courbe d'une fonction f définie sur $[-4, 5]$

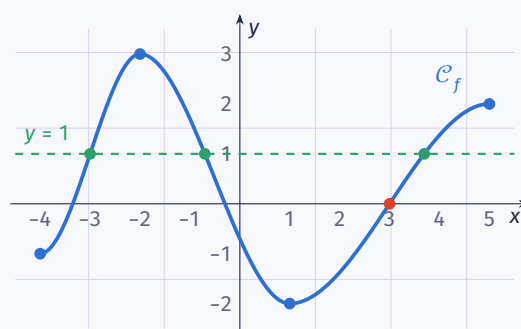
Images. $D_f = [-4, 5]$; $f(-4) = -1$, $f(-3) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = -2$, $f(3) = 0$, $f(5) = 2$.
L'ensemble des images est $[-2, 3]$.

Antécédents. La droite $y = 1$ coupe $\mathcal{C}_f$ en **trois** points : 1 a trois antécédents, -3 et deux autres, voisins de -0,7 et de 3,7 (lecture **approchée**). 3 a un seul antécédent, -2 ; -3 n'en a aucun.

Signe. $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $a \approx -3,3$, $b \approx -0,3$ et 3 : $f(x) > 0$ sur $]a, b[\cup]3, 5]$, $f(x) < 0$ sur $[-4, a[\cup]b, 3[$.

Nombre de solutions de $f(x) = m$ (on fait « glisser » la droite horizontale $y = m$ de bas en haut) :

m	$m < -2$	$m = -2$	$-2 < m < -1$	$-1 \leq m \leq 2$	$2 < m < 3$	$m = 3$	$m > 3$
solutions	0	1 ($x = 1$)	2	3	2	1 ($x = -2$)	0



Attention aux bornes : pour $m = -1$, le point $(-4, -1)$ compte (il est sur la courbe) : trois solutions, dont -4 .

3 Fonctions paires et impaires

Une partie D de $\mathbb{R}$ est **symétrique par rapport à 0** lorsque, pour tout $x \in D$, $-x \in D$: c'est le cas de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $[-3, 3]$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, mais pas de $[-2, 3]$ ($3 \in D$, $-3 \notin D$) ni de $[0, +\infty[$.

Définition : fonction paire, fonction impaire

f est **paire** lorsque D_f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

f est **impaire** lorsque D_f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique (repère orthogonal)

f est paire $\iff \mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. f est impaire $\iff \mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O . Si f est impaire et $0 \in D_f$, alors $f(0) = 0$.

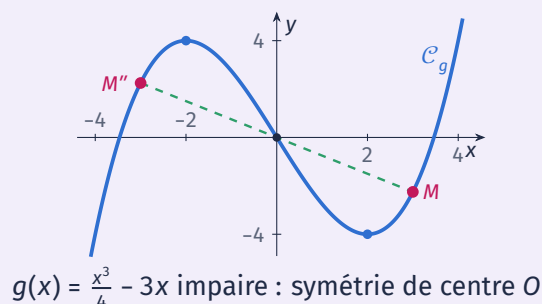
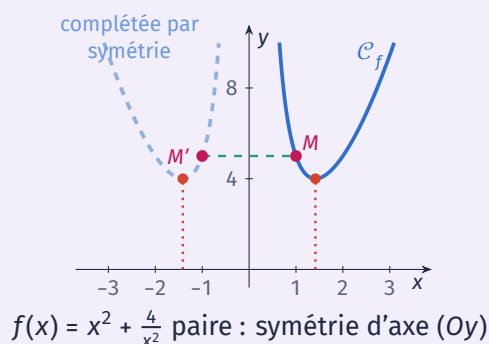
Démonstration. Les symétriques de $M(x, y)$ par rapport à (Oy) et à O sont $M'(-x, y)$ et $M''(-x, -y)$. Si f est paire, $y = f(x) \iff y = f(-x)$, donc $M \in \mathcal{C}_f \iff M' \in \mathcal{C}_f$; si f est impaire, $y = f(x) \iff -y = f(-x)$, donc $M \in \mathcal{C}_f \iff M'' \in \mathcal{C}_f$. Enfin, si f est impaire, $f(0) = f(-0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$. $\square$

Méthode : Comment étudier la parité

1. Le domaine. Calculer D_f et vérifier qu'il est symétrique. Sinon, donner un réel $a \in D_f$ tel que $-a \notin D_f$: f n'est **ni paire ni impaire**. **2. Le calcul.** Pour $x \in D_f$, calculer $f(-x)$ en remplaçant **chaque** x par $(-x)$, avec des parenthèses : $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^3 = -x^3$, $|-x| = |x|$. Comparer à $f(x)$ et à $-f(x)$. **3. Pour réfuter, un contre-exemple suffit :** un réel a tel que $f(-a) \neq f(a)$ (pas paire), ou $f(-a) \neq -f(a)$ (pas impaire).

Exemple : six fonctions

- $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$: $D_f = \mathbb{R}^*$ est symétrique et $f(-x) = (-x)^2 + \frac{4}{(-x)^2} = x^2 + \frac{4}{x^2} = f(x)$: f est **paire**.
- $g(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$: $D_g = \mathbb{R}$ et $g(-x) = \frac{(-x)^3}{4} - 3(-x) = -\frac{x^3}{4} + 3x = -g(x)$: g est **impaire**.
- **Le fil rouge du cours :** $\varphi(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$: $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, donc $D_\varphi = \mathbb{R}$, et $\varphi(-x) = \frac{8}{(-x)^2 + 4} = \varphi(x)$: φ est **paire** (figure de la section 4).
- $h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$: $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ est symétrique et $h(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -h(x)$: h est **impaire**.
- $k(x) = \sqrt{x + 6}$: $D_k = [-6, +\infty[$; $7 \in D_k$ mais $-7 \notin D_k$: k n'est **ni paire ni impaire**.
 $\ell(x) = 2x^2 + x$: $D_\ell = \mathbb{R}$ est symétrique, mais $\ell(1) = 3$ et $\ell(-1) = 1$: $\ell(-1) \neq \ell(1)$ (pas paire) et $\ell(-1) \neq -\ell(1)$ (pas impaire) : **ni l'une ni l'autre**.



En pratique : si f est paire ou impaire, on l'étudie seulement sur $D_f \cap [0, +\infty[$, puis on **complète la courbe par symétrie** (à gauche, la partie en pointillés est obtenue par symétrie d'axe (Oy)).

Remarques. Une fonction à la fois paire et impaire vérifie $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$: c'est la fonction nulle. Une fonction paire n'a aucune raison de s'annuler en 0 : $\varphi(0) = 2$.

4

Majorée, minorée, bornée

Définition : fonction majorée, minorée, bornée sur une partie I de D_f

f est **majorée** sur I lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$ (M est un majorant de f sur I) ;

f est **minorée** sur I lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$; f est **bornée** sur I lorsqu'elle est majorée et minorée.

Graphiquement, au-dessus de I , la courbe est sous la droite $y = M$, au-dessus de la droite $y = m$, ou dans la bande comprise entre elles.

Propriété

f est bornée sur $I \iff$ il existe un réel $K \geq 0$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq K$.

Démonstration. Si $|f(x)| \leq K$, alors $-K \leq f(x) \leq K$. Réciproquement, si $m \leq f(x) \leq M$, on prend $K = \max(|m|, |M|)$: $f(x) \leq M \leq K$ et $f(x) \geq m \geq -|m| \geq -K$. $\square$

À retenir. Un majorant n'est pas unique : si M convient, $M+1$ aussi. Le majorant M est choisi **avant** x et ne dépend pas de x . **Négation :** f n'est pas majorée sur $I \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$.

Méthode : Comment majorer ou minorer une fonction

- Un carré est positif :** écrire une forme canonique, puis utiliser $(\dots)^2 \geq 0$.
- Encadrer pas à pas :** partir de « $x \in I$ » et appliquer les opérations **dans l'ordre du calcul de $f(x)$** ; multiplier par un négatif ou passer à l'inverse (de nombres de même signe) **change le sens** des inégalités.
- Inégalités connues :** $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $x^2 \geq 0$, $|x| \geq 0$.
- Quotient de nombres positifs :** majorer le numérateur **et** minorer le dénominateur.
- Non majorée :** « Soit $M \in \mathbb{R}$ », puis construire un x tel que $f(x) > M$.

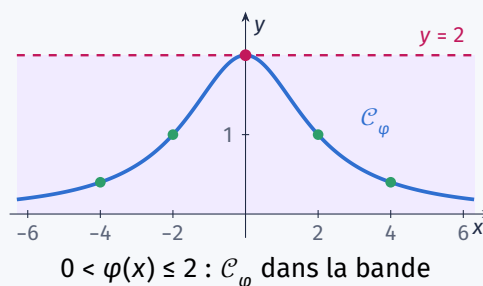
Exemple : quatre situations

1. Avec un sinus. $f(x) = 4 - 3 \sin x$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-3 \leq -3 \sin x \leq 3$ (on multiplie par $-3 < 0$: le sens change), puis $1 \leq f(x) \leq 7$: f est bornée sur $\mathbb{R}$. **En physique**, une tension alternative $u(t) = 12 \sin(100\pi t)$ vérifie $|u(t)| \leq 12$: sur l'écran de l'oscilloscope, la courbe reste dans la bande $-12 \leq u \leq 12$.

2. Le fil rouge. Pour tout réel x , $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, donc $0 < \frac{8}{x^2+4} \leq \frac{8}{4}$: $0 < \varphi(x) \leq 2$; φ est bornée (figure).

3. Minorée, non majorée. $g(x) = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3$: g est minorée par 3 sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas majorée : soit $M \in \mathbb{R}$; le réel $x = 1 + \sqrt{|M|}$ vérifie $g(x) = |M| + 3 > M$.

4. Encadrer sur un intervalle. $h(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ sur $[0, 2]$. *Méthode rapide* : $1 \leq 2x+1 \leq 5$ et $3 \leq x+3 \leq 5$, donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{3}$, puis (produit de nombres positifs) $\frac{1}{5} \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$. *Mieux* : $2x+1 = 2(x+3) - 5$, donc $h(x) = 2 - \frac{5}{x+3}$, où x n'apparaît qu'une fois : $3 \leq x+3 \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq -\frac{5}{x+3} \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq h(x) \leq 1$, et ces bornes sont atteintes : $h(0) = \frac{1}{3}$, $h(2) = 1$.



5 Les extremums

 Définition : maximum, minimum, extremum ($I \subset D_f$, $a \in I$)

$f(a)$ est le **maximum** de f sur I lorsque $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$; c'est le **minimum** lorsque $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$. Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

$f(a)$ est un **maximum relatif** (ou local) lorsqu'il existe un intervalle ouvert J contenant a , inclus dans D_f , tel que $f(a)$ est le maximum de f sur J . De même pour un **minimum relatif**.

Un maximum est un majorant atteint : M est le maximum de f sur $I \iff (\forall x \in I, f(x) \leq M)$ et $(\exists a \in I, f(a) = M)$.

Lecture graphique (courbe de la section 2) : sur $[-4, 5]$, f admet un **maximum 3 atteint en -2** et un **minimum -2 atteint en 1**. Sur $[2, 5]$, le minimum est $f(2)$ et le maximum $f(5) = 2$. Sur $[-4, 0]$, le minimum est $f(-4) = -1$: un extremum peut être atteint **au bord** de l'intervalle.

Méthode : Comment trouver un extremum

1. Conjecturer une valeur M (ou m) et un point a (tableau de valeurs, courbe, forme canonique). **2. Démontrer l'inégalité** $f(x) \leq M$ (ou $f(x) \geq m$) **pour tout** $x \in I$, en étudiant le signe de $f(x) - M$. **3. Démontrer qu'elle est atteinte** : trouver $a \in I$ tel que $f(a) = M$. **4. Conclure** : « f admet sur I un maximum égal à M , atteint en a ». **Sans l'étape 3, M n'est qu'un majorant.**

 Exemple : par la forme canonique : $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$

$f(x) = 3(x^2 + 4x) + 7 = 3[(x+2)^2 - 4] + 7 = 3(x+2)^2 - 5$. Un carré est positif, donc $f(x) \geq -5$ pour tout réel x , avec égalité si et seulement si $x = -2$: f admet sur $\mathbb{R}$ un **minimum égal à -5**.

-5, **atteint en** -2. Elle n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas majorée).

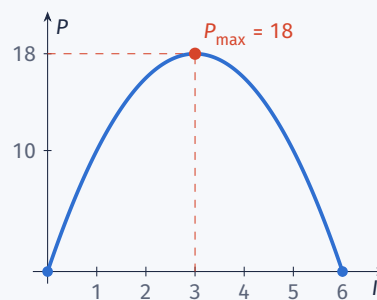
Sur $[0, 1]$, **le minimum n'est pas** -5 : le sommet -2 n'est pas dans $[0, 1]$. Si $0 \leq x \leq 1$, alors $2 \leq x+2 \leq 3$, donc $4 \leq (x+2)^2 \leq 9$ et $7 \leq f(x) \leq 22$: minimum $7 = f(0)$, maximum $22 = f(1)$.

Exemple : en électricité : la puissance maximale (loi d'Ohm)

Un générateur de force électromotrice $E = 12 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 2 \Omega$ débite un courant d'intensité I (en A). La loi d'Ohm pour un générateur donne la tension à ses bornes $U = E - rI = 12 - 2I$, avec $U \geq 0$, soit $I \in [0, 6]$. La puissance fournie au circuit extérieur est

$$P(I) = UI = 12I - 2I^2 = -2(I^2 - 6I) = -2(I - 3)^2 + 18.$$

Donc $P(I) \leq 18$, avec égalité pour $I = 3$: la **puissance maximale** est **18 W**, obtenue pour $I = 3 \text{ A}$ (et $U = 6 \text{ V}$: la moitié de E). Le minimum sur $[0, 6]$ est 0, atteint en 0 et en 6.



Exemple : un majorant qui n'est pas un maximum : $k(x) = \frac{3x}{x+2}$ sur $[0, +\infty[$

$3x = 3(x+2) - 6$, donc $k(x) = 3 - \frac{6}{x+2}$. Si $x \geq 0$, alors $x+2 \geq 2$, donc $0 < \frac{6}{x+2} \leq 3$ et $0 \leq k(x) < 3$.

Minimum : $k(0) = 0$. **Pas de maximum** : 3 est un majorant, mais $k(x) = 3$ est impossible ($\frac{6}{x+2} \neq 0$). Mieux, aucun réel $M < 3$ n'est un majorant : $k(x) > M \iff \frac{6}{x+2} < 3 - M \iff x > \frac{6}{3-M} - 2$, et de tels $x \geq 0$ existent. **De même**, le fil rouge φ a un maximum ($\varphi(0) = 2$) mais **pas de minimum** : 0 minore φ sans être atteint.

6 Le sens de variation

Définition : sens de variation sur un intervalle I inclus dans D_f

Pour tous x, y de I : f est **croissante** sur I lorsque $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$; **strictement croissante** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;

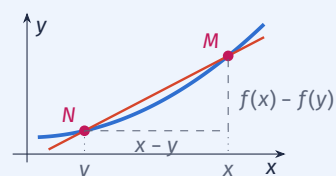
décroissante sur I lorsque $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$; **strictement décroissante** si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. f est **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I ; **constante** si $f(x) = f(y)$ pour tous x, y de I . Croissante : la courbe « monte » de gauche à droite ; décroissante : elle « descend ».

Définition : taux de variation

Pour deux réels distincts x et y de D_f , le **taux de variation** de

f entre x et y est $T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. On a $T(x, y) = T(y, x)$;

c'est le **coefficient directeur** de la droite (MN) , où $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ (figure) : si $T > 0$, la corde (MN) « monte ».



Théorème (signe du taux de variation et monotonie, I intervalle inclus dans D_f)

f est strictement croissante sur $I \iff T(x, y) > 0$ pour tous $x \neq y$ de I ; croissante $\iff T(x, y) \geq 0$;

f est strictement décroissante sur $I \iff T(x, y) < 0$; décroissante $\iff T(x, y) \leq 0$;
constante $\iff T(x, y) = 0$.

Démonstration (cas strictement croissant). Si f est strictement croissante et $x \neq y$, on peut supposer $x < y$ (car $T(x, y) = T(y, x)$) : $f(x) < f(y)$, le numérateur et le dénominateur de T sont négatifs, donc $T(x, y) > 0$. Réciproquement, si $T > 0$ et $x < y$, alors $f(x) - f(y) = T(x, y)(x - y) < 0$. $\square$

Méthode : Comment étudier le sens de variation avec le taux de variation

1. Écrire : « Soit x et y deux réels distincts de I . »
2. Calculer $f(x) - f(y)$ et **faire apparaître le facteur $x - y$** : $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$; $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy}$; $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$; $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.
3. Simplifier $T(x, y)$ par $x - y$.
4. Trouver le **signe** de $T(x, y)$ en utilisant que x et y sont dans I .
5. Conclure, puis dresser le **tableau de variations**.

Exemple : trois études complètes

1. $f(x) = 5 - 2x$: $T(x, y) = \frac{(5-2x)-(5-2y)}{x-y} = \frac{-2(x-y)}{x-y} = -2 < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. **Le fil rouge** sur $[0, +\infty[$. Soit $x \neq y$ dans $[0, +\infty[$:

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \frac{8(y^2 + 4) - 8(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)} = \frac{-8(x - y)(x + y)}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)}, \quad \text{donc} \quad T(x, y) = \frac{-8(x + y)}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)}.$$

Comme $x \geq 0, y \geq 0$ et $x \neq y$, on a $x + y > 0$, donc $T(x, y) < 0$: φ est **strictement décroissante** sur $[0, +\infty[$.

3. $k(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$. Soit $x \neq y$ strictement positifs :

$$k(x) - k(y) = (x^2 - y^2) + \frac{4(y^2 - x^2)}{x^2 y^2} = (x^2 - y^2) \frac{x^2 y^2 - 4}{x^2 y^2}, \quad \text{d'où} \quad T(x, y) = \frac{(x + y)(xy - 2)(xy + 2)}{x^2 y^2},$$

du signe de $xy - 2$ (car $x + y > 0$ et $xy + 2 > 0$).

- **Sur $]0, \sqrt{2}]$** : $x \leq \sqrt{2}, y \leq \sqrt{2}$ et l'un des deux est $< \sqrt{2}$, donc $xy < 2$: $T < 0$: k est strictement décroissante.
- **Sur $[\sqrt{2}, +\infty[$** : de même $xy > 2$: $T > 0$: k est strictement croissante.

Lecture : k admet sur $]0, +\infty[$ un **minimum égal à** $k(\sqrt{2}) = 2 + 2 = 4$: $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$ pour tout $x > 0$.

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$k(x)$		4	

Stricte monotonie et inégalités

Si f est strictement croissante sur I , pour tous a, b de I : $a < b \iff f(a) < f(b)$ et $a = b \iff f(a) = f(b)$: l'équation $f(x) = k$ a **au plus une** solution dans I . Si f est strictement décroissante, l'ordre est **inversé** : $a < b \iff f(a) > f(b)$.

Application. Comparer $\varphi(\sqrt{5})$ et $\varphi(2,3)$: $5 < 2,3^2 = 5,29$, donc $0 \leq \sqrt{5} < 2,3$, et φ décroît strictement sur $[0, +\infty[$: $\varphi(\sqrt{5}) > \varphi(2,3)$, sans calculer.

7 Variations et parité

Propriété (monotonie d'une fonction paire ou impaire)

Soit $I \subset [0, +\infty[$ un intervalle inclus dans D_f et $-I = \{-x; x \in I\}$ son symétrique.

1. Si f est **paire**, ses variations sur $-I$ sont **contraires** à celles sur I . 2. Si f est **impaire**, ses variations sur $-I$ sont **les mêmes** que sur I .

Démonstration (f paire, croissante sur I). Soit $u < v$ dans $-I$; alors $-v < -u$ sont dans I , où f croît : $f(-v) \leq f(-u)$, soit $f(v) \leq f(u)$ (parité) : f est décroissante sur $-I$. Pour f impaire, $f(-v) \leq f(-u)$ donne $-f(v) \leq -f(u)$, soit $f(u) \leq f(v)$. $\square$

Méthode : étudier f sur $D_f \cap [0, +\infty[$ seulement, puis **déduire** les variations sur $D_f \cap]-\infty, 0]$ et dresser le tableau complet. **Moyen mnémotechnique** : $x \mapsto x^2$ (paire) descend puis monte ; $x \mapsto x^3$ (impaire) monte des deux côtés.

Exemple : trois tableaux complets

1. **Le fil rouge.** φ est paire et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (section 6) : elle est donc **strictement croissante** sur $]-\infty, 0]$, et son maximum est $\varphi(0) = 2$ (tableau (a)).

2. $k(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$ est paire (section 3), décroissante sur $]0, \sqrt{2}]$, croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ (section 6) ; par parité, elle est **croissante** sur $[-\sqrt{2}, 0[$ et **décroissante** sur $]-\infty, -\sqrt{2}]$; son minimum sur $\mathbb{R}^*$ est 4, atteint en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$ (tableau (b), double barre en 0 : valeur interdite).

3. $g(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$ est impaire (section 3). Pour $x \neq y$: $g(x) - g(y) = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{4} - 3(x-y)$, donc $T(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2 - 12}{4}$.

- Sur $[0, 2]$: $x^2 \leq 4$, $y^2 \leq 4$, $xy \leq 4$, et ces trois inégalités ne sont pas toutes des égalités (car $x \neq y$) : $x^2 + xy + y^2 < 12$, $T < 0$: g est strictement décroissante.
- Sur $[2, +\infty[$: de même $x^2 + xy + y^2 > 12$, $T > 0$: g est strictement croissante.
- Par imparité : g est strictement décroissante sur $[-2, 0]$, donc sur $[-2, 2]$, et strictement croissante sur $]-\infty, -2]$; $g(-2) = 4$, $g(2) = -4$ (tableau (c)).

(a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$		2	

(b)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$k(x)$					
		4		4	

(c)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$g(x)$		4		
			-4	

Contrôle sur la courbe : sur la figure de la section 3, $\mathcal{C}_g$ monte jusqu'au point $(-2, 4)$, descend jusqu'au point $(2, -4)$, puis remonte. Attention : 4 est un maximum **relatif** de g , pas un maximum sur $\mathbb{R}$ ($g(5) = \frac{65}{4} > 4$).

8

Comparer, résoudre graphiquement

Définition : comparer deux fonctions sur une partie I de $D_f \cap D_g$

$f \leq g$ sur $I \iff \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$: au-dessus de I , $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de $\mathcal{C}_g$.

Position relative : on étudie le **signe de la différence** $d(x) = f(x) - g(x)$: si $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$; si $d(x) < 0$, au-dessous ; si $d(x) = 0$, les courbes se coupent au point d'abscisse x .

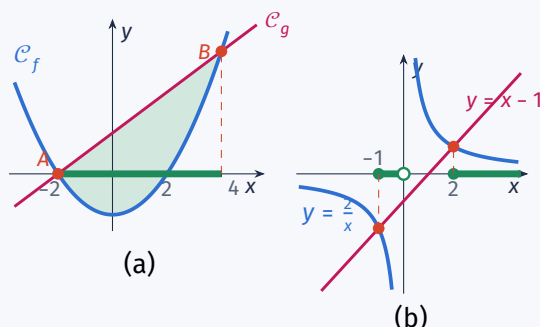
Méthode : Comment résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

1. Écrire l'équation sous la forme $f(x) = m$ (une courbe et une droite horizontale) ou $f(x) = g(x)$ (deux courbes), et tracer les courbes. 2. Les solutions de $f(x) = m$ (resp. $f(x) = g(x)$) sont les **abscisses des points communs** à $\mathcal{C}_f$ et à la droite $y = m$ (resp. à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$). 3. Les solutions de $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **sur ou sous** $\mathcal{C}_g$; pour $f(x) < g(x)$, strictement sous (bornes exclues). 4. Écrire S avec les bons crochets, sans les valeurs interdites. 5. Une lecture donne des valeurs **approchées** : contrôler par le calcul quand c'est possible.

Exemple : une parabole et une droite ; une hyperbole et une droite

(a) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$ et $g(x) = x + 2$. Lecture : les courbes se coupent en $A(-2, 0)$ et $B(4, 6)$; $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$ entre ces points : $f(x) \leq g(x) \iff x \in [-2, 4]$. Calcul : $f(x) - g(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{2} = \frac{(x+2)(x-4)}{2}$, négatif entre les racines : $S = [-2, 4]$.

(b) $\frac{2}{x} \leq x - 1$. Lecture : l'hyperbole $y = \frac{2}{x}$ et la droite $y = x - 1$ se coupent en $(-1, -2)$ et $(2, 1)$; l'hyperbole est sur ou sous la droite pour $x \in [-1, 0[$ et pour $x \geq 2$. Calcul : $x - 1 - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{(x+1)(x-2)}{x}$; un tableau de signes donne $S = [-1, 0[\cup [2, +\infty[$ (0 est **exclu** : valeur interdite).



en vert : l'ensemble des solutions

Exemple : nombre de solutions de $\varphi(x) = m$, et deux mobiles

Le fil rouge (figure de la section 4). On fait glisser la droite $y = m$: si $m \leq 0$ ou $m > 2$, aucune solution ; si $m = 2$, une seule ($x = 0$) ; si $0 < m < 2$, deux solutions opposées (car φ est paire). Par exemple, $\varphi(x) \geq 1 \iff 8 \geq x^2 + 4 \iff x^2 \leq 4$: $S = [-2, 2]$, ce que l'on lit sur la figure (points $(\pm 2, 1)$).

En cinématique. Sur une route rectiligne, un mobile A part de l'origine sans vitesse avec une accélération constante : $x_A(t) = 2t^2$; un mobile B, parti avec 6 m d'avance, roule à vitesse constante : $x_B(t) = 4t + 6$ ($t \geq 0$ en s, positions en m). Ils se rencontrent lorsque $2t^2 = 4t + 6 \iff t^2 - 2t - 3 = 0 \iff (t - 3)(t + 1) = 0$: à $t = 3$ s, à la position 18 m. Comme $x_A(t) - x_B(t) = 2(t - 3)(t + 1)$, B est devant pour $0 \leq t < 3$ et A est devant après : graphiquement, la parabole passe au-dessus de la droite.

9

La fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Théorème (forme canonique, sommet, axe, variations), $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$

 Pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$.

 Si $a > 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$; son **minimum** est β , atteint en α . Si $a < 0$: c'est l'inverse, et β est le **maximum**.

 $\mathcal{C}_f$ est une **parabole** de **sommet** $S(\alpha, \beta)$ et d'**axe de symétrie** la droite $x = \alpha$; elle est tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

Démonstration. $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Puis $f(x) - f(y) = a(x^2 - y^2) + b(x - y)$, donc $T(x, y) = a(x + y) + b = a(x + y - 2\alpha)$: si $x \neq y$ sont dans $[\alpha, +\infty[$, $x + y > 2\alpha$ et T a le signe de a ; dans $]-\infty, \alpha]$, $x + y < 2\alpha$ et T a le signe de $-a$. Enfin $f(2\alpha - x) = a(\alpha - x)^2 + \beta = f(x)$. $\square$

Méthode : Comment étudier et tracer $x \mapsto ax^2 + bx + c$

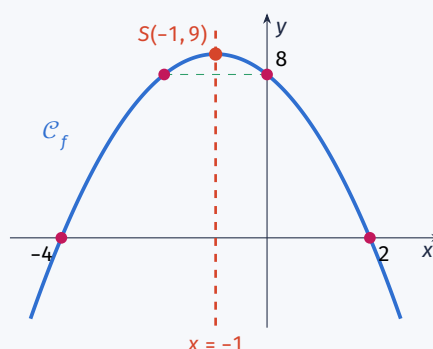
 1. $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$ (plus sûr que la formule avec Δ). 2. Le signe de a donne les variations : tableau. 3. Tracer l'axe $x = \alpha$, le sommet, le point $(0, c)$ et son symétrique $(2\alpha, c)$, et les racines si $\Delta \geq 0$.

Exemple : $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
 $\alpha = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$ et $\beta = f(-1) = -1 + 2 + 8 = 9$:
 $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$. Comme $a = -1 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$, et admet sur $\mathbb{R}$ un **maximum égal à 9, atteint en -1**.

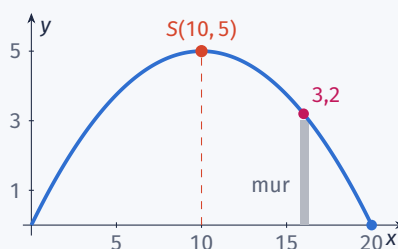
Racines : $(x + 1)^2 = 9 \iff x + 1 = \pm 3 \iff x \in \{-4, 2\}$;
 donc $f(x) = -(x - 2)(x + 4)$, et $f(x) \geq 0 \iff x \in [-4, 2]$.

Tracé : sommet $S(-1, 9)$, axe $x = -1$, points $(-4, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 8)$ et son symétrique $(-2, 8)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		9	


Exemple : en mécanique : la trajectoire d'un projectile

 Un ballon est frappé depuis le sol (origine O) à $10\sqrt{2} \approx 14,1$ m/s, à 45° au-dessus de l'horizontale ; sans frottements ($g \approx 10$ m/s²), son centre d'inertie décrit la parabole $y = -0,05x^2 + x$ (x, y en m).

Forme canonique : $y = -0,05(x^2 - 20x) = -0,05(x - 10)^2 + 5$: la **hauteur maximale** est 5 m, atteinte à $x = 10$ m. **Portée :** $y = 0 \iff x(1 - 0,05x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 20$: le ballon retombe à 20 m. **Un mur de 3 m à 16 m ?** $y(16) = -12,8 + 16 = 3,2 > 3$: le ballon passe, de 20 cm.


10

La fonction homographique

Définition : fonction homographique

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. (Si $c = 0$, f est affine ; si $ad - bc = 0$, f est constante sur D_f , par exemple $\frac{3x+6}{x+2} = 3$.)

Théorème (forme réduite, centre, droites asymptotes, variations)

- Pour tout $x \in D_f$: $f(x) = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$ avec $\alpha = -\frac{d}{c}$, $\beta = \frac{a}{c}$ et $k = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0$.
- Le point $\Omega(\alpha, \beta)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$, qui est une **hyperbole** : l'image de la courbe $y = \frac{k}{x}$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.
- Si $k > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$; si $k < 0$, elle est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
- Les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$ sont les **droites asymptotes** de l'hyperbole (au sens graphique) : la courbe ne les coupe jamais ($\alpha \notin D_f$ et $f(x) \neq \beta$), et s'en approche autant qu'on veut : $|f(x) - \beta| = \frac{|k|}{|x-\alpha|}$ est très petit quand x est loin de α , et $|f(x)|$ est très grand quand x est proche de α .

Démonstration. 1. $f(x) - \frac{a}{c} = \frac{c(ax+b)-a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{bc-ad}{c^2(x+\frac{d}{c})}$. 2. Si $x \neq \alpha$, alors $2\alpha - x \neq \alpha$ et $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta + \frac{k}{\alpha-x} + \frac{k}{x-\alpha} = 2\beta$. 3. $f(x) - f(y) = \frac{k}{x-\alpha} - \frac{k}{y-\alpha} = \frac{k(y-x)}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$, donc $T(x, y) = \frac{-k}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$; si x et y sont du même côté de α , $(x-\alpha)(y-\alpha) > 0$ et T a le signe de $-k$. $\square$

Méthode : Comment étudier une fonction homographique

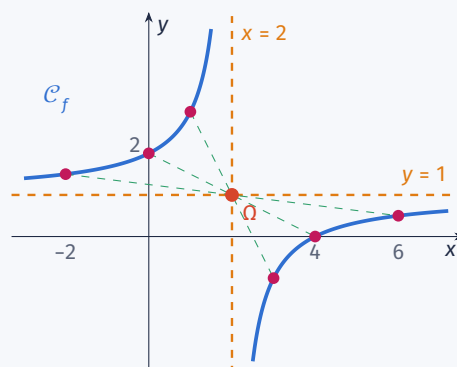
- Valeur interdite et D_f .
- Forme réduite par division : écrire $ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + r$, puis $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{r}{cx+d}$.
- Centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et droites asymptotes $x = \alpha$, $y = \beta$.
- Signe de k : sens de variation, tableau avec une **double barre** en α .
- Tracé : les deux droites en pointillés, Ω , quelques points et leurs **symétriques par rapport à Ω** , deux branches.

Exemple : $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, et $x - 4 = (x - 2) - 2$, donc $f(x) = 1 - \frac{2}{x-2}$: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $k = -2 < 0$ (contrôle : $\frac{bc-ad}{c^2} = \frac{-4-2}{1} = -2$). f est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$; centre $\Omega(2, 1)$; droites asymptotes $x = 2$ et $y = 1$. **Points symétriques par rapport à Ω** : $(0, 2)$ et $(4, 0)$; $(1, 3)$ et $(3, -1)$; $(-2, \frac{3}{2})$ et $(6, \frac{1}{2})$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

Attention : f n'est **pas** croissante sur D_f : $1 < 3$ et pourtant $f(1) = 3 > f(3) = -1$. Avec $k > 0$: $g(x) = \frac{3-x}{x+1} = -1 + \frac{4}{x+1}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, de centre $\Omega'(-1, -1)$.

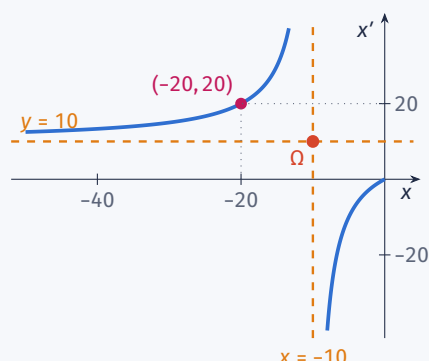


Exemple : en optique : l'image donnée par une lentille convergente

Une lentille mince convergente a pour distance focale $f' = \overline{OF'} = 10$ cm. Pour un objet en A sur l'axe, avec $x = \overline{OA}$ ($x < 0$ pour un objet réel) et $x' = \overline{OA'}$, la relation de conjugaison $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$ donne $\frac{1}{x'} = \frac{x+10}{10x}$, soit

$$x' = \frac{10x}{x+10} = 10 - \frac{100}{x+10} \quad (x \neq -10).$$

C'est une fonction homographique : $\Omega(-10, 10)$, $k = -100 < 0$, croissante sur $] -\infty, -10[$ et sur $] -10, 0[$. **Lecture :** si l'objet est au-delà du foyer ($x < -10$), $x' > 10$: image réelle ; par exemple $x = -20$ donne $x' = 20$. Si $-10 < x < 0$, $x' < 0$: image virtuelle (la loupe). Un objet très éloigné donne une image proche du foyer image (x' voisin de 10 : droite $y = 10$) ; un objet au foyer ($x = -10$) n'a pas d'image.



11

Les fonctions $\sqrt{x+a}$ et ax^3 **La fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ (a réel)**

Elle est définie sur $[-a, +\infty[$, **strictement croissante**, de minimum 0 atteint en $-a$, et non majorée. Sa courbe est une **demi-parabole** : l'image de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$ (figure (a)).

Démonstration. Pour $x \neq y$ dans $[-a, +\infty[$, avec la quantité conjuguée ($\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$) :

$$T(x, y) = \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{y+a}}{(x+a) - (y+a)} = \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{y+a}} > 0.$$

Non majorée : si $M \geq 0$, le réel $x = M^2 + 1 - a$ donne $\sqrt{x+a} = \sqrt{M^2 + 1} > M$. □

Exemple : résoudre $\sqrt{x+1} = x-1$, puis $\sqrt{x+1} \geq x-1$ (figure (b))

Lecture : la demi-parabole $y = \sqrt{x+1}$ et la droite $y = x-1$ ont **un seul point commun**, (3, 2).

Calcul : une racine carrée est positive, donc il faut $x-1 \geq 0$; alors $\sqrt{x+1} = x-1 \iff x+1 = (x-1)^2 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$. Comme $0-1 < 0$, 0 **est rejeté** : $S = \{3\}$.

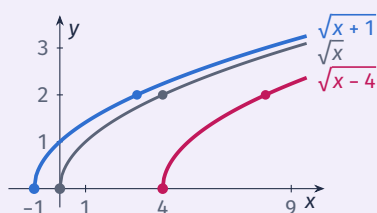
Inéquation : la demi-parabole est sur ou au-dessus de la droite pour $-1 \leq x \leq 3$: $S = [-1, 3]$ (pour $-1 \leq x < 1$, $x-1 < 0 \leq \sqrt{x+1}$; pour $x \geq 1$, $x+1 \geq (x-1)^2 \iff 0 \leq x \leq 3$).

La fonction $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$)

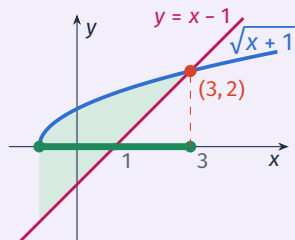
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et **impaire**. Son taux de variation est $T(x, y) = a(x^2 + xy + y^2)$, et $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ dès que $x \neq y$. Donc : si $a > 0$, elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$; si $a < 0$, strictement décroissante (figure (c)).

Conséquences. Pour tous réels u, v : $u^3 < v^3 \iff u < v$ et $u^3 = v^3 \iff u = v$ (sans condition de

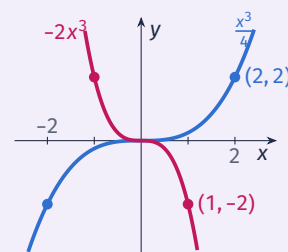
signe) : $\frac{x^3}{4} = 2 \iff x^3 = 8 \iff x = 2$; $-2x^3 \leq 16 \iff x^3 \geq -8 \iff x \geq -2$. **En physique :** le volume d'une boule, $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, est une fonction croissante du rayon ; si le rayon double, le volume est multiplié par $2^3 = 8$.



(a) demi-paraboles



(b) un seul point commun


 (c) $x \mapsto ax^3$

12

Composée de deux fonctions

Définition : composée $g \circ f$

On applique d'abord f , puis g : $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Elle existe lorsque $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$: $D_{g \circ f} = \{x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$.

L'ordre compte. $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$: $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, définie si $x^2 - 1 \geq 0$, soit $D_{g \circ f} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$, définie sur $[0, +\infty[$. Ainsi $g \circ f \neq f \circ g$: en 4, $\sqrt{15} \neq 3$.

Théorème (sens de variation d'une composée)

Soit f monotone sur un intervalle I , et g monotone sur un intervalle J qui contient $f(x)$ pour tout $x \in I$. Si f et g ont le **même** sens de variation, $g \circ f$ est **croissante** sur I ; si elles ont des sens **contraires**, $g \circ f$ est **décroissante** sur I . (Comme la règle des signes : croissante = +, décroissante = -.)

Démonstration (f décroissante sur I , g décroissante sur J). Si $x < y$ dans I , alors $f(x) \geq f(y)$; ces deux réels sont dans J , où g décroît : $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Donc $g \circ f$ est croissante sur I . $\square$

Méthode : Comment étudier le sens de variation de $g \circ f$

1. Décomposer : suivre le calcul de $f(x)$ « de l'intérieur vers l'extérieur ». 2. Calculer le domaine. 3. Découper en intervalles I où la fonction intérieure f est monotone. 4. Trouver un intervalle J qui contient les valeurs $f(x)$ et sur lequel g est monotone. 5. Appliquer la règle des signes.

Exemple : trois composées

1. **Le fil rouge, une troisième fois.** $\varphi = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 4$ et $v(t) = \frac{8}{t}$. u est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $J = [4, +\infty[$, où v est décroissante : φ est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$ (sections 6 et 7).

2. $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} = g(f(x))$, sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Sur $[1, +\infty[$, f est croissante, à valeurs dans $[0, +\infty[$ où g croît : h est croissante. Sur $]-\infty, -1]$, f décroît : h est décroissante. Minimum

$$h(-1) = h(1) = 0.$$

3. $k(x) = (3x-6)^2 = v(u(x))$ avec $u(x) = 3x-6$ (croissante sur $\mathbb{R}$) et $v(t) = t^2$. Sur $]-\infty, 2]$, $u(x) \leq 0$ et v décroît sur $]-\infty, 0]$: k est décroissante ; sur $[2, +\infty[$, $u(x) \geq 0$ et v croît sur $[0, +\infty[$: k est croissante ; minimum $k(2) = 0$.

13

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
« $\frac{x^2-3x}{x} = x-3$, donc $D_f = \mathbb{R}$ »	on calcule D_f avant de simplifier : $D_f = \mathbb{R}^*$; la courbe est la droite $y = x-3$ privée du point $(0, -3)$
« $x \mapsto x^2$, définie sur $[-1, 3]$, est paire »	$[-1, 3]$ n'est pas symétrique (3 y est, pas -3) : ni paire ni impaire
« f est paire, donc $f(0) = 0$ »	c'est une propriété des fonctions impaires définies en 0 ; φ est paire et $\varphi(0) = 2$
« $f(-2) = f(2)$, donc f est paire »	il faut $f(-x) = f(x)$ pour tout x : $x^3 - 4x + 1$ vaut 1 en -2 et en 2, mais 4 en -1 et -2 en 1
« 3 est le maximum de $\frac{3x}{x+2}$ sur $[0, +\infty[$ »	3 est un majorant non atteint : pas de maximum (section 5)
« M est un majorant si $f(x) \leq M$ pour un réel x »	pour tous les x de I , avec M fixé avant x
« f et g croissantes, donc fg croissante »	$x \mapsto x$ croît sur $\mathbb{R}$, mais $x \times x = x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$
« f croissante, g décroissante, donc $f+g$ croissante »	on ne peut rien dire : $x + (-2x) = -x$ est décroissante
« f croît sur $]-\infty, 2[$ et sur $[2, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ »	$f(x) = \frac{x-4}{x-2}$: $1 < 3$ mais $f(1) = 3 > f(3) = -1$
« $T(x, y) < 0$, donc $f(x) < f(y)$ »	$f(x) - f(y)$ et $x - y$ sont de signes contraires : $f(x) < f(y)$ seulement si $x > y$
« le minimum de $3(x+2)^2 - 5$ sur $[0, 1]$ est -5 »	le sommet -2 n'est pas dans $[0, 1]$: le minimum est $f(0) = 7$
« $\sqrt{x+1} = x-1 \iff x+1 = (x-1)^2 \iff x \in \{0, 3\}$ »	élever au carré ajoute des solutions : il faut $x-1 \geq 0$; $S = \{3\}$
« $g \circ f = f \circ g$ »	avec $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$: $\sqrt{x^2 - 1}$ n'est pas $x-1$
« f impaire, croissante sur $[0, +\infty[$, donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ »	une fonction impaire a les mêmes variations sur I et $-I$ (comme $x \mapsto x^3$)
« $y = f(x+3)$: on décale $\mathcal{C}_f$ de 3 vers la droite »	vers la gauche : translation de vecteur $-3\vec{i}$ (ci-dessous)

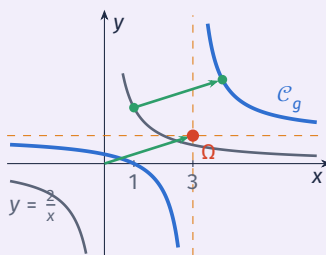
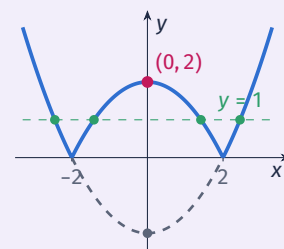
■ Pour aller plus loin : courbes de $f(x - a) + b$ et de $|f|$

Translation et valeur absolue (repère orthogonal)

- La courbe de $g(x) = f(x - a) + b$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la **translation de vecteur** $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$:
 $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y + b = f((x + a) - a) + b \iff M'(x + a, y + b) \in \mathcal{C}_g$.
- Courbe de $|f|$: on garde les parties de $\mathcal{C}_f$ situées **au-dessus** de l'axe des abscisses, et on remplace celles qui sont au-dessous par leurs **symétriques** par rapport à cet axe (car $|f(x)| = -f(x)$ quand $f(x) < 0$).

(a) $\frac{x-1}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3}$ s'écrit $f(x - 3) + 1$ avec $f(x) = \frac{2}{x}$: la courbe est l'hyperbole $y = \frac{2}{x}$ translatée de $\vec{u}(3, 1)$; son centre est $\Omega(3, 1)$ (section 10).

(b) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$ est négative sur $]-2, 2[$: pour $|f|$, cet arc est retourné et forme une « bosse » de sommet $(0, 2)$; $|f(x)| = 1$ a **quatre** solutions : $\pm\sqrt{2}$ et $\pm\sqrt{6}$.


 (a) translation de $\vec{u}(3, 1)$

 (b) $y = |f(x)|$

14

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : QCM : le maximum d'un quotient, par la forme canonique

Le maximum sur $\mathbb{R}$ de $q(x) = \frac{6}{4x^2 - 12x + 11}$ vaut : (a) $\frac{6}{11}$ (b) 2 (c) 3 (d) il n'existe pas. On reconnaît $4x^2 - 12x = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3$: $4x^2 - 12x + 11 = (2x - 3)^2 + 2 \geq 2 > 0$, avec égalité pour $x = \frac{3}{2}$. Le quotient $\frac{6}{A}$ ($A > 0$) est maximal quand A est minimal : $q(x) \leq \frac{6}{2} = 3$, atteint en $\frac{3}{2}$: **réponse (c)**. Le piège (a) est $q(0)$.

★ Astuce de concours : factoriser le taux de variation

Taux usuels : $ax + b \rightarrow a$; $x^2 \rightarrow x + y$; $x^3 \rightarrow x^2 + xy + y^2$; $\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{xy}$; $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; et le taux d'une somme est la somme des taux. **Exemple** : $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. Avec $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$: $x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et $x - y = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, donc $T(x, y) = \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$: f est strictement croissante.

★ Astuce de concours : la parité divise le travail par deux

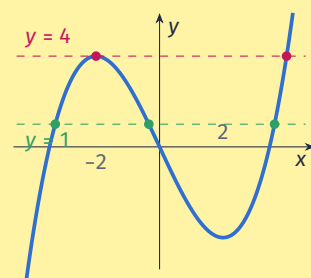
Si f est paire, les solutions de $f(x) = m$ vont **par paires** x et $-x$: on les cherche dans $D_f \cap]0, +\infty[$, on double, puis on teste 0 à part. **Exemple** : $x^2 + \frac{4}{x^2} = m$ sur $\mathbb{R}^*$. Avec $X = x^2 > 0$: $X^2 - mX + 4 = 0$. Si $m > 4$, $\Delta = m^2 - 16 > 0$ et les deux racines sont positives (produit 4, somme m) : **quatre** solutions ; si $m = 4$, $X = 2$: deux solutions $\pm\sqrt{2}$; si $m < 4$, aucune (on retrouve le minimum 4 de la section 7). Pour $m = 5$: $X = 1$ ou $X = 4$, soit $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

★ *Astuce de concours : compter les maillons décroissants*

$f(x) = \frac{2}{3 + \sqrt{4-x}}$: $D_f =]-\infty, 4]$. Chaîne : $x \mapsto 4-x$ (décroissante), $t \mapsto \sqrt{t}$ (croissante), $s \mapsto 3+s$ (croissante), $w \mapsto \frac{2}{w}$ (décroissante sur $]0, +\infty[$) : **deux** maillons décroissants, donc f est **croissante** sur $]-\infty, 4]$, de maximum $f(4) = \frac{2}{3}$; et $0 < f(x) \leq \frac{2}{3}$. Nombre impair de maillons décroissants : composée décroissante ; nombre pair : croissante.

★ *Astuce de concours : lire le nombre de solutions sur la courbe*

Combien l'équation $x^3 - 12x = 4m$ a-t-elle de solutions ? On divise par 4 : elle s'écrit $g(x) = m$, avec $g(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$ (sections 3 et 7). On fait glisser la droite $y = m$ sur $\mathcal{C}_g$, en s'aidant du tableau (c) : 4 est un maximum relatif (en -2), -4 un minimum relatif (en 2). $m < -4$ ou $m > 4$: **une** solution ; $m = 4$ ou $m = -4$: **deux** ; $-4 < m < 4$: **trois**. **Contrôles** : pour $m = 0$, $x(x^2 - 12) = 0 \iff x \in \{-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\}$; pour $m = 4$, les solutions sont -2 et 4 ($g(-2) = g(4) = 4$).

★ *Astuce de concours : croissante contre décroissante*

Une fonction strictement croissante et une fonction strictement décroissante se coupent **au plus une fois**. $x^3 = 2-x$: $x \mapsto x^3 + x$ est strictement croissante (somme de deux strictement croissantes), donc $x^3 + x = 2$ a **au plus une** solution ; 1 convient : $S = \{1\}$. De même, $\sqrt{x} = 6-x$ a pour seule solution 4 ($\sqrt{4} = 2 = 6-4$), **sans élever au carré**.

★ *Astuce de concours : le centre d'une hyperbole en un coup d'œil*

Pour $\frac{ax+b}{cx+d}$: $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, et f est croissante sur chaque intervalle si $ad - bc > 0$, décroissante si $ad - bc < 0$ (car $k = \frac{bc-ad}{c^2}$). **QCM** : pour $\frac{6x-1}{2x+4}$, $\Omega(-2, 3)$ et $ad - bc = 24 + 2 = 26 > 0$: croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$.

15

L'essentiel du chapitre en une page

Domaine, égalité, courbe

$\frac{A}{B} : B \neq 0$; $\sqrt{A} : A \geq 0$; $\frac{A}{\sqrt{B}} : B > 0$; plusieurs morceaux : **toutes** les conditions. Calculer D_f **avant** de simplifier.

$f = g \iff D_f = D_g \text{ et } \forall x \in D_f, f(x) = g(x).$

$M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff a \in D_f \text{ et } b = f(a).$

Parité (D_f symétrique d'abord !)

Paire : $f(-x) = f(x)$: symétrie d'axe (Oy).

Impaire : $f(-x) = -f(x)$: symétrie de centre O ; impaire et $0 \in D_f \Rightarrow f(0) = 0$.

Réfuter : un seul a tel que $f(-a) \neq f(a)$ (ou $\neq -f(a)$).

Bornes et extremums

Majorée sur I : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$;
non majorée : $\forall M, \exists x \in I, f(x) > M$.

Bornée $\iff \exists K \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq K$.

Maximum M en a : $\forall x \in I, f(x) \leq M$ **et** $f(a) = M$ (majorant **atteint**) ; relatif : sur un intervalle ouvert $J \ni a$.

Outils : $(\dots)^2 \geq 0$ (forme canonique),
 $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$, encadrer pas à pas.

Sens de variation

$T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \ (x \neq y) : T > 0 \text{ sur } I \iff$
 f strictement croissante ; $T < 0 \iff$
strictement décroissante.

Factoriser $x - y$: $x^2 - y^2, x^3 - y^3, \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$,
 $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

f strictement croissante :

$a < b \iff f(a) < f(b)$; $f(x) = k$ a au plus une solution.

f paire : sens **contraires** sur I et $-I$; f

impaire : **mêmes** sens.

Comparer, résoudre graphiquement

Position relative : signe de $f(x) - g(x)$.

$f(x) = m$: abscisses des points de $\mathcal{C}_f \cap (y = m)$; $f(x) \leq g(x) : \mathcal{C}_f$ sur ou sous $\mathcal{C}_g$; lecture approchée, contrôle par le calcul.

Fonctions usuelles

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \alpha = -\frac{b}{2a},$

$\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$; parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$,
d'axe $x = \alpha$; $a > 0$: minimum β ; $a < 0$:
maximum β .

$\frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}, \alpha = -\frac{d}{c}, \beta = \frac{a}{c}, k = \frac{bc-ad}{c^2}$;

hyperbole de centre $\Omega(\alpha, \beta)$, droites

asymptotes $x = \alpha$ et $y = \beta$; $k > 0$:

décroissante sur **chaque** intervalle ; $k < 0$:
croissante.

$\sqrt{x+a}$: sur $[-a, +\infty[$, strictement croissante,
demi-parabole ; $T = \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}}$.

ax^3 : impaire, $T = a(x^2 + xy + y^2)$; $a > 0$:
strictement croissante ; $u^3 = v^3 \iff u = v$.

Composée

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$;

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$; $g \circ f \neq f \circ g$ en
général.

Même sens $\Rightarrow g \circ f$ croissante ; sens
contraires $\Rightarrow$ décroissante.

Transformations

$y = f(x - a) + b$: translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$;

$y = |f(x)|$: on retourne ce qui est sous (Ox).

À retenir pour les concours

Croissante = décroissante : au plus une
solution.

$\frac{A}{B}$ maximal quand $B > 0$ est minimal ;
nombre de maillons décroissants pair :
composée croissante.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

16 Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Domaines de définition ★

corrigé p. 40

Rappel. $\frac{A}{B}$ existe si $B \neq 0$; $\sqrt{A}$ existe si $A \geq 0$; $\frac{A}{\sqrt{B}}$ existe si $B > 0$. Écrire les conditions, les résoudre, puis donner D_f sous forme d'intervalles :

- a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$; b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-12}$; c) $f(x) = \sqrt{10-4x}$; d) $f(x) = \frac{3}{x^2-4x+7}$;
e) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-1}}$; f) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}$; g) $f(x) = \frac{2}{|x+1|-3}$; h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1}$.

Exercice 2 Images, antécédents, égalité ★

corrigé p. 40

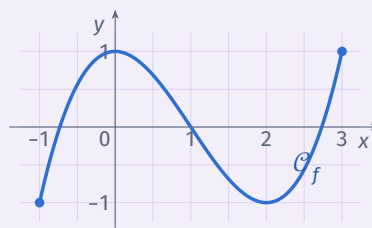
1. Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. a) Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(2 + \sqrt{3})$. b) Vérifier que $f(x) = (x - 2)^2 - 3$; en déduire les antécédents de 1, de -3, puis de -4. c) $A(-1, 6)$ et $B(3, -1)$ sont-ils sur $\mathcal{C}_f$?
2. f et g sont-elles égales ? (Comparer d'abord les domaines.) a) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$, $g(x) = x + 2$; b) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$, $g(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$.

Exercice 3 Lecture graphique ★

corrigé p. 40

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-1, 3]$ (quadrillage de pas 0,5).

1. Lire $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, puis les antécédents de 1, de -1 et (valeurs approchées) de 0.
2. Combien l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a-t-elle de solutions ? et $f(x) = 2$? Résoudre graphiquement $f(x) \geq 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f ; donner son maximum et son minimum, et les réels où ils sont atteints.
4. On admet que $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x^2 - 2x - 2)$: calculer les valeurs exactes des antécédents de 0.



Exercice 4 Parité ★

corrigé p. 41

1. Pour chaque fonction : déterminer D_f , vérifier qu'il est symétrique par rapport à 0, puis comparer $f(-x)$ à $f(x)$ et à $-f(x)$.
a) $2x^4 + x^2 - 7$; b) $x^5 - 4x^3$; c) $\frac{x^2+1}{x}$; d) $\sqrt{4-x^2}$; e) $x^2 - 2x + 3$; f) $\frac{1}{x-3}$; g) $\frac{|x|-1}{x^2+1}$; h) $x\sqrt{x^2+1}$.
2. f paire, g impaire (sur $\mathbb{R}$), $f(2) = 5$, $g(1) = -4$: $f(-2)$, $g(-1)$, $g(0)$? Symétries de $\mathcal{C}_f$, de $\mathcal{C}_g$?

Exercice 5 Lire un tableau de variations ★

corrigé p. 41

 Une fonction f a le tableau de variations ci-contre.

- Donner D_f et les intervalles où f est croissante, décroissante.
- Comparer $f(-3)$ et $f(-2)$; $f(0)$ et $f(1)$; $f(3)$ et $f(4)$.
Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(0)$?
- Maximum et minimum de f sur D_f , puis sur $[2, 5]$? Justifier que $1 \leq f(x) \leq 4$ pour tout $x \in [2, 5]$.
- Nombre de solutions de $f(x) = 5$? Montrer que $f(x) = 0$ a au plus deux solutions.

x	-4	-1	2	5
$f(x)$	3	-2	4	1

Exercice 6 Forme canonique et extremum ★

corrigé p. 41

- Rappel** : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Écrire sous forme canonique ; donner le sommet et l'axe de la parabole, le tableau de variations et l'extremum :
a) $f(x) = x^2 + 6x + 7$; b) $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$; c) $h(x) = 3x^2 - 3x + 1$ (montrer de plus que $h(x) > 0$ pour tout réel x).
- Montrer que le taux de variation de g est $T(x, y) = -2(x + y + 2)$; retrouver les variations de g sur $]-\infty, -1]$ et sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 7 Majorée, minorée, bornée ★

corrigé p. 41

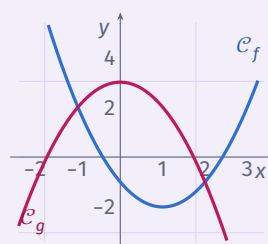
- Écrire avec des quantificateurs : « f est majorée par M sur I », « f admet un minimum en a sur I », « f n'est pas minorée sur I ».
- Chaque fonction est-elle majorée, minorée, bornée sur l'intervalle indiqué ? A-t-elle un maximum, un minimum ?
a) $f(x) = 2x - x^2$ sur $[0, 3]$ (écrire $f(x) = 1 - (x - 1)^2$) ; b) $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$; c) $h(x) = 2 - \sqrt{x + 3}$ sur $[-3, +\infty[$; d) $k(x) = x^2$ sur $[-1, 2]$.

Exercice 8 Position relative de deux paraboles ★

corrigé p. 42

 Soit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = 3 - x^2$; leurs courbes sont tracées ci-contre.

- Lire les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, puis résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$.
- Vérifier que $f(x) - g(x) = 2(x + 1)(x - 2)$. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et retrouver les résultats de la question 1.



17

Niveau 2 · Bac
Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : parité et bornes ★★

corrigé p. 42

 Soit $f(x) = \frac{2x^2}{x^4 + 1}$.

- D_f ? Montrer que f est paire. 2. a) Montrer que $f(x) \geq 0$ et que $x^4 + 1 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2$; en déduire que $0 \leq f(x) \leq 1$. b) Maximum et minimum de f sur $\mathbb{R}$? Où sont-ils atteints ?
- a) Vérifier que $T(x, y) = \frac{2(x+y)(1-x^2y^2)}{(x^4+1)(y^4+1)}$. b) En déduire les variations de f sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, puis, par parité, sur $\mathbb{R}$; tableau de variations.
- Résoudre l'inéquation $f(x) \geq \frac{4}{5}$ (factoriser $2x^4 - 5x^2 + 2$).

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : taux de variation et tableau ★★

corrigé p. 42

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

- Justifier que $D_f = \mathbb{R}$; calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$. 2. a) Montrer que, pour $x \neq y$, $f(x) - f(y) = \frac{(x-y)(3-x-y-xy)}{(x^2+3)(y^2+3)}$, puis que $T(x, y) = \frac{4-(x+1)(y+1)}{(x^2+3)(y^2+3)}$. b) Signe de $T(x, y)$ pour x, y dans $]-\infty, -3]$, dans $[-3, 1]$, puis dans $[1, +\infty[$ (comparer $(x+1)(y+1)$ à 4) ? Tableau de variations de f .
- Maximum et minimum de f sur $\mathbb{R}$? Signe de $f(x)$? Résoudre $f(x) = \frac{1}{4}$.

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : une hyperbole ★★

corrigé p. 43

Soit $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ et Δ la droite d'équation $y = x$.

- Déterminer D_f et montrer que $f(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$. Montrer que $\Omega(2, 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ (vérifier que $f(4-x) + f(x) = 4$).
- Calculer $T(x, y)$; variations de f sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$; tableau de variations.
- Calculer $f(x)$ pour $x \in \{-1, 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 4, 5\}$. Tracer $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes $x = 2$, $y = 2$, et Δ .
- Résoudre graphiquement, puis par le calcul : a) $f(x) = x$; b) $f(x) \leq x$. 5. Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$?

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : composée de deux fonctions ★★

corrigé p. 43

Soit $u(x) = \frac{x-4}{x+2}$ et $v(t) = t^2$.

- D_u ? Montrer que $u(x) = 1 - \frac{6}{x+2}$, que u est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$; signe de u ?
- Soit $f = v \circ u$. a) D_f et $f(x)$? b) Variations de f sur $]-\infty, -2[$, sur $]-2, 4]$ et sur $[4, +\infty[$ (utiliser le signe de u et les variations de v sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$; tableau ; minimum ? c) Résoudre $f(x) = \frac{1}{4}$, puis $f(x) \leq \frac{1}{4}$.
- Soit $g = u \circ v$. Calculer $g(x)$; montrer que g est paire, étudier ses variations, montrer que $-2 \leq g(x) < 1$. A-t-on $f = g$?

Exercice 13 Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$ ★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \frac{x^3}{2}$ et Δ la droite d'équation $y = x$.

- a) D_f ? Montrer que $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}}$; sens de variation de f ? b) Par quelle translation obtient-on $\mathcal{C}_f$ à partir de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$? c) Résoudre $f(x) = x$, $f(x) \geq x$ et $f(x) \leq 3$.
- a) Montrer que g est impaire et que $T(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2)$; en déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. b) Résoudre $g(x) \leq 32$, puis $g(x) \geq x$. 3. Tracer $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et Δ ; y lire les résultats.

Exercice 14 Trinôme et nombre de solutions ★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 15$ et D la droite d'équation $y = x - 5$.

- Écrire $f(x)$ sous forme canonique, puis factoriser $f(x)$. Tableau de variations de f sur $[-4, 5]$?
- Tracer $\mathcal{C}_f$ (pour $x \in [-4, 5]$) et D . Selon m , lire le nombre de solutions dans $[-4, 5]$ de $f(x) = m$.
- Points communs à $\mathcal{C}_f$ et D ? Résoudre $f(x) \leq x - 5$.

Exercice 15 Une parabole et une hyperbole ★★

corrigé p. 45

Soit $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3$ et $g(x) = -\frac{4}{x}$.

- Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère ; lire les coordonnées de leurs points communs.
- Montrer que, pour $x \neq 0$, $f(x) - g(x) = \frac{x^3 - 12x + 16}{4x}$, puis vérifier que $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$.

3. Résoudre $f(x) = g(x)$ et étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Que se passe-t-il au point d'abscisse 2 ?

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 45

Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple (f, g définies sur $\mathbb{R}$, sauf mention contraire).

- a) Si f est strictement croissante et $f(a) = f(b)$, alors $a = b$. b) Si f est impaire et croissante sur $[0, +\infty[$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$. c) Si f est strictement croissante et g strictement décroissante, alors $f - g$ est strictement croissante. d) Si f , définie sur $\mathbb{R}^*$, est croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^*$. e) Si $f(x) > 0$ pour tout réel x , alors $\frac{1}{f}$ est majorée. f) Si $g \cdot f$ est croissante, alors f et g sont croissantes. g) Si f est strictement décroissante, l'équation $f(x) = 0$ a une solution.

18

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Le triangle d'Archimède ★★★

corrigé p. 45

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$, $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ et, pour $x \in]-1, 2[$, le point $M(x, x^2)$ de $\mathcal{P}$.

- Vérifier que $A, B \in \mathcal{P}$ et que (AB) a pour équation $y = x + 2$. Montrer que M est sous (AB) .
- La distance de $M(x_0, y_0)$ à la droite $x - y + 2 = 0$ est $\frac{|x_0 - y_0 + 2|}{\sqrt{2}}$. Montrer que l'aire du triangle AMB est $S(x) = \frac{3}{2}(x + 1)(2 - x)$.
- Forme canonique de $S(x)$; aire maximale et position M_0 de M correspondante ?
- Montrer que la parallèle à (AB) par M_0 n'a qu'un point commun avec $\mathcal{P}$ et que M_0 a la même abscisse que le milieu de $[AB]$.

Exercice 18 Encadrer $\sqrt{1+x}$ ★★★

corrigé p. 46

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ et $h(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, pour $x \geq -1$.

- Montrer que $g(x) > 0$ et $g(x)^2 - f(x)^2 = \frac{x^2}{4}$; en déduire que $f(x) \leq g(x)$ (égalité pour $x = 0$ seulement).
- Vérifier que $h(x)^2 = 1 + x + \frac{x^3(x-8)}{64}$. En déduire que $h(x) \leq f(x)$ pour $x \in [0, 8]$ (distinguer $h(x) < 0$ et $h(x) \geq 0$), puis que $h(x) > f(x)$ pour $x \in [-1, 0[$. Positions relatives de $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g, \mathcal{C}_h$ sur $[-1, 8]$?
- Encadrer $\sqrt{1,02}$ à 5×10^{-5} près. Application : un émetteur E est à 100 m du sol, un récepteur R au sol à 10 m du pied de l'émetteur; encadrer $ER = 100\sqrt{1,01}$.

Exercice 19 Droites passant par l'origine et parabole ★★★

corrigé p. 46

Soit $f(x) = x^2 - x + 1$, $\mathcal{P}$ sa courbe et, pour tout réel m , D_m la droite d'équation $y = mx$.

- Forme canonique de $f(x)$; sommet de $\mathcal{P}$; montrer que $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
- Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{P} \cap D_m \iff (y = mx \text{ et } x^2 - (m+1)x + 1 = 0)$. Selon m , nombre de points communs à $\mathcal{P}$ et D_m ? Les donner s'il n'y en a qu'un; s'il y en a deux, signe de leurs abscisses ?
- Montrer que $f(x) - x = (x-1)^2$ et $f(x) + 3x = (x+1)^2$; interpréter. Tracer $\mathcal{P}, D_1, D_{-3}$ et D_2 .

Exercice 20 Composées à partir d'un tableau ★★★

corrigé p. 46

Une fonction f (sans formule connue) est définie sur $[-2, 4]$, strictement décroissante sur $[-2, 1]$, strictement croissante sur $[1, 4]$, avec $f(-2) = 4$, $f(1) = 1$, $f(4) = 9$.

- Montrer que $1 \leq f(x) \leq 9$ sur $[-2, 4]$. Variations et encadrements de $g = \sqrt{f}$ et de $h = \frac{1}{f}$?
- Soit $k(x) = f(x^2)$. a) D_k ? Montrer que k est paire. b) Variations de k sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$; tableau de variations de k sur D_k . c) Comparer $k\left(\frac{1}{2}\right)$ et $k\left(\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit $\ell(x) = f(1 - x)$. Déterminer D_ℓ et dresser le tableau de variations de ℓ .

Exercice 21 Une famille d'hyperboles ★★★

corrigé p. 47

Pour tout réel m , on pose $f_m(x) = \frac{mx+1}{x+m}$ ($x \neq -m$) et on note $\mathcal{H}_m$ la courbe de f_m .

1. Simplifier $f_1(x)$ et $f_{-1}(x)$. Que sont $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_{-1}$?
2. On suppose $m^2 \neq 1$. a) Montrer que $f_m(x) = m + \frac{1-m^2}{x+m}$; en déduire le centre Ω_m de $\mathcal{H}_m$; montrer qu'il est sur la droite $y = -x$. b) Selon m , sens de variation de f_m ?
3. Montrer que les $\mathcal{H}_m$ ($m^2 \neq 1$) passent toutes par $A(1, 1)$ et $B(-1, -1)$, leurs seuls points communs. Quelle $\mathcal{H}_m$ passe par $C(2, 0)$? Tracer $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_3$.

Exercice 22 Monotonie stricte et équations ★★★

corrigé p. 47

1. Soit $h(t) = t + \sqrt{t+4}$ ($t \geq -4$). a) Montrer que h est strictement croissante ; en déduire que, si $a, b \geq -4$: $h(a) = h(b) \iff a = b$, $h(a) < h(b) \iff a < b$. b) Résoudre $x^2 + \sqrt{x^2 + 4} = 3x + 4 + \sqrt{3x + 8}$, puis l'inéquation obtenue en remplaçant « = » par « < ».
2. Montrer que $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Résoudre $(x-1)^3 = 8x^3$, puis $(x^2 - 2)^3 \leq x^3$.

Exercice 23 Une famille de racines carrées ★★★

corrigé p. 47

Pour tout réel a , soit $f_a(x) = \sqrt{x+a}$, $\mathcal{C}_a$ sa courbe, et Δ la droite d'équation $y = x$.

1. Comment obtient-on $\mathcal{C}_a$ à partir de $\mathcal{C}_0$? Montrer que $f_a(x) = x \iff (x \geq 0 \text{ et } x^2 - x - a = 0)$.
2. Discuter, selon a , le nombre de solutions de $f_a(x) = x$ (discriminant, somme et produit des racines). Résoudre l'équation pour $a = 2$, $a = 0$ et $a = -\frac{1}{4}$.
3. Tracer Δ et $\mathcal{C}_a$ pour $a \in \{-1, -\frac{1}{4}, 0, 2\}$; interpréter graphiquement la question 2.

19

Niveau 4 • Concours

Exercice 24 QCM de type concours de médecine ★★★

corrigé p. 48

Une seule réponse exacte par question, à justifier.

1. D_f pour $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$: (A) $[-3, +\infty[$ (B) $[-3, 2[\cup]2, +\infty[$ (C) $[-3, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$ (D) $]-3, +\infty[$.
2. $x \mapsto x^5 - x^3 + 2$ est : (A) paire, car $f(-1) = f(1)$ (B) impaire (C) ni paire ni impaire (D) les deux.
3. La courbe de $x \mapsto \frac{5-x}{x+1}$ a pour centre de symétrie : (A) $(-1, 5)$ (B) $(1, -1)$ (C) $(5, -1)$ (D) $(-1, -1)$.
4. f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = f(1 - 2x)$. Alors : (A) g est croissante (B) g est décroissante (C) g est constante (D) on ne peut pas conclure.
5. Le minimum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto |x - 1| + |x + 3|$: (A) vaut 2 (B) vaut 4 (C) vaut 0 (D) n'existe pas.

Exercice 25 Une famille de paraboles (type ENSA) ★★★

corrigé p. 48

Pour tout réel m , $\mathcal{P}_m$ est la courbe de $f_m(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$.

1. Montrer que toutes les paraboles $\mathcal{P}_m$ passent par un même point A (à préciser). 2. a) Sommet S_m de $\mathcal{P}_m$? Montrer qu'il est sur la parabole Γ d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$. b) Pour quel m le minimum de f_m est-il le plus grand possible ? Que vaut alors S_m ?
3. Pour quels m la parabole $\mathcal{P}_m$ est-elle strictement au-dessus de la droite $y = 2$? coupe-t-elle l'axe des abscisses en deux points d'abscisses strictement positives ? 4. Tracer $\Gamma, \mathcal{P}_{-1}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3$.

Exercice 26 Optimiser sans dérivée (type ENSAM) ★★★★★

corrigé p. 48

1. L'enclos. 120 m de grillage clôturent un terrain rectangulaire adossé à un mur (rien le long du mur), partagé en deux par un grillage perpendiculaire au mur : x est la longueur des trois côtés perpendiculaires au mur, y celle du côté parallèle. Aire maximale ? Dimensions ?
2. La recette. Un club a 300 abonnés à 200 DH ; chaque baisse de 10 DH attire 30 abonnés de plus : après x baisses ($0 \leq x \leq 20$), la recette est $R(x) = (200 - 10x)(300 + 30x)$. Recette maximale et prix correspondant ? Pour quels prix a-t-on $R(x) \geq 60\,000$?

Exercice 27 Le centre d'inertie d'une canette (physique) ★★★★★

corrigé p. 48

Une canette vide (hauteur 12 cm, masse 40 g) a son centre d'inertie à 6 cm du fond. Une hauteur x cm de liquide ($0 \leq x \leq 12$) a une masse de $10x$ g et son centre d'inertie à $\frac{x}{2}$ cm du fond. Le centre d'inertie G de l'ensemble est à la hauteur $h(x) = \frac{40 \times 6 + 10x \times \frac{x}{2}}{40 + 10x}$ (relation barycentrique admise).

1. Montrer que $h(x) = \frac{x^2 + 48}{2(x+4)}$. Calculer $h(0)$ et $h(12)$; interpréter. 2. Vérifier que $h(x) = \frac{x+4}{2} + \frac{32}{x+4} - 4$; en déduire $T(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{32}{(x+4)(y+4)}$ et les variations de h sur $[0, 12]$.
3. Montrer que $h(x) - 4 = \frac{(x-4)^2}{2(x+4)}$. Position la plus basse de G ? Pour quelle hauteur de liquide ?
4. Montrer que $h(x) = x \iff x = 4$ (G le plus bas est à la surface du liquide) ; comparer $h(x)$ et x .
5. Pour quels x a-t-on $h(x) \leq 5$? Tracer la courbe de h et la droite $y = x$.

Exercice 28 Points fixes d'une composée (type CPGE) ★★★★★

corrigé p. 49

Soit $f(x) = x^2 - 2$ ($x \in \mathbb{R}$) et $F = f \circ f$.

1. Résoudre $f(x) = x$. Vérifier que $F(x) - x = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 1)$ et résoudre $F(x) = x$.
2. Soit $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $f(a) = b$ et $f(b) = a$ (utiliser $a^2 = 1 - a$ et $a + b = -1$).
3. Variations de F sur $[0, \sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, +\infty[$, puis $\mathbb{R}$; tableau. Montrer que $x \in [-2, 2] \Rightarrow F(x) \in [-2, 2]$.
4. Tracer la courbe de F sur $[-2, 2]$ et la droite $y = x$; interpréter la question 1.

Exercice 29 QCM de type concours ENSA – ENSAM ★★★★★

corrigé p. 49

Une seule réponse exacte par question, à justifier.

1. Si $f(x) = x^2 - 4x + 7$, l'ensemble des $f(x)$, $x \in [0, 3]$, est : (A) $[4, 7]$ (B) $[3, 7]$ (C) $[3, 4]$ (D) $[0, 7]$.
2. Nombre de réels m tels que $y = x^2 + mx + 4$ ait un seul point commun avec l'axe des abscisses : (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) une infinité.
3. f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $f(x^2 - 2) + f(x) \leq 0 \iff x \in$ (A) $[-1, 2]$ (B) $[-2, 1]$ (C) $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ (D) $\mathbb{R}$.
4. Si $2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x$ pour tout réel x , alors $f(1)$ vaut : (A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) 2 (D) 0.
5. Nombre de points communs aux courbes $y = x^3$ et $y = 3x - 2$: (A) 1 (B) 0 (C) 3 (D) 2.

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 50

Soit $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que f est paire et que $f(x) = (|x| - 2)^2 - 1$. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Variations de f sur $[0, 2]$, sur $[2, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$; tableau, extremums. Tracer $\mathcal{C}_f$ (points d'abscisses 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4).
3. Selon m , déterminer graphiquement, puis par le calcul, le nombre de solutions de $f(x) = m$.
4. Montrer que $f(f(x)) = 0 \iff f(x) \in \{-3, -1, 1, 3\}$; en déduire (question 3) le nombre de solutions de $f(f(x)) = 0$, puis les solutions.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

20 Domaines et lectures graphiques

Domaine : on écrit **toutes** les conditions (dénominateur non nul, radicande ≥ 0) avant de les résoudre. Sur une courbe, l'**image** de a se lit en ordonnée, les **antécédents** de b sont les abscisses des points d'ordonnée b .

Exercice 31 Domaines de définition ★

corrigé p. 50

1. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes (écrire d'abord les conditions).

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f_1(x) = \frac{x+7}{3x^2+x-2} & \text{b) } f_2(x) = \sqrt{2x+7} - \frac{1}{x} & \text{c) } f_3(x) = \sqrt{x^2+2x-15} & \text{d) } f_4(x) = \frac{5}{x^2+x+4} \\ \text{e) } f_5(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4} & \text{f) } f_6(x) = \sqrt{|x|-1} & \text{g) } f_7(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} & \text{h) } f_8(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x+4}} \end{array}$$

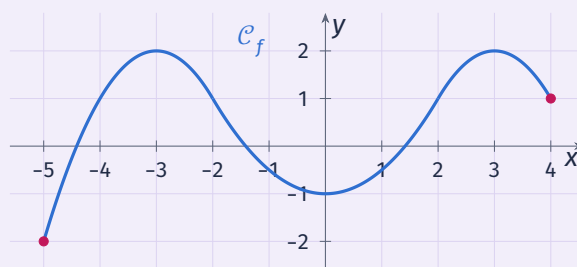
2. Lesquelles de ces fonctions sont définies en -3 ? Calculer $f_3(4)$, $f_6(-5)$ et $f_8(-3)$.

Exercice 32 Lire une courbe ★

corrigé p. 51

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre (trois arcs de paraboles, extrémités marquées) représente une fonction f .

1. Donner D_f ; lire $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(4)$, puis les antécédents de 2, de 1, de -2 et de 3.
2. Lire des valeurs approchées des solutions de $f(x) = 0$ et dresser le tableau de signes de f .
3. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 1$ et $f(x) < 0$. Combien l'équation $f(x) = m$ a-t-elle de solutions pour $m = 3$; 2 ; $\frac{3}{2}$; 0 ; -1 ; $-\frac{3}{2}$?
4. On admet que $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$ sur $[-2, 2]$ et $f(x) = 2 - (x+3)^2$ sur $[-5, -2]$: calculer les solutions exactes de $f(x) = 0$.



Exercice 33 Égales ou pas ? ★★

corrigé p. 51

Dans chaque cas, déterminer D_f et D_g et dire si $f = g$; sinon, donner le plus grand ensemble sur lequel f et g sont définies et égales.

a) $f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$ et $g(x) = x+2$ (développer $(x+2)(x^2-2x+4)$) ; b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$;

c) $f(x) = |x-3| + |x+1|$ et $g(x) = 2x-2$ (écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur trois intervalles) ;

d) Physique. Deux résistances x et 6 (en ohms) en parallèle équivalent à R avec $\frac{1}{R} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}$: on compare $R_1(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{6}}$ et $R_2(x) = \frac{6x}{x+6}$. Calculer aussi $R_2(3)$ et trouver $x > 0$ tel que $R_2(x) = 4$.

Exercice 34 Une simplification piégée ★★

corrigé p. 52

Soient $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

- Déterminer D_f et D_g . Factoriser $x^2 - x - 2$ et montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f$. A-t-on $f = g$? Comment obtient-on $\mathcal{C}_f$ à partir de $\mathcal{C}_g$?
- Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(-3)$ et $f(-4)$, puis les antécédents par f de 2, de $\frac{3}{4}$ et de 1.
- Soit $k \neq 1$. Montrer que l'équation $g(x) = k$ a une unique solution, $x_k = \frac{2k-1}{1-k}$; en déduire les réels qui ont exactement un antécédent par f . Étudier enfin le signe de $f(x)$ sur D_f .

Exercice 35 Domaines lus sur une figure ★★★

corrigé p. 52

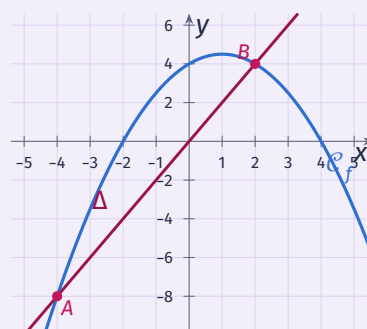
On a tracé ci-contre la parabole $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et la droite Δ , courbe de $g : x \mapsto 2x$; elles se coupent en A et en B.

- Lire les solutions de $f(x) = 0$ et les coordonnées de A et B. Dresser un tableau des signes de $f(x)$, de $g(x)$, de $f(x)g(x)$ et de $f(x) - g(x)$.

- En déduire les domaines de définition des fonctions

$$h_1(x) = \sqrt{f(x)}, \quad h_2(x) = \sqrt{f(x)g(x)}, \quad h_3(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} \quad \text{et} \\ h_4(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)-g(x)}}.$$

- On admet que $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$. Factoriser $f(x)$ et $f(x) - g(x)$, puis vérifier par le calcul les lectures de la question 1.


Exercice 36 Un point mobile sur un rectangle ★★★

corrigé p. 53

ABCD est un rectangle tel que $AB = 3$ et $BC = 2$. Un point M part de A et parcourt le contour $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$; on note x la longueur du chemin parcouru de A jusqu'à M, et $f(x) = AM^2$.

- Donner le domaine de définition D_f et calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(8)$ et $f(10)$.
- Dans le repère orthonormé d'origine A où $B(3; 0)$ et $D(0; 2)$, exprimer $f(x)$ sur $[0, 3]$, $[3, 5]$, $[5, 8]$ et $[8, 10]$.
- Déterminer les antécédents de 4, puis ceux de 10 (attention à l'intervalle de validité de chaque formule).
- Pour combien de positions de M a-t-on $AM = 3$? Pour quelles valeurs de x a-t-on $AM \leq 2$?
- Tracer $\mathcal{C}_f$, puis donner la plus grande valeur de AM et la position de M correspondante.

21 Parité

On vérifie d'abord que D_f est **symétrique par rapport à 0**. f paire : $f(-x) = f(x)$, $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à (Oy) ; f impaire : $f(-x) = -f(x)$, $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O . Pour prouver que f n'est pas paire, un contre-exemple suffit.

Exercice 37 Paire, impaire ou ni l'une ni l'autre ? ★

corrigé p. 53

1. Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes (commencer par le domaine).

a) $f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2}$

b) $f_2(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 3}$

c) $f_3(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$

d) $f_4(x) = (x - 2)^2$

e) $f_5(x) = \frac{x^4 + 1}{x - 1}$

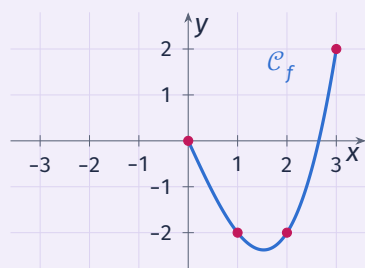
f) $f_6(x) = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$

2. Justifier que si f est impaire et définie en 0, alors $f(0) = 0$. La fonction $h : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ est-elle impaire ? paire ? Montrer que $k : x \mapsto h(x) - \frac{1}{x^2 + 1}$ est impaire.

Exercice 38 Compléter une courbe ★

corrigé p. 54

Une fonction f est définie sur $[-3, 3]$, mais on ne connaît que sa courbe sur $[0, 3]$, tracée ci-contre (les points marqués ont des coordonnées entières).



- On suppose f **impaire**. a) Lire $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$; en déduire $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$ et $f(0)$. b) Compléter la courbe sur $[-3, 3]$. c) Résoudre graphiquement $f(x) = 2$, puis $f(x) = -2$. d) On note α la solution strictement positive de $f(x) = 0$; dresser le tableau de signes de f .
- Soit g la fonction **paire**, définie sur $[-3, 3]$, égale à f sur $[0, 3]$. Compléter sa courbe, puis résoudre $g(x) = 2$, $g(x) = -2$ et $g(x) = 0$.
- On admet que $f(x) = \frac{x^3 - 7x}{3}$ sur $[0, 3]$. Montrer que $F : x \mapsto \frac{x^3 - 7x}{3}$ est impaire sur $[-3, 3]$ et conclure ; vérifier que $x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$, retrouver les solutions de $f(x) = 2$ et calculer α .

Exercice 39 Prolonger par parité ★★

corrigé p. 55

- Soit f une fonction **paire** définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ pour tout $x \geq 0$.
 - Calculer $f(0)$, $f(-2)$ et $f(-5)$.
 - Exprimer $f(x)$ pour $x \leq 0$, puis montrer que $f(x) = \frac{|x|-2}{|x|+1}$ pour tout réel x .
 - Résoudre $f(x) = \frac{1}{2}$, puis $f(x) = -2$ (travailler sur $[0, +\infty[$, puis utiliser la parité). Pourquoi la seconde équation n'a-t-elle qu'une solution ?
 - Vérifier que $f(x) = 1 - \frac{3}{|x|+1}$; en déduire que $-2 \leq f(x) < 1$, puis résoudre $f(x) \geq 0$. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.
- Soit g une fonction **impaire** définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = \sqrt{x+9}$ pour tout $x > 0$.
 - Calculer $g(0)$, $g(-7)$ et $g(-16)$. La formule $\sqrt{x+9}$ est-elle encore valable pour $x = 0$?
 - Exprimer $g(x)$ pour $x < 0$.
 - Résoudre $g(x) = 5$, $g(x) = -4$ et $g(x) = 2$.

Exercice 40 La parité pour diviser le travail ★★

corrigé p. 55

Soit $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire et que $f(x) = (x^2 + 4)(x^2 - 2)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
2. Étudier le signe de $f(x)$ pour $x \geq 0$, puis en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $f(x) = 7$ (poser $X = x^2$), puis $f(x) = -8$; pourquoi cette dernière équation n'a-t-elle qu'une solution ? Montrer que $f(x) \geq -8$ pour tout réel x et préciser le minimum de f .
4. En utilisant la parité, résoudre les inéquations $f(x) \leq 7$ et $f(x) > 16$.

Exercice 41 Deux charges sur un axe ★★★

corrigé p. 56

Physique. Deux charges électriques égales sont placées aux points d'abscisses -2 et 2 d'un axe. Au point M d'abscisse x ($x \neq \pm 2$), le potentiel vaut, dans une unité convenable, $V(x) = \frac{1}{|x+2|} + \frac{1}{|x-2|}$.

1. Déterminer D_V et montrer que V est paire. Interpréter.
2. Montrer que $V(x) = \frac{4}{4-x^2}$ pour $x \in [0, 2[$ et que $V(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ pour $x > 2$.
3. Montrer que $V(x) \geq 1$ pour tout $x \in]-2, 2[$ (cas d'égalité ?). Résoudre $V(x) = \frac{2}{3}$, puis $V(x) = \frac{6}{5}$.
4. Les charges sont maintenant opposées : $W(x) = \frac{1}{|x-2|} - \frac{1}{|x+2|}$. Montrer que W est impaire, simplifier $W(x)$ sur $[0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, puis étudier le signe de $W(x)$ sur D_W .

Exercice 42 Homographiques et symétries ★★★

corrigé p. 56

Soit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c, d sont des réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ (fonction homographique).

1. Montrer que si f est paire ou impaire, alors D_f est symétrique par rapport à 0 , puis que $d = 0$ et $b \neq 0$.
2. On suppose $d = 0$: vérifier que $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b}{cx}$, montrer que f est impaire si et seulement si $a = 0$ et que f n'est jamais paire. Quelles sont les fonctions homographiques impaires ? paires ?
3. Soit $h(x) = \frac{4x-3}{x-2}$. a) Montrer que $h(x) = 4 + \frac{5}{x-2}$ pour tout $x \neq 2$.
b) On pose $k(t) = h(2+t) - 4$ pour $t \neq 0$. Montrer que k est impaire, puis que $h(4-x) + h(x) = 8$ pour tout $x \neq 2$. Interpréter à l'aide du point $\Omega(2, 4)$.
c) Résoudre $h(x) = 5$. En déduire, sans nouveau calcul, la solution de l'équation $h(x) = 3$.

22

Majorants, minorants, extremums

Un **maximum** est un majorant **atteint**. Avec $a(x - \alpha)^2 + \beta$, l'extremum sur $\mathbb{R}$ est β (en α) ; sur un intervalle, on encadre $x - \alpha$, puis $(x - \alpha)^2$.

Exercice 43 Majorée, minorée, bornée ? ★

corrigé p. 57

1. Soit $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$ et $t = \sin x$. a) Vérifier que $f(x) = (t-1)^2 - 1$. b) Sachant que $-1 \leq t \leq 1$, encadrer $t - 1$, puis $(t - 1)^2$; montrer que $-1 \leq f(x) \leq 3$. c) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; en déduire le maximum et le minimum de f .
2. Soit $g(x) = \frac{2}{3-\cos x}$. Montrer que $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$ pour tout réel x , puis déterminer le maximum et le minimum de g . Parmi $-2, -1, 0, \frac{1}{2}$ et 1 , lesquels sont des minorants de g ?
3. Soit $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$. a) Vérifier que $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$; en déduire D_h et le minimum de h .

- b) Écrire avec des quantificateurs « h est majorée sur $\mathbb{R}$ » et sa négation. c) Soit $M \in \mathbb{R}$; montrer que $h(|M| + 2) > M$. Conclure.

Exercice 44 Extremums par la forme canonique ★

corrigé p. 58

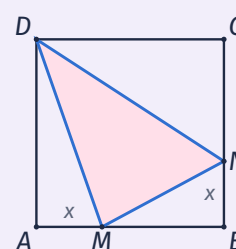
1. Soit $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$. Écrire $f(x)$ sous forme canonique et en déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Encadrer $x - \frac{3}{2}$ lorsque $x \in [2, 4]$, puis déterminer le maximum et le minimum de f sur $[2, 4]$.
2. Soit $g(x) = -3x^2 + 6x + 1$. Montrer que g admet un maximum sur $\mathbb{R}$, puis déterminer le maximum et le minimum de g sur $[-1, 2]$.
3. Montrer que $p(x) = x^2 - 5x + 7 \geq \frac{3}{4}$ pour tout réel x ; en déduire le maximum de $x \mapsto \frac{1}{p(x)}$.

Exercice 45 Aire minimale dans un carré ★★

corrigé p. 58

$ABCD$ est un carré de côté 4. Pour $x \in [0, 4]$, on place $M \in [AB]$ et $N \in [BC]$ tels que $AM = BN = x$; on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle DMN .

1. Exprimer en fonction de x les aires des triangles ADM , MBN et NCD .
2. En déduire que $\mathcal{A}(x) = \frac{x^2 - 4x + 16}{2}$, puis que $\mathcal{A}(x) = \frac{(x-2)^2}{2} + 6$.
3. Déterminer l'aire minimale du triangle DMN et les positions correspondantes de M et N .
4. Montrer que $\mathcal{A}(x) \leq 8$ pour tout $x \in [0, 4]$. Cette valeur est-elle atteinte ? Interpréter.
5. Résoudre $\mathcal{A}(x) = 7$, puis $\mathcal{A}(x) \leq \frac{13}{2}$.

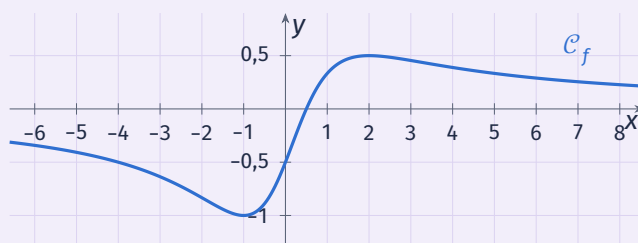


Exercice 46 Lire puis démontrer ★★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$; sa courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-contre.

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$. Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ et $f(2)$.
2. À l'aide de la courbe, conjecturer le maximum et le minimum de f , et les réels où ils sont atteints.
3. Montrer que $f(x) + 1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+2}$ et que $\frac{1}{2} - f(x) = \frac{(x-2)^2}{2(x^2+2)}$. Démontrer la conjecture. La fonction f est-elle bornée ?
4. Résoudre $f(x) = -\frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{1}{3}$ (contrôler sur la courbe). Combien de solutions ont les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = \frac{1}{2}$?



Exercice 47 Un changement de variable ★★★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = x + 2\sqrt{4-x}$.

1. Déterminer D_f et calculer $f(4)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-5)$.
2. On pose $t = \sqrt{4-x}$ (ainsi $t \geq 0$ et $x = 4 - t^2$). Montrer que $f(x) = 5 - (t-1)^2$. En déduire que f admet un maximum, que l'on précisera.
3. La fonction f est-elle minorée ? (Pour $M \in \mathbb{R}$, essayer $t = |M| + 4$.)

4. Résoudre $f(x) = 4$, puis $f(x) \geq 4$. Selon le réel m , combien l'équation $f(x) = m$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 48 Bornée ou non selon un paramètre ★★★

corrigé p. 60

Pour un réel $a > 0$, on pose $f_a(x) = |x - 1| - a|x + 2|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- Écrire $f_a(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, -2]$, sur $[-2, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. Calculer $f_a(-2)$ et $f_a(1)$.
- Cas $a = 1$. Montrer que $-3 \leq f_1(x) \leq 3$ pour tout réel x . La fonction f_1 admet-elle un maximum ? un minimum ?
- Cas $a = 2$. Montrer que f_2 admet un maximum, que l'on précisera, et qu'elle n'est pas minorée.
- Cas général. À l'aide des pentes des trois morceaux, montrer que f_a est majorée si et seulement si $a \geq 1$, minorée si et seulement si $a \leq 1$; préciser son maximum ou son minimum.

23

Sens de variation

Le signe du taux de variation $T(x, y)$ sur I donne le sens de variation ; la parité fait le reste.

Exercice 49 Le taux de variation, pas à pas ★

corrigé p. 60

Soit $f(x) = x^2 - 8x + 10$ ($x \in \mathbb{R}$) et $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ ($x \geq \frac{1}{2}$).

- Montrer que $T(x, y) = x + y - 8$ ($x \neq y$) ; étudier son signe sur $]-\infty, 4]$ puis sur $[4, +\infty[$, et en déduire le tableau de variations de f et son minimum.
- Avec la quantité conjuguée, montrer que le taux de variation de g vaut $\frac{2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y-1}}$; en déduire le tableau de g (valeurs en $\frac{1}{2}, 1, 5$), puis résoudre $g(x) = 3$ et $g(x) \leq 3$.
- Sans calculer les images, comparer $f(2\sqrt{3})$ et $f(3,5)$, $f(4 + \sqrt{2})$ et $f(5,5)$, $g(\sqrt{3})$ et $g(1,7)$.

Exercice 50 Variations et parité ★

corrigé p. 61

Soit $f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$) et $g(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

- Montrer que f est paire et que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -\frac{3}{x^2+1}$ sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$; en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (valeurs en $0, \pm 1, \pm\sqrt{2}$).
- Donner le minimum de f . Calculer $f(\sqrt{2})$ et en déduire, sans autre calcul, les solutions de $f(x) = 1$, puis de $f(x) < 1$.
- Montrer que g est impaire, puis strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Calculer $g(-1)$ et $g(\frac{1}{2})$: g est-elle croissante sur $\mathbb{R}^*$? Déduire de $g(1)$ et des variations le signe de $g(x)$, et dresser le tableau de g .

Exercice 51 La distance d'arrêt d'une voiture ★★

corrigé p. 61

À v m/s, avec 1 s de réaction, la distance d'arrêt d'une voiture (en m) vaut $d(v) = v + \frac{v^2}{16}$ sur route sèche et $d_2(v) = v + \frac{v^2}{10}$ sur route mouillée ($v \geq 0$).

- Calculer le taux de variation de d entre deux vitesses $v \neq w$; en déduire que d est strictement croissante et dresser son tableau (valeurs en $0, 20, 40$).
- Un obstacle surgit à 60 m : résoudre $d(v) = 60$ et $d_2(v) = 60$, puis donner dans chaque cas la vitesse maximale (km/h) pour s'arrêter à temps.

- Montrer que $2d(v) < d(2v) < 4d(v)$ pour $v > 0$, et interpréter.
- Comparer d et d_2 . « Règle des deux secondes » : pour quelles vitesses a-t-on $2v \geq d(v)$? $2v \geq d_2(v)$?

Exercice 52 Une fonction paire à quatre intervalles ★★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$.

- Déterminer D_f ; montrer que f est paire et que $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2-1}$.
- Montrer que $T(x, y) = \frac{-3(x+y)}{(x^2-1)(y^2-1)}$ ($x \neq y$ dans D_f) ; en déduire les variations de f sur $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$, puis, par parité, son tableau sur D_f .
- Montrer que $f(x) \leq -2$ pour tout $x \in]-1, 1[$, et que $f(x) > 1$ dès que $|x| > 1$.
- Montrer que, pour $m \neq 1$, $f(x) = m \iff x^2 = \frac{m+2}{m-1}$. En déduire, selon m , le nombre de solutions de $f(x) = m$, puis résoudre $f(x) = 4$ et $f(x) \geq 4$.

Exercice 53 Taux de variation et incertitudes ★★★

corrigé p. 62

Un taux de variation encadré donne l'incertitude d'une grandeur calculée à partir d'une mesure. Ici $0 < a < b$.

- a) Pour $x \neq y$ dans $[a, b]$, montrer que le taux de variation de $x \mapsto x^3$ vaut $x^2 + xy + y^2$, compris strictement entre $3a^2$ et $3b^2$; en déduire $|x^3 - y^3| \leq 3b^2|x - y|$. b) L'arête d'un cube mesure 5,0 cm à 0,1 cm près. Montrer que son volume V vérifie $|V - 125| \leq 7,803 \text{ cm}^3$.
- a) Encadrer de même le taux de variation de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[a, b]$. b) Une résistance vaut $R = 20 \Omega$ à 0,5 Ω près : majorer l'écart entre sa conductance $G = \frac{1}{R}$ et 0,05 S.
- a) Encadrer le taux de variation de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[a, b]$. b) La période d'un pendule de longueur L (m) vaut environ $\tau(L) = 2\sqrt{L}$ (s) ; on mesure $L = 1$ m à 0,01 m près. Montrer que $|\tau - 2| \leq \frac{0,01}{\sqrt{0,99}}$.

Exercice 54 La profondeur d'un puits ★★★

corrigé p. 63

Une pierre lâchée dans un puits de profondeur h (m) tombe pendant $\sqrt{h/5}$ s, puis le son remonte à 320 m/s : on entend le « plouf » au bout de $t(h) = \sqrt{\frac{h}{5}} + \frac{h}{320}$ secondes ($h \geq 0$).

- Montrer que t est strictement croissante ; en déduire qu'une durée correspond à au plus une profondeur.
- On pose $X = \sqrt{h/5}$. Montrer que $t(h) = X + \frac{X^2}{64}$. Résoudre $t(h) = 9$ et $t(h) = 4,25$, dresser le tableau de variations de t (valeurs en 0, 80, 320) et résoudre $t(h) \leq 9$.
- Sans tenir compte du son, on estimerait $h_0 = 5t^2$. Montrer que $h_0 = h \left(1 + \frac{X}{64}\right)^2 > h$ ($h > 0$) ; calculer h_0 et l'erreur relative $\frac{h_0-h}{h}$ pour $t = 9$ s. Quand cette erreur est-elle au plus 21 % ?

24

Fonctions usuelles et composées

Forme canonique, forme réduite, translations ; pour $g \circ f$, d'abord le domaine.

Exercice 55 Deux paraboles de même forme ★

corrigé p. 63

Soit $f(x) = x^2 + 4x - 5$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme canonique ; en déduire le sommet et l'axe de chaque parabole, le sens de variation de chaque fonction et les solutions de $f(x) = 0$.
2. Vérifier que $g(x) = f(x - 3) + 9$; en déduire que $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une translation (de quel vecteur ?). Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point commun A ; résoudre $f(x) \geq g(x)$ et interpréter. Résoudre $f(x) \leq 7$ et contrôler sur la figure.

Exercice 56 Une hyperbole, pas à pas ★

corrigé p. 64

Soit $f(x) = \frac{8-2x}{x-1}$.

1. Déterminer D_f et montrer que $f(x) = -2 + \frac{6}{x-1}$. En déduire le centre Ω de $\mathcal{C}_f$, ses deux droites « asymptotes » et la translation qui transforme la courbe de $x \mapsto \frac{6}{x}$ en $\mathcal{C}_f$. Vérifier que $f(2-x) + f(x) = -4$.
2. Étudier, avec le taux de variation, le sens de variation de f sur chaque intervalle de D_f .
3. Calculer $f(x)$ pour $x \in \{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7\}$ et tracer $\mathcal{C}_f$. Résoudre $f(x) \geq 1$ et $f(x) < -2$; selon m , combien $f(x) = m$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 57 Le son et la température ★★

corrigé p. 64

Dans l'air à θ °C, la vitesse du son vaut environ $c(\theta) = 20\sqrt{\theta + 273}$ (en m/s).

1. Pour quels θ la formule a-t-elle un sens ? Montrer que la courbe de c est l'image de celle de $x \mapsto 20\sqrt{x}$ par une translation, et que c est croissante (quantité conjuguée). Calculer $c(-17)$, $c(16)$, $c(51)$, dresser le tableau de c sur $[-40, 60]$ et tracer sa courbe.
2. Résoudre $c(\theta) \geq 330$, puis $c(\theta) = 350$.
3. Un randonneur entend l'écho de son cri sur une falaise 3 s après l'avoir poussé. Exprimer sa distance $D(\theta)$ à la falaise ; la calculer à 16 °C et à -17 °C. Quelle erreur commet-on par -17 °C en prenant 340 m/s ?
4. Soit $t(\theta)$ la durée mise par le son pour parcourir 680 m. Montrer que $t(\theta) = \frac{34}{\sqrt{\theta+273}}$ ($\theta > -273$), étudier son sens de variation (composée) et résoudre $t(\theta) \leq 2$.

Exercice 58 La fonction cube et ses translatées ★★

corrigé p. 65

1. Trouver a tel que la courbe de $f : x \mapsto ax^3$ passe par $A(2, -1)$. Montrer que f est impaire et strictement décroissante (taux de variation) ; calculer $f(\pm 1)$, $f(\pm 2)$, $f(\pm 4)$, puis résoudre $f(x) = 8$ et $f(x) \leq \frac{27}{8}$.
2. Soit $g(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x - 15}{8}$. Montrer que $g(x) = f(x - 1) - 2$; en déduire la translation qui transforme $\mathcal{C}_f$ en $\mathcal{C}_g$, le centre de symétrie Ω de $\mathcal{C}_g$ et les variations de g . Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$; résoudre $g(x) = -3$, $g(x) = -1$, $g(x) \geq -3$.

3. Pour aller plus loin. Soit $h(x) = |g(x) + 2|$. Montrer que $h(x) = \frac{|x-1|^3}{8}$ et que la droite $x = 1$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_h$; donner les variations de h et résoudre $h(x) \leq 1$.

Exercice 59 Cube, puis homographique ★★★

corrigé p. 65

Soit $u(x) = x^3$, $v(t) = \frac{t+1}{t-1}$ et $f = v \circ u$.

1. Écrire $v(t)$ sous forme réduite et donner ses variations sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Déterminer D_f et $f(x)$. Étudier les variations de f sur chaque intervalle de D_f ; dresser son tableau (valeurs en $-2, -1, 0, 2$).
3. Montrer que $f(-x)f(x) = 1$ pour $x \notin \{-1, 1\}$. À l'aide de $f(x) + 1 = \frac{2x^3}{x^3-1}$ et $f(x) - 1 = \frac{2}{x^3-1}$, montrer que $-1 < f(x) < 1 \iff x < 0$, et $f(x) \leq -1 \iff 0 \leq x < 1$.
4. Résoudre $f(x) = \frac{9}{7}$, puis $f(x) \leq \frac{9}{7}$. Montrer que $f(x) = m$ a au plus une solution si $m \neq 1$, aucune si $m = 1$. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 60 Composer deux homographiques ★★★

corrigé p. 66

Soit $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$ et $g(x) = \frac{2x+4}{x+1}$.

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme réduite ; préciser les centres de symétrie et les sens de variation. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Montrer que $f(x) \neq -1$ pour tout $x \in D_f$, puis déterminer le domaine de $g \circ f$ et montrer que $(g \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 1$. Décrire la courbe de $g \circ f$.
3. Déterminer de même le domaine et l'expression de $f \circ g$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Résoudre $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.
4. Cas général. Si $F(x) = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$ et $G(x) = \alpha + \frac{k'}{x-\gamma}$ ($kk' \neq 0$), montrer que $(F \circ G)(x) = \beta + \frac{k}{k'}(x - \gamma)$ pour $x \neq \gamma$. Lien avec les centres de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

25 Défis de concours

Parité, variations, extremums et lecture graphique : médecine, ENSA, ENSAM, CPGE.

Exercice 61 L'anneau résistif (concours ENSAM) ★★★★★

corrigé p. 67

Un fil homogène fermé en cercle a une résistance de 12Ω . Branché en deux points A et M , ses deux arcs (résistances x et $12 - x$, $0 \leq x \leq 12$) sont en dérivation : l'anneau équivaut à $R(x) = \frac{x(12-x)}{12}$.

1. Écrire $R(x)$ sous forme canonique ; montrer que $R(12 - x) = R(x)$ et interpréter. Dresser le tableau de variations de R : où placer M pour que R soit maximale ?
2. Avec un générateur ($E = 6 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$), l'intensité vaut $I(x) = \frac{E}{r+R(x)}$. Montrer que $I(x) = \frac{72}{48-(x-6)^2}$; variations et extremums de I sur $[0, 12]$?
3. Soit $J(t) = I(6 + t)$ pour $t \in [-6, 6]$. Montrer que J est paire et retrouver ainsi les variations de I .
4. Où placer M pour avoir $I = 2 \text{ A}$? $I \leq 2 \text{ A}$? Selon m , combien $I(x) = m$ a-t-elle de solutions dans $[0, 12]$? Quelle est la plus grande tension $U = E - rI$ aux bornes de l'anneau ?

Exercice 62 Aller-retour et vent (médecine, ENSA) ★★★★★

corrigé p. 67

- Une voiture fait l'aller à 30 km/h et le retour à v km/h sur un même trajet. a) Montrer que sa vitesse moyenne vaut $V(v) = \frac{60v}{v+30} = 60 - \frac{1800}{v+30}$. b) Étudier les variations de V et montrer que $V(v) < 60$: peut-on obtenir 60 km/h de moyenne ? Résoudre $V(v) = 40$. c) Montrer que $V(v) \leq \frac{30+v}{2}$; cas d'égalité ?
- Un avion vole à 300 km/h par rapport à l'air et fait l'aller-retour entre deux villes distantes de 600 km, avec un vent w dans l'axe ($|w| < 300$, $w > 0$ s'il pousse à l'aller). a) Montrer que la durée du vol est $t(w) = \frac{600}{300+w} + \frac{600}{300-w} = \frac{360\,000}{90\,000-w^2}$ (heures). b) Montrer que t est paire, étudier ses variations sur $] -300, 300[$ et dresser son tableau. c) Montrer que le vent rallonge toujours l'aller-retour ; résoudre $t(w) = 4,5$. d) Selon m , combien $t(w) = m$ a-t-elle de solutions ? Montrer que t n'est pas majorée.

Exercice 63 Une fonction impaire et ses points fixes (CPGE) ★★★★★

corrigé p. 68

Soit $f(x) = \frac{x^3+3x}{3x^2+1}$.

- Montrer que f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$, que $f(x) = \frac{(1+x)^3-(1-x)^3}{(1+x)^3+(1-x)^3}$ et que $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ pour $x \neq 0$.
- Montrer que $f(x) - 1 = \frac{(x-1)^3}{3x^2+1}$ et $f(x) + 1 = \frac{(x+1)^3}{3x^2+1}$. Résoudre $f(x) \geq 1$, $f(x) \leq -1$, $|f(x)| < 1$; en déduire le maximum et le minimum de f sur $[-1, 1]$.
- Montrer que $T(x, y) = \frac{N}{(3x^2+1)(3y^2+1)}$ avec $N = 3x^2y^2 + x^2 + y^2 - 8xy + 3 = 3(xy - 1)^2 + (x - y)^2$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau.
- Résoudre $f(x) = x$, étudier la position de $\mathcal{C}_f$ et de $\Delta : y = x$, et en déduire que $f(x)$ est strictement entre x et 1 pour $x > 0$, $x \neq 1$. Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ .
- Calculer $f(2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$, résoudre $f(x) \leq \frac{14}{13}$; combien $f(x) = m$ a-t-elle au plus de solutions ?

Exercice 64 Cinétique enzymatique (concours de médecine) ★★★★★

corrigé p. 68

La vitesse d'une réaction enzymatique dépend de la concentration $S \geq 0$ du substrat (mmol/L) selon la loi de Michaelis-Menten $v(S) = \frac{VS}{K+S}$ ($V > 0$, $K > 0$).

- Ici $V = 10$, $K = 2$. a) Écrire $v(S) = 10 - \frac{20}{S+2}$, étudier les variations de v sur $[0, +\infty[$ et montrer que $v(S) < 10$: 10 est-il un maximum ? b) Calculer $v(2)$ et résoudre $v(S) \geq 8$.
- Avec un inhibiteur, la vitesse devient $w(S) = \frac{10S}{S+6}$. a) Comparer v et w . b) Montrer que $\frac{v(S)}{w(S)} = 1 + \frac{4}{S+2}$ ($S > 0$), décroissant et compris entre 1 et 3 ; interpréter. c) Résoudre $w(S) \geq 8$; tracer v et w .
- Lineweaver-Burk. Montrer que $\frac{1}{v(S)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{S}$ et $\frac{1}{w(S)} = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{S}$ ($S > 0$) : $s \mapsto \frac{1}{v(1/s)}$ est affine. Que représente l'ordonnée à l'origine commune ?
- Une autre enzyme suit la même loi, avec $v(1) = 4$ et $v(4) = 8$. Déterminer V et K .

Exercice 65 QCM de concours de médecine ★★★★★

corrigé p. 69

Une seule réponse exacte par question ; la justifier.

- Soit $f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{|x|-4}$. (A) $D_f = [-5, 5]$ (B) f est impaire (C) f est paire et $f(3) = -4$ (D) $f(0) = \frac{5}{4}$.
- Le minimum de $x \mapsto x^2 - 6x + 11$ sur $[4, 6]$ vaut : (A) 2 (B) 3 (C) 11 (D) il n'existe pas.

3. f est paire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$: (A) $f(-3) > f(2)$ (B) $f(-3) < f(2)$ (C) $f(-3) = f(2)$ (D) on ne sait pas.
4. L'équation $|x^2 - 4x| = 4$ a : (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 solutions réelles.
5. $h(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$: (A) h croît sur $[-3, +\infty[$ (B) h a pour maximum 1, en -3 (C) h est paire (D) $h \geq \frac{1}{10}$.

Exercice 66 QCM de concours ENSA – ENSAM ★★★★★

corrigé p. 69

Même consigne.

1. Sur $]-1, 0]$, $x \mapsto \left(3 - \frac{2}{x+1}\right)^2$ est : (A) croissante (B) décroissante (C) constante (D) non monotone.
2. f impaire décroît sur $\mathbb{R}^+$, $f(2) = -1$: (A) $f(-2) = -1$ (B) f croît sur $\mathbb{R}^-$ (C) $f(-5) \geq 1$ (D) $f(0) = 1$.
3. Nombre de points communs aux courbes $y = \sqrt{x+10}$ et $y = \frac{1}{2}(x+10)$: (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3.
4. Si f est impaire et g paire (sur $\mathbb{R}$), $g \circ f$ est : (A) paire (B) impaire (C) ni l'une ni l'autre (D) nulle.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

26 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

On écrit chaque condition d'existence, on la résout, puis on conclut. a) Fonction polynôme : $D_f = \mathbb{R}$. b) Il faut $x^2 - x - 12 \neq 0$, et $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$. c) $10 - 4x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{2}$: $D_f =]-\infty, \frac{5}{2}]$. d) $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$: le dénominateur ne s'annule jamais (d'ailleurs $x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3 \geq 3$) : $D_f = \mathbb{R}$. e) Une racine au dénominateur doit être non nulle : $x - 1 > 0$, $D_f =]1, +\infty[$. f) $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$: $\Delta = 49$, racines $-\frac{1}{3}$ et 2 ; le trinôme ($a = 3 > 0$) est positif à l'extérieur des racines : $D_f =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [2, +\infty[$. g) $|x + 1| = 3 \iff x + 1 = \pm 3 \iff x \in \{-4, 2\}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$. h) Il faut $x + 4 \geq 0$ et $x^2 \neq 1$: $D_f = [-4, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 2

- a) $f(0) = 1$, $f(-1) = 1 + 4 + 1 = 6$, $f(\sqrt{2}) = 2 - 4\sqrt{2} + 1 = 3 - 4\sqrt{2}$, $f(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 3 = 0$ (avec la forme de b).
b) $(x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 4 - 3 = f(x)$. $f(x) = 1 \iff (x - 2)^2 = 4 \iff x - 2 = \pm 2$: antécédents de 1 : 0 et 4 . $f(x) = -3 \iff (x - 2)^2 = 0$: un seul antécédent, 2 . $f(x) = -4 \iff (x - 2)^2 = -1$: impossible (un carré est positif) : -4 n'a **aucun** antécédent. c) $f(-1) = 6$: $A \in \mathcal{C}_f$; $f(3) = -2 \neq -1$: $B \notin \mathcal{C}_f$.
- Deux fonctions sont égales si elles ont le même domaine et les mêmes images.** a) $D_f = \mathbb{R}^* \neq D_g = \mathbb{R}$: $f \neq g$ (elles coïncident sur $\mathbb{R}^*$, car $\frac{x(x+2)}{x} = x + 2$ si $x \neq 0$). b) $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = f(x)$: $f = g$. c) $D_f = D_g = \mathbb{R}$, mais $\sqrt{x^2} = |x|$: $f(-1) = 1 \neq -1 = g(-1)$, donc $f \neq g$ (égales sur $[0, +\infty[$ seulement).

■ Corrigé de l'exercice 3

- Lecture** : $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = -1$, $f(3) = 1$. Antécédents de 1 : 0 et 3 ; de -1 : -1 et 2 ; de 0 : environ -0,7 ; 1 ; 2,7.
- La droite $y = \frac{1}{2}$ coupe $\mathcal{C}_f$ en **trois** points : 3 solutions. $f(x) = 2$: **aucune** ($\mathcal{C}_f$ est sous la droite $y = 1$). $f(x) \geq 0$ là où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses : $x \in [\alpha, 1] \cup [\beta, 3]$, $\alpha \approx -0,7$, $\beta \approx 2,7$.
- Tableau ci-dessus : maximum 1 , atteint en 0 et en 3 ; minimum -1 , atteint en -1 et en 2.

x	-1	0	2	3
f(x)	-1	1	-1	1

4. $f(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x^2 - 2x - 2 = 0$; $\Delta = 12$, $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$. Antécédents de 0 : $1 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}$ ($\approx -0,73$; 1 ; $2,73$), d'où $f(x) \geq 0 \iff x \in [1 - \sqrt{3}, 1] \cup [1 + \sqrt{3}, 3]$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- Méthode :** (i) D_f **symétrique** ; (ii) **comparer** $f(-x)$ à $f(x)$ et à $-f(x)$. a) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$: **paire**. b) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = -x^5 + 4x^3 = -f(x)$: **impaire**. c) $D_f = \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \frac{x^2+1}{-x} = -f(x)$: **impaire**. d) $4 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-2, 2]$, $f(-x) = f(x)$: **paire**. e) $f(1) = 2$, $f(-1) = 6$: $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: **ni paire ni impaire**. f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$: $-3 \in D_f$ mais $3 \notin D_f$: domaine non symétrique, **ni paire ni impaire**. g) $D_f = \mathbb{R}$ et $|-x| = |x|$: **paire**. h) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = -x\sqrt{x^2+1} = -f(x)$: **impaire**.
- $f(-2) = f(2) = 5$; $g(-1) = -g(1) = 4$; $g(0) = g(-0) = -g(0)$ donne $g(0) = 0$. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $\mathcal{C}_g$ par rapport à l'origine O .

■ Corrigé de l'exercice 5

- $D_f = [-4, 5]$. Les flèches indiquent une stricte monotonie : f est strictement décroissante sur $[-4, -1]$ et sur $[2, 5]$, strictement croissante sur $[-1, 2]$.
- $-3 < -2$ dans $[-4, -1]$, où f décroît : $f(-3) > f(-2)$; $0 < 1$ dans $[-1, 2]$, où f croît : $f(0) < f(1)$; $3 < 4$ dans $[2, 5]$: $f(3) > f(4)$. -3 et 0 ne sont pas dans un même intervalle de monotonie : on sait seulement que $-2 < f(-3) < 3$ et $-2 < f(0) < 4$; les deux ordres sont possibles : **on ne peut pas comparer**.
- Sur $[-4, -1]$: $-2 \leq f(x) \leq 3$; sur $[-1, 2]$: $-2 \leq f(x) \leq 4$; sur $[2, 5]$: $1 \leq f(x) \leq 4$. Sur D_f : maximum $4 = f(2)$, minimum $-2 = f(-1)$. Sur $[2, 5]$, f décroît : si $2 \leq x \leq 5$, alors $f(5) \leq f(x) \leq f(2)$, soit $1 \leq f(x) \leq 4$; maximum 4, minimum 1.
- $f(x) \leq 4 < 5$: $f(x) = 5$ n'a **aucune** solution. Sur $[2, 5]$, $f(x) \geq 1 > 0$: pas de solution de $f(x) = 0$; sur $[-4, -1]$ et sur $[-1, 2]$, f est strictement monotone, donc prend au plus une fois la valeur 0 sur chacun : **au plus deux solutions**.

■ Corrigé de l'exercice 6

- a) $f(x) = (x+3)^2 - 9 + 7 = (x+3)^2 - 2$: sommet $S(-3, -2)$, axe $x = -3$; $a = 1 > 0$: **minimum** -2 en -3 . b) $g(x) = -2[(x+1)^2 - 1] + 1 = -2(x+1)^2 + 3$: $S(-1, 3)$, axe $x = -1$; $a < 0$: **maximum** 3 en -1 . c) $h(x) = 3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1 = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$: $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, axe $x = \frac{1}{2}$; minimum $\frac{1}{4}$, donc $h(x) \geq \frac{1}{4} > 0$ pour tout réel x .

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f(x)		$\searrow$	$\nearrow$
		-2	

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g(x)		$\nearrow$	$\searrow$
		3	

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
h(x)		$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{1}{4}$	

- $g(x) - g(y) = -2(x^2 - y^2) - 4(x - y) = (x - y)[-2(x + y) - 4]$: $T(x, y) = -2(x + y + 2)$. Si $x \neq y$ sont dans $]-\infty, -1]$, alors $x + y < -2$ et $T > 0$: g est strictement **croissante**; s'ils sont dans $[-1, +\infty[$, alors $x + y > -2$ et $T < 0$: g est strictement **décroissante**.

■ Corrigé de l'exercice 7

- $\forall x \in I$, $f(x) \leq M$; $a \in I$ et $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(a)$; $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists x \in I$, $f(x) < m$.
- a) Pour $0 \leq x \leq 3$: $-1 \leq x - 1 \leq 2$, donc $0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$ et $-3 \leq f(x) \leq 1$: f est **bornée**, de maximum $1 = f(1)$ et de minimum $-3 = f(3)$.

b) Pour $x \geq 1$: $0 < \frac{1}{x} \leq 1$, donc $0 \leq g(x) < 1$: **bornée**, minimum $0 = g(1)$. Le majorant 1 n'est pas atteint ($\frac{1}{x} \neq 0$) et il n'y a **pas de maximum** : pour tout $x_0 \geq 1$, $\frac{1}{x_0+1} < \frac{1}{x_0}$, d'où $g(x_0+1) > g(x_0)$.

c) $\sqrt{x+3} \geq 0$, donc $h(x) \leq 2 = h(-3)$: **maximum 2**. **Non minorée** : pour tout réel m , $x = (|m|+3)^2 - 3 \geq -3$ donne $h(x) = 2 - (|m|+3) = -1 - |m| < m$. Donc pas de minimum.

d) Pour $-1 \leq x < 2$: $|x| < 2$, donc $0 \leq k(x) < 4$: **bornée**, minimum $0 = k(0)$. Pas de maximum : si $x_0 \in [-1, 2[$, le réel $x_1 = \frac{|x_0|+2}{2}$ est dans $]x_0, 2[\subset [-1, 2[$ et $k(x_1) > k(x_0)$.

■ Corrigé de l'exercice 8

- Lecture** : $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en $(-1, 2)$ et en $(2, -1)$; entre ces points, $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$: $f(x) \leq g(x) \iff x \in [-1, 2]$.
- $f(x) - g(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2(x+1)(x-2)$, négatif entre les racines -1 et 2 , positif à l'extérieur : on retrouve $f(x) \leq g(x) \iff x \in [-1, 2]$, l'égalité ayant lieu en -1 ($f(-1) = g(-1) = 2$) et en 2 ($f(2) = g(2) = -1$).

27 Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- $x^4 + 1 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$, symétrique, et $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^4+1} = f(x)$: f est **paire**.
- a) $2x^2 \geq 0$ et $x^4 + 1 > 0$: $f(x) \geq 0$. $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$: c'est l'identité. Donc $2x^2 \leq x^4 + 1$ et, en divisant par $x^4 + 1 > 0$: $0 \leq f(x) \leq 1$. b) $f(0) = 0$ et $f(\pm 1) = 1$: **minimum 0** (en 0 seulement) ; **maximum 1**, en -1 et en 1 ($f(x) = 1 \iff (x^2 - 1)^2 = 0$).
- a) Le numérateur de $f(x) - f(y)$ est $2[x^2(y^4+1) - y^2(x^4+1)]$ et $x^2y^4 - x^4y^2 + x^2 - y^2 = (x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)$; on divise par $x - y$. b) Si $x \neq y$ sont dans $[0, 1]$: $x + y > 0$ et $0 \leq xy < 1$, donc $T > 0$: f strictement **croissante**. Dans $[1, +\infty[$: $xy > 1$, $T < 0$: strictement **décroissante**. **Parité** (sens contraires sur des intervalles symétriques) : f décroît sur $[-1, 0]$, croît sur $]0, +\infty[$.
- $f(x) \geq \frac{4}{5} \iff 10x^2 \geq 4x^4 + 4 \iff 2x^4 - 5x^2 + 2 \leq 0 \iff (2x^2 - 1)(x^2 - 2) \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq x^2 \leq 2 \iff \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |x| \leq \sqrt{2}$: $S = [-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f(x)		1	0	1	

■ Corrigé de l'exercice 10

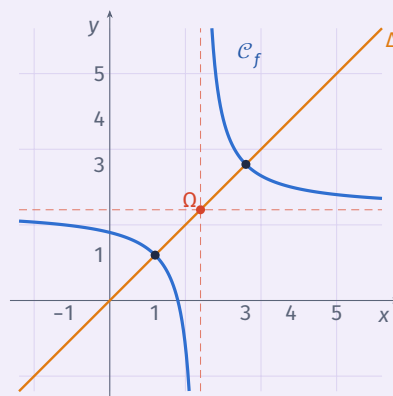
- $x^2 + 3 \geq 3 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$; $f(-3) = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$, $f(-1) = 0$, $f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- a) Le numérateur de $f(x) - f(y)$ est $(x+1)(y^2+3) - (y+1)(x^2+3) = xy(y-x) + 3(x-y) + (y^2 - x^2) = (x-y)(3 - xy - x - y)$, et $3 - x - y - xy = 4 - (1+x+y+xy) = 4 - (x+1)(y+1)$: d'où $T(x, y)$.
b) T a le signe de $4 - P$, où $P = (x+1)(y+1)$, $x \neq y$. Sur $]-\infty, -3]$: $x+1 \leq -2$, $y+1 \leq -2$, pas tous deux égaux à -2 : $P > 4$, $T < 0$: f **décroissante**. Sur $[-3, 1]$: $|x+1| \leq 2$, $|y+1| \leq 2$, donc $P \leq |x+1||y+1| \leq 4$, l'égalité imposant $x+1 = y+1 = \pm 2$ (exclu) : $P < 4$, $T > 0$: **croissante**. Sur $[1, +\infty[$: $P > 4$: **décroissante** (toutes strictement).

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f(x)		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	

3. $f(x)$ a le signe de $x + 1$: $f < 0$ sur $]-\infty, -1[$, $f(-1) = 0$, $f > 0$ sur $]-1, +\infty[$. Minimum : sur $]-\infty, 1]$, $f(x) \geq f(-3)$ (tableau) et sur $[1, +\infty[$, $f(x) > 0 > -\frac{1}{6}$. Maximum : sur $]-\infty, -1]$, $f(x) \leq 0$ et sur $[-1, +\infty[$, $f(x) \leq f(1)$. Donc **maximum** $\boxed{\frac{1}{2} = f(1)}$ et **minimum** $\boxed{-\frac{1}{6} = f(-3)}$. Enfin $f(x) = \frac{1}{4} \iff 4x + 4 = x^2 + 3 \iff x^2 - 4x - 1 = 0 : \boxed{x = 2 \pm \sqrt{5}}$.

■ Corrigé de l'exercice 11

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $2 + \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = f(x)$. **Centre** : si $x \neq 2$, alors $4-x \neq 2$ et $f(4-x) + f(x) = 2 + \frac{1}{2-x} + 2 + \frac{1}{x-2} = 4 = 2 \times 2$: $\Omega(2, 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. $T(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{y-2} \right) = \frac{-1}{(x-2)(y-2)}$. Si x, y sont du même côté de 2, $T < 0$: f strictement **décroissante** sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ (pas sur D_f : $f(1) = 1 < f(3) = 3$).
3. $f(-1) = \frac{5}{3}$, $f(0) = \frac{3}{2}$, $f(1) = 1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = \frac{5}{2}$, $f(5) = \frac{7}{3}$; figure ci-contre.



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

4. a) **Lecture** : $\mathcal{C}_f$ et Δ se coupent en $(1, 1)$ et $(3, 3)$. **Calcul** : pour $x \neq 2$, $f(x) = x \iff 2x - 3 = x^2 - 2x \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff \boxed{x \in \{1, 3\}}$. b) $f(x) - x = \frac{2x-3-x^2+2x}{x-2} = \frac{-(x-1)(x-3)}{x-2}$; un tableau de signes donne $f(x) \leq x \iff \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \geq 0 \iff \boxed{x \in [1, 2[\cup]3, +\infty[}$ (là où $\mathcal{C}_f$ est sous Δ).
5. $f(x) = m \iff \frac{1}{x-2} = m - 2$. Si $m = 2$: **aucune** solution ; si $m \neq 2$: **une seule**, $x = 2 + \frac{1}{m-2}$ (toute droite horizontale autre que $y = 2$ coupe $\mathcal{C}_f$ une fois).

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $D_u = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $1 - \frac{6}{x+2} = \frac{x+2-6}{x+2} = u(x)$ et $T_u(x, y) = \frac{6}{(x+2)(y+2)} > 0$ pour x, y du même côté de -2 : u est strictement **croissante** sur chaque intervalle. Signe : $u(x) < 0$ sur $]-2, 4[$, $u(4) = 0$, $u(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$.

2. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \left(\frac{x-4}{x+2}\right)^2$. b) **Règle** : même sens $\Rightarrow$ **croissante, sens contraires $\Rightarrow$ décroissante**. Sur $]-\infty, -2[$, u croît à valeurs positives, où v croît : f **croissante**. Sur $]-2, 4[$, u croît à valeurs dans $]-\infty, 0]$, où v décroît : f **décroissante**. Sur $[4, +\infty[$, $u \geq 0$: f **croissante**. Comme $f \geq 0 = f(4)$: **minimum** $\boxed{0}$ en 4.

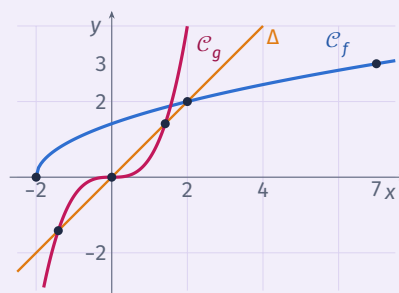
x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$ 0 $\nearrow$	

- c) $f(x) = \frac{1}{4} \iff u(x) = \pm \frac{1}{2} \iff \frac{6}{x+2} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{6}{x+2} = \frac{3}{2} \iff x = 10$ ou $x = 2$: $\boxed{S = \{2, 10\}}$. Puis $f(x) \leq \frac{1}{4} \iff -\frac{1}{2} \leq u(x) \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq \frac{6}{x+2} \leq \frac{3}{2}$; alors $x + 2 > 0$ et $4 \leq x + 2 \leq 12$: $\boxed{S = [2, 10]}$.

3. $g(x) = u(x^2) = \frac{x^2-4}{x^2+2} = 1 - \frac{6}{x^2+2}$, $D_g = \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$: **paire**. Sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto x^2$ croît, à valeurs dans $[0, +\infty[\subset]-2, +\infty[$ où u croît : g **croissante** ; par parité, g **décroissante** sur $]-\infty, 0]$. De $x^2 + 2 \geq 2$: $0 < \frac{6}{x^2+2} \leq 3$, donc $\boxed{-2 \leq g(x) < 1}$ (minimum $-2 = g(0)$). $f(0) = 4 \neq g(0) = -2$ (et $D_f \neq D_g$) : $\boxed{f \neq g}$, c'est-à-dire $v \circ u \neq u \circ v$.

■ Corrigé de l'exercice 13

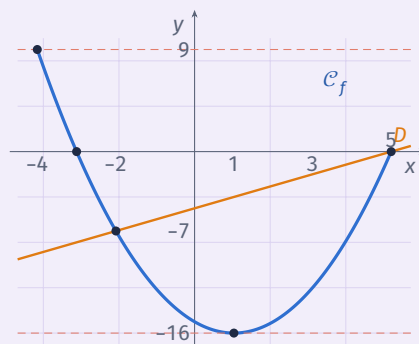
1. a) $D_f = [-2, +\infty[$. En multipliant par la **quantité conjuguée**, $\sqrt{x+2} - \sqrt{y+2} = \frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}$, d'où $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} > 0$: f strictement **croissante**. b) $f(x) = \sqrt{x+2}$: translation de vecteur $-2\vec{i}$ (vers la gauche de 2). c) $f(x) = x$ impose $x \geq 0$, puis $x+2 = x^2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$: $x = 2$ (-1 rejeté). $f(x) \geq x$: vrai si $-2 \leq x < 0$; si $x \geq 0$, deux nombres positifs : $\Leftrightarrow x+2 \geq x^2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$: $S = [-2, 2]$. $f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x+2 \leq 9$: $S = [-2, 7]$.



2. a) $g(-x) = -g(x)$: impaire. $T(x, y) = \frac{x^3-y^3}{2(x-y)} = \frac{x^2+xy+y^2}{2}$ et $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ si $x \neq y$: g strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$. b) $g(x) \leq 32 \Leftrightarrow x^3 \leq 64 = 4^3 \Leftrightarrow x \leq 4$ (le cube est strictement croissant). $g(x) \geq x \Leftrightarrow x(x^2-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, 0] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ (tableau de signes).
3. Figure : $\mathcal{C}_f$ coupe Δ en $(2, 2)$ et est au-dessus de Δ sur $[-2, 2]$; $\mathcal{C}_g$ coupe Δ en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, O et $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

■ Corrigé de l'exercice 14

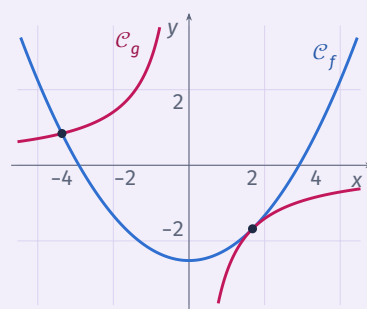
1. $f(x) = (x-1)^2 - 1 - 15 = (x-1)^2 - 16 = (x-1-4)(x-1+4) = (x-5)(x+3)$. f décroît sur $[-4, 1]$, croît sur $[1, 5]$ (tableau).
2. **Lecture** (droites horizontales $y = m$, figure) : $m < -16$: 0 ; $m = -16$: 1 ; $-16 < m \leq 0$: 2 ; $0 < m \leq 9$: 1 ; $m > 9$: 0.
Contrôle : pour $m \geq -16$, $f(x) = m \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{m+16}$, avec $1 - \sqrt{m+16} \geq -4 \Leftrightarrow m \leq 9$ et $1 + \sqrt{m+16} \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 0$.
3. $f(x) = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 0$: points $(-2, -7)$ et $(5, 0)$. $f(x) \leq x - 5 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 5]$ ($\mathcal{C}_f$ sous D).



x	-4	1	5
$f(x)$	9	-16	0

■ Corrigé de l'exercice 15

- Figure ci-contre : on lit les points communs $(-4, 1)$ et $(2, -2)$; en $(2, -2)$, les courbes semblent se toucher sans se traverser.
- $f(x) - g(x) = \frac{x^2}{4} - 3 + \frac{4}{x} = \frac{x^3 - 12x + 16}{4x}$ et $(x - 2)^2(x + 4) = (x^2 - 4x + 4)(x + 4) = x^3 - 12x + 16$.
- Pour $x \neq 0$: $f(x) = g(x) \iff (x - 2)^2(x + 4) = 0 \iff x \in \{-4, 2\}$: points $(-4, 1)$ et $(2, -2)$. $f(x) - g(x)$ a le signe de $\frac{x+4}{x}$, sauf en 2 où il est nul : $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty, -4[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$ et **au-dessous** sur $]-4, 0[$. En 2, la différence s'annule **sans changer de signe** (facteur $(x - 2)^2$) : les courbes se touchent sans se traverser.



■ Corrigé de l'exercice 16

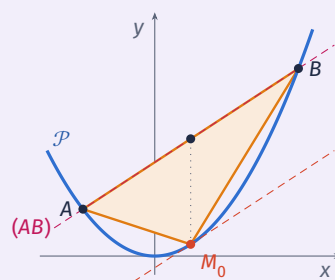
a) **Vrai** (contraposée) : si $a \neq b$, par exemple $a < b$, alors $f(a) < f(b)$, donc $f(a) \neq f(b)$. b) **Vrai** : soit $x < y$. Si $0 \leq x$: c'est l'hypothèse. Si $y \leq 0$: $0 \leq -y < -x$, donc $f(-y) \leq f(-x)$, soit $-f(y) \leq -f(x)$ et $f(x) \leq f(y)$. Si $x < 0 < y$: $f(0) = 0$ (f impaire) et $f(x) = -f(-x) \leq -f(0) = 0 \leq f(y)$. c) **Vrai** : si $x < y$, $f(x) < f(y)$ et $g(x) > g(y)$, donc $-g(x) < -g(y)$; en additionnant, $(f - g)(x) < (f - g)(y)$. d) **Faux** : $f(x) = -\frac{1}{x}$ est croissante sur chaque intervalle, mais $f(-1) = 1 > f(1) = -1$. e) **Faux** : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} > 0$, mais $\frac{1}{f(x)} = x^2 + 1$ n'est pas majorée. f) **Faux** : $f = g : x \mapsto -x$ sont décroissantes et $g \cdot f(x) = x$ est croissante. g) **Faux** : $f(x) = -x$ si $x < 0$, $f(x) = -x - 1$ si $x \geq 0$, est strictement décroissante ($f' > 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f' \leq -1$ sur $[0, +\infty[$) et ne s'annule jamais.

28

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- $(-1)^2 = 1$, $2^2 = 4$: $A, B \in \mathcal{P}$. Coefficient directeur $\frac{4-1}{2+1} = 1$ et $1 = -1 + 2$: $(AB) : y = x + 2$. Pour $-1 < x < 2$: $(x + 2) - x^2 = (x + 1)(2 - x) > 0$: M est **sous** (AB) .
- $AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ et $d(M, (AB)) = \frac{|x - x^2 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{(x+1)(2-x)}{\sqrt{2}}$, donc $S(x) = \frac{1}{2} AB \times d = \frac{3}{2}(x + 1)(2 - x)$.
- $(x + 1)(2 - x) = -x^2 + x + 2 = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, d'où $S(x) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{27}{8}$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{2}$: aire maximale $\frac{27}{8}$ pour $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
- La parallèle à (AB) par M_0 a pour équation $y = x - \frac{1}{4}$; ses points communs avec $\mathcal{P} : x^2 = x - \frac{1}{4} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$: le seul point M_0 . Le milieu de $[AB]$ est $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$: même abscisse $\frac{1}{2}$.



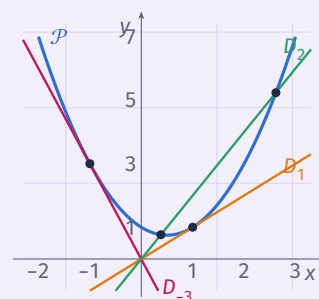
Remarque. Archimède a démontré que l'aire comprise entre (AB) et $\mathcal{P}$ vaut les $\frac{4}{3}$ de celle du triangle AM_0B : $\frac{4}{3} \times \frac{27}{8} = \frac{9}{2}$ (résultat admis).

■ Corrigé de l'exercice 18

- Pour $x \geq -1$: $g(x) \geq \frac{1}{2} > 0$ et $g(x)^2 - f(x)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} - (1 + x) = \frac{x^2}{4} \geq 0$. Comme $g(x) + f(x) > 0$: $g(x) - f(x) = \frac{g(x)^2 - f(x)^2}{g(x) + f(x)} \geq 0$, nul seulement pour $x = 0$: $f(x) \leq g(x)$.
- $h(x)^2 = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{64} = 1 + x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} = 1 + x + \frac{x^3(x-8)}{64}$. Sur $[0, 8]$: si $h(x) < 0$, alors $h(x) < 0 \leq f(x)$; si $h(x) \geq 0$, alors $h(x)^2 - f(x)^2 = \frac{x^3(x-8)}{64} \leq 0$ et deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés : $h(x) \leq f(x)$. Sur $[-1, 0[$: $h(x) \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} > 0$ et $h(x)^2 - f(x)^2 > 0$ ($x^3 < 0$, $x - 8 < 0$) : $h(x) > f(x)$. Enfin $g(x) - h(x) = \frac{x^2}{8}$. **Positions** : les trois courbes passent par $(0, 1)$; sur $[-1, 0[$, $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_h$, elle-même sous $\mathcal{C}_g$; sur $]0, 8]$, $\mathcal{C}_h$ est sous $\mathcal{C}_f$, elle-même sous $\mathcal{C}_g$.
- Avec $x = 0,02$: $h(x) \leq \sqrt{1,02} \leq g(x)$, soit $1,00995 \leq \sqrt{1,02} \leq 1,01$ (amplitude $\frac{x^2}{8} = 5 \times 10^{-5}$). Puis $ER = \sqrt{100^2 + 10^2} = 100\sqrt{1,01}$ et, avec $x = 0,01$: $100,49875 \leq ER \leq 100,5$ (en mètres).

■ Corrigé de l'exercice 19

- $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$: sommet $S\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; $f(x) \geq \frac{3}{4} > 0$: $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
- $M \in \mathcal{P} \cap D_m \iff (y = x^2 - x + 1 \text{ et } y = mx) \iff (y = mx \text{ et } x^2 - x + 1 = mx)$, d'où l'équivalence. $\Delta = (m+1)^2 - 4 = (m-1)(m+3)$: **deux points** si $m < -3$ ou $m > 1$; **un point** si $m = 1$ ($x = 1$: $(1, 1)$) ou $m = -3$ ($x = -1$: $(-1, 3)$) ; **aucun** si $-3 < m < 1$. Avec deux points, les abscisses ont pour produit $1 > 0$ (même signe) et pour somme $m + 1$: **positives** si $m > 1$, **négatives** si $m < -3$.
- $f(x) - x = (x - 1)^2 \geq 0$: $\mathcal{P}$ est au-dessus de D_1 et ne la rencontre qu'en $(1, 1)$: D_1 **touche** $\mathcal{P}$ sans la traverser ; de même $f(x) + 3x = (x + 1)^2$: D_{-3} touche $\mathcal{P}$ en $(-1, 3)$. D_2 coupe $\mathcal{P}$ aux abscisses $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$.



■ Corrigé de l'exercice 20

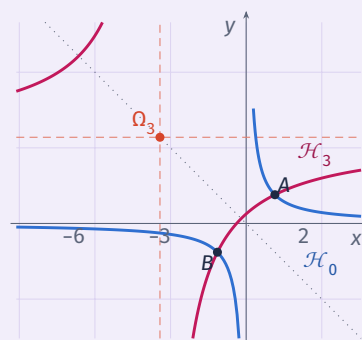
- Sur $[-2, 1]$, f décroît : $1 = f(1) \leq f(x) \leq f(-2) = 4$; sur $[1, 4]$, f croît : $1 \leq f(x) \leq 9$. Donc $1 \leq f(x) \leq 9$. $t \mapsto \sqrt{t}$ croît sur $[1, 9]$: g a les **mêmes** variations que f et $1 \leq g(x) \leq 3$. $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $[1, 9]$: h a les variations **contraires** (croissante sur $[-2, 1]$, décroissante sur $[1, 4]$) et $\frac{1}{9} \leq h(x) \leq 1$.
- a) $x^2 \in [-2, 4] \iff x^2 \leq 4$: $D_k = [-2, 2]$, symétrique, et $k(-x) = f((-x)^2) = k(x)$: **paire**. b) Sur $[0, 1]$, $x \mapsto x^2$ croît, à valeurs dans $[0, 1] \subset [-2, 1]$ où f décroît : k **décroissante**. Sur $[1, 2]$, $x^2 \in [1, 4]$ où f croît : k **croissante**. Par parité : croissante sur $[-1, 0]$, décroissante sur $[-2, -1]$. $k(\pm 2) = f(4) = 9$, $k(\pm 1) = f(1) = 1$, $k(0) = f(0)$ (avec $1 < f(0) < 4$). c) $\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$ sont dans $[0, 1]$, où f décroît : $k\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{1}{9}\right) = k\left(\frac{1}{3}\right)$.
- $1 - x \in [-2, 4] \iff D_\ell = [-3, 3]$. $x \mapsto 1 - x$ décroît. Sur $[-3, 0]$, $1 - x \in [1, 4]$ où f croît : ℓ **décroissante** ; sur $[0, 3]$, $1 - x \in [-2, 1]$ où f décroît : ℓ **croissante**. $\ell(-3) = f(4) = 9$, $\ell(0) = f(1) = 1$, $\ell(3) = f(-2) = 4$.

x	-2	-1	0	1	2
k(x)	9		f(0)	1	9

x	-3	0	3
ℓ(x)	9	1	4

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $f_1(x) = \frac{x+1}{x+1} = 1$ ($x \neq -1$) : $\mathcal{H}_1$ est la droite $y = 1$ privée du point $(-1, 1)$. $f_{-1}(x) = \frac{-x+1}{x-1} = -1$ ($x \neq 1$) : $\mathcal{H}_{-1}$ est la droite $y = -1$ privée de $(1, -1)$.
2. a) $m + \frac{1-m^2}{x+m} = \frac{mx+m^2+1-m^2}{x+m} = f_m(x)$: hyperbole de centre $\Omega_m(-m, m)$ (droites asymptotes $x = -m$, $y = m$), dont les coordonnées vérifient $y = -x$. b) $T(x, y) = \frac{m^2-1}{(x+m)(y+m)}$, avec $(x+m)(y+m) > 0$ sur chaque intervalle : si $|m| > 1$, f_m est strictement **croissante** sur $]-\infty, -m[$ et sur $]-m, +\infty[$; si $|m| < 1$, strictement **décroissante**.
3. $f_m(1) = \frac{m+1}{1+m} = 1$ et $f_m(-1) = \frac{1-m}{m-1} = -1$: $A, B \in \mathcal{H}_m$. **Réciproquement**, si (x, y) est sur toutes les $\mathcal{H}_m$: $y(x+m) = mx+1$, soit $m(y-x) + xy - 1 = 0$ pour une infinité de m ; donc $y = x$ et $xy = 1$: $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$. $f_m(2) = 0 \iff 2m+1 = 0 \iff m = -\frac{1}{2}$: $f_{-1/2}(x) = \frac{2-x}{2x-1}$. Figure : $\mathcal{H}_0$ ($y = \frac{1}{x}$) et $\mathcal{H}_3$ ($y = 3 - \frac{8}{x+3}$).

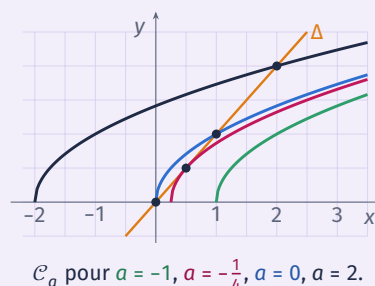


■ Corrigé de l'exercice 22

1. a) $t \mapsto t$ et $t \mapsto \sqrt{t+4}$ sont strictement croissantes sur $[-4, +\infty[$: leur somme h aussi. Si $a < b$, $h(a) < h(b)$; si $a > b$, $h(a) > h(b)$: donc $h(a) = h(b) \iff a = b$ et $h(a) < h(b) \iff a < b$. b) **On reconnaît** $h(x^2) = h(3x+4)$ (car $3x+4+4 = 3x+8$) ; l'équation est définie pour $3x+8 \geq 0$, soit $x \geq -\frac{8}{3}$ ($x^2 \geq -4$ est toujours vrai). Elle équivaut à $x^2 = 3x+4 \iff (x-4)(x+1) = 0$: $S = \{-1, 4\}$ (deux réels $\geq -\frac{8}{3}$). L'inéquation équivaut à $x^2 < 3x+4$: $S =]-1, 4[$.
2. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ avec $x^2 + xy + y^2 > 0$ si $x \neq y$ (exercice 13) : le cube est strictement croissant, donc $a^3 = b^3 \iff a = b$ et $a^3 \leq b^3 \iff a \leq b$. $(x-1)^3 = (2x)^3 \iff x-1 = 2x \iff x = -1$. $(x^2-2)^3 \leq x^3 \iff x^2-2 \leq x \iff (x-2)(x+1) \leq 0 \iff x \in [-1, 2]$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. $f_a(x) = f_0(x+a)$: $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_0$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$. $f_a(x) = x$ exige $x \geq 0$ (une racine carrée est positive) ; on élève alors au carré deux nombres positifs : $\iff x+a = x^2$ (et $x+a = x^2 \geq 0$ assure l'existence de la racine).
2. $\Delta = 1+4a$. Si $a < -\frac{1}{4}$: pas de racine : $\emptyset$ solution. Si $a = -\frac{1}{4}$: racine double $\frac{1}{2} \geq 0$: $\{1\}$ solution. Si $a > -\frac{1}{4}$: deux racines de somme 1 et de produit $-a$; pour $-\frac{1}{4} < a \leq 0$, produit ≥ 0 et somme > 0 : les deux sont positives, $\{2\}$ solutions ; pour $a > 0$, produit < 0 : une seule est positive, $\{1\}$ solution. Ainsi $a = 2$: $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2$ (-1 rejeté) ; $a = 0$: $x \in \{0, 1\}$; $a = -\frac{1}{4}$: $x = \frac{1}{2}$.
3. Quand a augmente, la courbe glisse vers la gauche : $\mathcal{C}_{-1}$ ne rencontre pas Δ , $\mathcal{C}_{-1/4}$ la touche en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mathcal{C}_0$ la coupe en O et $(1, 1)$, $\mathcal{C}_2$ en $(2, 2)$ seulement.



29

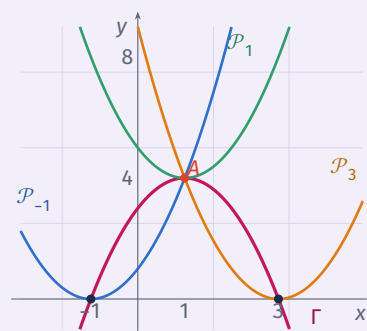
Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. (C) : il faut $x + 3 \geq 0$ et $x^2 \neq 4$, soit $[-3, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$; la réponse (B) oublie -2 .
2. (C) : $f(1) = f(-1) = 2$ ne suffit pas : $f(2) = 26$ et $f(-2) = -22$, donc $f(-2) \neq f(2)$ et $f(-2) \neq -f(2)$. (D) ne vaut que pour la fonction nulle.
3. (D) : $\frac{5-x}{x+1} = \frac{-(x+1)+6}{x+1} = -1 + \frac{6}{x+1}$: centre $(-1, -1)$.
4. (A) : $x \mapsto 1 - 2x$ et f sont décroissantes : si $x \leq y$, alors $1 - 2x \geq 1 - 2y$, puis $f(1 - 2x) \leq f(1 - 2y)$: g est croissante.
5. (B) : $|x - 1| + |x + 3| = |1 - x| + |x + 3| \geq |(1 - x) + (x + 3)| = 4$ (inégalité triangulaire), avec égalité en 0 (et sur tout $[-3, 1]$).

■ Corrigé de l'exercice 25

1. $f_m(x) = x^2 + 3 + 2m(1 - x)$: $f_m(1) = 4$ pour tout m ; toutes les $\mathcal{P}_m$ passent par $A(1, 4)$ (seul point commun : $f_m(x)$ ne dépend pas de m si et seulement si $x = 1$).
2. a) $f_m(x) = (x - m)^2 - m^2 + 2m + 3$: $S_m(m, -m^2 + 2m + 3)$; ses coordonnées $X = m$, $Y = -m^2 + 2m + 3$ vérifient $Y = -X^2 + 2X + 3$: $S_m \in \Gamma$. b) Le minimum de f_m est $\beta(m) = -m^2 + 2m + 3 = 4 - (m - 1)^2 \leq 4$, maximal pour $m = 1$: $S_1 = (1, 4) = A$.
3. Au-dessus de $y = 2 \iff \beta(m) > 2 \iff m^2 - 2m - 1 < 0 \iff m \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$. Deux racines strictement positives : $\Delta' = m^2 - 2m - 3 = (m - 3)(m + 1) > 0$, somme $2m > 0$ et produit $2m + 3 > 0$: $m > 3$.
4. $\mathcal{P}_{-1} : y = (x + 1)^2$, $\mathcal{P}_1 : y = (x - 1)^2 + 4$, $\mathcal{P}_3 : y = (x - 3)^2$: figure (sommets sur Γ , toutes par A).



■ Corrigé de l'exercice 26

1. Grillage : $3x + y = 120$, donc $y = 120 - 3x$, $0 < x < 40$, et $A(x) = x(120 - 3x) = -3x^2 + 120x = -3(x - 20)^2 + 1200 \leq 1200$. Aire maximale 1200 m^2 , pour $x = 20$ m et $y = 60$ m.
2. $R(x) = 300(20 - x)(10 + x) = 300(200 + 10x - x^2) = 300[225 - (x - 5)^2] \leq 67\,500$. Recette maximale $67\,500 \text{ DH}$ pour $x = 5$: prix 150 DH (450 abonnés). Puis $R(x) \geq 60\,000 \iff (x - 5)^2 \leq 25 \iff 0 \leq x \leq 10$: prix compris entre 100 et 200 DH .

■ Corrigé de l'exercice 27

1. $h(x) = \frac{240+5x^2}{40+10x} = \frac{5(x^2+48)}{10(x+4)} = \frac{x^2+48}{2(x+4)}$. $h(0) = \frac{48}{8} = 6$: canette vide, G est son centre ; $h(12) = \frac{192}{32} = 6$: canette pleine, système homogène, G à mi-hauteur.

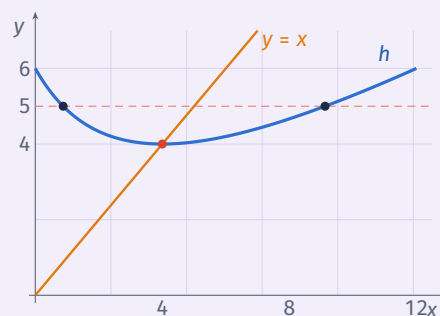
2. $\frac{x+4}{2} + \frac{32}{x+4} - 4 = \frac{(x+4)^2 + 64 - 8(x+4)}{2(x+4)} = \frac{x^2 + 48}{2(x+4)}$, puis $T(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{32}{x-y} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{y+4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{32}{(x+4)(y+4)}$. Sur $[0, 4]$ ($x \neq y$): $(x+4)(y+4) < 8 \times 8 = 64$, $T < 0$: **h décroissante** ; sur $[4, 12]$: $(x+4)(y+4) > 64$, $T > 0$: **croissante**.

3. $h(x) - 4 = \frac{x^2 + 48 - 8x - 32}{2(x+4)} = \frac{(x-4)^2}{2(x+4)} \geq 0$: position la plus basse de G : **4 cm**, pour **$x = 4$ cm**.

x	0	4	12
$h(x)$	6	4	6

4. $h(x) = x \iff x^2 + 48 = 2x^2 + 8x \iff x^2 + 8x - 48 = 0 \iff (x+12)(x-4) = 0 \iff x = 4$ ($x \geq 0$).
Et $h(x) - x = \frac{-(x+12)(x-4)}{2(x+4)}$: $h(x) > x$ si $x < 4$ (G au-dessus de la surface), $h(x) < x$ si $x > 4$ (G dans le liquide).

5. $h(x) \leq 5 \iff x^2 + 48 \leq 10x + 40 \iff x^2 - 10x + 8 \leq 0 \iff x \in [5 - \sqrt{17}, 5 + \sqrt{17}]$, environ $[0,88 ; 9,12] \subset [0, 12]$.



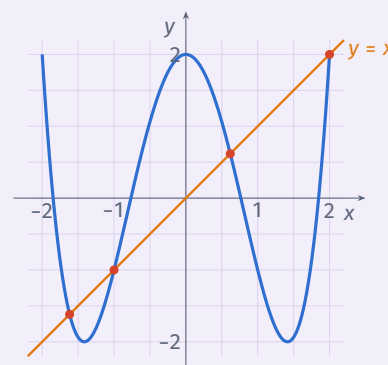
■ Corrigé de l'exercice 28

1. $f(x) = x \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x \in \{-1, 2\}$. $F(x) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$ et $(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 1) = x^4 - 4x^2 - x + 2 = F(x) - x$. Donc $F(x) = x \iff x^2 - x - 2 = 0$ ou $x^2 + x - 1 = 0$: $x \in \left\{-1, 2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. a et b sont les racines de $x^2 + x - 1$: $a^2 = 1 - a$ et $a + b = -1$. Donc $f(a) = 1 - a - 2 = -1 - a = b$ et, de même, $f(b) = -1 - b = a$: f échange a et b (solutions de $F(x) = x$ qui ne sont pas des points fixes de f).

3. Sur $[0, \sqrt{2}]$, f croît, à valeurs dans $[-2, 0]$ où f décroît : **F décroissante**. Sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, f croît, à valeurs dans $[0, +\infty[$ où f croît : **F croissante**. F est paire (f l'est) : croissante sur $[-\sqrt{2}, 0]$, décroissante sur $] -\infty, -\sqrt{2}]$. $F(0) = f(-2) = 2$, $F(\pm\sqrt{2}) = f(0) = -2$, $F(\pm 2) = f(2) = 2$. Si $x \in [-2, 2]$: $x^2 \in [0, 4]$, $f(x) \in [-2, 2]$, puis $F(x) = f(f(x)) \in [-2, 2]$.

4. La courbe de F coupe $y = x$ en quatre points, d'abscisses $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,62$; -1 ; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,62$; 2 : les solutions de la question 1.



x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$F(x)$		-2	2	-2	

■ Corrigé de l'exercice 29

1. **(B)** : $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ décroît de $f(0) = 7$ à $f(2) = 3$ sur $[0, 2]$, puis croît jusqu'à $f(3) = 4$: les valeurs forment $[3, 7]$.

2. **(C)** : un seul point commun $\iff \Delta = m^2 - 16 = 0 \iff m = \pm 4$: deux réels.

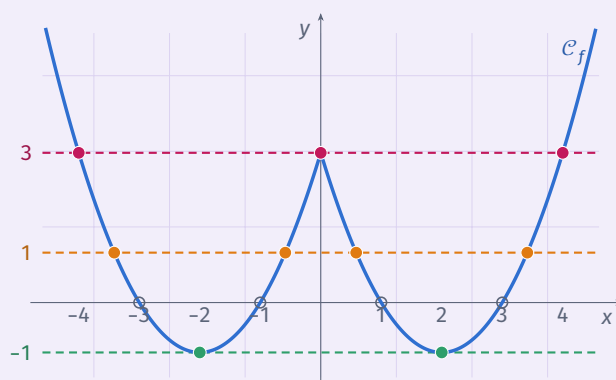
3. **(B)** : $f(x^2 - 2) \leq -f(x) = f(-x)$ (f impaire) $\iff x^2 - 2 \leq -x$ (f strictement croissante) $\iff (x+2)(x-1) \leq 0 \iff x \in [-2, 1]$.

4. (C) : en remplaçant x par $-x$: $2f(-x) + f(x) = 3x^2 - x$. Deux fois la relation donnée moins celle-ci : $3f(x) = 3x^2 + 3x$, donc $f(x) = x^2 + x$ (qui convient) et $f(1) = 2$.
5. (D) : $x^3 - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ s'annule en 1 et en -2 seulement : deux points, (1, 1) (où la droite touche la courbe) et (-2, -8).

■ Corrigé de l'exercice 30

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $|-x| = |x|$: $f(-x) = f(x)$, f est **paire**. Comme $x^2 = |x|^2$: $f(x) = |x|^2 - 4|x| + 4 - 1 = (|x| - 2)^2 - 1$. $f(x) = 0 \iff |x| - 2 = \pm 1 \iff |x| \in \{1, 3\}$: $S = \{-3, -1, 1, 3\}$.
2. Pour $x \geq 0$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $T(x, y) = x + y - 4$. Si $x \neq y$ sont dans $[0, 2]$: $x + y < 4$, $T < 0$: f **décroissante** ; dans $[2, +\infty[$: $T > 0$: **croissante**. **Parité** : croissante sur $[-2, 0]$, décroissante sur $] -\infty, -2]$. **Extremums** : $f(x) \geq -1$, minimum -1 en ± 2 ; $f(0) = 3$ est un **maximum relatif** (pour $|x| \leq 4$, $(|x| - 2)^2 \leq 4$, donc $f(x) \leq 3$), pas absolu : $f(5) = 8$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$ 3 $\searrow$	$\nearrow$	
		-1		-1	



3. **Graphiquement**, on compte les points communs de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = m$. **Par le calcul** : $f(x) = m \iff (|x| - 2)^2 = m + 1$.

Si $m < -1$: aucune solution. Si $m = -1$: $|x| = 2$. Si $m > -1$: $|x| = 2 + \sqrt{m + 1}$ (deux solutions opposées) ou $|x| = 2 - \sqrt{m + 1}$, qui donne deux solutions si $m < 3$, une seule ($x = 0$) si $m = 3$, aucune si $m > 3$.

Nombre de solutions : $0 (m < -1)$; $2 (m = -1)$; $4 (-1 < m < 3)$; $3 (m = 3)$; $2 (m > 3)$.

4. Posons $X = f(x)$: d'après 1, $f(X) = 0 \iff X \in \{-3, -1, 1, 3\}$. D'après 3 : $f(x) = -3$ n'a **aucune** solution ($-3 < -1$) ; $f(x) = -1$ en a **2** ($x = \pm 2$) ; $f(x) = 1$ en a **4** ($|x| = 2 \pm \sqrt{2}$) ; $f(x) = 3$ en a **3** ($x \in \{0, \pm 4\}$). Ces ensembles sont disjoints ($f(x)$ y prend des valeurs différentes) : $0 + 2 + 4 + 3 =$ **9 solutions** (points marqués sur la figure, droites $y = -1$, $y = 1$, $y = 3$) :

$$S = \{-4, -2 - \sqrt{2}, -2, -2 + \sqrt{2}, 0, 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}, 4\}.$$

30

Corrigés : domaines et lectures

■ Corrigé de l'exercice 31

On écrit les conditions d'existence, puis on les résout.

1. a) Il faut $3x^2 + x - 2 \neq 0$: $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\frac{-1-5}{6} = -1$ et $\frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$. $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$. b) Il faut $2x + 7 \geq 0$ et $x \neq 0$, soit $x \geq -\frac{7}{2}$ et $x \neq 0$: $D_{f_2} = \left[-\frac{7}{2}, 0\right[\cup]0, +\infty[$.
- c) $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ est positif ou nul à l'extérieur des racines -5 et 3 : $D_{f_3} =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$.
- d) $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$: $x^2 + x + 4$ ne s'annule jamais (il est toujours strictement positif) : $D_{f_4} = \mathbb{R}$. e) Il faut $x - 1 \geq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$, soit $x \geq 1$, $x \neq 2$ et $x \neq -2$; la valeur -2 est déjà

exclue par $x \geq 1$: $D_{f_5} = [1, 2[\cup]2, +\infty[$.

f) $|x| - 1 \geq 0 \iff |x| \geq 1 \iff (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1)$: $D_{f_6} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. g) Il faut $3 - x \geq 0$ et $x + 2 \geq 0$, soit $-2 \leq x \leq 3$: $D_{f_7} = [-2, 3]$.

h) Le radicande est au dénominateur : il faut $x^2 - 4x + 4 > 0$. Or $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ ($\Delta = 0$), strictement positif sauf en 2 : $D_{f_8} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. -3 appartient à D_{f_1}, D_{f_2} ($2(-3) + 7 = 1 \geq 0$), D_{f_4}, D_{f_6} et D_{f_8} , mais pas à $D_{f_3}, D_{f_5}, D_{f_7}$: f_1, f_2, f_4, f_6, f_8 sont définies en -3. $f_3(4) = \sqrt{16 + 8 - 15} = 3$, $f_6(-5) = \sqrt{5 - 1} = 2$, $f_8(-3) = \frac{0}{\sqrt{25}} = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 32

- $D_f = [-5, 4]$; $f(-5) = -2, f(-3) = 2, f(0) = -1, f(3) = 2, f(4) = 1$. On trace la droite $y = b$ et on lit les abscisses des points communs : antécédents de 2 : $[-3 \text{ et } 3]$; de 1 : $[-4, -2, 2, 4]$; de -2 : $[-5]$; 3 n'a **aucun** antécédent ($\mathcal{C}_f$ ne dépasse pas l'ordonnée 2).
- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx -4,4, \beta \approx -1,4$ et $\gamma \approx 1,4$:

x	-5	α	β	γ	4
f(x)	-	0	+	0	+

- $f(x) \geq 1$: points de $\mathcal{C}_f$ sur ou au-dessus de la droite $y = 1$: $S = [-4, -2] \cup [2, 4]$. $f(x) < 0$: points strictement sous l'axe des abscisses : $S = [-5, \alpha[\cup]\beta, \gamma[$.

Nombre de points communs de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = m$: $m = 3$: $[0]$; $m = 2$: $[2]$; $m = \frac{3}{2}$: $[4]$ (deux par « bosse ») ; $m = 0$: $[3]$; $m = -1$: $[2]$ (vers -4,7 et en 0) ; $m = -\frac{3}{2}$: $[1]$ (vers -4,9).

- Sur $[-2, 2]$: $\frac{x^2}{2} - 1 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$, deux valeurs de $[-2, 2]$. Sur $[-5, -2]$: $(x + 3)^2 = 2 \iff x = -3 \pm \sqrt{2}$; seul $-3 - \sqrt{2} \approx -4,41$ est dans $[-5, -2]$ ($-3 + \sqrt{2} \approx -1,59$ est rejeté). Sur $[2, 4]$, $\mathcal{C}_f$ reste au-dessus de $y = 1$. Donc $\alpha = -3 - \sqrt{2}, \beta = -\sqrt{2}, \gamma = \sqrt{2}$, en accord avec les lectures.

■ Corrigé de l'exercice 33

On compare d'abord les domaines, puis les images.

a) $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$: $D_f = \mathbb{R} = D_g$. Et $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8$, donc $f(x) = x + 2 = g(x)$ pour tout réel x : $f = g$.

b) f : il faut $x \neq -2$ et $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$; ce quotient est positif hors de $] -2, 1[$ (signe de $(x - 1)(x + 2)$), d'où $D_f =]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[$. g : il faut $x - 1 \geq 0$ et $x + 2 > 0$, d'où $D_g = [1, +\infty[$. Ainsi $f(-3) = \sqrt{\frac{-4}{-1}} = 2$ alors que $g(-3)$ n'existe pas : $f \neq g$. Pour $x \geq 1, x - 1 \geq 0$ et $x + 2 > 0$, donc $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$: elles coïncident sur $[1, +\infty[$.

c) $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Sans valeur absolue : si $x \leq -1, f(x) = (3 - x) - (x + 1) = 2 - 2x$; si $-1 \leq x \leq 3, f(x) = (3 - x) + (x + 1) = 4$; si $x \geq 3, f(x) = (x - 3) + (x + 1) = 2x - 2$. Comme $f(0) = 4 \neq g(0) = -2$: $f \neq g$. Égalité : toujours sur $[3, +\infty[$; sur $[-1, 3], 4 = 2x - 2 \iff x = 3$; sur $] -\infty, -1], 2 - 2x = 2x - 2 \iff x = 1$, rejeté. Elles coïncident exactement sur $[3, +\infty[$.

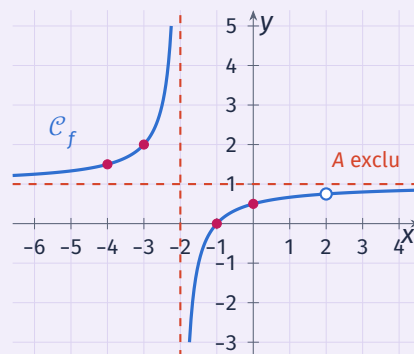
d) R_1 : il faut $x \neq 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \neq 0$, soit $x \neq -6$: $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$. R_2 : $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$. Comme $0 \in D_2$ mais $0 \notin D_1$: $R_1 \neq R_2$. Pour $x \in D_1$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{6} = \frac{x+6}{6x}$, donc $R_1(x) = \frac{6x}{x+6} = R_2(x)$: elles coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$, en particulier pour toutes les valeurs physiques $x > 0$ (et $R_2(0) = 0$: un fil sans résistance court-circuite l'autre). $R_2(3) = \frac{18}{9} = 2 \, \Omega$; $\frac{6x}{x+6} = 4 \iff 6x = 4x + 24 \iff x = 12 \, \Omega$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Les racines de $x^2 - x - 2$ sont 2 et -1 :
 $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Pour $x \in D_f$, $x-2 \neq 0$ et

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2} = g(x).$$

Mais $2 \in D_g$ et $2 \notin D_f$: $f \neq g$. $\mathcal{C}_f$ est la courbe $\mathcal{C}_g$ privée du point $A(2, \frac{3}{4})$, car $g(2) = \frac{3}{4}$.



2. $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = 0$, $f(-3) = \frac{-2}{-1} = 2$, $f(-4) = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.
 Pour $x \in D_f$: $f(x) = 2 \iff x+1 = 2x+4 \iff x = -3$:
 antécédent -3 .

$$f(x) = \frac{3}{4} \iff 4x+4 = 3x+6 \iff x = 2, \text{ exclu :}$$

$\frac{3}{4}$ n'a pas d'antécédent (ordonnée du point absent).

$$f(x) = 1 \iff x+1 = x+2 : \text{impossible,}$$

1 n'a pas d'antécédent.

3. $g(x) = k \iff x+1 = k(x+2) \iff (1-k)x = 2k-1$. Si $k \neq 1$, unique solution $x_k = \frac{2k-1}{1-k}$, différente de -2 (sinon $2k-1 = -2+2k$, soit $-1 = -2$). Pour f , il faut en plus $x_k \neq 2$: $x_k = 2 \iff 2k-1 = 2-2k \iff k = \frac{3}{4}$. **Conclusion** : tout réel $k \notin \{1, \frac{3}{4}\}$ a exactement un antécédent par f ; 1 et $\frac{3}{4}$ n'en ont aucun.

Signe. Sur D_f , $f(x)$ a le signe de $\frac{x+1}{x+2}$, donc de $(x+1)(x+2)$: $f(x) < 0 \iff x \in]-2, -1[$; et $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty, -2[$, sur $[-1, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. **Lectures.** $f(x) = 0 \iff x \in \{-2, 4\}$; $A(-4, -8)$ et $B(2, 4)$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ entre A et B : $f(x) - g(x) > 0$ sur $]-4, 2[$.

x	$-\infty$	-4	-2	0	2	4	$+\infty$	
$f(x)$	-	-	0	+	+	+	0	-
$g(x)$	-	-	-	0	+	+	+	+
$f(x)g(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-
$f(x) - g(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-

2. $h_1 : f(x) \geq 0$: $D_{h_1} = [-2, 4]$. $h_2 : f(x)g(x) \geq 0$: $D_{h_2} =]-\infty, -2] \cup [0, 4]$ (le produit est positif quand les deux facteurs ont le même signe, y compris à gauche de -2). $h_3 : g(x) \geq 0$ et $f(x) \neq 0$: $D_{h_3} = [0, 4[\cup]4, +\infty[$. $h_4 : f(x) - g(x) > 0$ (strictement, car au dénominateur) : $D_{h_4} =]-4, 2[$.

3. $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 8) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$: zéros -2 et 4, f positive entre eux (coefficient de x^2 négatif) ✓. $f(x) - g(x) = -\frac{x^2}{2} - x + 4 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 8) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$: nulle en -4 et 2, positive entre eux ; et $f(-4) = -8 = g(-4)$, $f(2) = 4 = g(2)$ ✓. Les lectures sont confirmées.

■ Corrigé de l'exercice 36

1. Le contour mesure $2(3+2) = 10$: $D_f = [0, 10]$.
 $f(0) = 0$ ($M = A$), $f(3) = AB^2 = 9$, $f(5) = AC^2 = 9 + 4 = 13$,
 $f(8) = AD^2 = 4$, $f(10) = 0$.

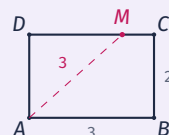
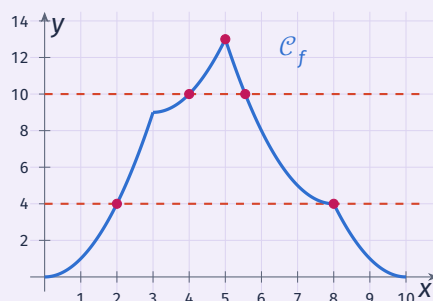
2. Avec $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 2)$, $D(0, 2)$:

sur $[0, 3]$, $M(x, 0)$: $f(x) = x^2$;

sur $[3, 5]$, $BM = x - 3$, $M(3, x - 3)$: $f(x) = 9 + (x - 3)^2$;

sur $[5, 8]$, $CM = x - 5$, $M(8 - x, 2)$: $f(x) = (8 - x)^2 + 4$;

sur $[8, 10]$, $DM = x - 8$, $M(0, 10 - x)$: $f(x) = (10 - x)^2$.



3. On résout sur chaque intervalle, et on ne garde que les solutions qui lui appartiennent.

$f(x) = 4$: sur $[0, 3]$, $x^2 = 4 \iff x = 2$; sur $[3, 5]$, $f(x) \geq 9$: rien ; sur $[5, 8]$, $(8 - x)^2 = 0 \iff x = 8$;
 sur $[8, 10]$, $10 - x \geq 0$ et $(10 - x)^2 = 4 \iff x = 8$. **Antécédents de 4 : 2 et 8.**

$f(x) = 10$: sur $[0, 3]$, $x = \sqrt{10} \approx 3,16 > 3$: **rejeté** ; sur $[3, 5]$, $(x - 3)^2 = 1 \iff x = 4$ ($x = 2$ rejeté) ; sur $[5, 8]$, $(8 - x)^2 = 6 \iff x = 8 - \sqrt{6} \approx 5,55$ ($8 + \sqrt{6}$ rejeté) ; sur $[8, 10]$, $f(x) \leq 4$: rien.
Antécédents de 10 : 4 et $8 - \sqrt{6}$.

4. $AM = 3 \iff f(x) = 9$: $x = 3$ (sur $[0, 3]$ comme sur $[3, 5]$) ; sur $[5, 8]$, $(8 - x)^2 = 5 \iff x = 8 - \sqrt{5}$;
 sur $[8, 10]$, $(10 - x)^2 = 9 \iff x = 7$, rejeté. **Deux positions** : $M = B$, et le point de $[CD]$ tel que $DM = \sqrt{5}$.

$AM \leq 2 \iff f(x) \leq 4$: $x \leq 2$ sur $[0, 3]$; jamais sur $[3, 5]$; $x = 8$ seulement sur $[5, 8]$;
 $(10 - x)^2 \leq 4 \iff x \geq 8$ sur $[8, 10]$. **$x \in [0, 2] \cup [8, 10]$.**

5. Sur chaque intervalle, $f \leq 13$ (car $(x - 3)^2 \leq 4$ sur $[3, 5]$ et $(8 - x)^2 \leq 9$ sur $[5, 8]$), et $f(5) = 13$:

$AM_{\max} = \sqrt{13}$, pour $x = 5$, soit $M = C$.

31 Corrigés : parité et symétries

■ Corrigé de l'exercice 37

1. On vérifie d'abord la symétrie du domaine, puis on compare $f(-x)$ à $f(x)$.

a) $x^4 + 2 > 0$: $D = \mathbb{R}$, symétrique, et $f_1(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4 + 2} = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2} = f_1(x)$: **f_1 paire**. b) $D = \mathbb{R}$ et
 $(-x)^3 - (-x) = -(x^3 - x)$, $(-x)^2 + 3 = x^2 + 3$: $f_2(-x) = -f_2(x)$: **f_2 impaire**.

c) $16 - x^2 \geq 0 \iff -4 \leq x \leq 4$, et $x \neq 0$: $D = [-4, 0[\cup]0, 4]$, symétrique ; $f_3(-x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{-x} = -f_3(x)$:
 f_3 impaire.

d) $D = \mathbb{R}$; $f_4(2) = 0$ et $f_4(-2) = 16$: $f_4(-2) \neq f_4(2)$ (pas paire) et $f_4(-2) \neq -f_4(2)$ (pas impaire) : **ni paire ni impaire**. (Sa courbe est une parabole symétrique par rapport à la droite $x = 2$, pas par rapport à l'axe des ordonnées.)

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $-1 \in D$ mais $1 \notin D$; le domaine n'est pas symétrique : **ni paire ni impaire**.

f) $f_6(x) = x^2 - 6x + 9 + x^2 + 6x + 9 = 2x^2 + 18$ (les doubles produits s'éliminent), définie sur $\mathbb{R}$: **f_6 paire**. (Directement : $f_6(-x) = (-x - 3)^2 + (-x + 3)^2 = (x + 3)^2 + (x - 3)^2 = f_6(x)$.)

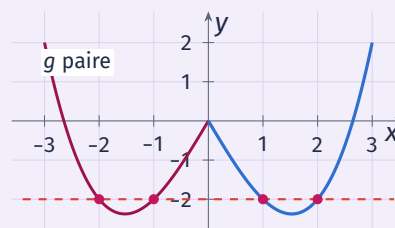
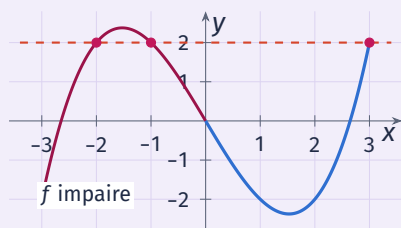
2. Si f est impaire et $0 \in D_f$: $f(0) = f(-0) = -f(0)$, donc $2f(0) = 0$ et **$f(0) = 0$** . Ici $h(0) = 1 \neq 0$: **h n'est pas impaire**. De plus $h(1) = 1$ et $h(-1) = 0$: $h(-1) \neq h(1)$, h n'est pas paire non plus. Enfin $k(x) = \frac{x^3+1-1}{x^2+1} = \frac{x^3}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$, et $k(-x) = \frac{-x^3}{x^2+1} = -k(x)$: **k impaire**.

■ Corrigé de l'exercice 38

1. a) Lecture : $f(1) = -2$, $f(2) = -2$, $f(3) = 2$. Comme f est impaire : $f(-1) = -f(1) = 2$, $f(-2) = 2$, $f(-3) = -2$ et, f étant définie en 0, $f(0) = 0$.
- b) On complète par la **symétrie de centre O** : chaque point (x, y) de la courbe donne le point $(-x, -y)$ (figure de gauche).
- c) $f(x) = 2$: sur $[0, 3]$, $x = 3$; sur $[-3, 0]$, $f(x) = 2 \iff f(-x) = -2 \iff -x \in \{1, 2\}$. **$S = \{-2, -1, 3\}$** .
De même : **$f(x) = -2 \iff x \in \{-3, 1, 2\}$** .
- d) Les solutions de $f(x) = 0$ sont $-\alpha, 0, \alpha$ (avec $\alpha \approx 2,6$) :

x	-3	$-\alpha$	0	α	3
$f(x)$	-	0	+	0	+

2. g paire : on complète par la **symétrie d'axe (Oy)** (figure de droite) ; $g(-1) = g(1) = -2$, $g(-2) = -2$, $g(-3) = 2$. **$g(x) = 2 \iff x \in \{-3, 3\}$** ; **$g(x) = -2 \iff x \in \{-2, -1, 1, 2\}$** ; **$g(x) = 0 \iff x \in \{-\alpha, 0, \alpha\}$** .



3. $D_f = [-3, 3]$ est symétrique et $F(-x) = \frac{-x^3+7x}{3} = -F(x)$: F est impaire. Pour $x \in [-3, 0]$: $f(x) = -f(-x) = -F(-x) = F(x)$; donc $f = F$ sur $[-3, 3]$: la complétion impaire est la courbe de $x \mapsto \frac{x^3-7x}{3}$.
 $(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3-7x-6$ ✓, donc $f(x) = 2 \iff x^3-7x-6 = 0 \iff x \in \{-2, -1, 3\}$, comme lu. Enfin $f(x) = 0 \iff x(x^2-7) = 0$: **$\alpha = \sqrt{7} \approx 2,65$** .

■ Corrigé de l'exercice 39

1. a) $f(0) = \frac{-2}{1} = -2$; $f(-2) = f(2) = 0$; $f(-5) = f(5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b) Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$ et $f(x) = f(-x) = \frac{-x-2}{-x+1} = \frac{x+2}{x-1}$. Pour $x \geq 0$, $|x| = x$; pour $x \leq 0$, $|x| = -x$:

dans les deux cas, $f(x) = \frac{|x| - 2}{|x| + 1}$.

c) Pour $x \geq 0$: $\frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{2} \iff 2x - 4 = x + 1 \iff x = 5$; par parité, $f(x) = \frac{1}{2} \iff x \in \{-5, 5\}$.

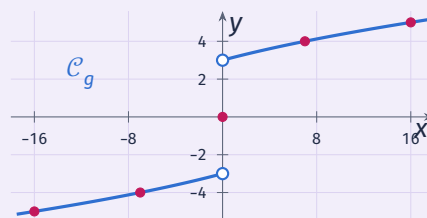
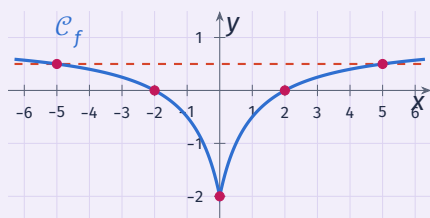
Pour $x \geq 0$: $\frac{x-2}{x+1} = -2 \iff x - 2 = -2x - 2 \iff x = 0$; par parité, $f(x) = -2 \iff x = 0$: une seule solution, car 0 est son propre symétrique (les autres solutions iraient par paires $\pm x$).

d) $1 - \frac{3}{|x|+1} = \frac{|x|+1-3}{|x|+1} = f(x)$ ✓. Comme $|x| + 1 \geq 1$: $0 < \frac{3}{|x|+1} \leq 3$, donc $-2 \leq f(x) < 1$ (-2 est le minimum, atteint en 0; 1 est un majorant non atteint). Enfin $|x| + 1 > 0$, donc $f(x) \geq 0 \iff |x| \geq 2$: $S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Courbe ci-dessous (à gauche), symétrique par rapport à (Oy), avec une pointe en (0, -2).

2. a) g est impaire et définie en 0: $g(0) = 0$; $g(-7) = -g(7) = -\sqrt{16} = -4$; $g(-16) = -g(16) = -5$. La formule donnerait $\sqrt{9} = 3 \neq 0$: elle n'est pas valable en 0 (0 est un point isolé de $\mathcal{C}_g$).

b) Pour $x < 0$, $-x > 0$: $g(x) = -g(-x) = -\sqrt{9-x}$.

c) Si $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x+9} > 3$; si $x < 0$, $g(x) = -\sqrt{9-x} < -3$; et $g(0) = 0$. $g(x) = 5$: $x > 0$ et $x+9 = 25$, $x = 16$. $g(x) = -4$: $x < 0$ et $9-x = 16$, $x = -7$. $g(x) = 2$: 2 n'est ni > 3 , ni < -3 , ni nul: aucune solution.

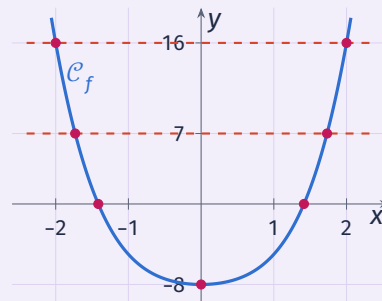


■ Corrigé de l'exercice 40

1. $D = \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 8 = f(x)$: f paire. $(x^2 + 4)(x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 8 = f(x)$ ✓. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées: on étudie f sur $[0, +\infty[$, puis on complète par symétrie.

2. Pour $x \geq 0$: $x^2 + 4 > 0$ et $x^2 - 2 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$; donc $f(x) < 0$ sur $[0, \sqrt{2}[$ et $f(x) > 0$ sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ (nul en $\sqrt{2}$). Par symétrie: $f(x) < 0 \iff x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $f(x) > 0 \iff |x| > \sqrt{2}$.

3. $f(x) = 7 \iff x^4 + 2x^2 - 15 = 0$; avec $X = x^2 \geq 0$: $X^2 + 2X - 15 = (X+5)(X-3) = 0$, et seul $X = 3$ convient: $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. $f(x) = -8 \iff x^4 + 2x^2 = 0 \iff x^2(x^2 + 2) = 0 \iff x = 0$: une seule solution, car 0 est son propre symétrique (des solutions non nulles



iraient par paires $\pm x$). Enfin $f(x) + 8 = x^2(x^2 + 2) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$: $f(x) \geq -8$, minimum -8 en 0 .

4. Pour $x \geq 0$: $f(x) \leq 7 \iff (x^2 + 5)(x^2 - 3) \leq 0 \iff x^2 \leq 3 \iff 0 \leq x \leq \sqrt{3}$; par parité, $f(x) \leq 7 \iff x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. $f(x) - 16 = x^4 + 2x^2 - 24 = (x^2 + 6)(x^2 - 4)$; pour $x \geq 0$, $f(x) > 16 \iff x^2 > 4 \iff x > 2$; par parité, $f(x) > 16 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 41

1. Il faut $x+2 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$: $D_V = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, symétrique. Et $V(-x) = \frac{1}{|-x+2|} + \frac{1}{|-x-2|} = \frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{|x+2|} = V(x)$: V paire. *Interprétation* : les charges sont placées symétriquement par rapport à O ; deux points symétriques de l'axe ont le même potentiel.

2. Si $0 \leq x < 2$: $|x+2| = x+2$ et $|x-2| = 2-x$, donc $V(x) = \frac{(2-x)+(x+2)}{(x+2)(2-x)} = \frac{4}{4-x^2}$. Si $x > 2$:

$$V(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{(x-2)+(x+2)}{x^2-4} = \frac{2x}{x^2-4}.$$

3. Sur $[0, 2[$: $0 < 4 - x^2 \leq 4$, donc $V(x) = \frac{4}{4-x^2} \geq 1$, avec égalité si et seulement si $x = 0$; par parité, $V(x) \geq 1$ sur $]-2, 2[$, égalité en 0 .

$V(x) = \frac{2}{3}$: impossible sur $]-2, 2[$ (où $V \geq 1$) ; pour $x > 2$:

$$\frac{2x}{x^2-4} = \frac{2}{3} \iff x^2 - 3x - 4 = 0 \iff (x-4)(x+1) = 0,$$

et seul 4 convient ; par parité, $S = \{-4, 4\}$.

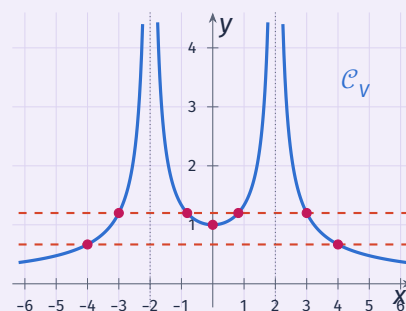
$V(x) = \frac{6}{5}$: sur $[0, 2[$,

$$4 - x^2 = \frac{10}{3} \iff x^2 = \frac{2}{3} \iff x = \frac{\sqrt{6}}{3} ; \text{ pour } x > 2,$$

$$3x^2 - 5x - 12 = 0, \Delta = 169, x = 3 \text{ (l'autre racine, } -\frac{4}{3},$$

est rejetée). Par parité, $S = \left\{ \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \pm 3 \right\}$.

4. $D_W = D_V$ est symétrique et $W(-x) = \frac{1}{|x+2|} - \frac{1}{|x-2|} = -W(x)$: W impaire. Sur $[0, 2[$: $W(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{4-x^2} \geq 0$ (nul en 0) ; sur $]2, +\infty[$: $W(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4} > 0$. Par imparité, $W(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$: $W(x) \geq 0 \iff x \in [0, 2[\cup]2, +\infty[$ ($W(x)$ est positif du côté de la charge placée en 2).



■ Corrigé de l'exercice 42

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Si f est paire ou impaire, D_f est symétrique par rapport à 0 . Par l'absurde, si $x_0 = -\frac{d}{c} \neq 0$: $-x_0 \neq x_0$, donc $-x_0 \in D_f$, alors que son opposé x_0 n'est pas dans D_f : contradiction. Donc $-\frac{d}{c} = 0$, soit $d = 0$, et $ad - bc = -bc \neq 0$ donne $b \neq 0$.
2. Avec $d = 0$: $f(x) = \frac{ax+b}{cx} = \frac{a}{c} + \frac{b}{cx}$ pour $x \neq 0$, et $f(-x) = \frac{a}{c} - \frac{b}{cx}$. f impaire $\iff$ pour tout $x \neq 0$, $\frac{a}{c} - \frac{b}{cx} = -\frac{a}{c} - \frac{b}{cx} \iff \frac{2a}{c} = 0 \iff a = 0$. f paire $\iff$ pour tout $x \neq 0$, $-\frac{b}{cx} = \frac{b}{cx} \iff b = 0$ (prendre $x = 1$), ce qui contredit $b \neq 0$: f n'est jamais paire.

Conclusion : les homographiques impaires sont exactement les fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) ($k = \frac{b}{c}$), celles du tronc commun ; aucune n'est paire.

3. a) $4 + \frac{5}{x-2} = \frac{4(x-2)+5}{x-2} = \frac{4x-3}{x-2} = h(x)$ ✓.

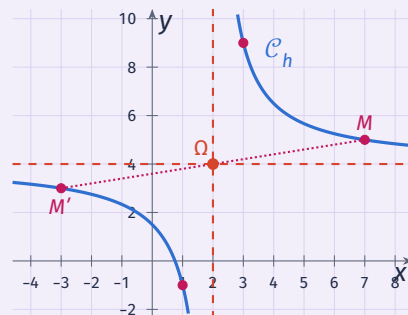
b) Pour $t \neq 0$: $k(t) = h(2+t) - 4 = \frac{5}{t}$; $\mathbb{R}^*$ est symétrique et $k(-t) = -\frac{5}{t} = -k(t)$: k impaire.
 Pour $x \neq 2$, posons $t = x - 2$: $h(x) = 4 + k(t)$ et $h(4-x) = h(2-t) = 4 + k(-t) = 4 - k(t)$,
 d'où $h(4-x) + h(x) = 8$. Les points $M(x, h(x))$ et $M'(4-x, h(4-x))$ ont pour milieu $\Omega(2, 4)$:

Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

c) $h(x) = 5 \iff \frac{5}{x-2} = 1 \iff x = 7$. Alors
 $h(4-7) = 8 - h(7) = 3$: $x = -3$ est solution de $h(x) = 3$,
 et c'est la seule, car

$h(x) = 3 \iff h(4-x) = 5 \iff 4-x = 7$.

$h(x) = 3 \iff x = -3$: les points $M(7, 5)$ et $M'(-3, 3)$
 sont symétriques par rapport à Ω (figure ci-contre).



32 Corrigés : majorants, extremums

■ Corrigé de l'exercice 43

1. a) $t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1$, donc $f(x) = (t-1)^2 - 1$ avec $t = \sin x$.

b) $-1 \leq t \leq 1 \Rightarrow -2 \leq t-1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (t-1)^2 \leq 4$ (on élève au carré des nombres négatifs : $0 \leq |t-1| \leq 2$). Donc $-1 \leq f(x) \leq 3$ pour tout réel x : f est bornée.

c) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 = -1$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2 = 3$: les bornes sont atteintes, donc $\max f = 3$ en $-\frac{\pi}{2}$ et $\min f = -1$ en $\frac{\pi}{2}$.

2. $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $2 \leq 3 - \cos x \leq 4$, puis $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\cos x} \leq \frac{1}{2}$ (l'inverse de nombres strictement positifs change le sens), d'où $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$. $g(0) = \frac{2}{2} = 1$ et $g(\pi) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$:
 $\max g = 1$ en 0 , $\min g = \frac{1}{2}$ en π . Un minorant m vérifie $m \leq g(x)$ pour tout x , donc
 $m \leq g(\pi) = \frac{1}{2}$: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}$ sont des minorants, mais pas 1 (car $g(\pi) = \frac{1}{2} < 1$).

3. a) $(x-2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 4 + 9 = x^2 - 4x + 13$ ✓. Ce nombre est $\geq 9 > 0$: $D_h = \mathbb{R}$, et $h(x) \geq \sqrt{9} = 3$,
 avec égalité si et seulement si $x = 2$: $\min h = 3$ en 2 .

b) « h est majorée » : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq M$. Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, h(x) > M$.

c) $h(|M|+2) = \sqrt{|M|^2 + 9} = \sqrt{M^2 + 9} > \sqrt{M^2} = |M| \geq M$. Pour tout réel M , le réel $x = |M|+2$ convient :
 la négation est vraie, h n'est pas majorée (elle est minorée par 3, mais pas bornée).

■ Corrigé de l'exercice 44

1. $f(x) = 2(x^2 - 3x) + 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 1 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$. Un carré est positif : $f(x) \geq -\frac{7}{2} = f\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$\min_{\mathbb{R}} f = -\frac{7}{2} \text{ en } \frac{3}{2}.$$

Si $x \in [2, 4]$: $\frac{1}{2} \leq x - \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2}$, donc (nombres positifs) $\frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$, puis $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} \leq f(x) \leq \frac{25}{2} - \frac{7}{2}$, soit $-3 \leq f(x) \leq 9$. Comme $f(2) = -3$ et $f(4) = 9$: $\min_{[2,4]} f = -3 \text{ en } 2, \quad \max_{[2,4]} f = 9 \text{ en } 4$ (le sommet n'est pas dans $[2, 4]$).

2. $g(x) = -3(x^2 - 2x) + 1 = -3[(x - 1)^2 - 1] + 1 = -3(x - 1)^2 + 4 \leq 4 = g(1)$: $\max_{\mathbb{R}} g = 4 \text{ en } 1$. Si $x \in [-1, 2]$: $-2 \leq x - 1 \leq 1$, donc $0 \leq (x - 1)^2 \leq 1$, puis $-12 \leq -3(x - 1)^2 \leq 0$ et $-8 \leq g(x) \leq 4$. Comme $g(-1) = -8$ et $g(1) = 4$ (avec $1 \in [-1, 2]$) : $\max_{[-1,2]} g = 4 \text{ en } 1, \quad \min_{[-1,2]} g = -8 \text{ en } -1$.

3. $p(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$. Donc $p(x) \geq \frac{3}{4} > 0$, et (inverses de nombres strictement positifs) $\frac{1}{p(x)} \leq \frac{4}{3}$, avec égalité pour $x = \frac{5}{2}$: $\max \frac{1}{p} = \frac{4}{3} \text{ en } \frac{5}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. Les trois triangles sont rectangles : ADM en A , MBN en B , NCD en C .

$$\mathcal{A}_{ADM} = \frac{4x}{2} = 2x; \quad \mathcal{A}_{MBN} = \frac{(4-x)x}{2};$$

$$\mathcal{A}_{NCD} = \frac{4(4-x)}{2} = 2(4-x).$$

2. On retire ces trois aires à celle du carré :

$$\mathcal{A}(x) = 16 - 2x - \frac{4x - x^2}{2} - 8 + 2x = 8 - 2x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 - 4x + 16}{2}.$$

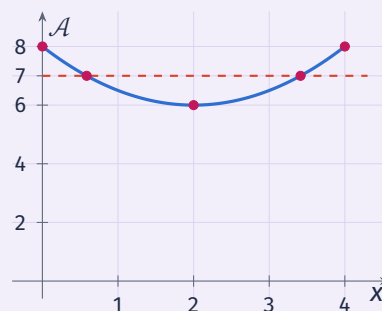
$$\text{Et } x^2 - 4x + 16 = (x - 2)^2 + 12, \text{ d'où } \mathcal{A}(x) = \frac{(x - 2)^2}{2} + 6.$$

3. $\mathcal{A}(x) \geq 6$, avec égalité si et seulement si $x = 2 \in [0, 4]$:

aire minimale 6, quand M et N sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$.

4. Si $0 \leq x \leq 4$: $-2 \leq x - 2 \leq 2$, donc $(x - 2)^2 \leq 4$ et $\mathcal{A}(x) \leq 2 + 6 = 8$, avec égalité si et seulement si $(x - 2)^2 = 4$, soit $x = 0$ ou $x = 4$. Le maximum 8 est atteint en 0 et en 4 : pour $x = 0$, $M = A$ et $N = B$ (triangle DAB) ; pour $x = 4$, $M = B$ et $N = C$ (triangle DBC) ; dans les deux cas, c'est la moitié du carré.

5. $\mathcal{A}(x) = 7 \iff (x - 2)^2 = 2 \iff x = 2 \pm \sqrt{2}$, deux valeurs de $[0, 4]$ (car $\sqrt{2} < 2$) : $S = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$. $\mathcal{A}(x) \leq \frac{13}{2} \iff (x - 2)^2 \leq 1 \iff |x - 2| \leq 1 : S = [1, 3]$.



■ Corrigé de l'exercice 46

1. $x^2 + 2 \geq 2 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, $D_f = \mathbb{R}$. $f(-1) = \frac{-3}{3} = -1$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Conjecture : f admet un maximum $\frac{1}{2}$, atteint en 2, et un minimum -1 , atteint en -1 .

3. $f(x) + 1 = \frac{2x-1+x^2+2}{x^2+2} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2}$ et $\frac{1}{2} - f(x) = \frac{x^2+2-2(2x-1)}{2(x^2+2)} = \frac{x^2-4x+4}{2(x^2+2)} = \frac{(x-2)^2}{2(x^2+2)}$.

Ces deux quotients sont positifs (carré sur nombre strictement positif) : $f(x) \geq -1$, avec égalité si et seulement si $x = -1$, et $f(x) \leq \frac{1}{2}$, avec égalité si et seulement si $x = 2$. La conjecture est démontrée : $\min f = -1$ en -1 , $\max f = \frac{1}{2}$ en 2, et f est **bornée** ($|f(x)| \leq 1$).

4. $f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(2x-1) = -(x^2+2) \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 0\}$. $f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2x-1) = x^2+2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x \in \{1, 5\}$. Les droites $y = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$ coupent bien $\mathcal{C}_f$ en ces points. $f(x) = 1$: aucune solution, car $f(x) \leq \frac{1}{2} < 1$. $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$: une seule solution, $x = 2$ (la droite $y = \frac{1}{2}$ touche $\mathcal{C}_f$ en son point le plus haut).

■ Corrigé de l'exercice 47

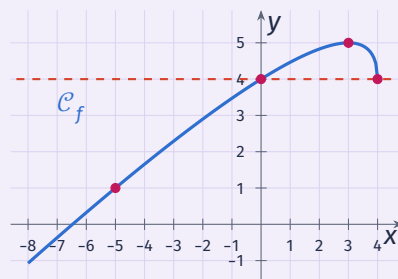
1. Il faut $4-x \geq 0$: $D_f =]-\infty, 4]$. $f(4) = 4$, $f(3) = 3+2=5$, $f(0) = 0+2 \times 2 = 4$, $f(-5) = -5+2 \times 3 = 1$.

2. Avec $t = \sqrt{4-x} \geq 0$ et $x = 4-t^2$: $f(x) = 4-t^2+2t = 5-(t^2-2t+1) = 5-(t-1)^2$. Donc $f(x) \leq 5$, avec égalité si et seulement si $t = 1$, c'est-à-dire $4-x = 1$: $\max f = 5$ en 3.

3. Non minorée : soit $M \in \mathbb{R}$, $t = |M| + 4$ et $x = 4-t^2 \in D_f$. Alors $(t-1)^2 = (|M|+3)^2 \geq 9+6|M|$, donc $f(x) \leq -4-6|M| < -|M| \leq M$. Aucun réel ne minore f : f n'est pas minorée.

4. À chaque $t \geq 0$ correspond un seul $x = 4-t^2$ de D_f , et réciproquement : on résout en $t \geq 0$. $f(x) = 4 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 1 \Leftrightarrow t \in \{0, 2\} \Leftrightarrow x \in \{4, 0\}$: $S = \{0, 4\}$. $f(x) \geq 4 \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 4-x \leq 4$: $S = [0, 4]$.

$f(x) = m \Leftrightarrow (t-1)^2 = 5-m$. Si $m > 5$: aucune solution. Si $m = 5$: $t = 1$, une solution ($x = 3$). Si $4 \leq m < 5$: $t = 1 \pm \sqrt{5-m}$, deux valeurs positives (car $\sqrt{5-m} \leq 1$) : deux solutions. Si $m < 4$: $\sqrt{5-m} > 1$, seul $t = 1 + \sqrt{5-m}$ est positif : une solution. 0, 1, 2, 1 solutions pour $m > 5$, $m = 5$, $4 \leq m < 5$, $m < 4$.



■ Corrigé de l'exercice 48

1. Si $x \leq -2$: $|x-1| = 1-x$ et $|x+2| = -x-2$, d'où $f_a(x) = (a-1)x + 1 + 2a$. Si $-2 \leq x \leq 1$: $f_a(x) = (1-x) - a(x+2) = -(1+a)x + 1 - 2a$. Si $x \geq 1$: $f_a(x) = (x-1) - a(x+2) = (1-a)x - 1 - 2a$.
 $f_a(-2) = 3$ et $f_a(1) = -3a$.

2. $f_1(x) = 3$ si $x \leq -2$; $f_1(x) = -2x - 1$ si $-2 \leq x \leq 1$, et $-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -2x - 1 \leq 3$; $f_1(x) = -3$ si $x \geq 1$.
 Donc $-3 \leq f_1(x) \leq 3$: f_1 est bornée, de **maximum** 3 (atteint en tout $x \leq -2$) et de **minimum** -3 (atteint en tout $x \geq 1$).

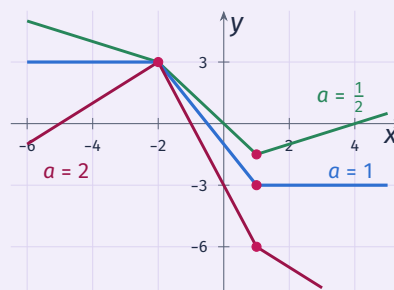
3. $f_2(x) = x + 5 \leq 3$ si $x \leq -2$; $f_2(x) = -3x - 3 \leq 3$ si $-2 \leq x \leq 1$; $f_2(x) = -x - 5 \leq -6$ si $x \geq 1$. Donc $f_2 \leq 3 = f_2(-2)$: $\max f_2 = 3$ en -2 . Pour $M \in \mathbb{R}$ et $x = |M| + 1 \geq 1$: $f_2(x) = -|M| - 6 < M$: f_2 n'est pas minorée.

4. Pentes des trois morceaux : $a-1$, $-(1+a)$ et $1-a$.

Si $a \geq 1$: sur $]-\infty, -2]$ (pente $a-1 \geq 0$, croissante) et sur $[-2, 1]$ (décroissante), $f_a \leq f_a(-2) = 3$; sur $[1, +\infty[$ (pente $1-a \leq 0$), $f_a \leq f_a(1) = -3a < 3$: $\max f_a = 3$ (en -2). Si $a < 1$: pour $M \in \mathbb{R}$ et $x = 1 + \frac{|M|+3}{1-a} \geq 1$, $f_a(x) = |M| + 3 - 3a > M$: f_a n'est pas majorée.

Si $a \leq 1$: $f_a \geq 3$ sur $]-\infty, -2]$ (pente ≤ 0), $f_a \geq f_a(1) = -3a$ sur $[-2, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ (pente ≥ 0) : $\min f_a = -3a$ (en 1). Si $a > 1$: pour $x = 1 + \frac{|M|}{a-1}$, $f_a(x) = -|M| - 3a < M$: f_a n'est pas minorée.

Bilan : f_a majorée $\Leftrightarrow a \geq 1$; f_a minorée $\Leftrightarrow a \leq 1$; f_a bornée $\Leftrightarrow a = 1$.



33 Corrigés : sens de variation

■ Corrigé de l'exercice 49

1. $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2) - 8(x - y) = (x - y)(x + y - 8)$, donc $T(x, y) = x + y - 8$. Si $x \neq y$ sont dans $]-\infty, 4]$, ils ne valent pas tous deux 4, donc $x + y < 8$ et $T(x, y) < 0$: f est **strictement décroissante** ; sur $[4, +\infty[$, de même $x + y > 8$, $T > 0$: f est **strictement croissante**. Ainsi $f(x) \geq f(4)$ pour tout réel x : $\min f = f(4) = -6$.
2. Pour $x \neq y$ dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$, $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y-1} > 0$ et la quantité conjuguée donne $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2y-1} = \frac{(2x-1) - (2y-1)}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y-1}}$, d'où $T_g(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y-1}} > 0$: g est **strictement croissante** ; $g(\frac{1}{2}) = 0$, $g(1) = 1$, $g(5) = 3$. Les deux membres étant positifs, $g(x) = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 5$; par stricte croissance, $g(x) \leq 3 = g(5) \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}, 5]$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f(x)			

↘ -6 ↗

x	$\frac{1}{2}$	1	5	$+\infty$
g(x)				

0 → 1 → 3 →

3. $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < \sqrt{12,25} = 3,5 \leq 4$ et f décroît strictement sur $]-\infty, 4]$: $f(2\sqrt{3}) > f(3,5)$. $\sqrt{2} < 1,5$, donc $4 \leq 4 + \sqrt{2} < 5,5$, et f croît strictement sur $[4, +\infty[$: $f(4 + \sqrt{2}) < f(5,5)$ ($-4 < -3,75$ ✓). $1,7^2 = 2,89 < 3$, donc $\frac{1}{2} \leq 1,7 < \sqrt{3}$ et $g(1,7) < g(\sqrt{3})$.

■ Corrigé de l'exercice 50

1. $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique et $f(-x) = (-x)^2 - \frac{3}{(-x)^2+1} = f(x)$: f est **paire**. Si $0 \leq x < y$: $x^2 < y^2$, puis $0 < x^2+1 < y^2+1$, donc $\frac{3}{x^2+1} > \frac{3}{y^2+1}$, soit $-\frac{3}{x^2+1} < -\frac{3}{y^2+1}$: les deux fonctions sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$, leur somme f aussi. Une fonction paire a des sens de variation **contraires** sur deux intervalles symétriques : f décroît strictement sur $]-\infty, 0]$. $f(0) = -3$, $f(\pm 1) = -\frac{1}{2}$, $f(\pm \sqrt{2}) = 1$ (tableau ci-dessous).
2. Le tableau donne $f(x) \geq f(0)$: $\min f = f(0) = -3$. Sur $[0, +\infty[$, f est strictement croissante, donc ne prend la valeur $1 = f(\sqrt{2})$ qu'en $\sqrt{2}$; par parité, sur $]-\infty, 0]$, seulement en $-\sqrt{2}$: $f(x) = 1 \iff x = \pm\sqrt{2}$. De même, pour $x \geq 0$, $f(x) < 1 \iff x < \sqrt{2}$, et par parité $f(x) < 1 \iff x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
3. $D_g = \mathbb{R}^*$ est symétrique et $g(-x) = -x^3 + \frac{1}{x} = -g(x)$: g est **impaire**. Sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ croissent strictement, donc g aussi ; une fonction impaire a le **même** sens de variation sur deux intervalles symétriques : g croît strictement sur $]-\infty, 0]$. Mais $-1 < \frac{1}{2}$ et $g(-1) = 0 > g(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{8}$: g **n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$** (croissante sur chaque intervalle, pas sur leur réunion). Enfin $g(1) = 0$: $g < 0$ sur $]0, 1[$, $g > 0$ sur $]1, +\infty[$, et par imparité $g(-1) = 0$, $g < 0$ sur $]-\infty, -1[$, $g > 0$ sur $]-1, 0[$: $g(x) \geq 0 \iff x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[$.

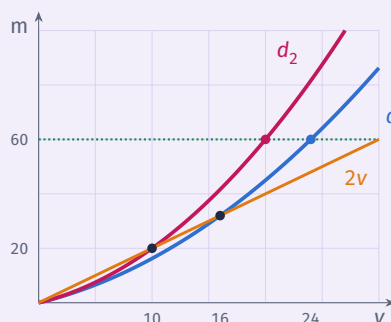
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f(x)		1	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	1	

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g(x)		0		0	

■ Corrigé de l'exercice 51

1. Pour $v \neq w$ positifs : $d(v) - d(w) = (v - w) + \frac{v^2 - w^2}{16} = (v - w) \left(1 + \frac{v+w}{16}\right)$, donc $T(v, w) = 1 + \frac{v+w}{16} > 0$: d est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$; $d(0) = 0$, $d(20) = 45$, $d(40) = 140$.
2. $d(v) = 60 \iff v^2 + 16v - 960 = 0$: $\Delta = 4096 = 64^2$, racines 24 et -40, seule 24 est positive. Comme d croît, $d(v) \leq 60 \iff v \leq 24$: au plus 24 m/s, soit **86,4 km/h**. De même d_2 croît et $d_2(v) = 60 \iff v^2 + 10v - 600 = 0$, $\Delta = 2500$, $v = 20$: au plus **72 km/h** sur route mouillée.
3. $d(2v) - 2d(v) = \frac{4v^2 - 2v^2}{16} = \frac{v^2}{8} > 0$ et $4d(v) - d(2v) = 4v - 2v = 2v > 0$: $2d(v) < d(2v) < 4d(v)$: doubler sa vitesse fait **plus que doubler** la distance d'arrêt.
4. $d_2(v) - d(v) = \frac{v^2}{10} - \frac{v^2}{16} = \frac{3v^2}{80} \geq 0$: la courbe de d_2 est au-dessus de celle de d . $2v \geq d(v) \iff v(16 - v) \geq 0 \iff 0 \leq v \leq 16$ (57,6 km/h), et $2v \geq d_2(v) \iff v(10 - v) \geq 0 \iff 0 \leq v \leq 10$ (36 km/h) : au-delà, la droite $y = 2v$ passe sous la courbe et deux secondes ne suffisent plus face à un obstacle immobile.

v	0	20	40	$+\infty$
$d(v)$	0	45	140	



■ Corrigé de l'exercice 52

- $x \in D_f \iff x^2 \neq 1$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, symétrique, et $f(-x) = f(x)$: **f est paire** ; $\frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+3}{x^2-1} = 1 + \frac{3}{x^2-1}$.
- $f(x) - f(y) = 3 \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{y^2-1} \right) = \frac{3(y^2-x^2)}{(x^2-1)(y^2-1)} = \frac{-3(x-y)(x+y)}{(x^2-1)(y^2-1)}$, d'où la formule. Sur $[0, 1[$: $x+y > 0$ et x^2-1, y^2-1 sont négatifs, leur produit est positif : $T < 0$, f est **strictement décroissante**. Sur $]1, +\infty[$: $x+y > 0$ et $(x^2-1)(y^2-1) > 0$: $T < 0$, **strictement décroissante**. Par parité, f croît strictement sur $]-1, 0]$ et sur $]-\infty, -1[$; $f(0) = -2$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$			-2		

- Si $|x| < 1$: $-1 \leq x^2 - 1 < 0$ et l'inverse décroît sur $]-\infty, 0[$, donc $\frac{1}{x^2-1} \leq -1$ et $f(x) \leq 1 - 3 = -2$ (égalité en 0 : maximum de f sur $]-1, 1[$). Si $|x| > 1$: $\frac{3}{x^2-1} > 0$, donc $f(x) > 1$.
- Pour $x \in D_f$: $f(x) = m \iff x^2 + 2 = m(x^2 - 1) \iff (m-1)x^2 = m+2$; si $m = 1$, c'est $0 = 3$: aucune solution ; si $m \neq 1$, c'est $x^2 = \frac{m+2}{m-1}$ (la valeur $x^2 = 1$ donnerait $m+2 = m-1$: elle est exclue d'elle-même). Le signe de $\frac{m+2}{m-1}$ donne : **deux** solutions $\pm \sqrt{\frac{m+2}{m-1}}$ si $m < -2$ ou $m > 1$, **une** ($x = 0$) si $m = -2$, **aucune** si $-2 < m \leq 1$, comme le montre le tableau. $f(x) = 4 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$. Enfin $f(x) \geq 4$ impose $|x| > 1$; sur $]1, +\infty[$, f décroît strictement et $f(\sqrt{2}) = 4$, donc $1 < x \leq \sqrt{2}$; par parité : $S = [-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}]$.

■ Corrigé de l'exercice 53

- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$. Pour $x \neq y$ dans $[a, b]$, x^2, xy, y^2 sont dans $[a^2, b^2]$ sans être tous égaux à a^2 (sinon $x = y = a$) ni tous à b^2 : $3a^2 < x^2 + xy + y^2 < 3b^2$, donc $|x^3 - y^3| \leq 3b^2|x - y|$.
 - Avec $a = 4,9, b = 5,1, y = 5$: $|V - 125| = |x^3 - 5^3| \leq 3 \times 5,1^2 \times 0,1 = 7,803 \text{ cm}^3$ (écarts réels : $5,1^3 - 125 = 7,651$ et $125 - 4,9^3 = 7,351$). L'arête est connue à 2 % près, le volume à environ 6 % près.
- Le taux de $x \mapsto \frac{1}{x}$ vaut $-\frac{1}{xy}$ et $a^2 < xy < b^2$: $-\frac{1}{a^2} < T(x, y) < -\frac{1}{b^2}$, d'où $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{|x-y|}{a^2}$. b) Avec $a = 19,5$ et $y = 20$: $|G - 0,05| \leq \frac{0,5}{19,5^2} = \frac{2}{1521} \approx 1,3 \times 10^{-3} \text{ S}$.

3. a) Le taux de $x \mapsto \sqrt{x}$ vaut $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$, et $2\sqrt{a} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < 2\sqrt{b}$: $\frac{1}{2\sqrt{b}} < T(x, y) < \frac{1}{2\sqrt{a}}$. b) $\tau(L) - \tau(1) = 2(\sqrt{L} - 1)$, et avec $a = 0,99$: $|\tau - 2| \leq 2 \times \frac{|L-1|}{2\sqrt{0,99}} \leq \frac{0,01}{\sqrt{0,99}} \approx 0,0101 \text{ s}$.

Remarque. Si $|T(x, y)| \leq M$ pour tous $x \neq y$ de I , alors $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$: l'écart sur le résultat vaut au plus M fois l'écart sur la mesure.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $h \mapsto \frac{h}{5}$ croît strictement, à valeurs dans $[0, +\infty[$ où la racine croît strictement : $h \mapsto \sqrt{h/5}$ est strictement croissante ; $h \mapsto \frac{h}{320}$ aussi, donc leur somme t est **strictement croissante**. Par l'absurde : deux profondeurs $h < h'$ de même durée donneraient $t(h) < t(h')$; une durée correspond donc à **au plus une** profondeur.

2. $X \geq 0$ et $h = 5X^2$, donc $\sqrt{h/5} = X$ et $\frac{h}{320} = \frac{X^2}{64}$. $t(h) = 9 \Leftrightarrow X^2 + 64X - 576 = 0$: $\Delta = 6400$, $X = \frac{-64 \pm 80}{2} = 8$ (l'autre racine est négative), $h = 5 \times 64 = 320 \text{ m}$. $t(h) = 4,25 \Leftrightarrow X^2 + 64X - 272 = 0$: $\Delta = 72^2$, $X = 4$, $h = 80 \text{ m}$. Par stricte croissance, $t(h) \leq 9 = t(320) \Leftrightarrow 0 \leq h \leq 320$.

h	0	80	320	$+\infty$
$t(h)$	0	$\rightarrow 4,25$	$\rightarrow 9$	$\rightarrow$

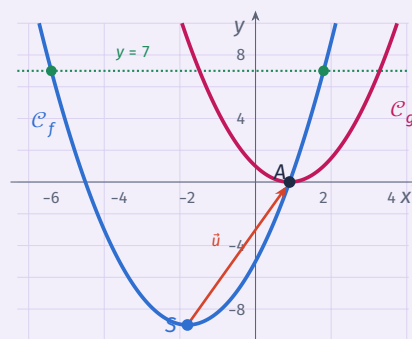
3. $h_0 = 5t^2 = 5\left(X + \frac{X^2}{64}\right)^2 = 5X^2\left(1 + \frac{X}{64}\right)^2 = h\left(1 + \frac{X}{64}\right)^2 > h$ si $X > 0$. Pour $t = 9 \text{ s}$: $h_0 = 405 \text{ m}$ au lieu de 320 m , erreur relative $\frac{85}{320} \approx 26,6 \%$. Enfin $\frac{h_0 - h}{h} \leq 0,21 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{X}{64}\right)^2 \leq 1,21 \Leftrightarrow 1 + \frac{X}{64} \leq 1,1$ (nombres positifs) $\Leftrightarrow X \leq 6,4 \Leftrightarrow h \leq 204,8 \text{ m}$.

34

Corrigés : usuelles et composées

■ Corrigé de l'exercice 55

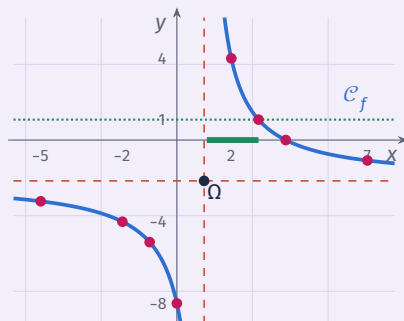
1. $f(x) = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$: sommet $S(-2, -9)$, axe $x = -2$; comme $a = 1 > 0$, f **décroît** sur $]-\infty, -2]$ et **croît** sur $[-2, +\infty[$ (minimum -9). $g(x) = (x-1)^2$: sommet $S'(1, 0)$, axe $x = 1$; g décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow x+2 = \pm 3 \Leftrightarrow x \in \{-5, 1\}$.
2. $f(x-3) + 9 = (x-1)^2 - 9 + 9 = g(x)$ ✓. Le point $M(x, f(x))$ a pour image par la translation de vecteur $\vec{u}(3, 9)$ le point $(x+3, f(x)+9) = (x+3, g(x+3)) \in \mathcal{C}_g$, et tout point de $\mathcal{C}_g$ s'obtient ainsi : $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{u}(3, 9)$, qui envoie S sur S' .
3. $f(x) - g(x) = (x^2 + 4x - 5) - (x^2 - 2x + 1) = 6(x - 1)$, nul seulement pour $x = 1$: un seul point commun $A(1, 0)$, sommet de $\mathcal{C}_g$ et zéro de f . $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \geq 1$: à droite de A , $\mathcal{C}_f$ est



au-dessus de $\mathcal{C}_g$, à gauche au-dessous. $f(x) \leq 7 \iff (x+2)^2 \leq 16 \iff -4 \leq x+2 \leq 4 \iff x \in [-6, 2]$: partie de $\mathcal{C}_f$ sous la droite $y = 7$ (figure).

■ Corrigé de l'exercice 56

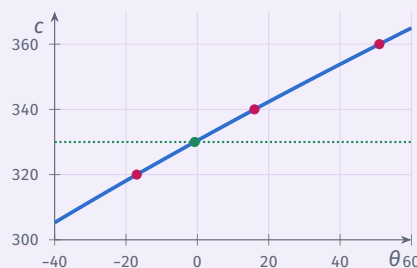
1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $-2 + \frac{6}{x-1} = \frac{-2(x-1)+6}{x-1} = \frac{8-2x}{x-1}$ ✓. Centre $\Omega(1, -2)$, droites « asymptotes » $x = 1$ et $y = -2$. Le point $(X, \frac{6}{X})$ a pour image par la **translation de vecteur** $(1, -2)$ le point $(X+1, \frac{6}{X} - 2) = (x, f(x))$, où $x = X+1$. Enfin $f(2-x) = -2 - \frac{6}{x-1}$, d'où $f(2-x) + f(x) = -4$: le symétrique par rapport à Ω d'un point de $\mathcal{C}_f$ est sur $\mathcal{C}_f$.



2. $f(x) - f(y) = \frac{6}{x-1} - \frac{6}{y-1} = \frac{6(y-x)}{(x-1)(y-1)}$, donc $T(x, y) = \frac{-6}{(x-1)(y-1)} < 0$ si x, y sont dans le même intervalle $(x-1, y-1)$ de même signe) : f est **strictement décroissante sur** $]-\infty, 1[$ **et sur** $]1, +\infty[$ (pas sur D_f : $f(0) = -8 < 4 = f(2)$).
3. $f(-5) = -3, f(-2) = -4, f(-1) = -5, f(0) = -8, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 0, f(7) = -1$ (points rouges, symétriques deux à deux par rapport à Ω). $f(x) \geq 1 \iff \frac{6}{x-1} \geq 3$: impossible si $x < 1$; si $x > 1$, cela équivaut à $6 \geq 3(x-1)$, soit $x \leq 3$: $S = [1, 3]$ (segment vert). $f(x) < -2 \iff \frac{6}{x-1} < 0 \iff x < 1$. Si $m \neq -2$: $f(x) = m \iff x = 1 + \frac{6}{m+2}$: **une seule solution** ; si $m = -2$: **aucune**.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. La racine exige $\theta \geq -273$. Le point $(X, 20\sqrt{X})$ a pour image par la **translation de vecteur** $(-273, 0)$ le point $(X-273, 20\sqrt{X}) = (\theta, c(\theta))$, avec $\theta = X-273$. Pour $\theta \neq \theta'$: $c(\theta) - c(\theta') = \frac{20(\theta - \theta')}{\sqrt{\theta+273} + \sqrt{\theta'+273}}$, donc $T(\theta, \theta') = \frac{20}{\sqrt{\theta+273} + \sqrt{\theta'+273}} > 0$: c est **strictement croissante**. $c(-17) = 20\sqrt{256} = 320$, $c(16) = 20\sqrt{289} = 340$, $c(51) = 20\sqrt{324} = 360$ (m/s) ; $c(-40) = 20\sqrt{233} \approx 305$, $c(60) = 20\sqrt{333} \approx 365$.



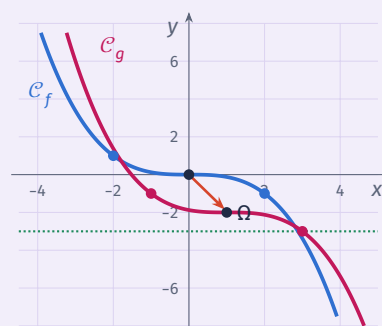
θ	-40	-17	16	51	60
$c(\theta)$	$20\sqrt{233} \rightarrow 320 \rightarrow 340 \rightarrow 360 \rightarrow 20\sqrt{333}$				

2. On élève au carré des nombres positifs : $c(\theta) \geq 330 \iff \theta + 273 \geq 16,5^2 = 272,25 \iff \theta \geq -0,75$ °C (point vert) ; $c(\theta) = 350 \iff \theta + 273 = 17,5^2 = 306,25 \iff \theta = 33,25$ °C.
3. Le son parcourt $2D$ en 3 s : $2D = 3c(\theta)$, d'où $D(\theta) = 30\sqrt{\theta+273}$; $D(16) = 510$ m, $D(-17) = 480$ m. Par -17 °C, prendre 340 m/s donne 510 m au lieu de 480 m : 30 m d'erreur (6,25 %).
4. $t(\theta) = \frac{680}{20\sqrt{\theta+273}} = \frac{34}{\sqrt{\theta+273}}$. c croît strictement et prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, où $s \mapsto \frac{680}{s}$ décroît strictement : la composée t est **strictement décroissante**. Comme $t(16) = 2$: $t(\theta) \leq 2 \iff \theta \geq 16$ °C.

■ Corrigé de l'exercice 58

$$1. f(2) = 8a = -1 \iff a = -\frac{1}{8}. D_f = \mathbb{R} \text{ est symétrique}$$

et $f(-x) = \frac{x^3}{8} = -f(x) : f \text{ est impaire. } T(x, y) = -\frac{x^3 - y^3}{8(x - y)} = -\frac{x^2 + xy + y^2}{8} < 0 \text{ pour } x \neq y, \text{ car } x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 : f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}. f(\pm 1) = \mp \frac{1}{8}, f(\pm 2) = \mp 1, f(\pm 4) = \mp 8. \text{ Donc } f(x) = 8 = f(-4) \iff x = -4 \text{ et } f(x) \leq \frac{27}{8} = f(-3) \iff x \geq -3.$



$$2. f(x-1) - 2 = -\frac{(x-1)^3}{8} - 2 = \frac{-(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 16}{8} = g(x) \checkmark : C_g \text{ est l'image de } C_f \text{ par la translation de vecteur } \vec{u}(1, -2), \text{ qui envoie le centre } O \text{ de } C_f \text{ (} f \text{ impaire)} \text{ sur } \Omega(1, -2), \text{ centre de } C_g \text{ (contrôle : } g(2-x) + g(x) = f(1-x) + f(x-1) - 4 = -4); g \text{ est strictement décroissante comme } f. g(x) = -3 \iff f(x-1) = -1 = f(2) \iff x = 3; g(x) = -1 \iff f(x-1) = 1 = f(-2) \iff x = -1; g(x) \geq -3 = g(3) \iff x \leq 3.$$

$$3. g(x) + 2 = f(x-1) = -\frac{(x-1)^3}{8}, \text{ donc } h(x) = \frac{|x-1|^3}{8} \text{ et } h(2-x) = \frac{|1-x|^3}{8} = h(x) : \text{ la droite } x = 1 \text{ est axe de symétrie de } C_h. \text{ Sur } [1, +\infty[, h(x) = \frac{(x-1)^3}{8} \text{ croît strictement ; par symétrie, } h \text{ décroît strictement sur }]-\infty, 1]; \text{ minimum } h(1) = 0. h(x) \leq 1 \iff |x-1|^3 \leq 8 \iff |x-1| \leq 2 \iff x \in [-1, 3].$$

■ Corrigé de l'exercice 59

$$1. v(t) = \frac{(t-1)+2}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1}; \text{ son taux } \frac{-2}{(t-1)^2} \text{ est } < 0 \text{ sur chaque intervalle : } v \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 1[\text{ et sur }]1, +\infty[.$$

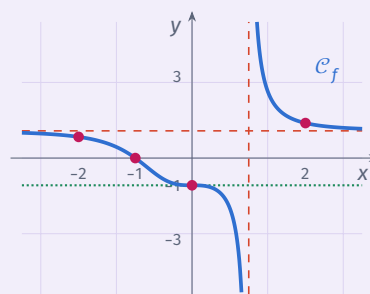
$$2. x \in D_f \iff x^3 \neq 1 \iff x \neq 1 \text{ (le cube est strictement croissant et } 1^3 = 1) : D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}. \text{ Sur }]-\infty, 1[, u \text{ croît strictement et } u(x) < 1, \text{ intervalle où } v \text{ décroît strictement : } f = v \cdot u \text{ est strictement décroissante ; sur }]1, +\infty[, u(x) > 1 \text{ et de même } f \text{ décroît strictement. } f(-2) = \frac{7}{9}, f(-1) = 0, f(0) = -1, f(2) = \frac{9}{7}.$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f(x)		$\frac{7}{9}$	0	-1		$\frac{9}{7}$	

$$3. f(-x) = \frac{-x^3 + 1}{-x^3 - 1} = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{1}{f(x)} \text{ pour } x^3 \neq \pm 1 : f(-x)f(x) = 1.$$

Disjonction des cas, avec $f(x) + 1 = \frac{2x^3}{x^3 - 1}$ et $f(x) - 1 = \frac{2}{x^3 - 1}$: si $x < 0$, $x^3 < 0$ et $x^3 - 1 < 0$, donc $-1 < f(x) < 1$; si $0 \leq x < 1$, $x^3 \geq 0 > x^3 - 1$: $f(x) \leq -1$; si $x > 1$: $f(x) > 1$. Les trois cas couvrent D_f et leurs conclusions s'excluent :

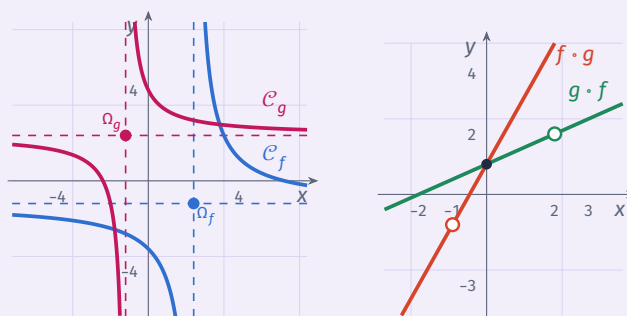
$$-1 < f(x) < 1 \iff x < 0, f(x) \leq -1 \iff 0 \leq x < 1.$$



4. $f(x) = \frac{9}{7} \iff 7(x^3 + 1) = 9(x^3 - 1) \iff x^3 = 8 \iff \boxed{x = 2}$. Sur $] -\infty, 1[$, $f(x) < 1 < \frac{9}{7}$; sur $]1, +\infty[$, f décroît strictement et $f(2) = \frac{9}{7}$: $\boxed{f(x) \leq \frac{9}{7} \iff x \in] -\infty, 1[\cup [2, +\infty[}$. Si $m \neq 1$: $f(x) = m \iff x^3 = \frac{m+1}{m-1}$, qui a **au plus une** solution (cube strictement croissant) ; si $m = 1$: $x^3 + 1 = x^3 - 1$, **impossible** : la droite $y = 1$ ne rencontre pas $\mathcal{C}_f$.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. $f(x) = \frac{-(x-2)+4}{x-2} = \boxed{-1 + \frac{4}{x-2}}$: centre $\Omega_f(2, -1)$, f **strictement décroissante** sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ ($k = 4 > 0$). $g(x) = \frac{2(x+1)+2}{x+1} = \boxed{2 + \frac{2}{x+1}}$: centre $\Omega_g(-1, 2)$, g **strictement décroissante** sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$ (figure de gauche).
2. $f(x) = -1 \iff \frac{4}{x-2} = 0$: impossible. Donc $x \in D_{g \circ f} \iff (x \neq 2 \text{ et } f(x) \neq -1) \iff x \neq 2$: $\boxed{D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$ et $g(f(x)) = 2 + \frac{2}{f(x)+1} = 2 + \frac{2(x-2)}{4} = \boxed{\frac{x}{2} + 1}$: la droite $y = \frac{x}{2} + 1$ **privée du point** $(2, 2)$.
3. $g(x) \neq 2$ pour tout $x \neq -1$: $\boxed{D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$ et $f(g(x)) = -1 + \frac{4}{g(x)-2} = -1 + 2(x+1) = \boxed{2x+1}$: la droite $y = 2x+1$ privée de $(-1, -1)$. Donc $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$ ($(f \circ g)(1) = 3 \neq \frac{3}{2} = (g \circ f)(1)$). Pour $x \notin \{-1, 2\}$: $\frac{x}{2} + 1 = 2x + 1 \iff \boxed{x = 0}$ (point commun $(0, 1)$).
4. $G(x) - \alpha = \frac{k'}{x-\gamma} \neq 0$ pour $x \neq \gamma$, donc $F(G(x))$ existe et vaut $\beta + \frac{k}{k'/(x-\gamma)} = \boxed{\beta + \frac{k}{k'}(x-\gamma)}$: une fonction **affine** sur $\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$. La droite horizontale $y = \alpha$ de $\mathcal{C}_G$ est la droite verticale $x = \alpha$ de $\mathcal{C}_F$: ici l'ordonnée de chaque centre est l'abscisse de l'autre, donc les **deux** composées sont affines, de pentes $\frac{4}{2} = 2$ ($f \circ g$) et $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ($g \circ f$).



35

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. $R(x) = \frac{12x-x^2}{12} = -\frac{1}{12}[(x-6)^2 - 36] = 3 - \frac{(x-6)^2}{12}$. $R(12-x) = \frac{(12-x)x}{12} = R(x)$: la droite $x = 6$ est **axe de symétrie** (échanger les deux arcs ne change rien). R croît sur $[0, 6]$, décroît sur $[6, 12]$: $R_{\max} = R(6) = 3 \Omega$, quand M est **diamétralement opposé** à A .

x	0	6	12
$R(x)$	0	3	0
$I(x)$	6	1,5	6

2. $r + R(x) = \frac{48-(x-6)^2}{12}$, d'où $I(x) = \frac{72}{48-(x-6)^2}$. Composée : $I = \varphi \circ R$ avec $\varphi(s) = \frac{6}{1+s}$ strictement décroissante sur $[0, +\infty[$: I **décroît** sur $[0, 6]$ (où R croît) et **croît** sur $[6, 12]$.
 $I_{\min} = I(6) = 1,5 \text{ A}$, $I_{\max} = I(0) = I(12) = 6 \text{ A}$.
3. $J(t) = \frac{72}{48-t^2}$ est définie sur $[-6, 6]$ (symétrique) et $J(-t) = J(t)$: J **est paire**. Sur $[0, 6]$, t^2 croît, $48-t^2$ décroît en restant $\geq 12 > 0$, son inverse croît : J croît sur $[0, 6]$, donc décroît sur $[-6, 0]$; avec $x = 6 + t$, on retrouve les variations de I ✓.
4. $I(x) = 2 \iff (x-6)^2 = 12 \iff x = 6 \pm 2\sqrt{3}$ ($\approx 2,54$ et $9,46$). Avec le tableau ($I(6) < 2$) :
 $I \leq 2 \iff x \in [6 - 2\sqrt{3}, 6 + 2\sqrt{3}]$. Comme $I > 0$, il suffit de prendre $m > 0$: $I(x) = m \iff (x-6)^2 = 48 - \frac{72}{m}$, avec $0 \leq (x-6)^2 \leq 36$ sur $[0, 12]$: il faut $\frac{3}{2} \leq m \leq 6$. Lecture graphique (la droite $y = m$ et la courbe en « U » de I) : **aucune** solution si $m < 1,5$ ou $m > 6$, **une** ($x = 6$) si $m = 1,5$, **deux** ($6 \pm \sqrt{48 - 72/m}$) si $1,5 < m \leq 6$. Enfin $U = 6 - I$ est maximale quand I est minimale : $U_{\max} = 4,5 \text{ V}$, en $x = 6$.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. a) Pour une distance ℓ : durée totale $\frac{\ell}{30} + \frac{\ell}{v} = \frac{\ell(v+30)}{30v}$ pour 2ℓ parcourus, d'où $V = \frac{60v}{v+30} = \frac{60(v+30)-1800}{v+30} = 60 - \frac{1800}{v+30}$. b) $\frac{1800}{v+30}$ décroît (dénominateur croissant positif), donc V est **strictement croissante**, et $\frac{1800}{v+30} > 0$ donne $V(v) < 60$: **impossible** d'obtenir 60 km/h, même en revenant très vite (majorant non atteint). $V(v) = 40 \iff v + 30 = 90 \iff v = 60 \text{ km/h}$.
- c) $\frac{30+v}{2} - V(v) = \frac{(30+v)^2 - 120v}{2(v+30)} = \frac{(v-30)^2}{2(v+30)} \geq 0$: $V(v) \leq \frac{30+v}{2}$, égalité si et seulement si $v = 30$.
2. a) Par rapport au sol, l'avion va à $300+w$ à l'aller et $300-w$ au retour : $t(w) = \frac{600(300-w)+600(300+w)}{(300+w)(300-w)} = \frac{360\,000}{90\,000-w^2}$. b) $] -300, 300[$ est symétrique et $t(-w) = t(w)$: t **est paire**. Sur $[0, 300[$, w^2 croît, $90\,000-w^2$ décroît en restant > 0 , et $s \mapsto \frac{360\,000}{s}$ décroît sur $]0, +\infty[$: t est **strictement croissante** ; par parité, **strictement décroissante** sur $] -300, 0]$ (tableau ci-dessous).

- c) Donc $t(w) \geq t(0) = 4 \text{ h}$, avec égalité seulement si $w = 0$: **le vent, favorable ou non, rallonge toujours l'aller-retour**. $t(w) = 4,5 \iff 90\,000 - w^2 = 80\,000 \iff w = \pm 100 \text{ km/h}$.

w	-300	0	300
$t(w)$		4	

d) $t > 0$, donc on prend $m > 0$: $t(w) = m \iff w^2 = 90\,000 - \frac{360\,000}{m}$, nombre $< 90\,000$, négatif si $m < 4$, nul si $m = 4$, positif si $m > 4$: **aucune** solution si $m < 4$, **une** ($w = 0$) si $m = 4$, **deux** opposées si $m > 4$ (la droite $y = m$ et la courbe en « U »). t non majorée : pour $M > 4$, $w = \sqrt{90\,000 - \frac{360\,000}{M}} \in]0, 300[$ vérifie $t(w) = 2M > M$; et pour $M \leq 4$, $t(100) = 4,5 > M$: aucun réel ne majore t .

■ Corrigé de l'exercice 63

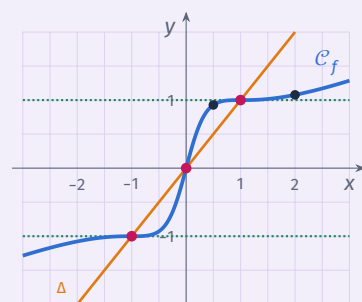
1. $3x^2 + 1 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$, symétrique, et $f(-x) = -f(x)$: f **est impaire**. $(1+x)^3 - (1-x)^3 = 6x + 2x^3$ et $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 2 + 6x^2$: leur quotient est $f(x)$ ✓. Pour $x \neq 0$ (alors $f(x) = \frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \neq 0$) : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2} + 1} = \frac{1+3x^2}{x(3+x^2)} = \frac{1}{f(x)}$.

2. $f(x) - 1 = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 1} = \frac{(x-1)^3}{3x^2 + 1}$ et $f(x) + 1 = \frac{(x+1)^3}{3x^2 + 1}$. Un cube a le signe du nombre élevé au cube : $f(x) \geq 1 \iff x \geq 1$, $f(x) \leq -1 \iff x \leq -1$, $|f(x)| < 1 \iff -1 < x < 1$; sur $[-1, 1]$, **maximum** $f(1) = 1$, **minimum** $f(-1) = -1$.

3. Numérateur de $f(x) - f(y)$: $(x^3 + 3x)(3y^2 + 1) - (y^3 + 3y)(3x^2 + 1) = 3x^2y^2(x-y) + (x^3 - y^3) - 9xy(x-y) + 3(x-y) = (x-y)N$, avec $N = 3x^2y^2 + x^2 + xy + y^2 - 9xy + 3$: d'où $T(x, y)$. Et $3(xy-1)^2 + (x-y)^2 = 3x^2y^2 - 6xy + 3 + x^2 - 2xy + y^2 = N$ ✓. Pour $x \neq y$, $(x-y)^2 > 0$, donc $N > 0$, $T > 0$: f **est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** (tableau ci-contre).

4. $f(x) = x \iff 2x(1-x^2) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$, et $f(x) - x = \frac{2x(1-x)(1+x)}{3x^2+1}$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de Δ sur $]-\infty, -1[$ et $]0, 1[$, **au-dessous** sur $]-1, 0[$ et $]1, +\infty[$. Si $0 < x < 1$: $x < f(x)$ (position) et $f(x) < 1$ (question 2) ; si $x > 1$: $1 < f(x) < x$: $f(x)$ est **strictement entre x et 1**.

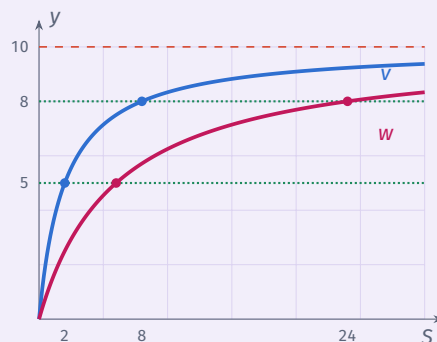
5. $f(2) = \frac{14}{13}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{14} = \frac{1}{f(2)}$ ✓. Par stricte croissance : $f(x) \leq \frac{14}{13} = f(2) \iff x \leq 2$, et $f(x) = m$ a **au plus une** solution.



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow$	

■ Corrigé de l'exercice 64

1. a) $10 - \frac{20}{S+2} = \frac{10S}{S+2}$ ✓. $\frac{20}{S+2}$ décroît ($S+2$ croît en restant > 0), donc v est **strictement croissante** ; $\frac{20}{S+2} > 0$ donne $v(S) < 10$, et $v(S) = 10$ n'a pas de solution : 10 est un **majorant non atteint**, v n'a pas de maximum (la vitesse maximale V n'est jamais atteinte). b) $v(2) = 5 = \frac{V}{2}$: K est la concentration de demi-saturation. $v(S) \geq 8 \iff \frac{20}{S+2} \leq 2 \iff S \geq 8$.



2. a) $v(S) - w(S) = 10S \left(\frac{1}{S+2} - \frac{1}{S+6} \right) = \frac{40S}{(S+2)(S+6)} \geq 0$: $w \leq v$ (égalité seulement en 0). b) $\frac{v(S)}{w(S)} = \frac{S+6}{S+2} = 1 + \frac{4}{S+2}$ décroît, et $0 < \frac{4}{S+2} < 2$ pour $S > 0$: $1 < \frac{V}{W} < 3$: l'inhibiteur ralentit la réaction (jusqu'à trois fois), mais son effet s'estompe quand le substrat abonde. c) $w(S) = 10 - \frac{60}{S+6} \geq 8 \iff S \geq 24$: trois fois plus de substrat (figure).
3. $\frac{1}{v(S)} = \frac{S+2}{10S} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{S}$ et $\frac{1}{w(S)} = \frac{S+6}{10S} = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{S}$; avec $s = \frac{1}{S}$, $\frac{1}{v(1/s)} = \frac{1}{10} + \frac{s}{5}$: fonction **affine** (une droite au lieu d'une hyperbole). L'ordonnée à l'origine commune $\frac{1}{10}$: **l'inhibiteur ne change pas la vitesse maximale** (inhibition « compétitive ») ; seule la pente $\frac{K}{V}$ change.
4. En général $\frac{1}{v(S)} = \frac{1}{V} + \frac{K}{V} \times \frac{1}{S}$: $\frac{1}{4} = \frac{1}{V} + \frac{K}{V}$ et $\frac{1}{8} = \frac{1}{V} + \frac{K}{4V}$. Par soustraction, $\frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{K}{V}$, donc $\frac{K}{V} = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{V} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$: $V = 12, K = 2$ (contrôle : $\frac{12}{3} = 4, \frac{48}{6} = 8$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 65

1. (C). $D_f = [-5, -4[\cup]-4, 4[\cup]4, 5]$ ($|x| \leq 5$ et $|x| \neq 4$) est symétrique et $f(-x) = f(x)$: f est **paire**, et $f(3) = \frac{4}{-1} = -4$. (A) faux (± 4 exclus), (B) faux, (D) : $f(0) = -\frac{5}{4}$.
2. (B). $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$ croît sur $[3, +\infty[\supset [4, 6]$: minimum $16 - 24 + 11 = 3$, atteint en 4. Piège (A) : 2 est atteint en $3 \notin [4, 6]$.
3. (B). Par parité $f(-3) = f(3)$, et $2 < 3$ dans $\mathbb{R}^+$ où f décroît strictement : $f(3) < f(2)$.
4. (B). $x^2 - 4x = 4 \iff x = 2 \pm 2\sqrt{2}$; $x^2 - 4x = -4 \iff (x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$: **trois** solutions (la droite $y = 4$ passe par le sommet (2, 4) de la « bosse » de la courbe de $|x^2 - 4x|$).
5. (B). $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1 \geq 1$, donc $0 < h(x) \leq 1 = h(-3)$. (A) : le dénominateur croît sur $[-3, +\infty[$, h y décroît ; (C) : $h(1) = \frac{1}{17} \neq \frac{1}{5} = h(-1)$; (D) : $h(1) < \frac{1}{10}$.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. (D). C'est $g \circ f$, avec $f(x) = 3 - \frac{2}{x+1}$ croissante sur $] -1, 0]$ et nulle en $-\frac{1}{3}$, et $g(x) = x^2$ décroissante sur $\mathbb{R}^-$, croissante sur $\mathbb{R}^+$: sur $] -1, -\frac{1}{3}]$, $f(x) \leq 0$ et $g \circ f$ **décroît** ; sur $[-\frac{1}{3}, 0]$, $f(x) \geq 0$ et $g \circ f$ **croît**. Exemple : $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 > 0 = (g \circ f)\left(-\frac{1}{3}\right) < 1 = (g \circ f)(0)$.
2. (C). Impaire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, f décroît sur $\mathbb{R}^-$; comme $-5 \leq -2$: $f(-5) \geq f(-2) = -f(2) = 1$. (A) : $f(-2) = 1$; (B) faux ; (D) : f impaire définie en 0 donne $f(0) = 0$.
3. (C). Avec $X = \sqrt{x+10} \geq 0$: $X = \frac{X^2}{2} \iff X \in \{0, 2\}$, soit $x = -10$ ou $x = -6$: deux points, $(-10, 0)$ et $(-6, 2)$.
4. (A). $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique et $g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x))$: $g \circ f$ est **paire**.

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Calcul algébrique

- ① $A = (x - 7)(x + 1)$;
 $B = x(x - 2)^2$.
 $A = (x - 3)^2 - 4^2$ ($a^2 - b^2$);
 $B = x(x^2 - 4x + 4)$.
- ② (a) $\frac{2}{x^2-1}$; (b) $k = 3$.
 $\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$;
 $-2 + \frac{k}{3x-1} = \frac{-6x+2+k}{3x-1}$, d'où
 $2 + k = 5$.
- ③ (a) $-2(x - 2)^2 + 5$; (b) car
 $-2(x - 2)^2 \leq 0$.
 $-2[(x - 2)^2 - 4] - 3$; égalité
pour $x = 2$.
- ④ (a) $(a - b)(a + b + 2)$;
(b) $\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}$.
 $(a - b)(a + b) + 2(a - b)$;
 $\frac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)(b+1)}$: les termes ab
s'éliminent.

Bloc 2 · Équations et signes

- ⑤ (a) $S = \{-2; \frac{3}{2}\}$;
(b) $(x + 2)(2x - 3)$.
 $\Delta = 1 + 48 = 49$, $x = \frac{-1 \pm 7}{4}$;
 $2(x + 2)(x - \frac{3}{2})$.
- ⑥ (a) $S = [-5, 4]$;
(b) $S = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$. Racines
-5 et 4 : signe de $-a$ entre
elles; $(3x + 1)^2$ ne
s'annule qu'en $-\frac{1}{3}$.
- ⑦ $S =]1, 5]$. $\frac{x+3}{x-1} - 2 = \frac{5-x}{x-1} \geq 0$;
tableau de signes (ne pas
multiplier par $x - 1$, de
signe inconnu).
- ⑧ (a) $S =]-2, \frac{2}{3}]$; (b) $S = \{1\}$.
 $-4 < 3x + 2 < 4$,
 $-6 < 3x < 2$; x à égale
distance de 4 et de -2.

Bloc 3 · Fonctions de référence

- ⑨ (a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$;
(b) $S =]-\infty, 2]$. $a = \frac{-2-7}{4-(-2)}$,
 $3 + b = 7$; $-\frac{3}{2}x > -3$;
diviser par $-\frac{3}{2} < 0$ change
le sens.
- ⑩ (a) $a = -\frac{1}{3}$;
(b) $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.
 $36a = -12$;
 $-\frac{1}{3}x^2 \leq -3 \iff x^2 \geq 9$.
- ⑪ (a) $a = -6$; (b) (2, -3) et
(3, -2). $a = -4 \times 1,5$; $-\frac{6}{x} =$
 $x - 5 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$,
 $x = 2$ ou $x = 3$.
- ⑫ (a) 2, 4 et 1;
(b) $]-1, 2[\cup]4, 5]$. La
courbe coupe la droite
 $y = 2$ en $x = -1$, $x = 2$ et
 $x = 4$.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 3 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 32**, p. 29. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 12), puis les pièges de la section 13. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et C (parité, extremums), **exercices 37 à 42**, p. 31 et **43 à 48**, p. 32.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 12 en lecture rapide), puis les sections 13 et 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes D et E (variations, composées), **exercices 49 à 54**, p. 34 et **55 à 60**, p. 36 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Calcul algébrique

Relis : les sections 5, 6 et 10 du cours.
Fais : **exercice 6**, p. 24, **exercice 33**, p. 30, **exercice 44**, p. 33 et **exercice 49**, p. 34.

Bloc 2 · Équations et signes

Relis : les sections 1, 4 et 8 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 23, **exercice 8**, p. 24, **exercice 34**, p. 30 et **exercice 55**, p. 36.

Bloc 3 · Fonctions de référence

Relis : les sections 2, 9 et 10 du cours.
Fais : **exercice 2**, p. 23, **exercice 3**, p. 23, **exercice 15**, p. 25 et **exercice 56**, p. 36.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Domaines et lectures graphiques	31 à 36	/ 6	
Thème B · Parité	37 à 42	/ 6	
Thème C · Majorants, minorants, extremums	43 à 48	/ 6	
Thème D · Sens de variation	49 à 54	/ 6	
Thème E · Fonctions usuelles et composées	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : **Le barycentre**

Maths Olympiad