

Chapitre 12

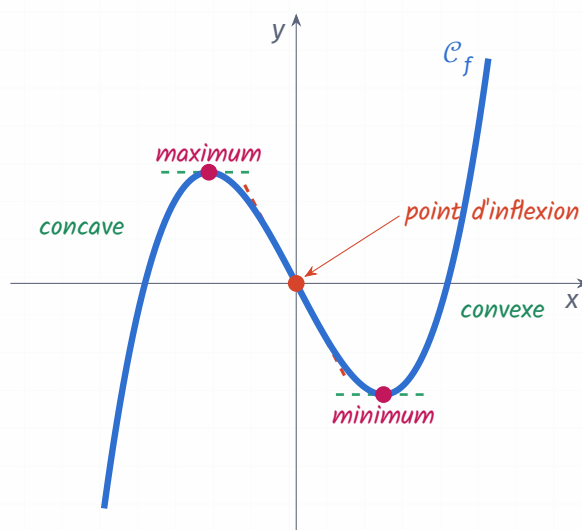
Étude des fonctions

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

Asymptote oblique :

$$f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$$

Inflexion : f'' change de signe*Défi de concours*Combien de solutions a $x^3 + px + q = 0$? (le signe de $4p^3 + 27q^2$)

Variations, concavité, inflexion : la courbe raconte tout

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	19 Niveau 4 · Concours	26
1 Le plan d'étude	5	20 Branches infinies	28
2 Asymptotes parallèles aux axes	6	21 Concavité et inflexion	30
3 Asymptotes obliques	7	22 Symétries et réduction	31
4 Branches paraboliques	8	23 Études complètes	33
5 Concavité et points d'inflexion	9	24 Équations et lectures graphiques	35
6 Symétries et réduction	11	25 Défis de concours	36
7 Étude d'une fonction polynôme	12	26 Corrigés du niveau 1	39
8 Étude d'une fonction rationnelle	13	27 Corrigés du niveau 2	41
9 Étude d'une fonction irrationnelle	14	28 Corrigés du niveau 3	44
10 Étude d'une fonction circulaire	15	29 Corrigés du niveau 4	47
11 Équations et lectures graphiques	16	30 Corrigés : branches infinies	50
12 Pour aller plus loin	17	31 Corrigés : concavité, inflexion	53
13 Les pièges classiques	18	32 Corrigés : symétries, réduction	56
14 Les astuces des concours	19	33 Corrigés : études complètes	59
15 L'essentiel du chapitre en une page	21	34 Corrigés : lectures graphiques	64
16 Niveau 1 · Bases	22	35 Corrigés : défis de concours	67
17 Niveau 2 · Bac	23	25 Corrigé du test d'entrée	71
18 Niveau 3 · Approfondissement	25		

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Branches infinies, Concavité et inflexion, Symétries et réduction, Études complètes, Équations et lectures graphiques, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|--|
| ☐ suivre le plan d'étude et rédiger chaque étape ; | ☐ étudier la concavité avec le signe de f'' ; |
| ☐ trouver les asymptotes verticales et horizontales ; | ☐ trouver un point d'inflexion et sa tangente ; |
| ☐ utiliser $a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim [f(x) - ax]$; | ☐ démontrer un axe $x = a$ ou un centre $\Omega(a, b)$; |
| ☐ étudier la position d'une courbe et d'une asymptote ; | ☐ réduire le domaine d'étude, puis compléter la courbe ; |
| ☐ reconnaître une branche parabolique et sa direction ; | ☐ étudier une fonction trigonométrique réduite ; |
| ☐ lever $\infty - \infty$ avec une racine ($ x = -x$ en $-\infty$) ; | ☐ compter les solutions de $f(x) = m$ ou de $f(x) = mx$; |
| ☐ interpréter une demi-tangente verticale ; | ☐ tracer $ f $, $f(x)$ et comparer deux courbes. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point sur tes acquis des **chapitres 10, 11 et 4** : limites, dérivées, symétries de courbes. Aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : **page 71**.

Bloc 1 · Limites (chapitre 10)

___ / 4

① **À l'infini** Calculer (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{x^2 + 3x}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x^2}{(2x + 1)^2}$.

② **Formes $\frac{0}{0}$** Calculer (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 1}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$.

③ **Racines carrées** (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{x}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$.

④ **Asymptotes** $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{x+4}$. (a) Calculer les limites de f en $+\infty$, en 0^+ et en -4^+ .
(b) Donner les asymptotes verticales et horizontale de $\mathcal{C}_f$.

Bloc 2 · Dérivées (chapitre 11)

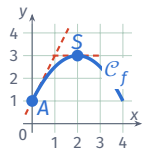
___ / 4

⑤ **Dériver** Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$:
(a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}$; (b) $g(x) = \sqrt{5-4x}$, $x < \frac{5}{4}$.

⑥ **Tangentes** $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$. (a) Tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 ? (b) Points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à $y = 8x$?

⑦ **Variations** $f(x) = \sin x + \sin^2 x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
(b) Tableau de variations et minimum de f .

⑧ **Lire une dérivée** Ci-contre :
 $\mathcal{C}_f$ et ses tangentes en A et en S.
(a) Lire $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
(b) Résoudre $f'(x) \geq 0$ sur $[0, 4]$.



Bloc 3 · Courbes et symétries (chapitre 4)

___ / 4

⑨ **Paire, impaire ?** Étudier la parité de
(a) $f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 + 4}$; (b) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$.

⑩ **Un axe de symétrie** $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$.
(a) Montrer que la droite $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. (b) Calculer $f(-1)$; en déduire $f(5)$.

⑪ **Centre et translation** $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.
(a) Vérifier que $f(1+t) = 1 + g(t)$, avec $g(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$. (b) Quelle translation transforme $\mathcal{C}_g$ en $\mathcal{C}_f$? Un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$?

⑫ **Parité et période** $f(x) = \tan x - \sin 2x$.
(a) Montrer que f est impaire et π -périodique. (b) Comment obtenir toute la courbe $\mathcal{C}_f$ à partir de sa partie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$?

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 71**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Le plan d'étude

Étudier une fonction, c'est réunir les informations qui permettent de tracer sa courbe **sans tableau de valeurs** : où elle existe, comment elle varie, ce qu'elle fait « au bord » de son domaine et dans quel sens elle « tourne ». Ce chapitre réunit les outils des chapitres 4 (symétries), 10 (limites) et 11 (dérivation), et en ajoute trois : les **asymptotes obliques**, les **branches paraboliques** et la **concavité**.

Méthode : Le plan d'étude d'une fonction f

1. Domaine D_f . **2. Réduction** : parité, période, axe ou centre de symétrie $\Rightarrow$ un **domaine d'étude** D_E plus petit (section 6). **3. Limites** aux bornes de D_E ; asymptotes verticales et horizontales (section 2). **4. Dérivabilité** aux points délicats (borne fermée d'une racine carrée, valeur absolue, raccord) : limite du taux d'accroissement, tangente ou demi-tangente. **5. Dérivée** f' , son signe, **tableau de variations** complété par les limites. **6. Branches infinies** : asymptotes obliques, branches paraboliques, position relative (sections 3 et 4). **7. Concavité** : signe de f'' , points d'inflexion (section 5). **8. Points remarquables** : intersections avec les axes, tangentes utiles. **9. Tracé** : asymptotes en pointillés, points et tangentes, **puis** la courbe, branche par branche. **10. Compléter** la courbe par les symétries et les translations de l'étape 2.

étape	ce qu'elle apporte au dessin
domaine, réduction	les morceaux à tracer ; la moitié (ou une période) du travail
limites aux bornes	les « bords » : asymptotes verticales, horizontales
taux d'accroissement	tangente ou demi-tangente en un point délicat
signe de f'	montées, descentes, extremums
branches infinies	la direction « très loin » ; dessus ou dessous de l'asymptote
signe de f''	la forme : $\cup$ (convexe), $\cap$ (concave), inflexions
points remarquables	des points de passage exacts

Rappel (chapitre 11). Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un réel ℓ quand $x \rightarrow a$: tangente de pente ℓ ; vers $\pm\infty$ à droite (ou à gauche) : **demi-tangente verticale** ; vers deux limites différentes à gauche et à droite : **point anguleux**.

Rédaction type :

- « $f'(x)$ a le signe de $x - 2$, car $(x - 1)^2 > 0$; donc f est strictement décroissante sur $]1, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. »
- « $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$, donc la droite $(\Delta) : y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. »
- « f'' s'annule en 1 en changeant de signe : $l(1, f(1))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. »

Remarque. Un peu d'histoire. Dans *La Géométrie* (1637), **Descartes** associe à une courbe une **équation** : étudier la courbe devient un calcul. Le marquis de **L'Hôpital** explique en 1696, dans le premier manuel de calcul différentiel, comment trouver les **points d'inflexion**. En 1748, le

tome II de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'**Euler** étudie systématiquement les **branches infinies** des courbes et leurs **asymptotes** : c'est le plan d'étude de ce chapitre.

2

Asymptotes parallèles aux axes

Définition : asymptote verticale, asymptote horizontale (a et b réels)

1. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, la droite d'équation $y = b$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (de même en $-\infty$).

Le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite : sa distance à la droite $x = a$ est $|x - a| \rightarrow 0$; son écart vertical à la droite $y = b$ est $|f(x) - b| \rightarrow 0$. Le mot vient du grec *asumptôtos*, « qui ne se rencontre pas » ; pourtant, une courbe **peut couper** son asymptote (exemple ci-dessous).

Méthode : Comment trouver les asymptotes parallèles aux axes

1. Verticales : on les cherche aux bornes **finies** de D_f qui n'appartiennent pas à D_f ; on calcule la limite à gauche et à droite (signe du dénominateur par un tableau de signes). Une limite finie ne donne **pas** d'asymptote. **2. Horizontales** : on calcule les limites en $+\infty$ et en $-\infty$; si l'une est un réel b , la droite $y = b$ est asymptote de ce côté. **3. Position** : on étudie le **signe de** $f(x) - b$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite là où il est positif, au-dessous là où il est négatif, et la coupe là où il s'annule.

Exemple : $f(x) = \frac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 6}$: trois asymptotes, dont une coupée par la courbe

Domaine. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. En $\pm\infty$, $f(x) = \frac{2 - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} \rightarrow 2$: la droite (Δ) : $y = 2$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

En -2 et en 3. Le numérateur tend vers -2, puis vers 8 ; le dénominateur tend vers 0 avec le signe de $(x + 2)(x - 3)$ (positif à l'extérieur des racines) :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty ;$$

les droites $x = -2$ et $x = 3$ sont asymptotes verticales. **Variations** : $f'(x) = \frac{-2(x^2 + 2x + 5)}{(x^2 - x - 6)^2} < 0$:

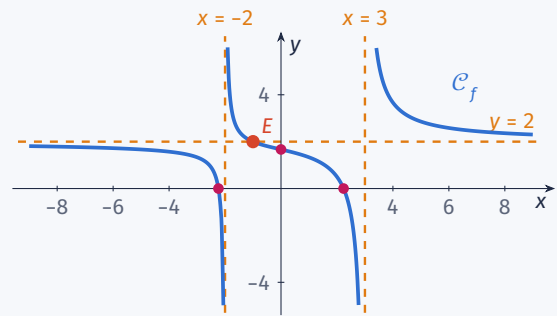
f décroît sur chacun des trois intervalles ; zéros $\pm\sqrt{5}$, $f(0) = \frac{5}{3}$.

Position (même dénominateur) :

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 - 10 - 2(x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x+1)}{(x+2)(x-3)} :$$

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$
$f(x) - 2$	-		+	-	+
$\mathcal{C}_f$	dessous	dessus	dessous	dessus	

$\mathcal{C}_f$ **coupe** son asymptote (Δ) au point $E(-1, 2)$: aucune contradiction, l'asymptote ne décrit que ce qui se passe « au loin ».



Attention, piège ! une valeur interdite ne donne pas toujours une asymptote

$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Pour $x \neq 2$, $g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{4}{3}$: **pas** d'asymptote en 2 (la courbe est celle de $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$ privée du point $(2, \frac{4}{3})$). En revanche $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} g(x) = \pm\infty$: la droite $x = -1$ est asymptote verticale.

3

Asymptotes obliques

Définition : asymptote oblique ($a \neq 0$ et b réels)

La droite (Δ) : $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (de même en $-\infty$). Le réel $f(x) - (ax + b)$ est l'**écart vertical** entre le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le point $P(x, ax + b)$ de (Δ).

Théorème (calcul de a et de b)

La droite (Δ) : $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$.

En particulier, $\mathcal{C}_f$ admet **au plus une** asymptote au voisinage de $+\infty$ (et de même en $-\infty$).

Démonstration. ($\Rightarrow$) Posons $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f(x) - ax = b + \varepsilon(x) \rightarrow b$, et

pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} \rightarrow a + 0 + 0 = a$. ($\Leftarrow$) $f(x) - (ax + b) = [f(x) - ax] - b \rightarrow b - b = 0$. Enfin a et b sont des limites, donc ils sont uniques. $\square$

Méthode : Comment trouver une asymptote oblique (en $+\infty$; de même en $-\infty$)

1. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ (sinon : asymptote horizontale ou rien). 2. Calculer $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. 3. Si a est un réel non nul, calculer $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$; si b est réel, (Δ) : $y = ax + b$ est asymptote. Les autres cas sont des **branches paraboliques** (section 4). 4. **Position** : signe de $f(x) - (ax + b)$.

Raccourci : si l'on sait écrire $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (division euclidienne, section 14), la droite $y = ax + b$ est asymptote, et la position se lit sur le **signe de $g(x)$** .

Exemple : deux fonctions, deux leçons

(a) $f_1(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. Par a et b : $\frac{f_1(x)}{x} = \frac{x^3 + 2}{x^3 + x} = 1 + \frac{2}{x^3} \rightarrow 1$ et $f_1(x) - x = \frac{x^3 + 2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \frac{2 - x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$

en $\pm\infty$: la droite (Δ) : $y = x$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$. Par la division : $x^3 + 2 = x(x^2 + 1) + (2 - x)$ donne directement $f_1(x) = x + \frac{2-x}{x^2+1}$.

Position : $f_1(x) - x$ a le signe de $2 - x$: $\mathcal{C}_{f_1}$ est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty, 2[$, au-dessous sur $]2, +\infty[$, et la **coupe** au point $(2, 2)$.

Variations : $f_1'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$ (avec $x^2+x+4 > 0$) :

0 : maximum local $f_1(0) = 2$, minimum local $f_1(1) = \frac{3}{2}$.

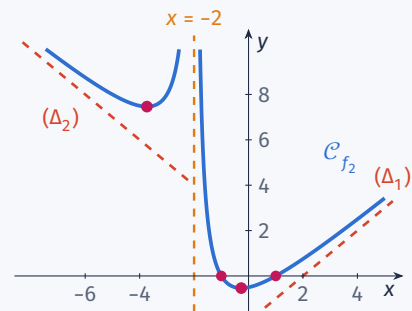
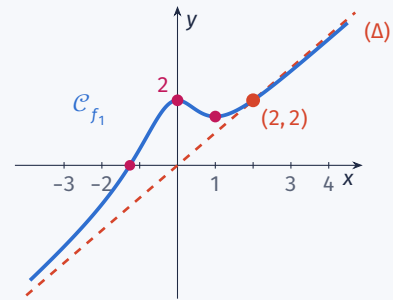
(b) $f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{|x + 2|}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, avec $x^2 - 1 = (x+2)(x-2) + 3$.

Si $x > -2$: $f_2(x) = x - 2 + \frac{3}{x+2}$: (Δ_1) : $y = x - 2$ est asymptote en $+\infty$, courbe au-dessus ($-\frac{3}{x+2} > 0$).

Si $x < -2$: $f_2(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$: (Δ_2) : $y = -x + 2$ est asymptote en $-\infty$, courbe au-dessus ($-\frac{3}{x+2} > 0$).

$f_2(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -2$ (des deux côtés) : asymptote $x = -2$.

Leçon : l'asymptote en $-\infty$ n'est pas forcément celle de $+\infty$: $\frac{f_2(x)}{x}$ tend vers 1 en $+\infty$, mais vers -1 en $-\infty$.



4

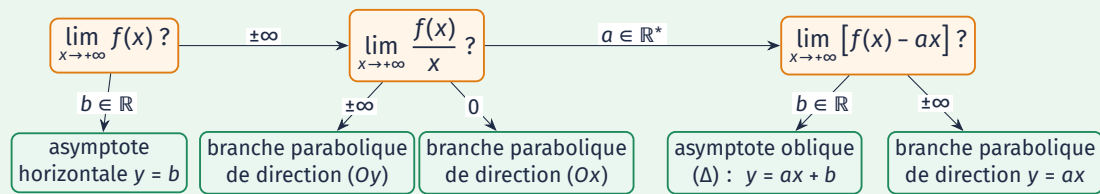
Branches paraboliques

Quand $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ sans asymptote, on décrit tout de même la **direction** que prend la courbe.

Le quotient $\frac{f(x)}{x}$ est le coefficient directeur de la droite (OM) , où $M(x, f(x))$: sa limite donne la direction « limite » de (OM) .

Définition : branches paraboliques (en $+\infty$; de même en $-\infty$)

On suppose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$. 1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** (elle « monte » comme $y = x^2$). 2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** (elle s'éloigne lentement, comme $y = \sqrt{x}$). 3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$: **branche parabolique de direction la droite $y = ax$** (comme $y = x + \sqrt{x}$: même direction que la droite, mais l'écart devient infini).


Méthode : Comment étudier une branche infinie

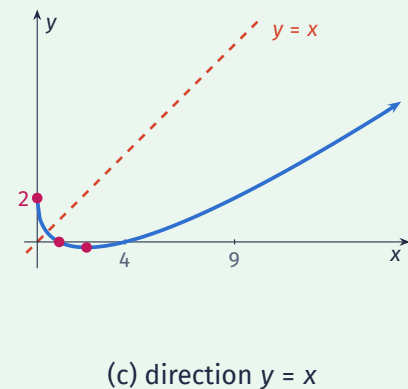
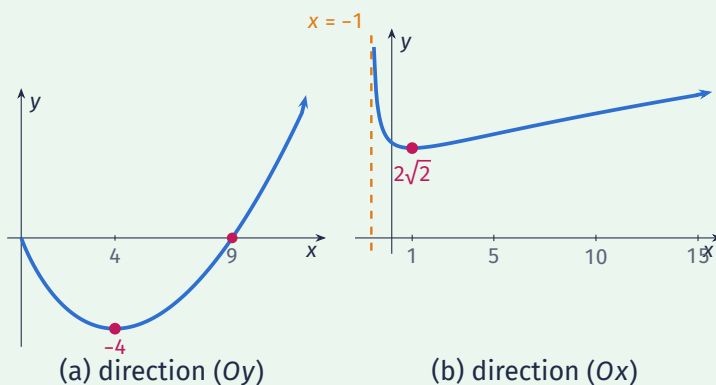
1. Calculer la limite de f (en $+\infty$ ou en $-\infty$). 2. Suivre l'arbre ci-dessus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis, si besoin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$. 3. Lever les formes indéterminées : factoriser par le terme dominant, multiplier par la quantité conjuguée pour les racines (section 9). 4. Conclure par une phrase complète : « $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction ... ».

Exemple : trois branches paraboliques en $+\infty$ (figure)

(a) $u(x) = x\sqrt{x} - 3x$ sur $[0, +\infty[$: $u(x) = x(\sqrt{x} - 3) \rightarrow +\infty$ et $\frac{u(x)}{x} = \sqrt{x} - 3 \rightarrow +\infty$: direction (Oy). ($u'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$: minimum $u(4) = -4$; zéros 0 et 9.)

(b) $v(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ sur $]-1, +\infty[$: $v(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{v(x)}{x} = \frac{x+3}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 1 \times 0 = 0$: direction (Ox). ($\lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) = +\infty$: asymptote $x = -1$; avec $t = \sqrt{x+1}$, $v = t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{2}$, minimum en $t = \sqrt{2}$, soit $x = 1$.)

(c) $w(x) = x - 3\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$ sur $[0, +\infty[$: $w(x) = x \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right) \rightarrow +\infty$, $\frac{w(x)}{x} \rightarrow 1$ et $w(x) - x = 2 - 3\sqrt{x} \rightarrow -\infty$: direction la droite $y = x$, la courbe s'en écartant vers le bas. (Zéros 1 et 4 ; minimum $w\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{1}{4}$.)



Remarque. Si $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite, on ne conclut rien : pour $x > 0$, $f(x) = x(2 + \sin x)$ oscille entre les droites $y = x$ et $y = 3x$, et $\frac{f(x)}{x} = 2 + \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

5

Concavité et points d'inflexion

Définition : courbe convexe, courbe concave (f dérivable sur un intervalle I)

$\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I lorsqu'elle est située **au-dessus de chacune de ses tangentes** en des points d'abscisse dans I : $\forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Elle est **concave** sur I lorsqu'elle est **au-dessous** de chacune de ces tangentes : $\forall (a, x) \in I^2, f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$. (Image : convexe $\cup$, concave $\cap$; $y = x^2$ est convexe, $y = \sqrt{x}$ est concave.)

Théorème (concavité et dérivée seconde, admis)

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I . Si $f'' \geq 0$ sur I , alors $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I ; si $f'' \leq 0$ sur I , alors $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I . (Autrement dit : les pentes $f'(x)$ augmentent sur un arc convexe, diminuent sur un arc concave.)

L'idée, dans un sens. Si $f'' \geq 0$ sur I , f' est croissante. Fixons $a \in I$ et posons $\varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ est ≤ 0 pour $x \leq a$ et ≥ 0 pour $x \geq a$; donc φ admet en a un minimum, $\varphi(a) = 0$, et $\varphi \geq 0$ sur I : la courbe est au-dessus de sa tangente en a . $\square$

Définition : point d'inflexion

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Le point $I(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque la courbe **change de concavité** en I (convexe d'un côté, concave de l'autre). En un point d'inflexion, la **tangente traverse la courbe**.

Propriété (en pratique)

Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. Une tangente d'inflexion peut être **horizontale** : c'est le cas lorsque f' s'annule en x_0 sans changer de signe et que f'' change de signe en x_0 (par exemple $y = x^3$ en O , section 8).

Méthode : Comment étudier la concavité

1. Calculer $f''(x)$ en dérivant f' **déjà factorisée**, puis factoriser $f''(x)$. 2. Dresser le tableau de signes de f'' sur chaque intervalle de D_f . 3. Conclure : convexe là où $f'' \geq 0$, concave là où $f'' \leq 0$. 4. Points d'inflexion : là où f'' s'annule **en changeant de signe** ; calculer $f(x_0)$, $f'(x_0)$ et la tangente (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. 5. **Contrôle** : $f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$ change de signe en x_0 ; un facteur $(x - x_0)^3$ apparaît souvent.

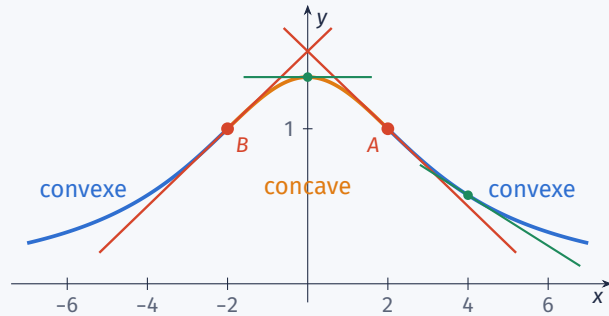
Exemple : une courbe en cloche : $c(x) = \frac{16}{x^2 + 12}$

$D_c = \mathbb{R}$, c est paire et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x) = 0$ (asymptote $y = 0$). $c'(x) = \frac{-32x}{(x^2 + 12)^2}$: c croît sur $]-\infty, 0]$, décroît sur $[0, +\infty[$, maximum $c(0) = \frac{4}{3}$. Puis

$$c''(x) = -32 \frac{(x^2 + 12)^2 - x \times 2(x^2 + 12) \times 2x}{(x^2 + 12)^4} = -32 \frac{x^2 + 12 - 4x^2}{(x^2 + 12)^3} = \frac{96(x - 2)(x + 2)}{(x^2 + 12)^3}.$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$c''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\mathcal{C}_c$	convexe B concave A convexe				

c'' s'annule en ± 2 en changeant de signe : **deux points d'inflexion** A(2, 1) et B(-2, 1).



Tangente en A : $c'(2) = -\frac{64}{256} = -\frac{1}{4}$, $(T_A) : y = -\frac{1}{4}(x - 2) + 1 = -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$, et

$$c(x) - \left(-\frac{x}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{64 + x(x^2 + 12) - 6(x^2 + 12)}{4(x^2 + 12)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{4(x^2 + 12)} = \frac{(x - 2)^3}{4(x^2 + 12)} :$$

du signe de $x - 2$: la courbe est sous (T_A) avant 2, au-dessus après : **la tangente traverse la courbe**. Par parité, $(T_B) : y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$; les deux tangentes se coupent en $(0, \frac{3}{2})$. Sur la figure, la tangente en $(0, \frac{4}{3})$ est au-dessus de l'arc concave, celle en $(4, \frac{4}{7})$ au-dessous de l'arc convexe. (Cette cloche est une cousine de la **courbe d'Agnesi**, étudiée par Maria Gaetana Agnesi en 1748.)

6 Symétries et réduction

Théorème (axe et centre de symétrie)

1. (Repère orthogonal) La droite $x = a$ est **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f \iff$ pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
2. Le point $\Omega(a, b)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f \iff$ pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Démonstration. Le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à la droite $x = a$ est $M'(2a - x, y)$; par rapport à Ω , c'est $M''(2a - x, 2b - y)$ (Ω milieu de $[MM'']$). Si la condition 1 est vraie et $M \in \mathcal{C}_f$, alors $y = f(x) = f(2a - x)$, donc $M' \in \mathcal{C}_f$; réciproquement, si $\mathcal{C}_f$ est symétrique, pour $x \in D_f$ le point $M'(2a - x, f(x))$ est sur $\mathcal{C}_f$, donc $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$. Même raisonnement pour Ω avec $2b - f(x) = f(2a - x)$. $\square$

Avec $x = a + t$: axe $\iff t \mapsto f(a + t)$ est **paire** ; centre $\iff t \mapsto f(a + t) - b$ est **impaire** : on « déplace l'origine » au point $(a, 0)$ ou en Ω .

Symétries et dérivées

Si $\mathcal{C}_f$ admet l'axe $x = a$: $f'(2a - x) = -f'(x)$ (et $f'(a) = 0$ si f est dérivable en a). Si $\mathcal{C}_f$ admet le centre $\Omega(a, b)$: $f'(2a - x) = f'(x)$ (tangentes **parallèles** en deux points symétriques) et $f''(2a - x) = -f''(x)$; si $a \in D_f$, alors $f''(a) = 0$ et f'' prend des signes contraires de part et d'autre de a : **un centre de symétrie situé sur la courbe est (en général) un point d'inflexion**.

Démonstration. On dérive $f(2a - x) = f(x)$ avec la règle $(f(ax + \beta))' = af'(ax + \beta)$ (chapitre 11) : $-f'(2a - x) = f'(x)$. On dérive $f(2a - x) + f(x) = 2b$: $-f'(2a - x) + f'(x) = 0$; puis on dérive $f'(2a - x) = f'(x)$: $-f''(2a - x) = f''(x)$; en $x = a$, $f''(a) = -f''(a)$. $\square$

Méthode : Comment réduire le domaine d'étude

la fonction est...	on l'étudie sur...	puis on complète la courbe par...
paire / impaire	$D_f \cap [0, +\infty[$	la symétrie d'axe (Oy) / de centre O
symétrique d'axe $x = a$ / de centre $\Omega(a, b)$	$D_f \cap [a, +\infty[$	la symétrie d'axe $x = a$ / de centre Ω
périodique de période T	$D_f \cap [\alpha, \alpha + T]$	les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$
de période T , et paire ou impaire	$D_f \cap [0, \frac{T}{2}]$	la symétrie, puis les translations

Pour deviner a : milieu de deux valeurs interdites, abscisse d'un extremum (axe) ou d'une inflexion (centre) ; pour un polynôme de degré n , $a = -\frac{c_{n-1}}{n c_n}$ (c_k coefficient de x^k) : le changement $x = a + t$ fait disparaître le terme en t^{n-1} . Le domaine **doit** être symétrique : les valeurs interdites vont par paires de milieu a .

Exemple : un axe : $q(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$

Deviner, puis prouver. $a = -\frac{-8}{4 \times 1} = 2$. Avec $x = 2 + t$ (développer $(2+t)^4$, $(2+t)^3$, $(2+t)^2$) :

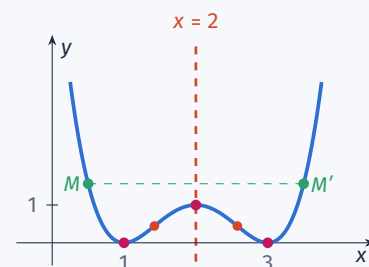
$$q(2+t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t^2 - 1)^2,$$

fonction **paire** de t : la droite $x = 2$ est axe de symétrie, et $q(x) = ((x-2)^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x-3)^2$.

Étude sur $[2, +\infty[$. $q'(x) = 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$ et $\frac{q(x)}{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique (Oy). $q''(x) = 4(3x^2 - 12x + 11)$ s'annule en changeant de signe en $2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$: inflexions $(2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9})$.

Par symétrie : minimum $q(1) = 0$, et q croît sur $[1, 2]$: maximum local $q(2) = 1$.

x	2	3	$+\infty$
$q'(x)$	0	-	0
$q(x)$	1	0	$+\infty$



Exemple : un centre : $k(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x^2 - 2x - 3}$

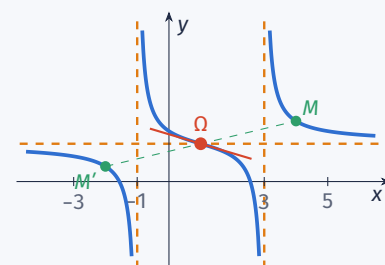
Domaine. $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$; on devine $a = 1$, milieu de -1 et 3 . Si $x \in D_k$, alors $2 - x \neq 3$ (car $x \neq -1$) et $2 - x \neq -1$ (car $x \neq 3$) : $2 - x \in D_k$.

Calcul. $x^2 - x - 4 = (x^2 - 2x - 3) + (x - 1)$, donc $k(x) = 1 + \frac{x-1}{x^2 - 2x - 3}$; avec $x = 1 + t$, $x^2 - 2x - 3 = t^2 - 4$ et $k(1+t) - 1 = \frac{t}{t^2 - 4}$, fonction **impaire** de t :

$\Omega(1, 1)$ est centre de symétrie.

Étude sur $[1, 3[\cup]3, +\infty[$. $k'(x) = -\frac{(x-1)^2 + 4}{(x+1)^2(x-3)^2} < 0$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} k(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$ (asymptote $y = 1$). $\Omega \in \mathcal{C}_k$: c'est un point d'inflexion, de tangente $y = 1 - \frac{1}{4}(x-1)$ ($k'(1) = -\frac{4}{16}$). **On complète** par la symétrie de centre Ω : k est aussi décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 1]$.

x	1	3	$+\infty$
$k'(x)$	-	-	-
$k(x)$	1	$+\infty$	1



7

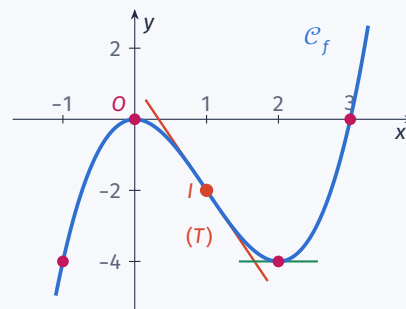
Étude d'une fonction polynôme

On applique le plan de la section 1, en rédigeant comme sur une copie. Cette cubique est le **fil rouge** des sections 7 et 11.

Exemple : étude complète de $f(x) = x^3 - 3x^2$

- 1. Domaine.** f est un polynôme : $D_f = \mathbb{R}$, et f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle n'est ni paire ni impaire : $f(-1) = -4$ et $f(1) = -2$.
- 2. Limites et branches infinies.** $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. $\frac{f(x)}{x} = x^2 - 3x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet deux **branches paraboliques de direction** (Oy) .
- 3. Variations.** $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, positif à l'extérieur des racines : f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, strictement décroissante sur $[0, 2]$; **maximum local** $f(0) = 0$, **minimum local** $f(2) = -4$.
- 4. Concavité.** $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, 1]$, convexe sur $[1, +\infty[$; f'' s'annule en changeant de signe en 1 : $I(1, -2)$ est un **point d'inflexion**. Comme $f'(1) = -3$, sa tangente est $(T) : y = -3(x - 1) - 2 = -3x + 1$, et $f(x) - (-3x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$: $\mathcal{C}_f$ est sous (T) sur $]-\infty, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$.
- 5. Symétrie (contrôle).** Avec $x = 1 + t$: $f(1 + t) = (1 + t)^3 - 3(1 + t)^2 = t^3 - 3t - 2$, donc $t \mapsto f(1 + t) + 2 = t^3 - 3t$ est impaire : $I(1, -2)$ **est centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ (section 6). On aurait pu étudier f sur $[1, +\infty[$ seulement : le maximum $(0, 0)$ est le symétrique du minimum $(2, -4)$ par rapport à I .
- 6. Points remarquables.** $f(x) = 0 \iff x^2(x - 3) = 0 \iff x \in \{0, 3\}$; 0 est racine **double** : $\mathcal{C}_f$ est tangente à l'axe (Ox) en O ($f'(0) = 0$). Tangente en $(3, 0)$: $y = 9x - 27$. Symétrique de $(3, 0)$ par rapport à I : $(-1, -4)$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	0	-2	-4	$+\infty$	
$\mathcal{C}_f$	concave		/	convexe		



8

Étude d'une fonction rationnelle

Une fraction rationnelle dont le numérateur a une **racine triple** : asymptote verticale, asymptote oblique coupée par la courbe, et un point d'inflexion à tangente horizontale.

Exemple : étude complète de $\varphi(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$

- 1. Domaine.** $D_\varphi = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; φ est deux fois dérivable sur chacun de ces intervalles.

2. Limites. En $0 : (x-1)^3 \rightarrow -1$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$ (des deux côtés) : l'axe (Oy), d'équation $x = 0$, est **asymptote verticale**. En $\pm\infty : \varphi(x) = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$.

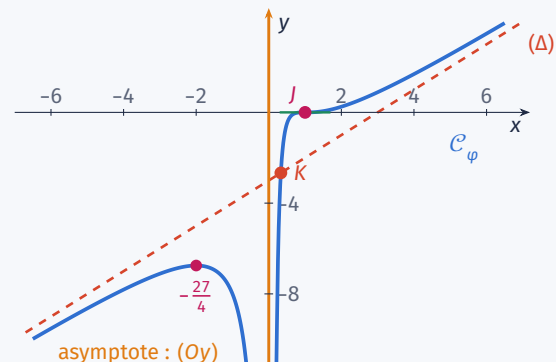
3. Asymptote oblique. Division : $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2(x-3) + (3x-1)$, donc $\varphi(x) = x - 3 + \frac{3x-1}{x^2}$, et $\frac{3x-1}{x^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: la droite $(\Delta) : y = x - 3$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$. **Position :** $\varphi(x) - (x-3)$ a le signe de $3x-1$: $\mathcal{C}_\varphi$ est au-dessous de (Δ) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \frac{1}{3}[$, au-dessus sur $]\frac{1}{3}, +\infty[$, et la coupe en $K\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

4. Variations. $\varphi'(x) = \frac{3(x-1)^2x^2 - (x-1)^3 \times 2x}{x^4} = \frac{(x-1)^2(3x-2(x-1))}{x^3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$, du signe de $\frac{x+2}{x}$ (car x^3 a le signe de x), nul en -2 et en 1 . φ croît sur $]-\infty, -2]$, décroît sur $]-2, 0[$, croît sur $]0, +\infty[$ (φ' s'annule en 1 **sans changer de signe**) ; maximum local $\varphi(-2) = \frac{(-3)^3}{4} = -\frac{27}{4}$.

5. Concavité. Avec $\varphi(x) = x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$: $\varphi'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ et $\varphi''(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{6(x-1)}{x^4}$: concave sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, convexe sur $]1, +\infty[$. $J(1, 0)$ est un **point d'inflexion à tangente horizontale** : sa tangente est l'axe (Ox), que la courbe traverse ($\varphi(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$ change de signe en 1). C'est la signature d'une **racine triple**.

6. Points. $\mathcal{C}_\varphi$ coupe (Ox) seulement en J ; $\varphi(-1) = -8$, $\varphi(2) = \frac{1}{4}$, $\varphi(4) = \frac{27}{16}$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+ 0 -			+ 0 +	
$\varphi''(x)$	- $\vdots$ -			- 0 +	
$\varphi(x)$	$-\infty$ ↗ $-\frac{27}{4}$ ↘ $-\infty$			$-\infty$ ↗ 0 ↘ $+\infty$	
$\mathcal{C}_\varphi$	concave			concave convexe	



9

Étude d'une fonction irrationnelle

Avec $\sqrt{u(x)}$, deux points demandent du soin : les **bornes** où u s'annule (demi-tangentes) et les **infinis** (forme $\infty - \infty$, levée par la quantité conjuguée, et $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ en $-\infty$).

Exemple : étude complète de $r(x) = 2\sqrt{x^2 - 6x} - x$

1. Domaine. $x^2 - 6x = x(x-6) \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 6$: $D_r =]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[$.

2. Dérivabilité aux bornes 0 et 6. Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2 - 6x} = |x|\sqrt{1 - \frac{6}{x}} = -x\sqrt{1 - \frac{6}{x}}$, donc

$$\frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = \frac{2\sqrt{x^2 - 6x}}{x} - 1 = -2\sqrt{1 - \frac{6}{x}} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty ;$$

et, pour $x > 6$, $\sqrt{x^2 - 6x} = \sqrt{x}\sqrt{x-6}$: $\frac{r(x) - r(6)}{x - 6} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-6} - (x-6)}{x-6} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-6}} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 6^+} +\infty$.

r n'est dérivable ni à gauche en 0 ni à droite en 6 : **demi-tangentes verticales** en $O(0, 0)$ et en $A(6, -6)$.

3. Limites et asymptotes. $\sqrt{x^2 - 6x} = \sqrt{(x-3)^2 - 9}$ « ressemble » à $|x-3|$: on attend les pentes $2-1 = 1$ en $+\infty$ et $-2-1 = -3$ en $-\infty$. En $+\infty$: $r(x) = x \left(2\sqrt{1 - \frac{6}{x}} - 1 \right) \rightarrow +\infty$, $\frac{r(x)}{x} = 2\sqrt{1 - \frac{6}{x}} - 1 \rightarrow 1$ et

$$r(x) - x = 2 \left(\sqrt{x^2 - 6x} - x \right) = \frac{2(x^2 - 6x - x^2)}{\sqrt{x^2 - 6x} + x} = \frac{-12}{\sqrt{1 - \frac{6}{x}} + 1} \rightarrow -6 : (\Delta_1) : y = x - 6.$$

En $-\infty$: $r(x) = -x \left(2\sqrt{1 - \frac{6}{x}} + 1 \right) \rightarrow +\infty$, $\frac{r(x)}{x} = -2\sqrt{1 - \frac{6}{x}} - 1 \rightarrow -3$ et

$$r(x) + 3x = 2 \left(\sqrt{x^2 - 6x} + x \right) = \frac{2(x^2 - 6x - x^2)}{\sqrt{x^2 - 6x} - x} = \frac{-12x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{6}{x}} + 1 \right)} \rightarrow 6 : (\Delta_2) : y = -3x + 6.$$

Positions. Pour $x \geq 6$: $r(x) - (x-6) = 2 \left(\sqrt{(x-3)^2 - 9} - (x-3) \right) = \frac{-18}{\sqrt{x^2 - 6x} + x - 3} < 0$. Pour $x \leq 0$:

$r(x) - (-3x + 6) = \frac{-18}{\sqrt{x^2 - 6x} + 3 - x} < 0$. La courbe est **au-dessous** de ses deux asymptotes.

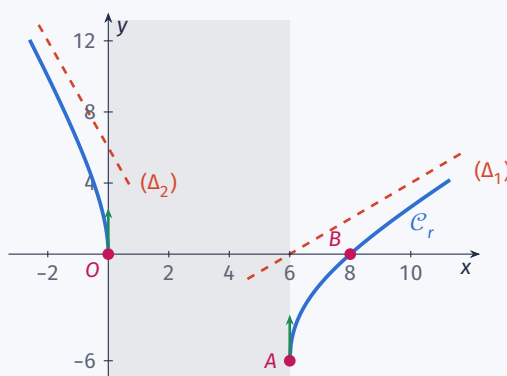
4. Variations. Pour $x < 0$ ou $x > 6$: $r'(x) = \frac{2(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 - 9}} - 1$.

Comme $0 < \sqrt{(x-3)^2 - 9} < |x-3|$, le quotient $\frac{2(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 - 9}}$ est > 2 si $x > 6$ et < -2 si $x < 0$: $r'(x) > 1 > 0$ sur $]6, +\infty[$ et $r'(x) < -3 < 0$ sur $]-\infty, 0[$.

5. Concavité. $r''(x) = \frac{-18}{(x^2 - 6x)\sqrt{x^2 - 6x}} < 0$: $\mathcal{C}_r$ est concave sur $]-\infty, 0[$ et sur $[6, +\infty[$.

6. Zéros. $r(x) = 0 \iff 2\sqrt{x^2 - 6x} = x \iff (x \geq 0 \text{ et } 4x^2 - 24x = x^2) \iff x \in \{0, 8\}$: points O et $B(8, 0)$.

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$
$r'(x)$	-			+
$r(x)$	$+\infty$	0	-6	$+\infty$



Et une branche parabolique :

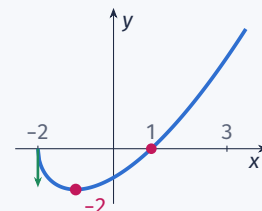
$g(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$ sur $[-2, +\infty[$.

$\frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \frac{x-1}{\sqrt{x+2}} \rightarrow -\infty$ en -2^+ :

demi-tangente verticale en $(-2, 0)$;

$\frac{g(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x+2} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) ;

$g'(x) = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$: minimum $g(-1) = -2$.



10

Étude d'une fonction circulaire

Pour une fonction trigonométrique, la **réduction** fait l'essentiel du travail : période, parité, puis axes et centres de symétrie.

Exemple : étude de $h(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$

1. Domaine et réduction. $h(x)$ existe si $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$: $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$. h est 2π -périodique, ni paire ni impaire ($h(-x) = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$). Mais $h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = h(x)$: la droite $x = \frac{\pi}{4}$ est **axe de symétrie** ; et $h\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{-\cos x} + \frac{1}{-\sin x} = -h(x)$: le point $\Omega\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ est **centre de symétrie** (les domaines se correspondent : $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{3\pi}{2} - x$ sont des multiples de $\frac{\pi}{2}$ en même temps que x). On étudie h sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, puis on complète par la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ ($\rightarrow \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$), par la symétrie de centre Ω ($\rightarrow \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, une période) et par les translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$.

2. Limites. Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\sin x} \rightarrow 1$ et $\cos x$ tend vers 0^+ à gauche, vers 0^- à droite : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} h(x) = -\infty$. Toutes les droites $x = \frac{k\pi}{2}$ sont asymptotes verticales.

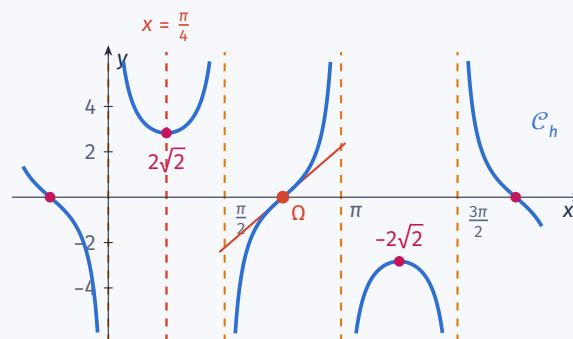
3. Variations. $h'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Or $1 + \sin x \cos x = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x \geq \frac{1}{2} > 0$, et $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$: h est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$; $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$ (tangente horizontale, minimum local), $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$h'(x)$	0	+	+
$h(x)$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty \rightarrow 0$

4. Concavité. $\left(\frac{1}{\sin x}\right)'' = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$ et $\left(\frac{1}{\cos x}\right)'' = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$: $h''(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (arc convexe, en « cuvette » de minimum $2\sqrt{2}$). Sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, h'' ne s'annule qu'en $\frac{3\pi}{4}$, en changeant de signe : Ω , centre de symétrie situé sur la courbe, est un **point d'inflexion**, de tangente $y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (car $h'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}/2}{1/4} = 2\sqrt{2}$).

5. Zéros. $h(x) = 0 \iff \sin x + \cos x = 0 \iff \tan x = -1 \iff x \in \frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$.



Remarque. Un axe $x = a$ et un centre $(c, 0)$ obligent la fonction à être périodique : si $f(2a - x) = f(x)$ et $f(2c - x) = -f(x)$, alors $f(x + 2(c - a)) = -f(x)$, puis $f(x + 4(c - a)) = f(x)$; ici $4\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$.

11

Équations et lectures graphiques

Méthode : Comment compter les solutions de $f(x) = m$

1. Écrire l'équation sous la forme $f(x) = m$ (on **isole le paramètre**). 2. Dresser le tableau de variations complet de f (limites, extremums). 3. Sur chaque intervalle où f est **strictement monotone**, l'équation a **au plus une** solution ; on lit sur la courbe (ou dans le tableau) si la droite horizontale $y = m$ coupe la courbe sur cet intervalle. 4. Récapituler dans un tableau selon m , sans oublier les valeurs « frontières » (extremums, limites).

Variante $f(x) = mx$: on fait tourner une droite autour de O ; si 0 est solution, on étudie $\frac{f(x)}{x} = m$ pour $x \neq 0$.

Exemple : avec le fil rouge $f(x) = x^3 - 3x^2$ (section 7) : figures (a) à (d)

(a) $f(x) = m$. D'après le tableau de la section 7, la droite $y = m$ coupe $\mathcal{C}_f$ (sur la figure (a), le nombre de points communs est écrit au bout de chaque droite) :

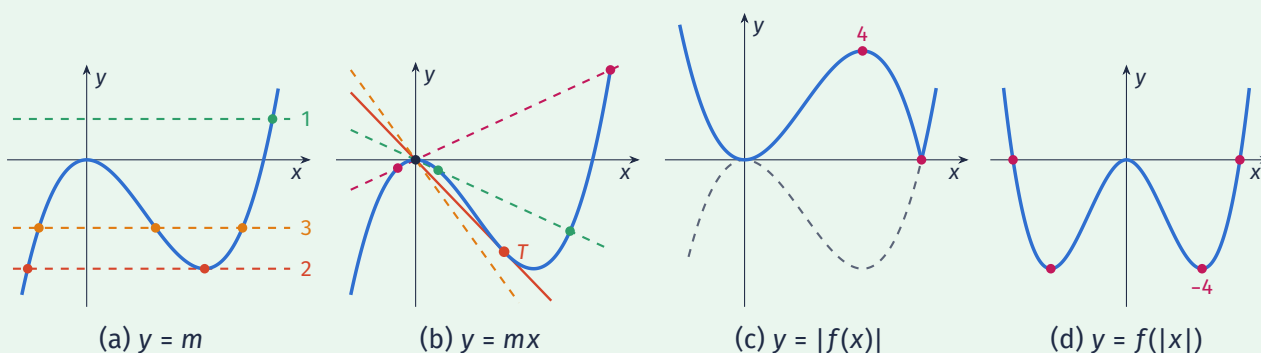
m	$m < -4$	$m = -4$	$-4 < m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
solutions	1	2 (-1 et 2)	3	2 (0 et 3)	1

Contrôle algébrique : $f(x) + 4 = (x+1)(x-2)^2$ et $f(x) = x^2(x-3)$.

(b) $f(x) = mx$. $x^3 - 3x^2 = mx \iff x(x^2 - 3x - m) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 3x - m = 0$ (discriminant $9 + 4m$). Si $m < -\frac{9}{4}$: $x = 0$ seulement ; si $m = -\frac{9}{4}$: 0 et $\frac{3}{2}$; si $-\frac{9}{4} < m < 0$ ou $m > 0$: trois solutions (le produit des racines vaut $-m \neq 0$) ; si $m = 0$: 0 et 3. **Lecture** : $y = 0$ est la tangente en O , et $y = -\frac{9}{4}x$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ issue de O , au point $T(\frac{3}{2}, -\frac{27}{8})$.

(c), (d) $|f|$ et $f(|x|)$. Pour $|f|$, on retourne la partie de $\mathcal{C}_f$ située sous (Ox) (ici sur $]-\infty, 3]$) : **point anguleux** en $(3, 0)$ (demi-tangentes de pentes ± 9), mais tangente horizontale en O (car $f'(0) = 0$). Pour $f(|x|) = |x|^3 - 3x^2$, fonction paire, on garde $x \geq 0$ et on symétrise par rapport à (Oy) : minimum -4 en ± 2 , et $f(|x|) = m$ a 4 solutions si $-4 < m < 0$.

Position de $\mathcal{C}_f$ et de la parabole $\mathcal{P}$: $y = x^2 - 3x$: $f(x) - (x^2 - 3x) = x(x-1)(x-3)$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ sur $]0, 1[\cup]3, +\infty[$, au-dessous sur $]-\infty, 0[\cup]1, 3[$; points communs $(0, 0)$, $(1, -2)$ et $(3, 0)$.

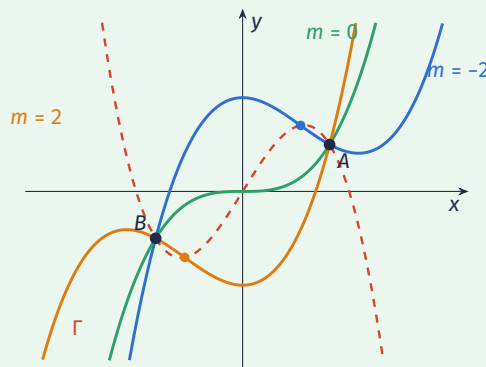


Avec φ (section 8) : sur $]0, +\infty[$, φ croît de $-\infty$ à $+\infty$: une solution de $\varphi(x) = m$ pour tout m ; sur $]-\infty, -2]$ et sur $[-2, 0]$, les valeurs sont $\leq -\frac{27}{4}$. Donc $\varphi(x) = m$ a **une** solution si $m > -\frac{27}{4}$, **deux** si $m = -\frac{27}{4}$, **trois** si $m < -\frac{27}{4}$.

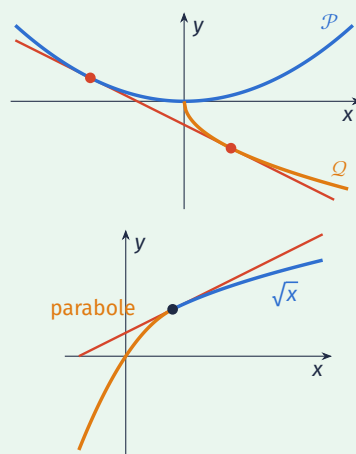
12 Pour aller plus loin

1. Une famille de courbes. Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $f_m(x) = x^3 + m(x^2 - 1)$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe. Points fixes (communs à toutes les $\mathcal{C}_m$) : $M(x, y) \in \mathcal{C}_m$ pour **tout** $m \iff y - x^3 = m(x^2 - 1)$ pour tout $m \iff x^2 - 1 = 0$ et $y = x^3$: ce sont $A(1, 1)$ et $B(-1, -1)$. **Méthode** : écrire $f_m(x) = U(x) + mV(x)$; les points fixes vérifient $V(x) = 0$ et $y = U(x)$. Par un point (x_0, y_0) avec $x_0 \neq \pm 1$ passe **une seule** courbe : celle de $m = \frac{y_0 - x_0^3}{x_0^2 - 1}$ (et par un autre point de la droite $x = 1$ que A , aucune).

Lieu des points d'inflexion : $f_m''(x) = 6x + 2m$ s'annule en changeant de signe en $x = -\frac{m}{3}$: $I_m\left(-\frac{m}{3}, \frac{2m^3}{27} - m\right)$. En éliminant $m = -3x$: $y = \frac{2(-3x)^3}{27} + 3x = 3x - 2x^3$. Quand m décrit $\mathbb{R}$, $x = -\frac{m}{3}$ décrit $\mathbb{R}$: le lieu est **toute** la courbe $\Gamma : y = 3x - 2x^3$.



2. Tangente commune à deux courbes. $\mathcal{P} : y = \frac{x^2}{8}$ et $\mathcal{Q} : y = -\sqrt{x}$. La tangente à $\mathcal{P}$ en a est $y = \frac{a}{4}x - \frac{a^2}{8}$; la tangente à $\mathcal{Q}$ en $b > 0$ est $y = -\frac{x}{2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{2}$. Elles sont **égales** $\iff$ mêmes coefficients : $\frac{a}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{b}}$ et $-\frac{a^2}{8} = \frac{\sqrt{b}}{2}$. La première donne $a = -\frac{2}{\sqrt{b}}$, puis $\frac{4}{8b} = \frac{\sqrt{b}}{2}$, soit $b\sqrt{b} = 1$: $b = 1$, $a = -2$. Unique tangente commune : $y = -\frac{x+1}{2}$, aux points $(-2, \frac{1}{2})$ et $(1, -1)$.



3. Un raccordement. On cherche a, b pour que $f(x) = ax^2 + bx$ si $x < 1$, $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 1$, soit **dérivable** en 1. Continuité : $a+b = 1$; dérivées à gauche et à droite égales : $2a+b = \frac{1}{2}$. Donc $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$: les deux arcs ont la même tangente $y = \frac{x+1}{2}$ en $(1, 1)$, et la courbe reste dessous, car $\frac{3x-x^2}{2} - \frac{x+1}{2} = -\frac{(x-1)^2}{2} \leq 0$ et $\sqrt{x} - \frac{x+1}{2} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2} \leq 0$ (raccord « lisse », sans point anguleux).

13 Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
« $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ en $+\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ a une asymptote $y = x + b$ »	il faut aussi $\lim [f(x) - x] = b$ réel : $w(x) = x - 3\sqrt{x} + 2$ a une branche parabolique (section 4)
« une courbe ne coupe jamais son asymptote »	f_1 coupe $y = x$ en $(2, 2)$ (section 3) ; $x + \frac{\sin x}{x}$ coupe $y = x$ une infinité de fois
« a est une valeur interdite, donc $x = a$ est asymptote »	il faut une limite infinie : $\frac{x^2-4}{x^2-x-2} \rightarrow \frac{4}{3}$ en 2 (section 2)

« $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc il y a une asymptote oblique »	ce peut être une branche parabolique : $\sqrt{x}$, x^2 , $x - 3\sqrt{x} + 2$
« branche parabolique de direction (Ox) , donc asymptote horizontale »	$\sqrt{x} \rightarrow +\infty$: aucune asymptote, seulement une direction
« en $-\infty$, $\sqrt{x^2 - 6x} \approx x - 3$ »	$\approx x - 3 = 3 - x$: d'où la pente -3 de (Δ_2) (section 9)
« la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) se lit sur le signe de $f(x)$ »	sur le signe de $f(x) - (ax + b)$
« $f''(a) = 0$, donc $(a, f(a))$ est un point d'inflexion »	il faut un changement de signe : $x^4 + x$ a $f''(0) = 0$ et reste convexe
« $f''(a)$ n'existe pas, donc pas d'inflexion en a »	$x x $ est concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$: 0 est un point d'inflexion
« $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $\mathbb{R}^*$ »	la convexité se dit sur un intervalle : $\frac{1}{x^2}$, tangente en 1 : $y = 3 - 2x$, qui passe au-dessus du point $(-1, 1)$
« une tangente d'inflexion est horizontale »	$\frac{16}{x^2+12}$ en $A(2, 1)$: pente $-\frac{1}{4}$ (section 5)
« $f'(a) = 0$, donc f a un extremum en a »	$\varphi'(1) = 0$ et φ croît : inflexion (section 8)
« un centre de symétrie est sur la courbe »	$2 + \frac{3}{x-1}$: centre $\Omega(1, 2) \notin \mathcal{C}_f$
« j'étudie sur D_E , j'ai fini »	il faut compléter la courbe (symétries, translations) et le dire
« f croît sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$: $f(x) = m$ a au plus une solution »	au plus une par intervalle : $x - \frac{1}{x} = 0$ a deux solutions, -1 et 1

14 Les astuces des concours

★ **Astuce de concours** : la division euclidienne donne asymptote et position

$\frac{2x^3 + 3x^2 - x}{x^2 + 1}$: on divise $2x^3 + 3x^2 - x$ par $x^2 + 1$: quotient $2x + 3$, reste $-3x - 3$: $f(x) = 2x + 3 - \frac{3(x+1)}{x^2+1}$. D'un coup : asymptote $y = 2x + 3$ en $\pm\infty$, et $\mathcal{C}_f$ au-dessus si $x < -1$, au-dessous si $x > -1$, point commun $(-1, 1)$.

★ **Astuce de concours** : $\sqrt{ax^2 + bx + c}$: forme canonique, puis conjugué

$\sqrt{9x^2 - 6x + 5} = \sqrt{(3x - 1)^2 + 4}$ « vaut presque » $|3x - 1|$: on devine les asymptotes $y = 3x - 1$ en $+\infty$ et $y = -3x + 1$ en $-\infty$, puis on le prouve avec le conjugué :

$$\sqrt{(3x - 1)^2 + 4} - |3x - 1| = \frac{4}{\sqrt{(3x - 1)^2 + 4} + |3x - 1|} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0,$$

et ce quotient est positif : la courbe est **au-dessus** des deux asymptotes. En général, si $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ en $\pm\infty$.

★ **Astuce de concours : parité et asymptotes : moitié moins de calculs**

Si f est **impaire** et $y = ax + b$ est asymptote en $+\infty$, alors $y = ax - b$ est asymptote en $-\infty$: $f(x) - (ax - b) = -[f(-x) - (a(-x) + b)] \rightarrow 0$. Si f est **paire** : $y = -ax + b$ en $-\infty$. Plus généralement, une symétrie d'axe ou de centre transporte asymptotes, tangentes, extremums et inflexions : on ne les calcule que d'un côté.

★ **Astuce de concours : séparer le paramètre, puis lire la courbe**

Combien de solutions réelles a $x^3 - mx^2 + 32 = 0$? 0 n'est jamais solution, donc l'équation équivaut à $m = x + \frac{32}{x^2} = g(x)$. Or $g'(x) = 1 - \frac{64}{x^3} = \frac{x^3 - 64}{x^3}$: g croît de $-\infty$ à $+\infty$ sur $]-\infty, 0[$, décroît de $+\infty$ à 6 sur $]0, 4]$, croît de 6 à $+\infty$ sur $[4, +\infty[$. Lecture : **une** solution si $m < 6$, **deux** si $m = 6$ (car $x^3 - 6x^2 + 32 = (x - 4)^2(x + 2)$), **trois** si $m > 6$.

★ **Astuce de concours : concavité + tangente = inégalité gratuite**

$x \mapsto \sqrt{1+x}$ est concave sur $[-1, +\infty[$ (dérivée seconde $-\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} < 0$) : sa courbe est sous sa tangente en 0, d'où $\boxed{\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}}$ pour tout $x \geq -1$. De même, la courbe convexe de $f(x) = x^3 - 3x^2$ sur $[1, +\infty[$ donne $x^3 - 3x^2 \geq -3x + 1$ pour $x \geq 1$ (section 7).

★ **Astuce de concours : lire les paramètres sur la courbe**

Une courbe a pour asymptotes $x = 1$ et $y = 2x + 1$ et passe par O ; on cherche $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-1}$. La forme réduite **contient tout** : $f(x) = 2x + 1 + \frac{k}{x-1}$ (asymptote oblique et verticale lues directement), puis $f(0) = 1 - k = 0$, d'où $k = 1$ et $\boxed{f(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}}$ (car $(2x+1)(x-1)+1 = 2x^2 - x$). Ici $k > 0$: courbe au-dessus de l'asymptote oblique pour $x > 1$, au-dessous pour $x < 1$; centre de symétrie $(1, 3)$, intersection des asymptotes.

★ **Astuce de concours : racine multiple = contact**

Si $P(x) - (\alpha x + \beta)$ a une racine **double** x_0 , la droite $y = \alpha x + \beta$ est tangente à la courbe de P en x_0 ; une racine **triple** donne une tangente d'inflexion. Exemples : $x^2(x-3)$ (tangente (Ox) en O) ; $x^3 - 3x^2 - (-3x + 1) = (x-1)^3$; $\frac{(x-1)^3}{x^2}$ en $J(1, 0)$.

15

L'essentiel du chapitre en une page

Le plan d'étude

$D_f \rightarrow$ réduction (parité, période, axe, centre) $\rightarrow$ limites aux bornes $\rightarrow$ dérivabilité aux points délicats $\rightarrow f'$ et tableau $\rightarrow$ branches infinies $\rightarrow f''$ et concavité $\rightarrow$ points remarquables $\rightarrow$ tracé $\rightarrow$ compléter.

Taux $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \rightarrow \ell$: tangente ; $\rightarrow \pm\infty$: demi-tangente verticale ; limites à gauche et à droite différentes : point anguleux.

Asymptotes

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$: $x = a$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$: $y = b$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$: (Δ) : $y = ax + b$.

$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ (de même en $-\infty$).

$f(x) = ax + b + g(x)$ avec $g \rightarrow 0$: asymptote directe (division euclidienne).

Position : **signe de** $f(x) - (ax + b)$; une courbe peut couper son asymptote.

Branches paraboliques ($f \rightarrow \pm\infty$)

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$: direction (Oy) ; $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$: direction (Ox) ;

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$: direction $y = ax$.

Racines carrées

$\sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ ($a > 0$) ; en $-\infty$:

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$ (quantité conjuguée).

Équations et lectures

$f(x) = m$: tableau complet, **au plus une** solution par intervalle de stricte monotonie, lecture de la droite $y = m$.

$f(x) = mx$: droites issues de O (si 0 est solution : $\frac{f(x)}{x} = m$).

$|f|$: on retourne ce qui est sous (Ox) ; $f(|x|)$: on garde $x \geq 0$, symétrie d'axe (Oy) .

Deux courbes : signe de $f(x) - g(x)$.

Concavité

Convexe sur I : au-dessus de ses tangentes, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$; concave : au-dessous. $f'' \geq 0$ sur $I \Rightarrow$ convexe ; $f'' \leq 0$ sur $I \Rightarrow$ concave (sur un **intervalle**).

Inflexion : f'' s'annule **en changeant de signe** ; la tangente traverse la courbe ; $f(x) - T(x)$ contient souvent $(x - x_0)^3$. $f''(x_0) = 0$ seul ne suffit pas (x^4).

Symétries et réduction

Axe $x = a$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$; $f'(2a - x) = -f'(x)$.

Centre $\Omega(a, b)$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$; $f'(2a - x) = f'(x)$, $f''(2a - x) = -f''(x)$: centre sur la courbe = inflexion.

Avec $x = a + t$: axe $\Leftrightarrow f(a + t)$ paire ; centre $\Leftrightarrow f(a + t) - b$ impaire.

paire, impaire	$D_f \cap [0, +\infty[$
axe $x = a$, centre $\Omega(a, b)$	$D_f \cap [a, +\infty[$
période T	intervalle de longueur T
période T et parité	$\left[0, \frac{T}{2}\right]$

Polynôme de degré n : axe ou centre d'abscisse $-\frac{c_{n-1}}{n c_n}$.

Trigonométrie

Période, parité, puis axes et centres : étude sur $[0, \pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou un quart de période. Axe $x = a$ et centre $(c, 0)$: période $4|c - a|$.

À retenir pour les concours

Division euclidienne : asymptote **et** position d'un coup.

Racine double de $f(x) - (ax + \beta)$: tangente ; racine triple : tangente d'inflexion.

Séparer le paramètre :

$x^3 - mx^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow m = x + \frac{32}{x^2}$.

Concavité + tangente = inégalité : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Famille $f_m = U + mV$: points fixes $V(x) = 0$, $y = U(x)$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours : D_f domaine de f ; $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé ; asymptote (Δ) : $y = ax + b$; f'' dérivée seconde. Un nombre de solutions se lit sur le tableau de variations et sur la courbe (au plus une solution sur chaque intervalle où f est strictement monotone).

16

Niveau I • Bases

Exercice 1 Asymptotes parallèles aux axes ★

corrigé p. 39

Déterminer D_f , les limites aux bornes de D_f , les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ parallèles aux axes et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote horizontale : a) $f(x) = \frac{4x+1}{2-x}$; b) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-4}$; c) $f(x) = 1 - \frac{4}{\sqrt{x+2}}$; d) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ (la droite $x = 3$ est-elle asymptote ?).

Exercice 2 Asymptotes obliques : premiers pas ★

corrigé p. 39

1. Soit $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x-1}$. Vérifier que $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x-1}$; en déduire que (Δ) : $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ et étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) .
2. Mêmes questions pour $g(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2+1}$ et (Δ') : $y = x + 1$. Une courbe peut-elle couper son asymptote ?
3. Soit $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x+1}$. Calculer $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - ax)$; conclure ; position de $\mathcal{C}_h$ et de son asymptote.

Exercice 3 Asymptote ou branche parabolique ? ★

corrigé p. 39

Nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (asymptote, ou branche parabolique dont on précisera la direction) : a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$; b) $f(x) = \sqrt{x+3}$; c) $f(x) = 2x + \sqrt{x}$; d) $f(x) = 3x - \sqrt{x^2+1}$ (étudier aussi la branche en $-\infty$).

Exercice 4 Concavité de fonctions polynômes ★

corrigé p. 40

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion : a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$ (donner aussi la tangente T au point d'inflexion I et le signe de $f(x) - (12x - 13)$: que fait T en I ?) ; b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1$; c) $f(x) = x^4 + 2x + 1$ (on a $f''(0) = 0$: y a-t-il inflexion en 0 ?).

Exercice 5 Axes et centres de symétrie ★

corrigé p. 40

1. Soit $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+5}$. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$ et montrer que la droite $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. 2. Soit $g(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$. Écrire $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$; montrer que $\Omega(-2, -3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$. 3. Soit $h(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$. Déterminer le point d'inflexion I de $\mathcal{C}_h$ et montrer que c'est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$. 4. Pour chaque fonction, sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ? Comment obtient-on ensuite toute la courbe ?

Exercice 6 Lire un tableau de variations ★

corrigé p. 40

Une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a le tableau de variations ci-contre ; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -5$. 1. Asymptotes de $\mathcal{C}_f$? Extremums relatifs de f et signe de $f'(x)$? 2. Nombre de solutions de $f(x) = 0$, de $f(x) = 2$, de $f(x) = -3$; plus généralement, de $f(x) = m$ selon le réel m . 3. Tracer une allure possible de $\mathcal{C}_f$.

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$f(x)$		3		$+\infty$	$+\infty$
	1		$-\infty$	-1	

Exercice 7 Une fonction homographique de A à Z ★

corrigé p. 40

Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$. 1. D_f , limites aux bornes, asymptotes ; vérifier que $f(x) = 3 - \frac{1}{x+1}$ et en déduire un centre de symétrie Ω de $\mathcal{C}_f$. 2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; tableau de variations ; concavité. 3. Points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes ; tangente T en $A(0, 2)$; signe de $f(x) - (x + 2)$, à interpréter avec la concavité. 4. Tracer $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes et T .

Exercice 8 Les courbes de $|f|$ et de $f(|x|)$ ★

corrigé p. 41

Soit $f(x) = x^2 - 4x - 12$, $g(x) = |f(x)|$ et $h(x) = f(|x|) = x^2 - 4|x| - 12$. 1. Factoriser $f(x)$; sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$, tableau de variations de f . 2. Comment obtenir $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ à partir de $\mathcal{C}_f$? Tracer les trois courbes ; points anguleux de $\mathcal{C}_g$ et de $\mathcal{C}_h$? 3. Selon le réel m , nombre de solutions de $|f(x)| = m$, puis de $f(|x|) = m$.

17

Niveau 2 · Bac**Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : une fonction rationnelle ★★**

corrigé p. 41

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. D_f et limites de f aux bornes de D_f ; interprétation graphique.
2. a) Déterminer des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ pour $x \neq 1$. b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ) en $\pm\infty$; position relative de $\mathcal{C}_f$ et (Δ) .
3. Montrer que $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; tableau de variations de f .
4. Montrer que $\Omega(1, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Calculer $f''(x)$; concavité de $\mathcal{C}_f$.
5. Tangente T à $\mathcal{C}_f$ en $A(3, 6)$. $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Tracer (Δ) , T et $\mathcal{C}_f$. 6. Selon le réel m , nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : une fonction irrationnelle ★★

corrigé p. 42

Soit $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Déterminer D_f . Dérivabilité de f à droite en 2 et à gauche en -2 ; interprétation graphique.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (expression conjuguée) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Montrer que $(\Delta) : y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) et à la droite $y = 1$.
3. Calculer $f'(x)$; montrer que $f'(x) < 0$ sur $]2, +\infty[$ et $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[$; tableau de variations.
4. Montrer que $f''(x) = \frac{4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}$; concavité. Tracer $\mathcal{C}_f$. 5. Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : une fonction trigonométrique ★★

corrigé p. 42

Soit $f(x) = \cos 3x - 3 \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. a) Montrer que $f(x) = 4 \cos^3 x - 6 \cos x$. b) Montrer que f est paire, 2π -périodique, et que $\Omega\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; comment compléter la courbe ?
2. Montrer que $f'(x) = -6 \sin x \cos 2x$; tableau de variations sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis sur $[0, \pi]$.
3. Résoudre $f(x) = 0$. Vérifier que $f''(x) = -6 \cos x (6 \cos^2 x - 5)$; montrer que Ω est un point d'inflexion ; tangente T en Ω .
4. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, 2\pi]$. Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$ dans $[0, 2\pi[$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : concavité et nombre de solutions ★★

corrigé p. 43

Soit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$; branches infinies de $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que $f'(x) = 4(x-2)^2(x+1)$; tableau de variations. On a $f'(2) = 0$: f a-t-elle un extremum en 2 ?
3. Signe de $f''(x)$; montrer que $\mathcal{C}_f$ a deux points d'inflexion I (d'abscisse 0) et J ; tangentes en I et en J .
4. a) Vérifier que $f(x) = (x-2)^3(x+2)$ et que $f(x) - (16x - 16) = x^3(x-4)$. b) En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente T en I .
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T . Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$, puis de $|f(x)| = m$ (tracer la courbe de $|f|$).

Exercice 13 Asymptotes obliques : la méthode générale ★★

corrigé p. 43

1. Soit $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x-6}{x^2-4}$. Calculer $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$ en $\pm\infty$; position de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote, points communs. 2. Soit $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x}}$. Déterminer D_g et les asymptotes de $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (écrire $\sqrt{x^2+4x} = |x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}$). Vérifier que $x^4 - (x-2)^2(x^2+4x) = 4x(3x-4)$; en déduire la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à chaque asymptote. 3. Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $f_m(x) = \frac{x^2+mx+1}{x-2}$. Écrire $f_m(x) = x + \alpha + \frac{\beta}{x-2}$. Pour quel m l'asymptote oblique passe-t-elle par $A(0, 3)$? Que se passe-t-il pour $m = -\frac{5}{2}$?

Exercice 14 Inflexion et tangente qui traverse ★★

corrigé p. 43

1. Soit $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$. a) D_f , limites, asymptotes ; variations de f . b) Montrer que $f''(x) = \frac{2(x-6)}{x^4}$; concavité, point d'inflexion I . c) Tangente T en I ; vérifier que $f(x) - \frac{18-x}{108} = \frac{(x-6)^3}{108x^2}$ et conclure.
2. Déterminer a et b pour que la courbe de $g(x) = x^3+ax^2+bx$ admette $I(1, 2)$ pour point d'inflexion. Montrer qu'alors g est strictement croissante et que la tangente en I traverse la courbe.

Exercice 15 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 44

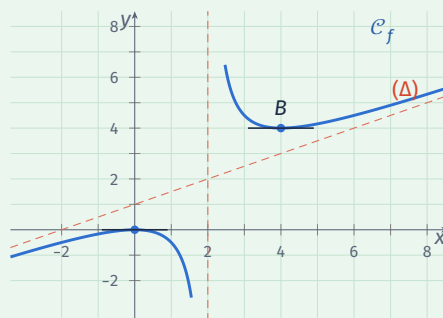
- Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple (à partir de b), f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- a) Si f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$, alors $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote de coefficient directeur 2.
 - b) Si $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse a , alors f' admet un extremum local en a .
 - c) Si $f''(x) > 0$ pour tout x , alors, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ a au plus deux solutions.
 - d) Si $\mathcal{C}_f$ est convexe et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - e) Si $\mathcal{C}_f$ est convexe, alors f

admet un minimum. f) Si $f'(a) = f''(a) = 0$, alors f n'a pas d'extremum en a . g) Si f est impaire et $\mathcal{C}_f$ convexe, alors f est linéaire ($f(x) = kx$).

Exercice 16 Lire une courbe ★★

corrigé p. 44

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre est celle d'une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$; les droites $x = 2$ et (Δ) (en pointillés) sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$, qui a des tangentes horizontales en O et en $B(4, 4)$. 1. Lire $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, une équation de (Δ) , $f(0)$, $f'(0)$, $f'(4)$; tableau de variations. 2. En déduire a , b , c ; vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{2x-4}$ et $f'(4) = 0$. 3. Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$. 4. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, $f(x) \leq \frac{x}{2} + 1$. Centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$?



18

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 La racine d'un quotient ★★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$. 1. Montrer que $D_f =]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$; dérivabilité de f à gauche en 0; limite en 2^+ . 2. Montrer que $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. 3. Vérifier que $f(x)^2 - (x+1)^2 = \frac{3x+2}{x-2}$; en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ et (Δ) . 4. Montrer que $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ pour $x \in D_f \setminus \{0\}$; tableau de variations; tracer $\mathcal{C}_f$. Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 18 Sinus et racine carrée ★★★

corrigé p. 45

Soit $f(x) = \sin x \sqrt{1 + \cos x}$. 1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π -périodique; montrer que $\Omega(\pi, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$; intervalle d'étude. 2. Montrer que f est dérivable en π et que $f'(\pi) = 0$, puis que $f'(x) = \frac{(3 \cos x - 1)\sqrt{1 + \cos x}}{2}$ si $\cos x \neq -1$; variations de f sur $[0, \pi]$ (on note $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ le réel tel que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$). 3. Montrer que $f''(x) = \frac{-\sin x (9 \cos x + 5)}{4\sqrt{1 + \cos x}}$ sur $]-\pi, \pi[$; concavité sur $[0, \pi]$, points d'inflexion; f a-t-elle un extremum en π ? 4. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, 3\pi]$; selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$ dans $]-\pi, \pi]$.

Exercice 19 Raccorder deux arcs ★★★

corrigé p. 45

Soit a, c deux réels et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$ si $x \leq 1$, $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ si $x > 1$. 1. Déterminer a et c pour que f soit continue et dérivable en 1 (on garde ces valeurs). 2. Branches infinies de $\mathcal{C}_f$; tableau de variations. 3. Concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. f est-elle deux fois dérivable en 1? En comparant $\mathcal{C}_f$ à sa tangente en $A(1, 1)$, montrer que A est un point d'inflexion. 4. Tracer $\mathcal{C}_f$; selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 20 Un point de rebroussement ★★★

corrigé p. 46

Soit $f(x) = x\sqrt{|x-2|}$ ($x \in \mathbb{R}$). 1. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue; dérivabilité de f à droite et à gauche en 2; interprétation graphique. 2. Branches infinies de $\mathcal{C}_f$; $f'(x)$ sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$; tableau de variations. 3. Montrer que $f''(x) = \frac{3x-8}{4|x-2|\sqrt{|x-2|}}$ ($x \neq 2$); concavité, point d'inflexion; tangente en O . 4. Tracer $\mathcal{C}_f$; selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 21 Une parabole asymptote ★★★

corrigé p. 46

Soit $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 4$. 1. Vérifier que $f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}$. Limites, asymptote verticale, branches infinies de $\mathcal{C}_f$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 + 2x + 4)] = 0$ (on dit que $\mathcal{P}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$) ; position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{P}$. 2. Montrer que $f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$ et $f''(x) = \frac{2x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3}$; variations, concavité ; que se passe-t-il en O ? 3. Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_f$; selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 22 Une racine et des paraboles ★★★

corrigé p. 47

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ et, pour $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_k$ la parabole d'équation $y = \frac{x^2+k}{4}$. 1. Déterminer k pour que $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{C}$ aient la même tangente en un point d'abscisse $x_0 > 0$. 2. Avec $u = \sqrt{x}$, montrer que $\frac{x^2+3}{4} - \sqrt{x} = \frac{(u-1)^2(u^2+2u+3)}{4}$; position de $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{C}$. 3. Montrer que les points communs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}_k$ correspondent aux solutions $u \geq 0$ de $h(u) = k$, où $h(u) = 4u - u^4$. Étudier h sur $[0, +\infty[$; selon k , nombre de points communs. Figure ($k = 3, 0, -4$).

Exercice 23 Une fonction trigonométrique à asymptotes ★★★

corrigé p. 47

Soit $f(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x}$. 1. D_f ; parité, période ; montrer que $\Omega(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$; intervalle d'étude. 2. Montrer que $f'(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$; variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; asymptotes. 3. Montrer que $f''(x) = \frac{\sin^2 x(2+\cos^2 x)}{\cos^3 x}$; concavité. On a $f''(0) = 0$: y a-t-il inflexion en 0 ? 4. Montrer que $|f(x)| \geq 2$; résoudre $f(x) = \frac{5}{2}$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, 2\pi]$; selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

19

Niveau 4 · Concours**Exercice 24 Le défi de la couverture ★★★**

corrigé p. 47

Soit p, q deux réels et $f(x) = x^3 + px + q$; on cherche le nombre de solutions réelles de (E) : $x^3 + px + q = 0$.

- Montrer que $I(0, q)$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. 2. Si $p \geq 0$, montrer que (E) a une unique solution.
- On suppose $p < 0$ et on pose $s = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. a) Tableau de variations de f ; exprimer $f(-s)$ et $f(s)$ en fonction de q et s . b) Montrer que $f(-s)f(s) = \frac{4p^3+27q^2}{27}$.
- En déduire que (E) a trois solutions si $4p^3 + 27q^2 < 0$, deux si $4p^3 + 27q^2 = 0$ et $p \neq 0$, une seule si $4p^3 + 27q^2 > 0$.
- Applications. a) Nombre de solutions de $x^3 - 6x + 4 = 0$ et de $x^3 + x - 10 = 0$; les résoudre. b) Selon m , nombre de solutions de $x^3 - 27x + m = 0$; résoudre l'équation pour $m = 54$. c) En posant $x = t - 1$, nombre de solutions de $x^3 + 3x^2 - 3x - 7 = 0$.

Exercice 25 Combien de normales ? ★★★

corrigé p. 48

Soit $\mathcal{P}$ la parabole $y = x^2$; la normale à $\mathcal{P}$ en $M(t, t^2)$ est la droite passant par M et perpendiculaire à la tangente en M . 1. Montrer que la normale en M passe par $A(a, b)$ si et seulement si $2t^3 + (1 - 2b)t - a = 0$. 2. À l'aide de l'exercice 24, montrer que par A passent trois normales à $\mathcal{P}$ si $27a^2 < 2(2b - 1)^3$, deux si $27a^2 = 2(2b - 1)^3$ et $A \neq (0, \frac{1}{2})$, une seule sinon. 3. Combien de normales passent par $A(0, 3)$, par $B(4, \frac{7}{2})$, par $C(1, 1)$? Les déterminer pour B .

Exercice 26 Une famille de courbes ★★★★★

corrigé p. 48

Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $f_m(x) = \frac{x^2+mx-m}{x+1}$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe. 1. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un même point A et que deux courbes distinctes n'ont que A en commun. 2. Vérifier que $f_m(x) = x + m - 1 + \frac{1-2m}{x+1}$. Cas $m = \frac{1}{2}$? Pour $m \neq \frac{1}{2}$: asymptotes et centre de symétrie Ω_m de $\mathcal{C}_m$; ensemble des points Ω_m . 3. Montrer que f_m admet des extremums si et seulement si $m < \frac{1}{2}$. 4. Montrer que l'ensemble des points extremums des $\mathcal{C}_m$ est la parabole $\Gamma : y = x - \frac{x^2}{2}$ privée d'un point. Quelle courbe $\mathcal{C}_m$ a une tangente horizontale en A ? Tracer Γ , $\mathcal{C}_{-4}$ et $\mathcal{C}_{-3/2}$.

Exercice 27 Tangentes communes à deux paraboles ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $\mathcal{P}_1 : y = x^2$ et, pour p, q réels, $\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + px + q$. 1. Montrer que la droite $D : y = \alpha x + \beta$ est tangente à $\mathcal{P}_1$ si et seulement si $\beta = -\frac{\alpha^2}{4}$, et tangente à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $(\alpha - p)^2 = 4(\beta - q)$. 2. En déduire que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont deux tangentes communes si $p^2 + 8q < 0$, une si $p^2 + 8q = 0$, aucune si $p^2 + 8q > 0$; interpréter avec la position relative de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. 3. Exemple : $\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + 2x - 5$. Tangentes communes et points de contact ; montrer que ces quatre points forment un parallélogramme de centre $\Omega(\frac{1}{2}, -2)$, centre de symétrie de la figure formée par $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 28 Une équation réciproque ★★★★★

corrigé p. 49

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $(E_m) : x^4 - 2x^3 + mx^2 - 2x + 1 = 0$. 1. Montrer que 0 n'est pas solution et que, pour $x \neq 0$, $(E_m) \iff t^2 - 2t + m - 2 = 0$, où $t = x + \frac{1}{x}$. 2. Étudier $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; selon le réel t , combien de réels x vérifient $x + \frac{1}{x} = t$? 3. Étudier $h(t) = -t^2 + 2t + 2$ sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, +\infty[$. 4. En déduire, selon m , le nombre de solutions de (E_m) . Résoudre (E_{-6}) et (E_2) .

Exercice 29 Le couloir ★★★★★

corrigé p. 49

Deux couloirs, de largeurs $3\sqrt{3}$ et 1, se coupent à angle droit. Une barre rigide, glissée à plat sur le sol, touche le coin intérieur K et fait un angle $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ avec les murs du couloir de largeur $3\sqrt{3}$; sa plus grande longueur possible dans cette position (d'un mur extérieur à l'autre) est $L(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{3\sqrt{3}}{\sin \theta}$. 1. Justifier cette formule (figure) ; limites de L en 0^+ et en $(\frac{\pi}{2})^-$. 2. Montrer que $L'(\theta) = \frac{\sin^3 \theta - 3\sqrt{3} \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$; étudier son signe (comparer $\tan \theta$ à $\sqrt{3}$) ; variations et minimum de L . 3. Quelle est la plus longue barre qui peut passer d'un couloir à l'autre ? Montrer que L est convexe.

Exercice 30 La bitangente d'une quartique ★★★★★

corrigé p. 49

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$. 1. Vérifier que $f(x) - (2x - 3) = (x^2 - x - 2)^2$; en déduire que la droite $D : y = 2x - 3$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ en deux points (on dit que D est une *bitangente*) et que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D . 2. Selon le réel m , nombre de solutions de $f(x) = 2x + m$. 3. Cas général. Soit $g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. a) Montrer que $\mathcal{C}_g$ a deux points d'inflexion si et seulement si $3a^2 > 8b$. b) Montrer qu'il existe des réels U, V, α, β uniques tels que $g(x) - (\alpha x + \beta) = (x^2 + Ux + V)^2$ pour tout x . c) En déduire que $\mathcal{C}_g$ admet une bitangente si et seulement si elle a deux points d'inflexion.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

20 Branches infinies

Si $\lim f = \pm\infty$ en $\pm\infty$, on calcule $\lim \frac{f(x)}{x}$, puis, si elle vaut un réel $a \neq 0$, $\lim (f(x) - ax)$ (tableau de décision). La **position** de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une asymptote $(\Delta) : y = ax + b$ se lit sur le **signe** de $f(x) - (ax + b)$.

Exercice 31 Une asymptote de chaque côté ★

corrigé p. 50

Pour chaque fonction : domaine, limites aux bornes, asymptotes ; position de la courbe par rapport à chaque asymptote horizontale, au voisinage de l'infini concerné.

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{3|x| + 2}{x - 1} \quad \text{b) } f_2(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x + 2} \quad \text{c) } f_3(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} \text{ (conjugué)}$$

Exercice 32 Asymptotes verticales et trigonométrie ★

corrigé p. 50

Déterminer les asymptotes verticales (limites à gauche et à droite) de la courbe de :

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{1}{1 - 2\cos x} \text{ sur }]-\pi, \pi] ; \quad \text{b) } f_2(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} \text{ sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\text{ (écrire } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})) ;$$

$$\text{c) } f_3(x) = x \tan x \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \quad \text{d) } f_4(x) = \frac{1}{x^2(1 - \cos \frac{1}{x})} \text{ sur }]\frac{1}{2\pi}, +\infty[: \text{déterminer aussi l'asymptote}$$

horizontale et la position de la courbe par rapport à elle (on rappelle que $1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$ et que $|\sin t| < |t|$ pour $t \neq 0$).

Exercice 33 Asymptote ou branche parabolique ? ★★

corrigé p. 51

Étudier les branches infinies et préciser leur nature (asymptote, ou branche parabolique et sa direction).

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}, \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty ; \text{ montrer que, pour } x > 0, f_1(x) - x = \frac{1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}(x^2 + 1 + x\sqrt{x^2 + 3})}$$

et en déduire les positions de $\mathcal{C}_{f_1}$ et de ses asymptotes.

$$\text{b) } f_2(x) = \sqrt{x} + \sin x, \text{ en } +\infty \text{ (encadrer } \sin x \text{)}.$$

$$\text{c) } f_3(x) = \frac{x^2 + 3}{x + |x - 2|} : \text{justifier que } f_3 \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \text{ puis étudier ses branches en } +\infty \text{ et en } -\infty.$$

Exercice 34 Asymptotes et paramètre ★★

corrigé p. 51

Soit $m > 0$ et $f_m(x) = \frac{x^2 + m|x|}{x+1}$, de courbe $\mathcal{C}_m$.

1. Montrer que $f_m(x) = x + m - 1 + \frac{1-m}{x+1}$ pour $x \geq 0$, et $f_m(x) = x - m - 1 + \frac{m+1}{x+1}$ pour $x < 0$, $x \neq -1$.
2. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_m$: une verticale et deux obliques (Δ_1) en $+\infty$ et (Δ_2) en $-\infty$. Que remarque-t-on ?
3. Étudier la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à (Δ_1) (selon m) et à (Δ_2) . Que se passe-t-il pour $m = 1$?
4. Calculer la distance entre les droites (Δ_1) et (Δ_2) . Pour quelle valeur de m vaut-elle 2 ?

Exercice 35 La racine d'un quotient ★★★

corrigé p. 52

Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x}}$.

1. Déterminer D_f (factoriser $x^3 + 1$) et vérifier que $f(x)^2 = x^2 + \frac{1}{x}$ pour $x \in D_f$.
2. Étudier la limite de f en 0. Montrer que f est décroissante sur $] -\infty, -1]$.
3. a) Montrer que $f(x) - x = \frac{1}{x(f(x) + x)}$ pour $x > 0$. En déduire une asymptote en $+\infty$, la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à elle et l'encadrement $0 < f(x) - x < \frac{1}{2x^2}$.
b) De même, montrer que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ l'asymptote $y = -x$ et qu'elle est au-dessous.
4. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et interpréter. Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 36 Partie entière et asymptote ★★★

corrigé p. 52

Soit $f(x) = \frac{E(x^2)}{x}$ pour $x \neq 0$ (E désigne la partie entière).

1. Montrer que f est impaire, que $f(x) = 0$ pour $0 < |x| < 1$, et que $f(x) = \frac{n}{x}$ pour $\sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. Montrer que $x - \frac{1}{x} < f(x) \leq x$ pour tout $x > 0$. En déduire que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, puis en $-\infty$.
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) et les points communs. La courbe a-t-elle une asymptote verticale ?
4. Montrer que f n'est pas continue en $\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et calculer le « saut » de la courbe en ce point. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 3]$.

21 Concavité et inflexion

Sur un intervalle I : si $f'' \geq 0$, $\mathcal{C}_f$ est **convexe** (au-dessus de ses tangentes) ; si $f'' \leq 0$, elle est **concave**. Il y a **inflexion** en $A(a, f(a))$ lorsque f'' s'annule en a **en changeant de signe** ; la tangente en A traverse alors la courbe.

Exercice 37 Signe de f'' et concavité ★

corrigé p. 53

Pour chaque fonction, calculer $f''(x)$, étudier son signe, en déduire les intervalles où la courbe est convexe ou concave et les points d'inflexion. Que se passe-t-il en 0 pour f_2 , en -2 pour f_3 ?

a) $f_1(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$ b) $f_2(x) = 3x^5 + 5x^4$ c) $f_3(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$ d) $f_4(x) = x + \cos x$ sur $[0, 2\pi]$

Exercice 38 Une sinusoïde et ses inflexions ★

corrigé p. 53

Soit $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$, étudiée sur $[0, \pi]$.

1. Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ et que $f'' = -4f$.
2. En déduire que les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont exactement ses points d'intersection avec l'axe (Ox) ; les déterminer, et préciser la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, \pi]$.
3. Déterminer la tangente (T) en $A\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$. Avec $t = x - \frac{\pi}{8}$, montrer que $f(x) - (\text{ordonnée sur } (T)) = \sqrt{2}(\sin 2t - 2t)$ et retrouver que (T) traverse $\mathcal{C}_f$ en A .

Exercice 39 Quatre inflexions par période ★★

corrigé p. 54

Soit $f(x) = \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

1. Montrer que f est impaire et 2π -périodique, puis que $f''(x) = -\sin x(1 + 2\cos x)$.
2. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\pi, \pi]$; montrer qu'il y a quatre points d'inflexion par période et donner leurs coordonnées.
3. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en O et en $B(\pi, 0)$.
4. Montrer que $f'(x) = \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$. En déduire la plus grande et la plus petite pente des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et les points où elles sont atteintes ; que remarque-t-on ? Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 40 Concavité : trois familles ★★

corrigé p. 54

1. Pour un entier $n \geq 2$, soit $p_n(x) = x^n$. Montrer que la courbe de p_n admet un point d'inflexion si et seulement si n est impair. Pour $n = 4$, a-t-on $p_4''(0) = 0$? Conclure.
2. Pour un réel $b \neq 0$, soit $r_b(x) = \sqrt{x^2 + b}$. Calculer $r_b''(x)$ et étudier la concavité de la courbe selon le signe de b .
3. Montrer que la dérivée seconde de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $2 \tan x (1 + \tan^2 x)$. En déduire la concavité de la courbe de $\tan$, son point d'inflexion et la position de la courbe par rapport à la tangente en ce point.

Exercice 41 Concavité d'une composée ★★★

corrigé p. 55

1. Soit u deux fois dérivable sur un intervalle I , et g deux fois dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$. Montrer que $(g \circ u)'' = u'^2 \times (g'' \circ u) + u'' \times (g' \circ u)$.
2. En déduire : a) si $u > 0$ et si $\mathcal{C}_u$ est concave sur I , la courbe de $\frac{1}{u}$ est convexe ; b) si $u > 0$ et si $\mathcal{C}_u$ est concave, celle de $\sqrt{u}$ est concave ; c) si $u \geq 0$ et si $\mathcal{C}_u$ est convexe, celle de u^2 est convexe.
3. Sans calculer de dérivée seconde, étudier la concavité des courbes de $x \mapsto \frac{1}{3+2x-x^2}$ sur $] -1, 3[$, de $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et de $x \mapsto \sqrt{6x - x^2 - 8}$ sur $]2, 4[$.
4. La fonction $u : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est positive et convexe (exercice précédent). Montrer que la courbe de $\frac{1}{u}$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ (points d'inflexion ?). Pourquoi cela ne contredit-il pas 2.a) ?

Exercice 42 Une famille de courbes et leurs inflexions ★★★

corrigé p. 55

Pour tout réel m , soit $f_m(x) = x^2 + m \cos x$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe.

1. Montrer que $\mathcal{C}_m$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $|m| \leq 2$ (on admet : convexe sur $\mathbb{R} \iff f_m'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$).
2. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_4$ sur $[-\pi, \pi]$ et donner ses points d'inflexion.
3. Soit $|m| > 2$ et x_0 un réel tel que $\cos x_0 = \frac{2}{m}$ (il en existe, car $|\frac{2}{m}| < 1$). Montrer que le point de $\mathcal{C}_m$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion et qu'il est sur la parabole $(P) : y = x^2 + 2$. Réciproquement, quels points de (P) sont points d'inflexion d'au moins une courbe $\mathcal{C}_m$?
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par des points fixes que l'on précisera. Tracer $\mathcal{C}_4$, (P) et la parabole $y = x^2$.

22

Symétries et réduction

Si, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$: la droite $x = a$ est un **axe** de $\mathcal{C}_f$ lorsque $f(2a - x) = f(x)$; le point $\Omega(a, b)$ est un **centre** lorsque $f(2a - x) + f(x) = 2b$. Une période et des symétries permettent de **réduire** l'étude à un petit intervalle ; on complète ensuite la courbe.

Exercice 43 Un centre de symétrie ★

corrigé p. 56

Soit $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$ et montrer que le point $\Omega(2, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. Étudier f sur $[2, +\infty[$: limite, asymptote et position, variations ($f'(x) = (x^2 - 4x + 5)^{-3/2}$ à vérifier).
3. En déduire le tableau de variations et les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que Ω est un point d'inflexion.

Exercice 44 Réduire le domaine d'étude ★

corrigé p. 56

1. Pour chaque fonction, préciser le domaine, la période éventuelle, la parité et l'élément de symétrie indiqué ; en déduire un intervalle d'étude I aussi petit que possible et dire comment on complète la courbe.

a) $f_1(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$; b) $f_2(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 x}$ (période π , axe $x = \frac{\pi}{2}$) ; c) $f_3(x) = \frac{1}{x(x-4)}$ (axe $x = 2$) ;

d) $f_4(x) = 1 + \sin x |\cos x|$ (centre $(0, 1)$, axe $x = \frac{\pi}{2}$) ; préciser f_4 sur l'intervalle trouvé.

2. Soit φ un réel. Pour quelles valeurs de φ l'axe (Oy) est-il un axe de symétrie de la courbe de $x \mapsto \sin(2x + \varphi)$?

Exercice 45 Un quart de période suffit ★★

corrigé p. 57

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos 2x}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et impaire, et que la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et expliquer comment compléter la courbe.
2. Montrer que $2 - \cos 2x = 1 + 2 \sin^2 x$, puis que $f'(x) = \frac{\cos x \cos 2x}{(1 + 2 \sin^2 x)^2}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donner la tangente en O .
3. En déduire que $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout réel x .
4. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ et interpréter graphiquement. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 46 Prolonger une courbe par symétries ★★

corrigé p. 57

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire, périodique de période 4, telle que $f(x) = x(2 - x)$ pour tout $x \in [0, 2]$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [-2, 0]$, puis pour $x \in [2, 4]$; vérifier la cohérence des formules en 0 et en 2.
2. Montrer que $f(x + 2) = -f(x)$ pour tout réel x . En déduire que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et que le point $\Omega(2, 0)$ en est un centre.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et en 2, puis sur $\mathbb{R}$; exprimer $f'(x)$ pour $x \in [-2, 2]$.
4. Résoudre $f(x) = \frac{3}{4}$ sur $[-4, 4]$ en utilisant les symétries. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-4, 6]$.

Exercice 47 Deux cloches et un axe ★★★

corrigé p. 58

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

1. Vérifier que $(2 - x)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ et en déduire que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que $f(1 + t) = \frac{2(t^2 + 2)}{t^4 + 4}$ pour tout réel t (on pourra remarquer que $t^4 + 4 = (t^2 + 2)^2 - 4t^2$).
3. Étudier les variations de $\varphi(w) = \frac{2(w + 2)}{w^2 + 4}$ sur $[0, +\infty[$. En déduire les variations de f sur $[1, +\infty[$ (poser $w = (x - 1)^2$), puis sur $\mathbb{R}$.

4. Donner le maximum de f et les réels où il est atteint, ainsi que le minimum local en 1. Comparer avec les maximums des deux « cloches » $\frac{1}{x^2+1}$ et $\frac{1}{x^2-4x+5}$. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 48 À la recherche d'un centre ★★★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 2x}$.

- Déterminer D_f . Montrer que si $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $a = 1$ (l'ensemble des valeurs interdites est conservé par $x \mapsto 2a - x$).
- Montrer que $f(x) = x - 1 - \frac{2(x-1)}{x(x-2)}$ et en déduire l'asymptote oblique (Δ). En étudiant la limite de $f(2-x) + f(x)$ en $+\infty$, montrer que $b = 0$.
- Avec $X = x - 1$, montrer que $f(x) = \frac{X^3 - 3X}{X^2 - 1}$ et vérifier que $\Omega(1, 0)$ est un centre de $\mathcal{C}_f$. $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un axe de symétrie ?
- Étudier les variations de f , montrer que Ω est un point d'inflexion et tracer $\mathcal{C}_f$.
- Soit $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - x}$. En raisonnant comme en 1 et 2, montrer que $\mathcal{C}_g$ n'a ni axe ni centre de symétrie.

23

Études complètes

On suit le plan d'étude du cours, jusqu'à la courbe (repère orthonormé sauf mention contraire).

Exercice 49 Une fonction impaire de degré 5 ★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = 3x^5 - 10x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

- Montrer que f est impaire ; sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ? Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter, et en déduire les résultats en $-\infty$.
- Montrer que $f'(x) = 15x^2(x^2 - 2)$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$; montrer qu'elle a trois points d'inflexion, dont O et $I(1, -7)$, et donner les tangentes en O et en I . O est-il un extremum ? Résoudre $f(x) = 0$ et tracer $\mathcal{C}_f$ avec ces tangentes.

Exercice 50 Une fraction à pôle double ★

corrigé p. 60

Soit $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Calculer les limites de f aux bornes de D_f (à gauche et à droite en 1) ; en déduire deux asymptotes et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote horizontale.
- Montrer que $f'(x) = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$ et $f''(x) = \frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$; dresser le tableau de variations de f , étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et donner son point d'inflexion.
- Soit T la tangente en O . Montrer que $f(x) - 4x = \frac{4x^2(2-x)}{(x-1)^2}$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T . Tracer $\mathcal{C}_f$, T et les asymptotes.

Exercice 51 Une racine qui s'arrête ★★

corrigé p. 61

Soit $f(x) = x\sqrt{3-x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Déterminer D_f , la limite de f en $-\infty$ et la branche infinie correspondante. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 3 et interpréter.
2. Montrer que, pour $x < 3$, $f'(x) = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$ et $f''(x) = \frac{3(x-4)}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$; dresser le tableau de variations de f et étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$.
3. Donner la tangente T en O et en déduire que $x\sqrt{3-x} \leq x\sqrt{3}$ pour tout $x \leq 3$ (le vérifier aussi directement). Tracer $\mathcal{C}_f$, T et la demi-tangente en $A(3, 0)$.

Exercice 52 Un cosinus et son double ★★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = 4 \cos x + \cos 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Étudier la parité et la périodicité de f ; justifier qu'on peut l'étudier sur $[0, \pi]$ et dire comment compléter $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que $f'(x) = -4 \sin x (1 + \cos x)$ et $f''(x) = -4(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$; en déduire les variations de f et la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, \pi]$, son point d'inflexion I et la tangente en I .
3. Montrer que $f(x) = 2 \cos^2 x + 4 \cos x - 1$; en déduire que $-3 \leq f(x) \leq 5$ et résoudre $f(x) = 0$ dans $[-\pi, \pi]$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 53 Croissante, mais avec deux paliers ★★★

corrigé p. 63

Soit $f(x) = \frac{x(x^2+9)}{x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Étudier la parité de f . Montrer que $f(x) = x + \frac{8x}{x^2+1}$; en déduire une asymptote (Δ) à $\mathcal{C}_f$ et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) .
2. Montrer que $f'(x) = \frac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$; en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bien que f' s'annule.
3. Montrer que $f''(x) = \frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$; concavité de $\mathcal{C}_f$; trois points d'inflexion : O , et J, J' à tangente horizontale. Tangente en O et position de $\mathcal{C}_f$.
4. Combien l'équation $f(x) = m$ a-t-elle de solutions ? Tracer $\mathcal{C}_f$, (Δ) et les tangentes en O, J, J' .

Exercice 54 Deux asymptotes horizontales ★★★

corrigé p. 63

Soit $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Limites de f en $\pm\infty$ (attention au signe de x) et asymptotes. Montrer que $f'(x) = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; variations de f .
2. Montrer que $f''(x) = \frac{3(2x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$ et donner les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
3. Résoudre $f(x) = 1$ et $f(x) > 1$, montrer que $f(x) > -1$: positions de $\mathcal{C}_f$ et de ses asymptotes. Tracer $\mathcal{C}_f$.
4. Déterminer, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

24 Équations et lectures graphiques

Sur chaque intervalle où f est strictement monotone, $f(x) = m$ a **au plus une** solution ; la lecture du tableau ou de la courbe (valeurs et limites aux bornes) dit si elle en a une.

Exercice 55 Compter avec le tableau ★

corrigé p. 64

Soit $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Montrer que $f'(x) = 12x(x+1)(x-2)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Vérifier que $f(x) = (x+1)^2(3x^2 - 10x + 5)$ et résoudre $f(x) = 0$. Que dire de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 ? Résoudre ensuite $f(x) = 5$.
3. Lire sur le tableau le nombre de solutions de $f(x) = m$ selon m ; contrôler avec la question 2.

Exercice 56 Une parabole et une hyperbole ★

corrigé p. 64

Soit $\mathcal{P} : y = x^2 - 3$ et $\mathcal{H} : y = \frac{2}{x}$.

1. Montrer que, pour $x \neq 0$, $x^2 - 3 - \frac{2}{x} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x}$; en déduire les points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$, leurs positions relatives, et résoudre $x^2 - 3 \leq \frac{2}{x}$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ ont la même tangente T en leur point commun A d'abscisse -1 (elles sont tangentes en A) et étudier la position de chacune par rapport à T . Sont-elles tangentes en l'autre point commun B ?
3. Tracer $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ et T .

Exercice 57 Les courbes de $|f|$ et de $f(|x|)$ ★★

corrigé p. 65

Soit $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$ et donner les asymptotes de $\mathcal{C}_f$. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f et donner ses zéros.
2. Comment obtenir, à partir de $\mathcal{C}_f$, les courbes Γ_1 de $|f|$ et Γ_2 de $g : x \mapsto f(|x|)$ (préciser D_g) ? Les tracer.
3. Déterminer, selon m , le nombre de solutions de $|f(x)| = m$, puis de $f(|x|) = m$. Résoudre $f(|x|) = \frac{3}{2}$.

Exercice 58 Une demi-parabole et des droites parallèles ★★

corrigé p. 65

Soit $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe, et pour $m \in \mathbb{R}$, D_m la droite d'équation $y = x + m$.

1. Étudier f : dérivabilité à droite en $-\frac{5}{2}$, variations, concavité, branche infinie en $+\infty$.
2. Déterminer le point A de $\mathcal{C}_f$ où la tangente T est parallèle à la droite $y = x$; donner T et montrer que $x + 3 - \sqrt{2x+5} = \frac{1}{2}(\sqrt{2x+5} - 1)^2$: position de $\mathcal{C}_f$ et T ?
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et D_m ont autant de points communs que l'équation $g(x) = m$ a de solutions, où $g(x) = \sqrt{2x+5} - x$. Étudier g et en déduire ce nombre selon m . Contrôler par le calcul pour $m = 1$ et $m = \frac{5}{2}$.

Exercice 59 Une famille de quartiques ★★★

corrigé p. 66

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = x^4 - 2mx^2$ ($x \in \mathbb{R}$), de courbe $\mathcal{C}_m$.

1. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par O , que c'est leur seul point commun, et qu'elles y ont la même tangente.
2. Étudier les variations de f_m selon le signe de m .
3. Pour $m > 0$, montrer que les points minimums de $\mathcal{C}_m$ sont sur la courbe $\Gamma : y = -x^4$, et que tout point de Γ autre que O est un point minimum d'une courbe $\mathcal{C}_m$.
4. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_m$ selon m ; lieu des points d'inflexion ?
5. Pour $m > 0$, montrer que $f_m(\sqrt{m}x) = m^2 f_1(x)$ et interpréter. Par un point $M(a, b)$ avec $a \neq 0$, combien passe-t-il de courbes $\mathcal{C}_m$?

Exercice 60 Trois cosinus ★★★

corrigé p. 66

Soit $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Étudier la parité et la périodicité de f ; sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?
2. Montrer que $f'(x) = -(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)$ puis, à l'aide de $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$, que $f'(x) = -\sin 2x(1 + 2 \cos x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$ (valeurs en $0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$), puis sur $[-\pi, \pi]$.
4. Déterminer, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $]-\pi, \pi]$.

25

Défis de concours**Exercice 61 Combien de tangentes par un point ? ★★★★★**

corrigé p. 67

Soit $f(x) = x^3 + 6x$, $\mathcal{C}$ sa courbe et, pour $t \in \mathbb{R}$, T_t la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_t d'abscisse t .

1. Montrer que f est strictement croissante et que O est centre de symétrie et point d'inflexion de $\mathcal{C}$, de tangente $T : y = 6x$; position de $\mathcal{C}$ et T .
2. a) Une droite coupe $\mathcal{C}$ en trois points d'abscisses distinctes x_1, x_2, x_3 : montrer que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
b) Montrer que $T_t : y = (3t^2 + 6)x - 2t^3$ et que $f(x) - (3t^2 + 6)x + 2t^3 = (x - t)^2(x + 2t)$; si $t \neq 0$, T_t recoupe $\mathcal{C}$ en un seul point. c) Si $u_0 \neq 0$ et $M_{u_{n+1}}$ est le second point commun à T_{u_n} et $\mathcal{C}$, exprimer u_n en fonction de n ; limite ?
3. Soit $M(a, b)$. a) Montrer que T_t passe par M si et seulement si $\varphi(t) = b - 6a$, où $\varphi(t) = -2t^3 + 3at^2$.
b) Montrer que deux points distincts de $\mathcal{C}$ ont des tangentes distinctes.
4. Étudier les variations de φ selon le signe de a et en déduire le nombre de tangentes à $\mathcal{C}$ issues de M : trois si b est strictement entre $6a$ et $a^3 + 6a$ (M entre T et $\mathcal{C}$), deux si $M \in \mathcal{C} \cup T$, $M \neq O$, une sinon. Dessiner ces régions.

Exercice 62 Raccords en douceur ★★★★★

corrigé p. 68

Pour passer en douceur du niveau 0 au niveau 1, on pose $g(x) = 3x^2 - 2x^3$ et $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = g(x)$ si $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = 1$ si $x > 1$.

1. Montrer que F est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$, avec $F'(0) = F'(1) = 0$.
2. Montrer que $F(1-x) = 1 - F(x)$ et interpréter ; montrer que $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_F$ (tangente ?). Montrer que F' n'est pas dérivable en 0.
3. On cherche $h(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3$ avec $h(1) = 1$, $h'(1) = h''(1) = 0$. Trouver a, b, c ; vérifier que $h'(x) = 30x^2(x-1)^2$. Si H est définie comme F avec h au lieu de g , montrer que H' est dérivable en 0 et en 1.
4. Montrer que $h(x) - g(x) = 3x^2(x-1)^2(2x-1)$; position des deux arcs sur $[0, 1]$, pentes en Ω .

Exercice 63 Composer pour compter ★★★★★

corrigé p. 68

Soit $f(x) = 4x^3 - 3x$ ($x \in \mathbb{R}$) et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Étudier f (parité, limites, variations, concavité, tangente au point d'inflexion). Montrer que $|x| > 1 \Rightarrow |f(x)| > 1$.
2. Vérifier que $f(\cos \theta) = \cos 3\theta$. Si $-1 < m < 1$ et $m = \cos \alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$, montrer que $f(x) = m$ a exactement trois solutions, $\cos \frac{\alpha}{3}$, $\cos \frac{\alpha+2\pi}{3}$, $\cos \frac{\alpha+4\pi}{3}$; le retrouver sur le tableau. Cas $|m| \geq 1$?
3. Combien l'équation $f(f(x)) = m$ a-t-elle de solutions si $-1 < m < 1$? si $m = 1$? Résoudre $f(f(x)) = 0$, puis compter les solutions de $f \circ f \circ \dots \circ f(x) = 0$ (n fois f).

Exercice 64 Une famille de racines ★★★★★

corrigé p. 69

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = x + m\sqrt{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$), de courbe $\mathcal{C}_m$.

1. Montrer que $y = (1+m)x$ et $y = (1-m)x$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_m$ (cas $m = \pm 1$?) ; positions.
2. Calculer $f'_m(x)$ et $f''_m(x)$; concavité de $\mathcal{C}_m$ selon m ; tangentes en $x = 0$. Si $|m| \leq 1$, montrer que f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Si $m > 1$, montrer que f'_m est strictement croissante, que $f'_m(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ et que $\min f_m = \sqrt{m^2-1}$. Cas $m < -1$ (vérifier que $f_{-m}(x) = -f_m(-x)$) ?
4. Lieu des points extremums des $\mathcal{C}_m$? Montrer que par tout point du plan passe une seule courbe $\mathcal{C}_m$.

Exercice 65 Les racines de $x^n - nx + 1$ ★★★★★

corrigé p. 69

Pour un entier $n \geq 2$, on pose $P_n(x) = x^n - nx + 1$, de courbe $\mathcal{C}_n$.

1. Traiter le cas $n = 2$. Pour $n \geq 3$, étudier les variations de P_n selon la parité de n et en déduire le nombre de solutions réelles de $P_n(x) = 0$.
2. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_n$; donner la tangente T en $A(0, 1)$ et la position de $\mathcal{C}_n$ par rapport à T (selon la parité de n).
3. Pour $n \geq 3$, montrer que $P_n(x) = 0$ a une seule solution a_n dans $]0, 1[$, puis que $\frac{1}{n} < a_n < \frac{2}{n}$ et $0 < a_n - \frac{1}{n} < \frac{2^n}{n^{n+1}}$. Encadrer a_{10} .

Exercice 66 La parabole de sûreté ★★★★★

corrigé p. 70

Lancé de O dans la direction de pente t , un projectile suit (unités adaptées) $\mathcal{C}_t : y = f_t(x) = tx - \frac{1}{2}(1+t^2)x^2$, et l'on note $\mathcal{P} : y = \frac{1}{2}(1-x^2)$.

1. Pour $t > 0$, calculer la portée $R(t)$ et la hauteur maximale ; quelle pente donne la plus grande portée ?
2. Si $X \neq 0$, montrer que $M(X, Y) \in \mathcal{C}_t \iff X^2t^2 - 2Xt + X^2 + 2Y = 0$; nombre de trajectoires passant par M selon sa position par rapport à $\mathcal{P}$?
3. Montrer que $f_t(x) - \frac{1}{2}(1-x^2) = -\frac{1}{2}(tx-1)^2$: $\mathcal{C}_t$ est sous $\mathcal{P}$ et, si $t \neq 0$, tangente à $\mathcal{P}$ (où ?).
4. Sur une pente $y = -x$, pour $t > -1$, $\mathcal{C}_t$ retombe en $x = d(t) = \frac{2(t+1)}{1+t^2}$: montrer que le maximum de d est $1 + \sqrt{2}$, atteint pour $t = \sqrt{2} - 1 = \tan \frac{\pi}{8}$; retrouver $1 + \sqrt{2}$ avec $\mathcal{P}$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

26

Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f(x) = \frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1} \rightarrow -4$ en $\pm\infty$: asymptote $y = -4$. En 2, $4x + 1 \rightarrow 9 > 0$ et $2 - x \rightarrow 0^+$ selon que $x \rightarrow 2^+$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = -\infty$: asymptote $x = 2$. $f(x) + 4 = \frac{9}{2-x}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $y = -4$ si $x < 2$, au-dessous si $x > 2$.
- b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; $f \rightarrow 2$ en $\pm\infty$: asymptote $y = 2$. En ± 2 , $2x^2 + 1 \rightarrow 9$ et $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$ si $|x| \rightarrow 2^+$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = \lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f = \lim_{x \rightarrow 2^+} f = -\infty$: asymptotes $x = \pm 2$. $f(x) - 2 = \frac{9}{x^2 - 4}$: $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $y = 2$ si $|x| > 2$, au-dessous sur $]-2, 2[$.
- c) $D_f =]-2, +\infty[$; $\frac{4}{\sqrt{x+2}} \rightarrow +\infty$ en -2^+ , donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty$: asymptote $x = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$: asymptote $y = 1$, $\mathcal{C}_f$ au-dessous ($f(x) - 1 < 0$).
- d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ et $f(x) = \frac{1}{x+3}$ sur D_f : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{6}$ est **finie**, la droite $x = 3$ **n'est pas** asymptote ($\mathcal{C}_f$ est l'hyperbole $y = \frac{1}{x+3}$ privée du point $(3, \frac{1}{6})$). $\lim_{x \rightarrow -3^+} f = +\infty$: asymptote $x = -3$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 0$: asymptote $y = 0$, $\mathcal{C}_f$ au-dessus si $x > -3$, au-dessous si $x < -3$.

■ Corrigé de l'exercice 2

- $(x-1)(2x-3)+1 = 2x^2 - 5x + 4$, d'où la forme annoncée, et $f(x) - (2x-3) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: (Δ) est **asymptote** en $\pm\infty$; **le signe de la différence donne la position** : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) si $x > 1$, au-dessous si $x < 1$.
- $g(x) - (x+1) = \frac{-2x}{x^2+1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: (Δ') est asymptote en $\pm\infty$; la différence a le signe de $-x$: $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de (Δ') pour $x < 0$, au-dessous pour $x > 0$, et $g(0) = 1$: **oui**, $\mathcal{C}_g$ coupe son asymptote en $(0, 1)$ (une asymptote ne décrit que le comportement à l'infini).
- $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x}{x^2+x} = 3$, puis $h(x) - 3x = \frac{-x}{x+1} \rightarrow -1 = b$ (de même en $-\infty$) : asymptote $y = 3x - 1$ en $\pm\infty$. $h(x) - (3x - 1) = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$: $\mathcal{C}_h$ est au-dessus pour $x > -1$, au-dessous pour $x < -1$.

■ Corrigé de l'exercice 3

On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis, s'il le faut, $\lim (f(x) - ax)$. a) $f(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = x - 5 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) . b) $\sqrt{x+3} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\sqrt{x+3}}{x} = \sqrt{\frac{x+3}{x^2}} \rightarrow 0$: **direction** (Ox) . c) $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2$ et $f(x) - 2x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: **direction** $y = 2x$. d) En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 3 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2$, et $f(x) - 2x = x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow 0$: **asymptote** $y = 2x$. En $-\infty$, $\sqrt{x^2 + 1} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$: $\frac{f(x)}{x} =$

$$3 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 4 \text{ et } f(x) - 4x = -(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \rightarrow 0 : \text{asymptote } \boxed{y = 4x}.$$

■ Corrigé de l'exercice 4

Inflexion : f'' s'annule en changeant de signe. a) $f'(x) = -3x^2 + 12x$, $f''(x) = 6(2 - x)$: $\mathcal{C}_f$ convexe sur $]-\infty, 2]$, concave sur $[2, +\infty[$; inflexion en $I(2, 11)$. $f'(2) = 12$: $T : y = 12(x - 2) + 11 = \boxed{12x - 13}$, et $f(x) - (12x - 13) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = \boxed{-(x - 2)^3}$, positif si $x < 2$, négatif si $x > 2$: T traverse $\mathcal{C}_f$ en I . b) $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x - 1)(x - 2)$: convexe sur $]-\infty, 1]$ et $[2, +\infty[$, concave sur $[1, 2]$; inflexions $\boxed{(1, 8)}$ et $\boxed{(2, 17)}$. c) $f''(x) = 12x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe : $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $\mathbb{R}$, sans point d'inflexion ($f(x) - (2x + 1) = x^4 \geq 0$).

■ Corrigé de l'exercice 5

Axe $x = a$: $f(2a - x) = f(x)$; **centre** $\Omega(a, b)$: $f(2a - x) + f(x) = 2b$ (avec $2a - x \in D_f$).

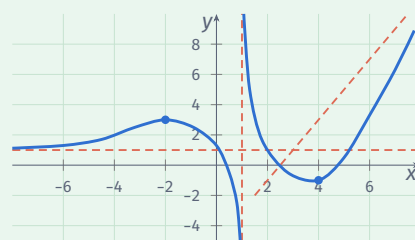
- $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$; $(4 - x)^2 - 4(4 - x) = x^2 - 4x$, donc $f(4 - x) = f(x)$: **axe** $x = 2$. 2. $x^2 + x - 1 = (x + 2)(x - 1) + 1$: $\boxed{g(x) = x - 1 + \frac{1}{x + 2}}$. Si $x \neq -2$, alors $-4 - x \neq -2$ et $g(-4 - x) + g(x) = (-5 - x) - \frac{1}{x + 2} + (x - 1) + \frac{1}{x + 2} = -6 = 2 \times (-3)$: $\Omega(-2, -3)$ est **centre de symétrie**.
- $h''(x) = 6x + 6$ change de signe en -1 : $\boxed{J(-1, -2)}$. Avec $x = -1 + t$: $h(x) = t^3 + 2t - 2$, donc $h(-1 + t) + h(-1 - t) = -4 = 2 \times (-2)$: J est **centre de symétrie**. 4. On étudie f sur $[2, +\infty[$, g sur $]-2, +\infty[$, h sur $[-1, +\infty[$, puis on complète par la symétrie d'axe $x = 2$, de centre Ω , de centre J respectivement.

■ Corrigé de l'exercice 6

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \mp \infty$: asymptote $\boxed{x = 1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 1$: asymptote $\boxed{y = 1}$ en $-\infty$; $f(x) - (2x - 5) \rightarrow 0$: asymptote $\boxed{y = 2x - 5}$ en $+\infty$. Maximum relatif $f(-2) = 3$, minimum relatif $f(4) = -1$; $f' > 0$ sur $]-\infty, -2[$ et $]4, +\infty[$, $f' < 0$ sur $]-2, 1[$ et $]1, 4[$, $f'(-2) = f'(4) = 0$.

- Sur chaque intervalle de stricte monotonie, au plus une solution, et une exactement si m est une valeur prise : valeurs $]1, 3]$ sur $]-\infty, -2]$; $]-\infty, 3]$ sur $[-2, 1[$; $[-1, +\infty[$ sur $]1, 4]$ et sur $[4, +\infty[$. Donc $f(x) = 0$ a $\boxed{3}$ solutions, $f(x) = 2$ en a $\boxed{4}$, $f(x) = -3$ en a $\boxed{1}$. En général : $m < -1$: 1 ; $m = -1$: 2 ; $-1 < m \leq 1$: 3 ; $1 < m < 3$: 4 ; $m = 3$: 3 ; $m > 3$: 2.

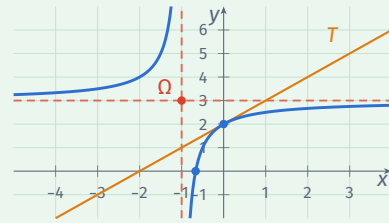
- Une allure possible ci-contre.



■ Corrigé de l'exercice 7

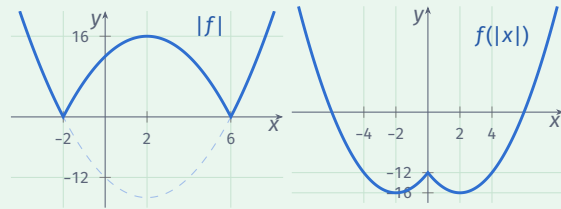
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 3$: asymptote $y = 3$; en -1 , $3x+2 \rightarrow -1$, donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = -\infty$: asymptote $x = -1$. $3 - \frac{1}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$ et $f(-2-x) + f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + 3 - \frac{1}{x+1} = 6$: centre $\boxed{\Omega(-1, 3)}$.
- $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$: f strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$. $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$: $\mathcal{C}_f$ convexe sur $]-\infty, -1[$, concave sur $]-1, +\infty[$.
- Points $(-\frac{2}{3}, 0)$ et $A(0, 2)$; $f'(0) = 1$: $T : y = x + 2$. $f(x) - (x + 2) = \frac{3x+2-(x+2)(x+1)}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1}$: sur $]-1, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est sous T , comme le veut la concavité. 4. Figure.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	3	$+\infty$ $-\infty$	3



■ Corrigé de l'exercice 8

- $f(x) = (x+2)(x-6) = (x-2)^2 - 16$: sommet $S(2, -16)$; f décroît sur $]-\infty, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$.
- $|f|$: on garde les points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée positive et on remplace l'arc situé sous (Ox) ($-2 < x < 6$) par son symétrique par rapport à (Ox) . $f(|x|)$: h est paire et $h(x) = f(x)$ pour $x \geq 0$: on garde la partie de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse positive, complétée par symétrie par rapport à (Oy) . Points anguleux : $(-2, 0)$, $(6, 0)$ pour $\mathcal{C}_g$ (nombres dérivés ± 8 opposés) ; $(0, -12)$ pour $\mathcal{C}_h$ ($h'_d(0) = -4$, $h'_g(0) = 4$).
- On compte les points communs avec la droite $y = m$. $|f(x)| = m$: $m < 0$: 0 ; $m = 0$: 2 ; $0 < m < 16$: 4 ; $m = 16$: 3 ; $m > 16$: 2. $f(|x|) = m$: $m < -16$: 0 ; $m = -16$: 2 ; $-16 < m < -12$: 4 ; $m = -12$: 3 (0 et ± 4) ; $m > -12$: 2.

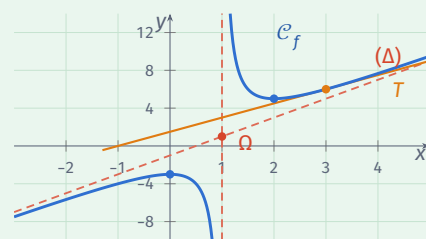


27 Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x)$ a la limite de $\frac{2x^2}{x} = 2x$ en $\pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$. En 1, le numérateur tend vers $2 > 0$: $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f = \pm\infty$: **asymptote verticale** $x = 1$.
- a) **Division euclidienne** : $2x^2 - 3x + 3 = (x-1)(2x-1) + 2$: $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$. b) $f(x) - (2x-1) = \frac{2}{x-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: $(\Delta) : y = 2x - 1$ est asymptote ; $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) si $x > 1$, au-dessous si $x < 1$.
- $f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2[(x-1)^2 - 1]}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$, du signe de $x(x-2)$; $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.
- $f(2-x) + f(x) = (3-2x) - \frac{2}{x-1} + (2x-1) + \frac{2}{x-1} = 2 = 2 \times 1$ ($x \neq 1$) : $\Omega(1, 1)$ est centre de symétrie. $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$: **concave** sur $]-\infty, 1[$, **convexe** sur $]1, +\infty[$.
- $f(3) = 6$, $f'(3) = \frac{3}{2}$: $T : y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$. Le discriminant de $2x^2 - 3x + 3$ est $-15 < 0$: $\mathcal{C}_f$ **ne coupe pas** (Ox) .

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	-3	$+\infty$ $-\infty$	5	$+\infty$



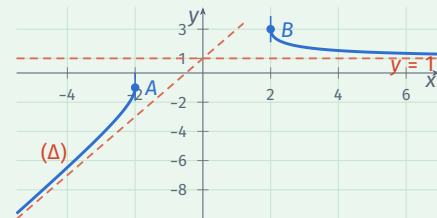
- Lecture du tableau** : $m < -3$: 2 solutions ; $m = -3$: 1 ; $-3 < m < 5$: 0 ; $m = 5$: 1 ; $m > 5$: 2.

■ Corrigé de l'exercice 10

- $D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, $f(2) = 3$, $f(-2) = -1$. Pour $x > 2$: $\frac{f(x)-3}{x-2} = 1 - \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{x-2} = 1 - \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \rightarrow -\infty$; pour $x < -2$ ($x+2 < 0$) : $\frac{f(x)+1}{x+2} = 1 + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \rightarrow +\infty$: f n'est pas dérivable en ces points ; **demi-tangentes verticales** en $B(2, 3)$ et $A(-2, -1)$.
- Pour $x \geq 2$, $f(x) = 1 + \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$, asymptote $y = 1$, $\mathcal{C}_f$ **au-dessus**. En $-\infty$, $x+1 \rightarrow -\infty$ et $-\sqrt{x^2-4} \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$; pour $x \leq -2$, $f(x) - (2x+1) = |x| - \sqrt{x^2-4} = \frac{4}{|x|+\sqrt{x^2-4}} \rightarrow 0^+$: (Δ) est **asymptote** en $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ **au-dessus**.
- $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$; si $x > 2$, $0 < \sqrt{x^2-4} < x$, donc $f'(x) < 0$; si $x < -2$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} < 0$ et $f'(x) > 0$.
- $f''(x) = -\frac{\sqrt{x^2-4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} > 0$: $\mathcal{C}_f$ **convexe** sur chaque intervalle.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		+		-
$f(x)$	$-\infty$	-1	3	1

hors D_f



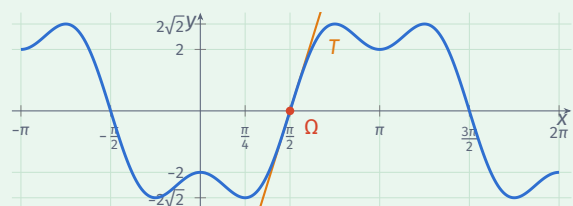
- Valeurs prises : $]-\infty, -1]$ et $[1, 3]$, chacune une fois : $m \leq -1$: $\boxed{1}$; $-1 < m \leq 1$: $\boxed{0}$; $1 < m \leq 3$: $\boxed{1}$; $m > 3$: $\boxed{0}$.

■ Corrigé de l'exercice 11

- a) $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \sin x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$: $f(x) = 4 \cos^3 x - 6 \cos x$. b) $\cos$ est paire et 2π -périodique : f aussi ; $\cos(\pi - x) = -\cos x$ donne $f(\pi - x) + f(x) = 0$: $\Omega(\frac{\pi}{2}, 0)$ est **centre de symétrie**. c) Étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; la symétrie de centre Ω donne $[0, \pi]$, la parité $[-\pi, \pi]$, la périodicité tout $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = -12 \cos^2 x \sin x + 6 \sin x = -6 \sin x \cos 2x$. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq 0$ et $\cos 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{\pi}{4}$: f **décroît** sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, **croît** sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$; $f(0) = -2$, $f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$; puis la symétrie de centre Ω donne le tableau sur $[0, \pi]$ (ci-dessous).
- $f(x) = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 3)$ et $2 \cos^2 x - 3 < 0$: $f(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. $f''(x) = -6 \cos x \cos 2x + 12 \sin x \sin 2x = -6 \cos x (2 \cos^2 x - 1) + 24 \sin^2 x \cos x$, d'où la formule ; près de $\frac{\pi}{2}$, $6 \cos^2 x - 5 < 0$ et f'' a le signe de $\cos x$, qui change en $\frac{\pi}{2}$: Ω est un **point d'inflexion** ; $f'(\frac{\pi}{2}) = 6$: $T : y = 6x - 3\pi$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-2	$\rightarrow$	$-2\sqrt{2}$	$\rightarrow$	0

$2\sqrt{2}$



- Sur $[0, 2\pi[$ (avec $f(2\pi - x) = f(x)$) : $|m| > 2\sqrt{2}$: 0 ; $|m| = 2\sqrt{2}$: 2 ; $2 < |m| < 2\sqrt{2}$: 4 ; $|m| = 2$: 3 ; $|m| < 2$: 2 .

■ Corrigé de l'exercice 12

- $f(x) \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$ (comme x^4) et $\frac{f(x)}{x} = x^3 - 4x^2 + 16 - \frac{16}{x} \rightarrow \pm\infty$: **branches paraboliques de direction** (Oy).
- $f'(x) = 4(x^3 - 3x^2 + 4) = 4(x-2)^2(x+1)$ (-1 est racine), du signe de $x+1$: f **décroît** sur $]-\infty, -1]$, **croît** sur $[-1, +\infty[$; minimum $f(-1) = -27$. $f'(2) = 0$, mais f' **ne change pas de signe** : **pas d'extremum** en 2.
- $f''(x) = 12x(x-2)$: **convexe** sur $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$, **concave** sur $[0, 2]$; inflexions $I(0, -16)$, $J(2, 0)$. Tangente en I : $T : y = 16x - 16$; en J : $f'(2) = 0$, c'est l'**axe des abscisses** (inflexion à tangente horizontale).
- a) $(x-2)^3(x+2) = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x+2) = f(x)$, et $f(x) - (16x - 16) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$.
b) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $]-\infty, 0[$ et $]4, +\infty[$, au-dessous sur $]0, 4[$: T traverse $\mathcal{C}_f$ en I et la recoupe en (4, 48).

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow -27$	$\rightarrow 0$	$+\infty$



- $f(x) = m$: 0 solution si $m < -27$, 1 si $m = -27$, 2 si $m > -27$. On obtient la courbe de $|f|$ (pointillés) en repliant l'arc situé sous (Ox) ($-2 < x < 2$) : $|f(x)| = m$ a 0 solution si $m < 0$, 2 si $m = 0$, 4 si $0 < m < 27$, 3 si $m = 27$, 2 si $m > 27$.

■ Corrigé de l'exercice 13

- $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 6}{x^3 - 4x} = 1$ et $f(x) - x = \frac{x^2 + 2x - 6}{x^2 - 4} \rightarrow 1 = b$ en $\pm\infty$: asymptote $y = x + 1$. $f(x) - (x + 1) = \frac{2(x-1)}{(x-2)(x+2)}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de l'asymptote sur $]-\infty, -2[$ et $]1, 2[$, au-dessus sur $]-2, 1[$ et $]2, +\infty[$; point commun $(1, 2)$.
- $x^2 + 4x > 0 \iff x < -4$ ou $x > 0$: $D_g =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$. Soit $s = \sqrt{x^2 + 4x} = |x| r$, où $r = \sqrt{1 + \frac{4}{x}} \rightarrow 1$. En $+\infty$: $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{r} \rightarrow 1$ et $g(x) - x = \frac{x(x-s)}{s} = \frac{-4x^2}{s(x+s)} = \frac{-4}{r(1+r)} \rightarrow -2$: asymptote $y = x - 2$. En $-\infty$ ($|x| = -x$) : $\frac{g(x)}{x} = -\frac{1}{r} \rightarrow -1$ et $g(x) + x = \frac{-4x^2}{s(x-s)} = \frac{4}{r(1+r)} \rightarrow 2$: asymptote $y = -x + 2$.
Position : $g(x) - (x - 2) = \frac{x^2 - (x-2)s}{s}$ et $g(x) - (2 - x) = \frac{x^2 - (2-x)s}{s}$. Si $0 < x \leq 2$, $(x-2)s \leq 0 < x^2$; si $x > 2$ (resp. $x < -4$), $(x-2)s > 0$ (resp. $(2-x)s > 0$) et $x^4 - (x-2)^2 s^2 = 4x(3x-4) > 0$: $\mathcal{C}_g$ est **au-dessus** de chaque asymptote.
- $x^2 + mx + 1 = (x-2)(x+m+2) + 2m+5$: $f_m(x) = x + m + 2 + \frac{2m+5}{x-2}$. Si $m \neq -\frac{5}{2}$, l'asymptote oblique est $y = x + m + 2$; elle passe par $A(0, 3) \iff m = 1$. Si $m = -\frac{5}{2}$: $f_m(x) = x - \frac{1}{2} (x \neq 2)$: une droite privée d'un point, sans asymptote verticale.

■ Corrigé de l'exercice 14

- a) $D_f = \mathbb{R}^*$; $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: asymptote $y = 0$; en 0, $x - 2 \rightarrow -2$ et $x^2 \rightarrow 0^+$: $\lim_{x \rightarrow 0} f = -\infty$, asymptote $x = 0$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4-x}{x^3}$: f **décroît** sur $]-\infty, 0[$ et sur $[4, +\infty[$, **croît** sur $]0, 4]$; maximum local $f(4) = \frac{1}{8}$. b) $f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^4} = \frac{2(x-6)}{x^4}$: **concave** sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 6]$, **convexe** sur $[6, +\infty[$; inflexion $I(6, \frac{1}{9})$. c) $f'(6) = -\frac{1}{108}$: $T : y = \frac{18-x}{108}$. $108(x-2) - x^2(18-x) =$

$x^3 - 18x^2 + 108x - 216 = (x - 6)^3$, d'où l'égalité : la différence est négative pour $x < 6$ ($x \neq 0$), positive pour $x > 6$: T **traverse** $\mathcal{C}_f$ en I .

2. $g''(x) = 6x + 2a$; il faut $g''(1) = 0$ et $g(1) = 2$: $a = -3$, $1 + a + b = 2$: $a = -3$, $b = 4$ (et $g''(x) = 6(x - 1)$ change bien de signe en 1). $g'(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x - 1)^2 + 1 > 0$: g **strictement croissante**. $g'(1) = 1$: tangente $y = x + 1$, et $g(x) - (x + 1) = (x - 1)^3$ change de signe en 1 : elle **traverse** la courbe.

■ Corrigé de l'exercice 15

- a) **Faux** : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ (exercice 3) : $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow 2$, mais $f(x) - 2x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: pas d'asymptote.
 b) **Vrai** : f'' change de signe en a , par exemple $f'' \geq 0$ sur $[a - h, a]$ et $f'' \leq 0$ sur $[a, a + h]$: f' croît puis décroît, donc $f'(a)$ est un maximum local de f' . c) **Vrai** : f' est strictement croissante, donc s'annule au plus une fois ; f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, ou sur $]-\infty, x_0]$ et sur $[x_0, +\infty[$: au plus une solution sur chacun. d) **Vrai, par l'absurde** : si $f'(a) > 0$, la courbe convexe est au-dessus de sa tangente en a : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \rightarrow +\infty$, ce qui contredit $\lim f = 0$; donc $f' \leq 0$. e) **Faux** : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0$ et $f''(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$: convexe, strictement décroissante, sans minimum. f) **Faux** : $f(x) = |x|^3$: $f'(x) = 3x|x|$ (en 0 : $\frac{|x|^3}{x} = x|x| \rightarrow 0$) et $f''(x) = 6|x|$ (en 0 : $\frac{3x|x|}{x} \rightarrow 0$) ; $f'(0) = f''(0) = 0$, mais $f(0) = 0$ est le minimum de f . g) **Vrai** : en dérivant deux fois $f(-x) = -f(x)$: $f''(-x) = -f''(x)$; or $f''(x) \geq 0$ et $f''(-x) \geq 0$: $f'' = 0$, donc f' est constante, égale à k ; $f(x) - kx$ est alors constante, nulle en 0 : $f(x) = kx$.

■ Corrigé de l'exercice 16

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$; (Δ) passe par $(0, 1)$ et $(2, 2)$: $(\Delta) : y = \frac{x}{2} + 1$; $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(4) = 0$ (tangentes horizontales). Tableau ci-dessous.
 2. (Δ) donne $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$; $f(0) = 1 - \frac{c}{2} = 0$: $c = 2$. Donc $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)+4}{2(x-2)} = \frac{x^2}{2x-4}$ et $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$: $f'(4) = 0$, $f(4) = 4$ ✓.
 3. $m < 0$: 2 ; $m = 0$: 1 ; $0 < m < 4$: 0 ; $m = 4$: 1 ; $m > 4$: 2.
 4. $\mathcal{C}_f$ est sous (Δ) exactement à gauche de $x = 2$: $S =]-\infty, 2[$. Calcul : $f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{2}{x-2} \leq 0 \iff x < 2$. Centre : l'intersection des asymptotes, $\Omega(2, 2)$ ($f(4 - x) + f(x) = 4$).

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

28

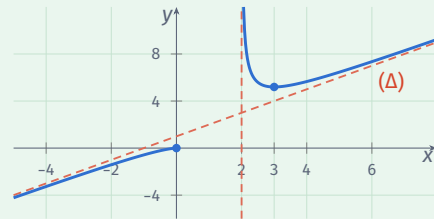
Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

1. $\frac{x}{x-2} \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x > 2$: $D_f =]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$. Pour $x < 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{\frac{x}{x-2}} \rightarrow 0$: $f'_g(0) = 0$, **demi-tangente horizontale** en O . En 2^+ , $\frac{x}{x-2} \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$, asymptote $x = 2$.
 2. $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x}{x-2}} \rightarrow 1$ en $\pm\infty$, et $f(x) - x = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1} \rightarrow 1$ (expression conjuguée) : $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$ **et** en $-\infty$.

3. $f(x)^2 - (x+1)^2 = \frac{x^3 - (x+1)^2(x-2)}{x-2} = \frac{3x+2}{x-2}$. Si $x > 2$: $f(x) > 0$, $x+1 > 0$ et $f(x)^2 > (x+1)^2$: $\mathcal{C}_f$ **au-dessus** de (Δ) . Si $-1 \leq x \leq 0$: $f(x) \leq 0 \leq x+1$ (sans égalité simultanée) ; si $x < -1$: $f(x) < 0$, $x+1 < 0$ et $|f(x)| > |x+1|$: dans les deux cas $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous**.
4. Avec $u = \frac{x}{x-2}$, $u' = \frac{-2}{(x-2)^2}$: $f'(x) = \sqrt{u} + \frac{xu'}{2\sqrt{u}} = \frac{x(x-2)-x}{(x-2)^2\sqrt{u}} = \frac{x(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{u}}$, du signe de $x(x-3)$; $f(3) = 3\sqrt{3}$.

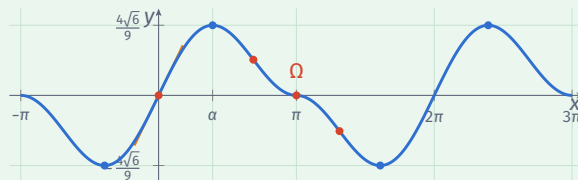
x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0		$+\infty$	$3\sqrt{3}$	$+\infty$



Lecture : $f(x) = m$ a $\boxed{1}$ solution si $m \leq 0$, $\boxed{0}$ si $0 < m < 3\sqrt{3}$, $\boxed{1}$ si $m = 3\sqrt{3}$, $\boxed{2}$ si $m > 3\sqrt{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 18

1. $1 + \cos x \geq 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$; $f(-x) = -f(x)$ (**impaire**), $f(x + 2\pi) = f(x)$, et $f(2\pi - x) = -\sin x \sqrt{1 + \cos x} = -f(x)$: $\Omega(\pi, 0)$ est **centre de symétrie**. On étudie f sur $[0, \pi]$, puis on complète par la symétrie de centre O et par les translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$.
2. Pour $x \neq \pi$ voisin de π : $\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \frac{-\sin(x-\pi)\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} \rightarrow (-1) \times 0 = 0$: $\boxed{f'(\pi) = 0}$. Si $\cos x \neq -1$: $f'(x) = \cos x \sqrt{1 + \cos x} - \frac{\sin^2 x}{2\sqrt{1+\cos x}} = \frac{3\cos^2 x + 2\cos x - 1}{2\sqrt{1+\cos x}}$ et $3\cos^2 x + 2\cos x - 1 = (3\cos x - 1)(1 + \cos x)$, d'où la formule. Sur $[0, \pi]$, f' a le signe de $3\cos x - 1$: f **croît** sur $[0, \alpha]$, **décroît** sur $[\alpha, \pi]$; $f(0) = f(\pi) = 0$, $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{6}}{9}}$.
3. $f''(x) = -\frac{3}{2} \sin x \sqrt{1 + \cos x} - \frac{(3\cos x - 1)\sin x}{4\sqrt{1+\cos x}} = \frac{-\sin x(9\cos x + 5)}{4\sqrt{1+\cos x}}$. Soit $\beta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $\cos \beta = -\frac{5}{9}$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $[0, \beta]$, **convexe** sur $[\beta, \pi]$; inflexions O (f'' change de signe ; tangente $y = \sqrt{2}x$) et $(\beta, \frac{4\sqrt{14}}{27})$. Par symétrie de centre Ω , $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[\pi, 2\pi - \beta]$: Ω est un **point d'inflexion à tangente horizontale** ; $f' \leq 0$ sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$: **pas d'extremum** en π .
4. Sur $]-\pi, \pi]$: $|m| > \frac{4\sqrt{6}}{9}$: 0 ;
 $|m| = \frac{4\sqrt{6}}{9}$: 1 ; $|m| < \frac{4\sqrt{6}}{9}$: 2
 (pour $m = 0$: 0 et π).



■ Corrigé de l'exercice 19

1. **Continuité** : $f(1) = a + c$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - \frac{1}{x}) = 1$: $a + c = 1$. **Dérivabilité** : $f'_g(1) = 2a$ et $\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1} = \frac{1}{x} \rightarrow 1$ à droite : $2a = 1$. Donc $\boxed{a = c = \frac{1}{2}}$, $f'(1) = 1$.
2. En $-\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$: direction (Oy) ; en $+\infty$: $f \rightarrow 2$, asymptote $y = 2$, $\mathcal{C}_f$ **au-dessous**.
 $f'(x) = x$ si $x \leq 1$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ si $x > 1$: $+\infty \searrow f(0) = \frac{1}{2} \nearrow f(1) = 1 \nearrow 2$.
3. $f'' = 1 > 0$ sur $]-\infty, 1[$ (**convexe**), $f''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$ sur $]1, +\infty[$ (**concave**). f' a pour nombre dérivé 1 à gauche en 1 et $\frac{1}{x^2-1} = \frac{-(x+1)}{x^2-1} \rightarrow -2$ à droite : f **n'est pas** deux fois dérivable en 1. Tangente en A : $y = x$, et $f(x) - x = \frac{(x-1)^2}{2} \geq 0$ si $x \leq 1$, $-\frac{(x-1)^2}{x} \leq 0$ si $x > 1$: $\mathcal{C}_f$ **traverse** sa tangente et la concavité change : A est un **point d'inflexion** (sans $f''(1)$).

4. $m < \frac{1}{2} : 0$; $m = \frac{1}{2} : 1$; $\frac{1}{2} < m < 2 : 2$ (une solution négative, une positive) ; $m \geq 2 : 1$ (négative).

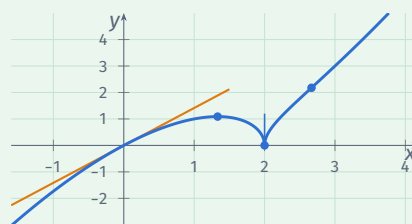


■ Corrigé de l'exercice 20

1. $f(x) = x\sqrt{x-2}$ si $x \geq 2$, $f(x) = x\sqrt{2-x}$ si $x < 2$; $f(2) = 0$. À droite, $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty$; à gauche, $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{-x}{\sqrt{2-x}} \rightarrow -\infty$: deux **demi-tangentes verticales**, dirigées vers le haut car $f > 0$ de part et d'autre de 2 : (2, 0) est un **point de rebroussement**.
2. $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{|x-2|} \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$ (et $f \rightarrow \pm\infty$) : branches paraboliques de direction (Oy). Si $x > 2$: $f'(x) = \sqrt{x-2} + \frac{x}{2\sqrt{x-2}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}} > 0$; si $x < 2$: $f'(x) = \sqrt{2-x} - \frac{x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$, du signe de $4-3x$;

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$$
3. Si $x < 2$, $f''(x) = \frac{3x-8}{4(x-2)\sqrt{2-x}} < 0$: **concave** ; si $x > 2$, $f''(x) = \frac{3x-8}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$: concave sur $\left]2, \frac{8}{3}\right]$, convexe ensuite : inflexion $\left(\frac{8}{3}, \frac{8\sqrt{6}}{9}\right)$. $f'(0) = \sqrt{2}$: tangente en O : $y = \sqrt{2}x$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	$-\infty$	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	0	$+\infty$

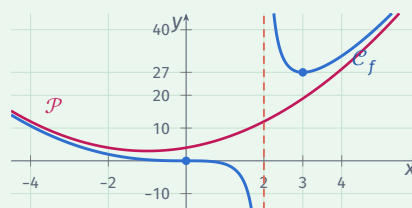


4. $m < 0 : 1$; $m = 0 : 2$ (0 et 2) ; $0 < m < \frac{4\sqrt{6}}{9} : 3$;
 $m = \frac{4\sqrt{6}}{9} : 2$; $m > \frac{4\sqrt{6}}{9} : 1$.

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $x^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 8$, d'où l'égalité. En 2, $x^3 \rightarrow 8 > 0$: $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f = \pm\infty$: asymptote $x = 2$. En $\pm\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x-2} \rightarrow \pm\infty$: branches paraboliques de direction (Oy) ; mais $f(x) - (x^2 + 2x + 4) = \frac{8}{x-2} \rightarrow 0$: $\mathcal{P}$ est **asymptote** ; $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ pour $x > 2$, au-dessous pour $x < 2$.
2. $f'(x) = \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$; de $f'(x) = 2x + 2 - \frac{8}{(x-2)^2}$, $f''(x) = 2 + \frac{16}{(x-2)^3} = \frac{2[(x-2)^3+8]}{(x-2)^3} = \frac{2x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3}$, du signe de $\frac{x}{x-2} (x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3 > 0)$: convexe sur $]-\infty, 0]$ et $]2, +\infty[$, concave sur $[0, 2[$.
En O : $f'(0) = 0$ sans changement de signe (pas d'extremum) et f'' change de signe : **point d'inflexion à tangente horizontale**.

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f'(x)	-	0	-	-	+
f(x)	$+\infty$	$0 \searrow$	$+\infty \swarrow$	27	$+\infty$



3. f prend une fois chaque valeur réelle sur $]-\infty, 2[$; sur $]2, +\infty[$, deux fois chaque valeur $m > 27$, une fois la valeur 27 : $m < 27 : \boxed{1}$ solution ; $m = 27 : \boxed{2}$; $m > 27 : \boxed{3}$.

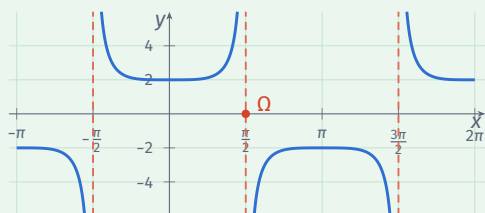
■ Corrigé de l'exercice 22

1. Deux conditions (même point, même pente) : $\sqrt{x_0} = \frac{x_0^2+k}{4}$ et $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{x_0}{2}$. La seconde donne $x_0\sqrt{x_0} = 1$, soit $x_0 = 1$; puis $k = 3$; tangente commune $y = \frac{x+1}{2}$.
2. $u^4 - 4u + 3 = (u-1)^2(u^2 + 2u + 3)$ et $x^2 = u^4$, d'où l'égalité ; $u^2 + 2u + 3 = (u+1)^2 + 2 > 0$: $\mathcal{P}_3$ est au-dessus de $\mathcal{C}$, qu'elle touche en $(1, 1)$.
3. $M(x, y)$ est commun $\iff x \geq 0$ et $\sqrt{x} = \frac{x^2+k}{4} \iff k = 4\sqrt{x} - x^2 = h(u)$, avec $u = \sqrt{x} \geq 0$ (à chaque $u \geq 0$ correspond un seul $x = u^2$). $h'(u) = 4(1-u^3) = 4(1-u)(1+u+u^2)$: h croît sur $[0, 1]$ de 0 à 3, puis décroît vers $-\infty$. **Lecture** : $k > 3$: 0 point commun ; $k = 3$: 1 ; $0 \leq k < 3$: 2 ; $k < 0$: 1.



■ Corrigé de l'exercice 23

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$; f **paire**, 2π -**périodique**, $f(\pi - x) = -f(x)$: $\Omega\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est **centre de symétrie** ; étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $f'(x) = -\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: f croît de $f(0) = 2$ à $+\infty$: asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
3. $f''(x) = \frac{3\sin^2 x \cos^3 x + 2\sin^4 x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x(3\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{\cos^3 x} = \frac{\sin^2 x(2+\cos^2 x)}{\cos^3 x}$, du signe de $\cos x$: **convexe** sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, **concave** sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. $f''(0) = 0$ mais $f'' \geq 0$ autour de 0 : **pas d'inflexion**.
4. Si $\cos x > 0$, $f(x) - 2 = \frac{(1-\cos x)^2}{\cos x} \geq 0$; si $\cos x < 0$, $f(x) + 2 = \frac{(1+\cos x)^2}{\cos x} \leq 0$: $|f(x)| \geq 2$. $f(x) = \frac{5}{2} \iff (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0 \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$: $|m| < 2$: 0 ; $|m| = 2$: 1 ; $|m| > 2$: 2.



29 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. $f'(x) = 3x^2 + p$, $f''(x) = 6x$ change de signe en 0 seulement : $I(0, q)$ est l'**unique point d'inflexion** ; $f(-x) + f(x) = 2q$: I est **centre de symétrie**.
2. Si $p \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ (nul en 0 au plus) : f croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe coupe (Ox) en **un seul point** : **1 solution**.
3. a) $p = -3s^2$, $f'(x) = 3(x-s)(x+s)$: tableau ci-contre, avec $f(-s) = -s^3 + 3s^3 + q = q + 2s^3$, $f(s) = q - 2s^3$.
b) $f(-s)f(s) = q^2 - 4s^6 = q^2 - 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$.
4. Soit $\Delta = 4p^3 + 27q^2$. Si $p \geq 0$, $\Delta \geq 0$ et une seule solution (question 2). Si $p < 0$, $f(-s) - f(s) = 4s^3 > 0$; on lit le tableau : si $\Delta < 0$, $f(-s) > 0 > f(s)$: une solution dans chacun des intervalles

x	$-\infty$	$-s$	s	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-s)$	$f(s)$	$+\infty$

$]-\infty, -s[$, $]-s, s[$, $]s, +\infty[$: **3 solutions** ; si $\Delta = 0$, un extremum est nul : cette racine double et une autre : **2 solutions** ; si $\Delta > 0$, $f(-s)$ et $f(s)$ ont le même signe : une seule solution, dans $]-\infty, -s[$ ou dans $]s, +\infty[$: **1 solution**.

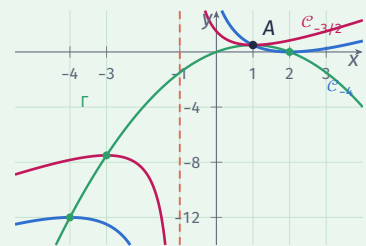
5. a) $x^3 - 6x + 4 = (x-2)(x^2 + 2x - 2)$, $\Delta = -432 < 0$: $S = \{2, -1 \pm \sqrt{3}\}$; $x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$, $p > 0$: $S = \{2\}$. b) $\Delta = 27(m-54)(m+54)$: 3 solutions si $|m| < 54$, 2 si $|m| = 54$, 1 si $|m| > 54$; $x^3 - 27x + 54 = (x-3)^2(x+6)$: $S = \{-6, 3\}$. c) On obtient $t^3 - 6t - 2 = 0$, $\Delta = -756 < 0$: **3** solutions.

■ Corrigé de l'exercice 25

- La tangente en M est dirigée par $\vec{u}(1, 2t)$: A est sur la normale $\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (a-t) + 2t(b-t) = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + (1-2b)t - a = 0$.
- Deux points $M \neq M'$ ont des normales distinctes (dirigées par $(-2t, 1)$, $(-2t', 1)$) : on compte les solutions de $t^3 + pt + q = 0$, $p = \frac{1-2b}{2}$, $q = -\frac{a}{2}$; $4p^3 + 27q^2 = \frac{27a^2 - 2(2b-1)^3}{4}$. Par l'exercice 24 : **trois** normales si $27a^2 < 2(2b-1)^3$; **deux** si $27a^2 = 2(2b-1)^3$ et $p \neq 0$, soit $A \neq (0, \frac{1}{2})$; **une** sinon.
- $A(0, 3)$: $0 < 250$: **3** normales ($t = 0, \pm\sqrt{5/2}$). $B(4, \frac{7}{2})$: $432 = 2 \times 6^3$: **2** ; $t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2)$: normales en $(-1, 1)$ et $(2, 4)$: $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, $y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}$. $C(1, 1)$: $27 > 2$: **1**.

■ Corrigé de l'exercice 26

- $f_m(x) = \frac{x^2 + m(x-1)}{x+1}$ ne dépend pas de m si et seulement si $x = 1$: tous les $\mathcal{C}_m$ passent par $A(1, \frac{1}{2})$; si $m \neq m'$, $f_m(x) = f_{m'}(x) \Leftrightarrow \frac{(m-m')(x-1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $x^2 + mx - m = (x+1)(x+m-1) + 1 - 2m$. Si $m = \frac{1}{2}$: droite $y = x - \frac{1}{2}$ privée de $(-1, -\frac{3}{2})$. Sinon : asymptotes $x = -1$, $y = x + m - 1$, centre $\Omega_m(-1, m-2)$; lieu des Ω_m : droite $x = -1$ privée de $(-1, -\frac{3}{2})$.
- $f'_m(x) = \frac{(x+1)^2 - (1-2m)}{(x+1)^2}$: pas d'extremum si $m \geq \frac{1}{2}$ ($f'_m > 0$) ; si $m < \frac{1}{2}$, f'_m change de signe en $-1 \pm \sqrt{1-2m}$: **deux extremums**.
- Analyse** : en un extremum, $x \neq -1$ et $(x+1)^2 = 1-2m$, d'où $m = -\frac{x^2+2x}{2}$, $\frac{1-2m}{x+1} = x+1$ et $y = 2x+m = x - \frac{x^2}{2}$. **Synthèse** : pour $x \neq -1$, $m = -\frac{x^2+2x}{2}$ vérifie $1-2m = (x+1)^2 > 0$ et x est l'abscisse d'un extremum de f_m : l'ensemble est Γ privée de $(-1, -\frac{3}{2})$. Tangente horizontale en A : $f'_m(1) = \frac{3+2m}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (et $A \in \Gamma$ ✓).



■ Corrigé de l'exercice 27

- Tangente à $\mathcal{P}_1$ en x_0 : $y = 2x_0x - x_0^2$; D en est une $\Leftrightarrow \alpha = 2x_0, \beta = -x_0^2 \Leftrightarrow \beta = -\frac{\alpha^2}{4}$. Tangente à $\mathcal{P}_2$ en x_0 : $y = (p-2x_0)x + x_0^2 + q$; D en est une $\Leftrightarrow x_0 = \frac{p-\alpha}{2}, \beta = x_0^2 + q \Leftrightarrow (\alpha-p)^2 = 4(\beta-q)$.
- Tangente commune $\Leftrightarrow \beta = -\frac{\alpha^2}{4}$ et $2\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + 4q = 0$, équation de discriminant $-4(p^2 + 8q)$: **deux, une** ou **aucune** tangente commune selon que $p^2 + 8q < 0, = 0, > 0$. Or $x^2 - (-x^2 + px + q) = 2x^2 - px - q$ a pour discriminant $p^2 + 8q$: deux tangentes $\Leftrightarrow$ paraboles **disjointes** ; une $\Leftrightarrow$ paraboles tangentes ; aucune $\Leftrightarrow$ paraboles sécantes.

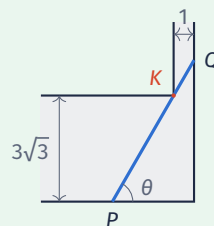
3. $p^2 + 8q = -36 < 0$; $2a^2 - 4a - 16 = 0 \iff a \in \{4, -2\}$: $D_1 : y = 4x - 4$, $D_2 : y = -2x - 1$, de contacts $A(2, 4)$, $B(-1, -8)$ et $C(-1, 1)$, $E(2, -5)$; $[AB]$ et $[CE]$ ont le même milieu $\Omega(\frac{1}{2}, -2)$: $ACBE$ est un **parallélogramme**. La symétrie de centre Ω , $M(x, y) \mapsto M'(1-x, -4-y)$, échange $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$: $M' \in \mathcal{P}_2 \iff -4-y = -(1-x)^2 + 2(1-x) - 5 = -x^2 - 4 \iff M \in \mathcal{P}_1$.

■ Corrigé de l'exercice 28

- $x = 0$ donne $1 \neq 0$. Pour $x \neq 0$, on divise par x^2 : $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) + m = 0$, avec $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$: $(E_m) \iff t^2 - 2t + m - 2 = 0$.
- $\varphi'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$: φ croît sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, décroît sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$; $\varphi(\pm 1) = \pm 2$: $x + \frac{1}{x} = t$ a 2 solutions si $|t| > 2$, 1 si $|t| = 2$ ($x = \pm 1$), 0 si $|t| < 2$.
- $h'(t) = 2(1-t)$: h croît sur $]-\infty, -2]$ de $-\infty$ à $h(-2) = -6$, décroît sur $[2, +\infty[$ de $h(2) = 2$ à $-\infty$.
- $(E_m) \iff h(t) = m$ et $x + \frac{1}{x} = t$ avec $|t| \geq 2$ (des t distincts donnent des x distincts) : $m > 2$: $\boxed{0}$; $m = 2$ ($t = 2, x = 1$) : $\boxed{1}$; $-6 < m < 2$ (un $t > 2$) : $\boxed{2}$; $m = -6$ ($t = -2, x = -1$, et $t = 4, x^2 - 4x + 1 = 0$) : $\boxed{3}$; $m < -6$ (un $t < -2$, un $t > 2$) : $\boxed{4}$. $S_{-6} = \{-1, 2 \pm \sqrt{3}\}$, $S_2 = \{1\}$ ($(x-1)^2(x^2+1) = 0$).

■ Corrigé de l'exercice 29

- $[PQ]$ passe par le coin K (figure) : $PK \sin \theta = 3\sqrt{3}$ (largeur du premier couloir) et $KQ \cos \theta = 1$ (largeur du second), d'où $L(\theta) = PK + KQ$; $L \rightarrow +\infty$ en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.
- $L'(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{3\sqrt{3} \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^3 \theta - 3\sqrt{3} \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$. Comme $\cos \theta > 0$: $L'(\theta) > 0 \iff \tan^3 \theta > (\sqrt{3})^3 \iff \tan \theta > \sqrt{3} \iff \theta > \frac{\pi}{3}$ ($t \mapsto t^3$ et $\tan$ sont strictement croissantes) : L décroît sur $]0, \frac{\pi}{3}]$, croît sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$; minimum $L(\frac{\pi}{3}) = 2 + 6 = \boxed{8}$.
- La barre doit tenir dans **toutes** les positions : $\ell \leq L(\theta)$ pour tout θ , soit $\ell \leq \min L$: la plus longue barre mesure $\boxed{8}$. Enfin $(\frac{1}{\cos \theta})'' = \frac{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} > 0$, de même $(\frac{1}{\sin \theta})'' > 0$: $L'' > 0$, L est **convexe**.



■ Corrigé de l'exercice 30

- $(x^2 - x - 2)^2 + 2x - 3 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = f(x)$. Ainsi $\delta(x) = f(x) - (2x - 3) = (x + 1)^2(x - 2)^2 \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de D ; -1 et 2 sont racines doubles de δ : $\delta(-1) = \delta'(-1) = 0$, soit $f(-1) = -5$, $f'(-1) = 2$: D est tangente en $(-1, -5)$, de même en $(2, 1)$: **bitangente**.
- $f(x) = 2x + m \iff (x^2 - x - 2)^2 = m + 3$. $m < -3$: $\boxed{0}$; $m = -3$: $x \in \{-1, 2\}$: $\boxed{2}$. Si $m > -3$: $x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = k$, $k = \pm \sqrt{m+3}$: $k = \sqrt{m+3}$ donne 2 solutions, $k = -\sqrt{m+3}$ en donne 2, 1, 0 selon que $m <, =, > \frac{81}{16} - 3 = \frac{33}{16}$: $-3 < m < \frac{33}{16}$: $\boxed{4}$; $m = \frac{33}{16}$: $\boxed{3}$; $m > \frac{33}{16}$: $\boxed{2}$.
- a) $g''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ a pour discriminant $12(3a^2 - 8b)$: deux racines simples, donc **deux inflexions**, si et seulement si $3a^2 > 8b$ (sinon $g'' \geq 0$). b) $(x^2 + Ux + V)^2 = x^4 + 2Ux^3 + (U^2 + 2V)x^2 + 2UVx + V^2$; **par identification** : $U = \frac{a}{2}$, $V = \frac{4b-a^2}{8}$, $\alpha = c - 2UV$, $\beta = d - V^2$, uniques. c) Une bitangente $y = \alpha'x + \beta'$ (contacts $x_1 \neq x_2$) fait de x_1, x_2 des racines doubles de $P = g - (\alpha'x + \beta')$ (si $P(x_1) = P'(x_1) = 0$, $P = (x - x_1)Q$ avec $Q(x_1) = 0$) : $P = (x - x_1)^2(x - x_2)^2 = (x^2 + Ux + V)^2$ et, par unicité, $\frac{3a^2 - 8b}{4} = U^2 - 4V = (x_1 - x_2)^2 > 0$. Réciproquement, si $3a^2 > 8b$, $x^2 + Ux + V$ a deux racines distinctes : $y = \alpha x + \beta$ est bitangente. **Bitangente** $\iff 3a^2 > 8b \iff$ **deux points d'inflexion**.

30 Corrigés : branches infinies

■ Corrigé de l'exercice 31

On sépare les cas selon le signe de x ou on factorise par $|x|$; une limite infinie en un réel donne une asymptote verticale, une limite finie ℓ en $\pm\infty$ l'asymptote $y = \ell$, et la position se lit sur le signe de $f(x) - \ell$.

a) $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $x \geq 0$, $f_1(x) = \frac{3x+2}{x-1} \rightarrow 3$ en $+\infty$; pour $x < 0$, $f_1(x) = \frac{-3x+2}{x-1} \rightarrow -3$ en $-\infty$. En 1, le numérateur vaut $5 > 0$: $\lim_{1^+} f_1 = +\infty$, $\lim_{1^-} f_1 = -\infty$. Asymptotes : $x = 1$, $y = 3$ en $+\infty$, $y = -3$ en $-\infty$. Pour $x > 1$, $f_1(x) - 3 = \frac{5}{x-1} > 0$; pour $x < 0$, $f_1(x) + 3 = \frac{-1}{x-1} > 0$: la courbe est **au-dessus** de ses deux asymptotes horizontales.

b) $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; en -2 le numérateur vaut $\sqrt{7}$: $\lim_{-2^+} f_2 = +\infty$, $\lim_{-2^-} f_2 = -\infty$. Comme $\sqrt{x^2+3} = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$, $f_2(x) = \frac{\sqrt{1+3/x^2}}{1+2/x} \rightarrow 1$ en $+\infty$ et $f_2(x) = \frac{-\sqrt{1+3/x^2}}{1+2/x} \rightarrow -1$ en $-\infty$. Asymptotes : $x = -2$, $y = 1$ en $+\infty$, $y = -1$ en $-\infty$.

Sur $]-2, +\infty[$, $x+2 > 0$ et $\sqrt{x^2+3} > x+2 \iff x^2+3 > x^2+4x+4 \iff x < -\frac{1}{4}$: la courbe est au-dessus de $y = 1$ sur $]-2, -\frac{1}{4}[$, la coupe en $(-\frac{1}{4}, 1)$, et est **au-dessous** sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$. Sur $]-\infty, -2[$: $x^2+3 - (x+2)^2 = -4x-1 > 0$, donc $\sqrt{x^2+3} > |x+2|$, et $f_2(x) + 1 = \frac{\sqrt{x^2+3} + (x+2)}{x+2} < 0$: **au-dessous** de $y = -1$.

c) $\sqrt{x^2+4} = 2 \iff x = 0$: $D_{f_3} = \mathbb{R}^*$, et par le conjugué $f_3(x) = \frac{x(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{x}$. En 0 : numérateur $\rightarrow 4$, d'où $\lim_{0^+} f_3 = +\infty$, $\lim_{0^-} f_3 = -\infty$ (asymptote $x = 0$). En $\pm\infty$: $f_3(x) = \pm\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + \frac{2}{x} \rightarrow \pm 1$. f_3 est impaire ; pour $x > 0$, $f_3(x) - 1 = \frac{\sqrt{x^2+4}-x+2}{x} > 0$: au-dessus de $y = 1$ en $+\infty$ et, par symétrie de centre O , au-dessous de $y = -1$ en $-\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 32

On repère les zéros du dénominateur, puis le signe de ce dénominateur de chaque côté.

a) $1 - 2 \cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3}$ (dans $]-\pi, \pi[$). Sur $]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$, $\cos x > \frac{1}{2}$ et $1 - 2 \cos x < 0$; ailleurs $1 - 2 \cos x > 0$. D'où $\lim_{\frac{\pi}{3}^-} f_1 = -\infty$, $\lim_{\frac{\pi}{3}^+} f_1 = +\infty$, $\lim_{-\frac{\pi}{3}^+} f_1 = -\infty$, $\lim_{-\frac{\pi}{3}^-} f_1 = +\infty$: $x = \pm\frac{\pi}{3}$ (et, par 2π -périodicité, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ sur $\mathbb{R}$).

b) $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x + \cos x$. Sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$, $x + \frac{\pi}{4} \in]0, \pi[$, donc $\sin x + \cos x > 0$, et il tend vers 0^+ aux deux bornes : $f_2(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+$ et quand $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-$: $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2} > 0$ et $\tan x \rightarrow +\infty$; quand $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+$, $x < 0$ et $\tan x \rightarrow -\infty$: dans les deux cas $f_3(x) \rightarrow +\infty$ (f_3 est paire) : $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

d) Avec $u = \frac{1}{x} \in]0, 2\pi[$: $1 - \cos u > 0$ et $f_4(x) = \frac{u^2}{1-\cos u}$. Quand $x \rightarrow \frac{1}{2\pi}^+$, $u \rightarrow 2\pi^-$, $1 - \cos u \rightarrow 0^+$ et $u^2 \rightarrow 4\pi^2$: asymptote $x = \frac{1}{2\pi}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0^+$ et $\frac{1-\cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2}$: asymptote $y = 2$. Enfin

$1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2} < 2 \cdot \frac{u^2}{4} = \frac{u^2}{2}$, donc $f_4(x) > 2$: la courbe est **au-dessus** de $y = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 33

On suit le tableau de décision : $\lim f$, puis $\lim \frac{f(x)}{x}$, puis $\lim (f(x) - ax)$.

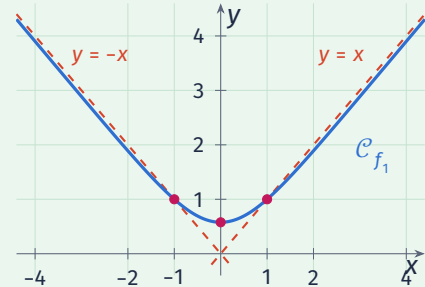
a) $D_{f_1} = \mathbb{R}$ et f_1 est paire. Pour $x > 0$:

$$\frac{f_1(x)}{x} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} \rightarrow 1. \text{ On écrit } f_1(x) - x = \frac{x^2 + 1 - x\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + 3}} \text{ et l'on}$$

multiplie par la quantité conjuguée ; comme

$$(x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 + 3) = 1 - x^2 :$$

$$f_1(x) - x = \frac{1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}(x^2 + 1 + x\sqrt{x^2 + 3})} \rightarrow 0$$



(degré 2 sur degré 3) : $y = x$ en $+\infty$, et par parité

$y = -x$ en $-\infty$. Pour $x > 0$, l'écart a le signe de $1 - x^2$:

au-dessus de $y = x$ sur $]0, 1[$, au-dessous sur $]1, +\infty[$,

point commun $(1, 1)$; par symétrie, $\mathcal{C}_{f_1}$ coupe $y = -x$ en $(-1, 1)$.

b) $\sin x \geq -1$, donc $f_2(x) \geq \sqrt{x} - 1 \rightarrow +\infty$; et $\frac{f_2(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ car $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$: branche parabolique de direction (Ox) .

c) Si $x \geq 2$, $x + |x - 2| = 2x - 2 \geq 2$; si $x < 2$, $x + |x - 2| = 2$: le dénominateur est toujours ≥ 2 , $D_{f_3} = \mathbb{R}$. En $+\infty$: $x^2 + 3 = (x - 1)(x + 1) + 4$ donne $f_3(x) = \frac{x^2 + 3}{2(x - 1)} = \frac{x + 1}{2} + \frac{2}{x - 1}$: asymptote $y = \frac{x + 1}{2}$, courbe au-dessus. En $-\infty$: $f_3(x) = \frac{x^2 + 3}{2} \rightarrow +\infty$ et $\frac{f_3(x)}{x} \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) (arc de parabole). Une asymptote d'un côté, une branche parabolique de l'autre.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. Pour $x \geq 0$: $(x + 1)(x + m - 1) = x^2 + mx + m - 1$, donc $x^2 + mx = (x + 1)(x + m - 1) + (1 - m)$. Pour $x < 0$: $(x + 1)(x - m - 1) = x^2 - mx - m - 1$, donc $x^2 - mx = (x + 1)(x - m - 1) + (m + 1)$. On divise par $x + 1$.

2. Comme $\frac{1 - m}{x + 1}$ et $\frac{m + 1}{x + 1}$ tendent vers 0 en $\pm\infty$, la courbe admet les asymptotes $(\Delta_1) : y = x + m - 1$ en $+\infty$ et $(\Delta_2) : y = x - m - 1$ en $-\infty$. En -1 (où $|x| = -x$), le numérateur tend vers $1 + m > 0$: $\lim_{-1^+} f_m = +\infty$, $\lim_{-1^-} f_m = -\infty$: asymptote $x = -1$. Les deux asymptotes obliques sont **parallèles** (pente 1) et **distinctes** ($m - 1 \neq -m - 1$ car $m > 0$).

3. En $+\infty$, $f_m(x) - (x + m - 1) = \frac{1 - m}{x + 1}$: si $m < 1$, $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de (Δ_1) ; si $m > 1$, au-dessous ; si $m = 1$, $f_1(x) = x$ pour tout $x \geq 0$: **la courbe est confondue avec son asymptote** sur $[0, +\infty[$. En $-\infty$ ($x < -1$), $f_m(x) - (x - m - 1) = \frac{m + 1}{x + 1} < 0$: au-dessous de (Δ_2) .

4. Le point $A(0, m - 1)$ de (Δ_1) est à la distance $\frac{|0 - (m - 1) - m - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2m}{\sqrt{2}} = m\sqrt{2}$ de $(\Delta_2) : x - y - m - 1 = 0$.

$$d = m\sqrt{2}, \text{ et } d = 2 \iff m = \sqrt{2}.$$

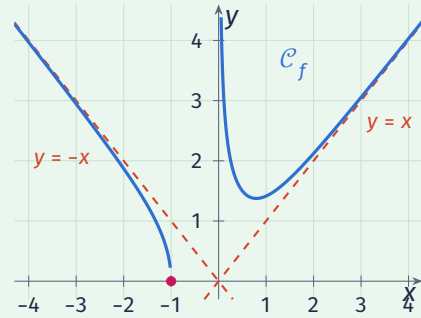
■ Corrigé de l'exercice 35

1. $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ avec $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$: $\frac{x^3+1}{x} \geq 0 \iff \frac{x+1}{x} \geq 0$ ($x \neq 0$) :
 $D_f =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$, et $f(x)^2 = \frac{x^3+1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$.

2. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{x^3+1}{x} \rightarrow +\infty$: $\lim_{0^+} f = +\infty$, asymptote $x = 0$. Sur $] -\infty, -1]$, $(f^2)'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} < 0$: f^2 décroît, donc $f = \sqrt{f^2}$ aussi.

3. a) Pour $x > 0$, $f(x) + x > 0$ et
 $f(x) - x = \frac{f(x)^2 - x^2}{f(x) + x} = \frac{1}{x(f(x) + x)} > 0$. Comme
 $f(x) + x \rightarrow +\infty$, $f(x) - x \rightarrow 0$:
 $y = x$ asymptote en $+\infty$, courbe au-dessus. Puis
 $f(x) > x$ donne $f(x) + x > 2x$, d'où
 $0 < f(x) - x < \frac{1}{2x^2}$.

b) Pour $x \leq -1$, $f(x) \geq 0 > x$ et $f(x) - x \geq -x = |x|$;
 donc $f(x) + x = \frac{f(x)^2 - x^2}{f(x) - x} = \frac{1}{x(f(x) - x)} < 0$ et
 $|f(x) + x| \leq \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$: $y = -x$ asymptote en $-\infty$,
 courbe **au-dessous**.



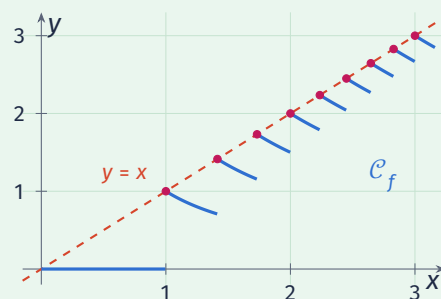
4. Pour $x < -1$, $x + 1 < 0$ et $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)^2}} = -\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x(x+1)}} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -1^-$ (car $x(x+1) \rightarrow 0^+$) : f n'est pas dérivable à gauche en -1 , et C_f admet en $A(-1, 0)$ une **demi-tangente verticale**.

■ Corrigé de l'exercice 36

1. $E((-x)^2) = E(x^2)$, donc $f(-x) = -f(x)$: f est **impaire**. Si $0 < |x| < 1$, $0 < x^2 < 1$ et $E(x^2) = 0$: $f(x) = 0$. Si $\sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1}$, alors $n \leq x^2 < n+1$, $E(x^2) = n$ et $f(x) = \frac{n}{x}$: C_f est formée d'**arcs d'hyperboles**.

2. Par définition, $x^2 - 1 < E(x^2) \leq x^2$; on divise par $x > 0$: $x - \frac{1}{x} < f(x) \leq x$. Donc $0 \leq x - f(x) < \frac{1}{x} \rightarrow 0$: $(\Delta) : y = x$ est asymptote en $+\infty$. Comme f et $x \mapsto x$ sont impaires, $f(x) - x = -(f(-x) - (-x)) \rightarrow 0$ en $-\infty$: (Δ) est asymptote en $\pm\infty$.

3. Pour $x > 0$, $f(x) \leq x$, avec égalité si et seulement si $E(x^2) = x^2$, c'est-à-dire $x^2 \in \mathbb{N}$: C_f est **au-dessous** de (Δ) sur $]0, +\infty[$ et la **touche** aux points d'abscisse $\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; par imparité, elle est au-dessus sur $] -\infty, 0[$ et la touche en $-\sqrt{n}$: une infinité de points communs. Pas d'asymptote verticale : f est nulle près de 0, donc $\lim_{0^+} f = 0$.



4. À gauche de $\sqrt{n}$, $f(x) = \frac{n-1}{x} \rightarrow \frac{n-1}{\sqrt{n}}$, alors que $f(\sqrt{n}) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$: f n'est **pas continue** en $\sqrt{n}$, et la courbe « saute » de $\sqrt{n} - \frac{n-1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, saut qui tend vers 0 : les arcs se resserrent contre l'asymptote.

31

Corrigés : concavité, inflexion

■ Corrigé de l'exercice 37

On étudie le signe de f'' : courbe convexe là où $f'' \geq 0$, concave là où $f'' \leq 0$; inflexion en $a \in D_f$ lorsque f'' s'annule en a **en changeant de signe**.

- a) $f'_1(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ et $f''_1(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3)$: convexe sur $]-\infty, 1]$ et sur $[3, +\infty[$, concave sur $[1, 3]$; f''_1 change de signe en 1 et en 3 : **inflexions (1, 11) et (3, 27)**.
- b) $f'_2(x) = 15x^4 + 20x^3$ et $f''_2(x) = 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x+1)$. Pour $x \neq 0$, f''_2 a le signe de $x+1$: concave sur $]-\infty, -1]$, convexe sur $[-1, +\infty[$: **une seule inflexion, (-1, 2)**. En 0, $f''_2(0) = 0$ mais f''_2 est positive de part et d'autre : **0 n'est pas un point d'inflexion**.
- c) $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $x^2 + 5 = (x+2)(x-2) + 9$: $f_3(x) = x - 2 + \frac{9}{x+2}$, $f'_3(x) = 1 - \frac{9}{(x+2)^2}$, $f''_3(x) = \frac{18}{(x+2)^3}$, du signe de $x+2$: concave sur $]-\infty, -2[$, convexe sur $]-2, +\infty[$. La concavité change en -2, mais $-2 \notin D_{f_3}$: **aucun point d'inflexion**.
- d) $f'_4(x) = 1 - \sin x$, $f''_4(x) = -\cos x$: concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, convexe sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: inflexions **$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$** , sur la droite $y = x$ (car $\cos x = 0$). En $\frac{\pi}{2}$, $f'_4 = 0$: tangente horizontale sans extremum ($f'_4 \geq 0$).

■ Corrigé de l'exercice 38

1. $\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x\right) = f(x)$.
Puis $f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x$ et
 $f''(x) = -4 \sin 2x + 4 \cos 2x$: **$f'' = -4f$** .

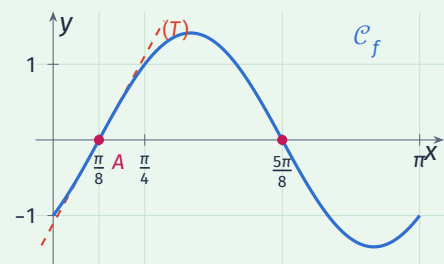
2. f'' a le signe **opposé** de f et s'annule en changeant de signe exactement là où f le fait : les points d'inflexion sont les points de $\mathcal{C}_f$ sur (Ox) .

$$f(x) = 0 \iff 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} :$$

$$A\left(\frac{\pi}{8}, 0\right), A'\left(\frac{5\pi}{8}, 0\right). \text{ Comme } f < 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{8}, \pi\right]$$

$$\text{et } f > 0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right] : \mathcal{C}_f \text{ est convexe sur } \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \text{ et } \left[\frac{5\pi}{8}, \pi\right], \text{ concave sur } \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right].$$

3. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$: **$(T) : y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$** . Avec $t = x - \frac{\pi}{8}$, $f(x) = \sqrt{2} \sin 2t$ et l'ordonnée sur (T) est $2\sqrt{2}t$: l'écart vaut **$\sqrt{2}(\sin 2t - 2t)$** , positif pour $t < 0$, négatif pour $t > 0$ (car $|\sin 2t| < |2t|$) : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) à gauche de A (partie convexe) et au-dessous à droite (partie concave) : (T) traverse $\mathcal{C}_f$.

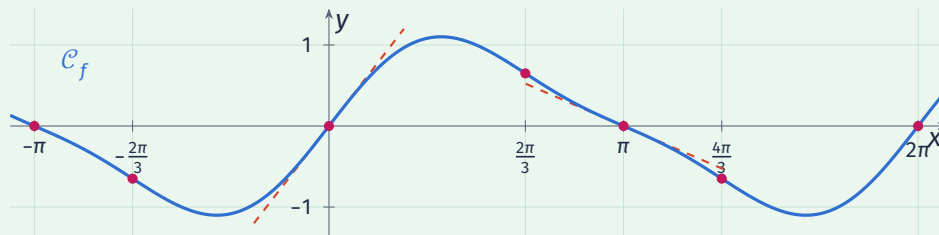


■ Corrigé de l'exercice 39

1. $f(-x) = -\sin x - \frac{1}{4} \sin 2x = -f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$. $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$, $f''(x) = -\sin x - \sin 2x = -\sin x - 2 \sin x \cos x = \boxed{-\sin x(1 + 2 \cos x)}$.
2. Sur $[0, \pi]$: $\sin x \geq 0$, et $1 + 2 \cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, < 0 sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$; donc $f'' < 0$ sur $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, $f'' > 0$ sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$. f'' est impaire : $f'' > 0$ sur $\left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$, $f'' < 0$ sur $\left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$. Courbe concave sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ et $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, convexe sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ et $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. f'' change de signe en $-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}$, et en π (par périodicité, $f'' < 0$ juste après π). Avec $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$:

$$\boxed{O(0,0), \quad A\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right), \quad A'\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{8}\right), \quad B(\pi,0)}.$$

3. $f'(0) = \frac{3}{2}$ et $f'(\pi) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$: $y = \frac{3}{2}x$ en O , $y = -\frac{1}{2}(x - \pi)$ en B .
4. $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, donc $f'(x) = \cos^2 x + \cos x - \frac{1}{2} = \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$. Comme $\cos x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, son carré est dans $\left[0, \frac{9}{4}\right]$: $\boxed{-\frac{3}{4} \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}}$. La pente maximale $\frac{3}{2}$ est atteinte pour $\cos x = 1$ (en O), la pente minimale $-\frac{3}{4}$ pour $\cos x = -\frac{1}{2}$ (en A et A') : **les pentes extrêmes sont atteintes en des points d'inflexion** (là où f'' change de signe, f' change de sens de variation).



■ Corrigé de l'exercice 40

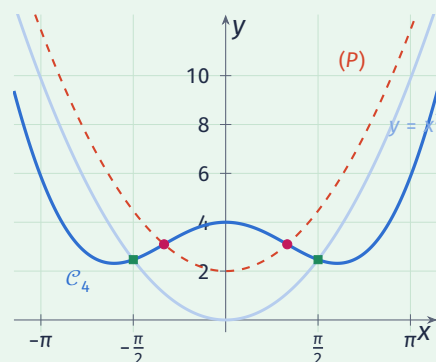
1. $p_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Si n est pair, $x^{n-2} \geq 0$: courbe convexe, sans inflexion. Si n est impair, $p_n''(x)$ a le signe de x : concave sur $] -\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$, d'où une inflexion en O . Ainsi $\boxed{\text{inflexion} \iff n \text{ impair}}$. Pour $n = 4$, $p_4''(0) = 0$ et pourtant $p_4''(x) = 12x^2 \geq 0$: pas d'inflexion.
2. $r_b'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+b}}$ et $r_b''(x) = \frac{\sqrt{x^2+b} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+b}}}{x^2+b} = \boxed{\frac{b}{(x^2+b)^{3/2}}}$. Si $b > 0$, $D = \mathbb{R}$ et $r_b'' > 0$: **convexe** sur $\mathbb{R}$. Si $b < 0$, $D =]-\infty, -\sqrt{-b}] \cup [\sqrt{-b}, +\infty[$ et $r_b'' < 0$: **concave** sur chacun de ces deux intervalles.
3. $\tan' = 1 + \tan^2$, donc $\tan'' = 2 \tan \times (1 + \tan^2)$, du signe de $\tan x$: concave sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\boxed{\text{inflexion en } O, \text{ tangente } y = x}$. La tangente traverse la courbe : $\tan x < x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $\tan x > x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

■ Corrigé de l'exercice 41

- $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$; on dérive ce produit : $(g \circ u)'' = u'' \times (g' \circ u) + u' \times u' \times (g'' \circ u)$:
 $(g \circ u)'' = u'^2 (g'' \circ u) + u'' (g' \circ u)$.
- a) $g(t) = \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$: $g'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$, $g''(t) = \frac{2}{t^3} > 0$, donc $\left(\frac{1}{u}\right)'' = \frac{2u'^2}{u^3} - \frac{u''}{u^2} \geq 0$ car $u'' \leq 0$: **convexe**.
 b) $g(t) = \sqrt{t}$: $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0$, $g''(t) = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} < 0$, donc $(\sqrt{u})'' = -\frac{u'^2}{4u\sqrt{u}} + \frac{u''}{2\sqrt{u}} \leq 0$: **concave**.
 c) $g(t) = t^2$: $(u^2)'' = 2u'^2 + 2u u'' \geq 0$ car $u \geq 0$ et $u'' \geq 0$: **convexe**.
- $u(x) = 3 + 2x - x^2 = (3-x)(1+x) > 0$ sur $] -1, 3[$ et $u'' = -2 < 0$: par a), $x \mapsto \frac{1}{3 + 2x - x^2}$ est convexe.
 $\cos > 0$ et $\cos'' = -\cos < 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: par b), $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ est concave. $u(x) = 6x - x^2 - 8 = -(x-2)(x-4) > 0$ sur $]2, 4[$ et $u'' = -2 < 0$: par b), $x \mapsto \sqrt{6x - x^2 - 8}$ est concave (c'est le demi-cercle de centre $(3, 0)$ et de rayon 1).
 4. $\frac{1}{u} = (1+x^2)^{-1/2}$: $\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -x(1+x^2)^{-3/2}$ et $\left(\frac{1}{u}\right)''(x) = \frac{-(1+x^2)+3x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$, négative sur $]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, positive ailleurs : inflexions $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, la courbe n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$. Aucune contradiction : 2.a) suppose u **concave** ; ici $u'' > 0$ et le terme $-\frac{u''}{u^2}$ l'emporte près de 0.

■ Corrigé de l'exercice 42

- $f_m''(x) = 2 - m \cos x$. Si $|m| \leq 2$: $|m \cos x| \leq |m| \leq 2$, donc $f_m'' \geq 0$: convexe. Si $m > 2$, $f_m''(0) = 2 - m < 0$; si $m < -2$, $f_m''(\pi) = 2 + m < 0$: f_m'' prend des valeurs négatives.
 $\mathcal{C}_m$ convexe sur $\mathbb{R} \iff |m| \leq 2$.
- $f_4''(x) = 2 - 4 \cos x < 0 \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff x \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$ (sur $[-\pi, \pi]$). $\mathcal{C}_4$ est concave sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, convexe sur $[-\pi, -\frac{\pi}{3}]$ et $[\frac{\pi}{3}, \pi]$: inflexions $\left(\pm\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9} + 2\right)$.
- $f_m''(x_0) = 2 - m \cdot \frac{2}{m} = 0$. Comme $\cos x_0 \neq \pm 1$, $\sin x_0 \neq 0$: $\cos$ est strictement monotone au voisinage de x_0 (sa dérivée $-\sin$ y garde un signe constant), donc $f_m'' = m\left(\frac{2}{m} - \cos x\right)$ **change de signe** en x_0 : inflexion. Et
 $f_m(x_0) = x_0^2 + m \cdot \frac{2}{m} = x_0^2 + 2$: le point est sur (P).
 Réciproquement, soit $M(a, a^2 + 2)$. Si $\cos a \notin \{0, 1, -1\}$, M est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_m$ pour $m = \frac{2}{\cos a}$ ($|m| > 2$). Si $\cos a = 0$, $f_m''(a) = 2 \neq 0$; si $\cos a = \pm 1$, il faudrait $m = \pm 2$, et $f_m'' \geq 0$ ne change pas de signe.
 (P) privée des points d'abscisse $\frac{k\pi}{2}$.
- $f_m(x)$ ne dépend pas de m si et seulement si $\cos x = 0$: toutes les courbes passent par les **points fixes** $F_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2\right)$, situés sur la parabole $y = x^2$ (carrés verts).



32

Corrigés : symétries, réduction

■ Corrigé de l'exercice 43

1. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0 : D_f = \mathbb{R}$. Pour tout x , $(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5 = x^2 - 4x + 5$, donc $f(4 - x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2-4x+5}} = -f(x)$, soit $f(4 - x) + f(x) = 0 = 2 \times 0 : \Omega(2, 0)$ est un centre de symétrie.
2. Pour $x > 2$, avec $t = x - 2 > 0 : f(x) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/t^2}} \rightarrow 1 : \text{asymptote } y = 1 \text{ en } +\infty$, et $f(x) < 1$ car $\sqrt{t^2+1} > t : \text{courbe au-dessous}$. Puis

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+5}}}{x^2 - 4x + 5} = \frac{(x^2 - 4x + 5) - (x-2)^2}{(x^2 - 4x + 5)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)^{3/2}} > 0 :$$

f est **croissante** sur $[2, +\infty[$, de $f(2) = 0$ vers 1.

3. Une symétrie centrale conserve le sens de variation : f est croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	-1	0	1

Asymptotes : $y = -1$ en $-\infty$ (courbe au-dessus) et $y = 1$ en $+\infty$ (courbe au-dessous). Enfin $f''(x) = -\frac{3}{2}(2x - 4)(x^2 - 4x + 5)^{-5/2} = \frac{-3(x-2)}{(x^2-4x+5)^{5/2}} : \text{convexe sur }]-\infty, 2]$, concave sur $[2, +\infty[: \Omega \text{ est un point d'inflexion, de tangente } y = x - 2 (f'(2) = 1).$

■ Corrigé de l'exercice 44

1. a) $|x| - 1 = 0 \iff x = \pm 1 : D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, symétrique, et $f_1(-x) = f_1(x) : f_1$ est paire. $I = [0, 1[\cup]1, +\infty[$, puis symétrie d'axe (Oy) .
- b) $1 + \sin^2 x \geq 1 : D_{f_2} = \mathbb{R}$. $\cos(2x + 2\pi) = \cos 2x$ et $\sin^2(x + \pi) = \sin^2 x : \text{période } \pi ; f_2(-x) = f_2(x) : \text{paire} ; \text{donc } f_2(\pi - x) = f_2(x - \pi) = f_2(x) : \text{axe } x = \frac{\pi}{2}$. $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$ (on obtient $[0, \pi]$) et translations de vecteurs $k\pi \vec{i}$.
- c) $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, et $x \in D_{f_3} \iff 4 - x \in D_{f_3} ; (4 - x)((4 - x) - 4) = x(x - 4)$, donc $f_3(4 - x) = f_3(x) : \text{axe } x = 2$. $I = [2, 4[\cup]4, +\infty[$, puis symétrie d'axe $x = 2$.
- d) $D_{f_4} = \mathbb{R}$, f_4 est 2π -périodique ; $f_4(-x) = 1 - \sin x | \cos x |$, donc $f_4(-x) + f_4(x) = 2 : \text{centre } (0, 1) ; f_4(\pi - x) = 1 + \sin x | -\cos x | = f_4(x) : \text{axe } x = \frac{\pi}{2}$. $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, où $\cos x \geq 0$ et $f_4(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x$; puis axe $x = \frac{\pi}{2}$ ($[0, \pi]$), centre $(0, 1)$ ($[-\pi, \pi]$), translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$. (π n'est pas une période : $f_4(x + \pi) = 2 - f_4(x)$.)
2. L'axe des ordonnées est un axe si et seulement si, pour tout x , $\sin(2x + \varphi) = \sin(-2x + \varphi)$. Or $\sin(2x + \varphi) - \sin(\varphi - 2x) = 2 \cos \varphi \sin 2x$, nul pour tout x si et seulement si $\cos \varphi = 0$ (prendre $x = \frac{\pi}{4}$) : $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (et alors $\sin(2x + \varphi) = \pm \cos 2x$).

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $2 - \cos 2x \geq 1 > 0 : D_f = \mathbb{R}$. $f(x + 2\pi) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$, et $f(\pi - x) = \frac{\sin x}{2 - \cos(2\pi - 2x)} = f(x)$: $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe. On étudie f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; l'axe $x = \frac{\pi}{2}$ donne $[0, \pi]$, la symétrie de centre O donne $[-\pi, \pi]$, la périodicité donne $\mathbb{R}$.

2. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, d'où $2 - \cos 2x = 1 + 2\sin^2 x$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2\sin^2 x}$; puis

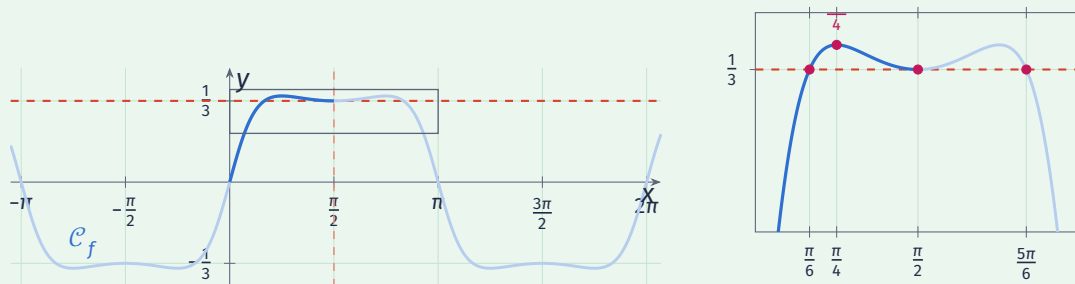
$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + 2\sin^2 x) - \sin x \cdot 4 \sin x \cos x}{(1 + 2\sin^2 x)^2} = \frac{\cos x (1 - 2\sin^2 x)}{(1 + 2\sin^2 x)^2} = \frac{\cos x \cos 2x}{(1 + 2\sin^2 x)^2}.$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geq 0$, et $\cos 2x > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}[$, < 0 sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$: f croît sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et décroît sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, avec $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$ (tangentes horizontales en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$). $f'(0) = 1$: tangente $y = x$ en O .

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	-
f	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{3}$

3. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq f \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$; par l'axe, de même sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$; par imparité, $-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq f \leq 0$ sur $[-\pi, 0]$; par périodicité, $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout réel x .

4. $f(x) = \frac{1}{3} \iff 3 \sin x = 1 + 2\sin^2 x \iff (2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 : S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$. La droite $y = \frac{1}{3}$ coupe $\mathcal{C}_f$ en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$, et lui est **tangente** en $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3})$, minimum local de f .



En foncé : la partie étudiée, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; le reste s'obtient par l'axe $x = \frac{\pi}{2}$, le centre O et la période 2π . À droite : zoom sur $[0, \pi]$ (la droite $y = \frac{1}{3}$ est tangente en $\frac{\pi}{2}$).

■ Corrigé de l'exercice 46

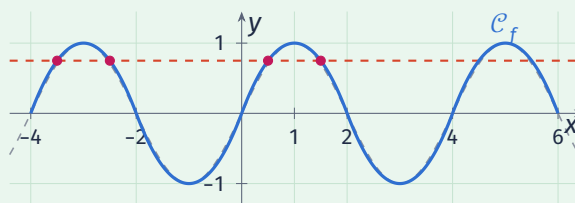
1. Si $x \in [-2, 0]$, $-x \in [0, 2]$ et $f(x) = -f(-x) = x(2 + x)$. Si $x \in [2, 4]$, $x - 4 \in [-2, 0]$ et $f(x) = f(x - 4) = (x - 4)(x - 2)$. En 0, les formules donnent 0 ($f(0) = 0$ par imparité) ; en 2, elles donnent 0, et $f(-2) = 0 = f(2)$, conformément à la période.

2. Si $x \in [-2, 0]$: $f(x + 2) = (x + 2)(-x) = -f(x)$; si $x \in [0, 2]$: $f(x + 2) = x(x - 2) = -f(x)$. L'égalité vaut sur $[-2, 2]$, de longueur 4, donc sur $\mathbb{R}$: $f(x + 2) = -f(x)$. Alors $f(2 - x) = -f(x - 2) = -f(x + 2) = f(x)$: $x = 1$ est un axe ; et $f(4 - x) = f(-x) = -f(x)$: $\Omega(2, 0)$ est un centre.

3. En 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = 2 - x$ si $x \in]0, 2]$, $2 + x$ si $x \in [-2, 0[$: limite 2, $f'(0) = 2$. En 2 : $\frac{f(x)}{x-2} = -x \rightarrow -2$ à gauche, $x-4 \rightarrow -2$ à droite : $f'(2) = -2$. Ailleurs f est polynomiale par morceaux, et $f'(-2) = f'(2)$ par périodicité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2 - 2|x|$ sur $[-2, 2]$.

4. Sur $[0, 2]$:
 $x(2-x) = \frac{3}{4} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$. Sur $[-2, 0]$ et $[2, 4]$, $f \leq 0$ (par imparité et par 2) : aucune solution. Sur $[-4, -2]$, $f(x) = f(x+4) : x+4 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

$$S = \left\{-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$



En pointillés gris : $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, très proche (écart $< 0,06$).

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $(2-x)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$, et de même $(2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = x^2 + 1$: les deux dénominateurs, strictement positifs, s'échangent quand on remplace x par $2-x$. Donc $f(2-x) = f(x)$: $x = 1$ est un axe.
2. Avec $x = 1+t$: $x^2 + 1 = t^2 + 2t + 2$ et $x^2 - 4x + 5 = t^2 - 2t + 2$, dont le produit vaut $(t^2 + 2)^2 - 4t^2 = t^4 + 4$:

$$f(1+t) = \frac{(t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 2)}{t^4 + 4} = \frac{2(t^2 + 2)}{t^4 + 4}.$$
3. $\varphi'(w) = \frac{2(w^2+4) - 2(w+2) \cdot 2w}{(w^2+4)^2} = \frac{-2(w^2+4w-4)}{(w^2+4)^2}$; $w^2 + 4w - 4$ a pour racines $-2 \pm 2\sqrt{2}$, et $w_0 = 2\sqrt{2} - 2 > 0$. φ croît sur $[0, w_0]$, décroît sur $[w_0, +\infty[$. Pour $x \geq 1$, $f(x) = \varphi((x-1)^2)$ et $x \mapsto (x-1)^2$ est croissante sur $[1, +\infty[$: f croît sur $[1, x_0]$ et décroît sur $[x_0, +\infty[$, où $x_0 = 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \approx 1,91$. Par l'axe : f croît sur $]-\infty, 2-x_0]$, décroît sur $[2-x_0, 1]$ ($M = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, voir 4) :

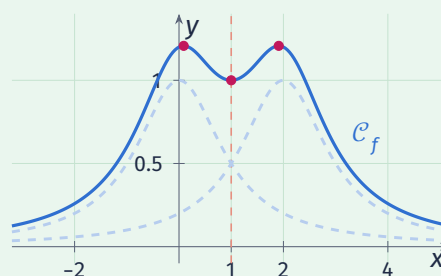
x	$-\infty$	$2-x_0$	1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
f	0	$\nearrow$ M	$\searrow$ 1	$\nearrow$ M	$\searrow$ 0

4. $\varphi(w_0) = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}-2)^2 + 4} = \frac{4\sqrt{2}}{16-8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})}{8}$:

$$\max f = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1,21, \text{ atteint en } 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 2} ;$$

$$f(1) = 1 \text{ est un minimum local ; } \lim_{\pm\infty} f = 0.$$

Chaque cloche a pour maximum 1 (en 0 et en 2) ; leur somme dépasse 1, et ses deux sommets sont **rapprochés** de l'axe ($\approx 0,09$ et 1,91), avec $f(0) = f(2) = \frac{6}{5}$.



■ Corrigé de l'exercice 48

1. $x^2 - 2x = x(x - 2)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Si $\Omega(a, b)$ est un centre, $x \in D_f \iff 2a - x \in D_f$: l'ensemble $\{0, 2\}$ des valeurs interdites est conservé par $x \mapsto 2a - x$. Donc $2a = 2a - 0 \in \{0, 2\}$; si $2a = 0$, alors $2a - 2 = -2 \notin \{0, 2\}$: impossible. Ainsi $\boxed{a = 1}$.

2. $x^3 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2x)(x - 1) + 2 - 2x$, d'où $f(x) = x - 1 - \frac{2(x-1)}{x(x-2)}$; la fraction tend vers 0 : $\boxed{(\Delta) : y = x - 1}$ en $\pm\infty$. Si $\Omega(1, b)$ est un centre :

$$2b = f(2 - x) + f(x) = [f(x) - (x - 1)] + [f(2 - x) - (2 - x - 1)] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(car $2 - x \rightarrow -\infty$). Donc $\boxed{b = 0}$: le centre est sur (Δ) .

3. $(X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 2 = X^3 - 3X$ et $(X + 1)^2 - 2(X + 1) = X^2 - 1$: $f(1 + X) = \frac{X^3 - 3X}{X^2 - 1}$, fonction **impaire** de X ; donc $f(2 - x) + f(x) = 0$: $\boxed{\Omega(1, 0) \text{ est un centre}}$. **Pas d'axe** : comme en 1, un axe serait $x = 1$, et l'on aurait $f(2 - x) = f(x) = -f(x)$, donc $f = 0$ sur D_f , faux ($f(3) = \frac{2}{3}$).

4. $f(1 + X) = X - \frac{2X}{X^2 - 1}$, donc

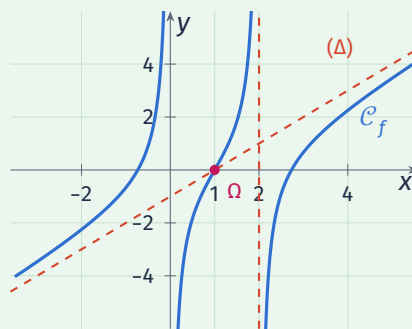
$$f'(x) = 1 - \frac{2(X^2 - 1) - 4X^2}{(X^2 - 1)^2} = 1 + \frac{2(X^2 + 1)}{(X^2 - 1)^2} > 0 :$$

f est **croissante** sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, avec $\lim_{0^-} f = \lim_{2^-} f = +\infty$, $\lim_{0^+} f = \lim_{2^+} f = -\infty$

(asymptotes $x = 0$ et $x = 2$). Puis $f''(x) = \frac{-4X(X^2 + 3)}{(X^2 - 1)^3}$:

$f'' < 0$ pour $0 < x < 1$, $f'' > 0$ pour $1 < x < 2$:

$\boxed{\Omega \text{ est un point d'inflexion}}$.



5. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$: comme en 1, un axe ou un centre aurait pour abscisse $a = \frac{1}{2}$ (milieu de 0 et 1). En $\pm\infty$, $g(x) \rightarrow 1$: asymptote $y = 1$; comme en 2, un centre serait sur cette asymptote : $\Omega(\frac{1}{2}, 1)$.

Or $g(1 - x) = \frac{(2-x)^2}{(1-x)(-x)} = \frac{(2-x)^2}{x(x-1)}$, d'où

$$g(1 - x) - g(x) = \frac{(2 - x)^2 - (x + 1)^2}{x(x - 1)} = \frac{3(1 - 2x)}{x(x - 1)} \neq 0 \quad (x \neq \frac{1}{2}), \quad g(1 - x) + g(x) = 2 + \frac{5}{x(x - 1)} \neq 2.$$

$\boxed{C_g \text{ n'a ni axe ni centre de symétrie}}$.

33

Corrigés : études complètes

■ Corrigé de l'exercice 49

1. Pour tout réel x , $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -3x^5 + 10x^3 = -f(x)$: f est **impaire**, C_f est symétrique par rapport à O : on étudie f sur $[0, +\infty[$ et l'on complète par la symétrie de centre O . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = 3x^4 - 10x^2 \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) . Par imparité,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\frac{f(x)}{x}$ (paire) $\rightarrow +\infty$: même direction en $-\infty$.

2. $f'(x) = 15x^4 - 30x^2 = 15x^2(x^2 - 2)$. Sur $[0, +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $x - \sqrt{2}$ (nul seulement en 0 et $\sqrt{2}$) : f décroît strictement sur $[0, \sqrt{2}]$, croît strictement sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, avec $f(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 20\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$, donc (imparité) $f(-\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$: tableau ci-dessous.
3. $f''(x) = 60x^3 - 60x = 60x(x-1)(x+1)$ s'annule en changeant de signe en $-1, 0, 1$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $]-\infty, -1]$ et $[0, 1]$, **convexe** sur $[-1, 0]$ et $[1, +\infty[$: trois points d'inflexion $O, I(1, -7)$ et $I'(-1, 7)$. Tangente en O : $f'(0) = 0$, $y = 0$; or $f(x) = x^3(3x^2 - 10)$ est > 0 juste à gauche de 0, < 0 juste à droite : $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente, et O n'est pas un extremum. En I : $f'(1) = 15 - 30 = -15$, d'où $y = -15(x - 1) - 7$: $T_I : y = -15x + 8$; par symétrie, $T_{I'} : y = -15x - 8$. Enfin $f(x) = 0 \iff x^3(3x^2 - 10) = 0 \iff x \in \left\{0, \pm \frac{\sqrt{30}}{3}\right\}$.

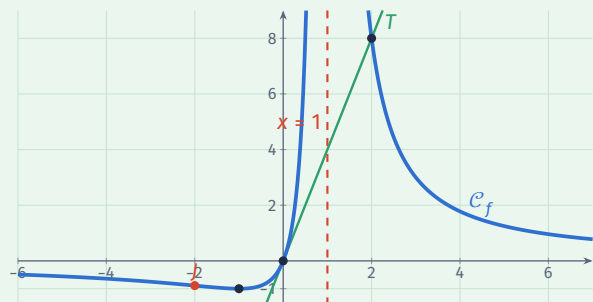
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$8\sqrt{2}$	7	0	-7	$-8\sqrt{2}$	
$f''(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$



■ Corrigé de l'exercice 50

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En $\pm\infty$, $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2x + 1}$ se comporte comme $\frac{4}{x}$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. En 1, $4x \rightarrow 4$ et $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Asymptotes $x = 1$ et $y = 0$. Comme $(x-1)^2 > 0$, $f(x)$ a le signe de x : $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (Ox) sur $]-\infty, 0[$, **au-dessus** sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. $f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 8x(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1) - 8x}{(x-1)^3} = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$ et $f''(x) = -4 \frac{(x-1)^3 - 3(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6} = -4 \frac{-2x-4}{(x-1)^4} = \frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$.
Le signe de f' donne le tableau : minimum $f(-1) = -1$. f'' a le signe de $x+2$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $]-\infty, -2]$, **convexe** sur $[-2, 1[$ et sur $]1, +\infty[$: point d'inflexion $J(-2, -\frac{8}{9})$.
3. $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$: $T : y = 4x$, et $f(x) - 4x = 4x \frac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{4x^2(2-x)}{(x-1)^2}$ a le signe de $2-x$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus de T** sur $]-\infty, 2[$ (contact en O sans traversée : O n'est pas un point d'inflexion, $\mathcal{C}_f$ y est convexe), **au-dessous** sur $]2, +\infty[$; T recoupe $\mathcal{C}_f$ en $(2, 8)$.

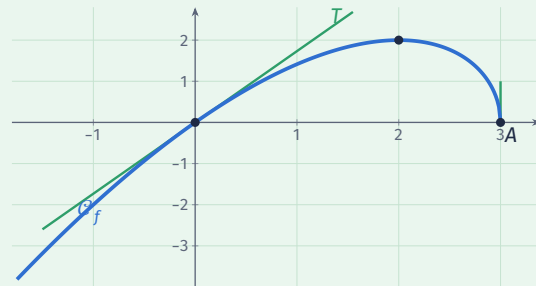
x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		0	$-\frac{8}{9}$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$



■ Corrigé de l'exercice 51

1. $x \in D_f \iff 3 - x \geq 0 : D_f =]-\infty, 3]$. En $-\infty : x \rightarrow -\infty$ et $\sqrt{3-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
 $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{3-x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction (Oy)**. Pour $x < 3$: $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x\sqrt{3-x}}{-(3-x)} = \frac{-x}{\sqrt{3-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} -\infty$: **f n'est pas dérivable à gauche en 3 ; $\mathcal{C}_f$ a en $A(3, 0)$ une demi-tangente verticale.**
2. Pour $x < 3$: $f'(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$; avec $f'(x) = \frac{3}{2}(2-x)(3-x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(3-x)^{-\frac{3}{2}} [-2(3-x) + (2-x)] = \frac{3(x-4)}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$. f' a le signe de $2-x$: f croît sur $]-\infty, 2]$, décroît sur $[2, 3]$, maximum $f(2) = 2$. Comme $x-4 < 0$, $f'' < 0$: $\mathcal{C}_f$ est **concave**.
3. $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$: $T : y = x\sqrt{3}$. Concave, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de ses tangentes, donc de T : $x\sqrt{3-x} \leq x\sqrt{3}$ pour $x \leq 3$. *Directement* : si $0 \leq x \leq 3$, $\sqrt{3-x} \leq \sqrt{3}$ et $x \geq 0$; si $x < 0$, $\sqrt{3-x} > \sqrt{3}$ et la multiplication par $x < 0$ renverse l'inégalité. ✓

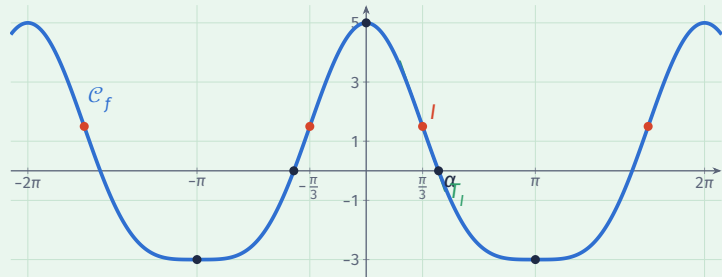
x	$-\infty$	2	3
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	2	0



■ Corrigé de l'exercice 52

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$: f est **paire** et **2π -périodique**. On l'étudie sur $[0, \pi]$, puis on complète par la symétrie d'axe (Oy) (courbe sur $[-\pi, \pi]$) et par les translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. On a $f'(x) = -4 \sin x - 2 \sin 2x$, soit $f'(x) = -4 \sin x (1 + \cos x)$, puis $f''(x) = -4 \cos x - 4 \cos 2x = -4(2 \cos^2 x + \cos x - 1)$, soit $f''(x) = -4(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. Sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$ et $1 + \cos x > 0$: $f' < 0$, f **décroît strictement** de $f(0) = 5$ à $f(\pi) = -3$. Sur $[0, \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$, et $2 \cos x - 1 > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{3}[$, < 0 sur $]\frac{\pi}{3}, \pi]$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, **convexe** sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$; inflexion en $I(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2})$.
 $f'(\frac{\pi}{3}) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = -3\sqrt{3}$: $T_I : y = -3\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{3}{2}$.
3. Avec $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$: $f(x) = P(\cos x)$, $P(u) = 2u^2 + 4u - 1 = 2(u + 1)^2 - 3$, croissante sur $[-1, 1]$: $P(-1) \leq f(x) \leq P(1)$, soit $-3 \leq f(x) \leq 5$. $P(u) = 0 \iff u = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$, et seule $u_0 = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \in]0, \frac{1}{2}[$ est dans $[-1, 1]$. Si $\alpha \in [0, \pi]$ vérifie $\cos \alpha = u_0$, alors $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et, dans $[-\pi, \pi]$, $f(x) = 0 \iff x = \pm \alpha$: deux solutions.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	-	-	- 0
$f(x)$	5	$\frac{3}{2}$	-1	-3
$f''(x)$	-	0	+	+



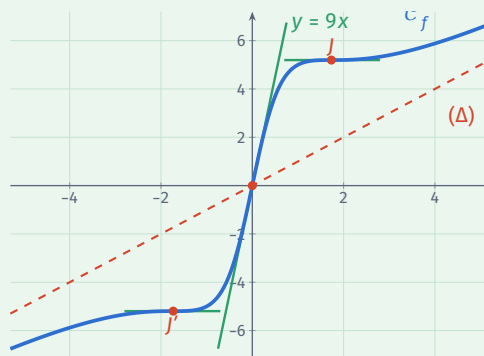
■ Corrigé de l'exercice 53

1. $x^2 + 1 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$, et $f(-x) = -f(x)$: f est **impaire**. $x + \frac{8x}{x^2+1} = \frac{x^3+9x}{x^2+1} = f(x)$, et $\frac{8x}{x^2+1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: $(\Delta) : y = x$ est asymptote en $\pm\infty$; $f(x) - x = \frac{8x}{x^2+1}$ a le signe de x : $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (Δ) sur $]0, +\infty[$, **au-dessous** sur $] -\infty, 0[$, et la coupe en O .

2. $f'(x) = 1 + 8 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1+8-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, nulle seulement en $\pm\sqrt{3}$: f croît strictement sur $] -\infty, -\sqrt{3}[$, sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ et sur $[\sqrt{3}, +\infty[$, donc **sur** $\mathbb{R}$ (on recolle), de $-\infty$ à $+\infty$.

3. $f''(x) = 8 \frac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, du signe de $x(x^2-3)$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $] -\infty, -\sqrt{3}]$ et $[0, \sqrt{3}]$, **convexe** sur $[-\sqrt{3}, 0]$ et $[\sqrt{3}, +\infty[$: inflexions en O , $J(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ et $J'(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ ($f(\sqrt{3}) = \frac{12\sqrt{3}}{4}$). En $J, J', f' = 0$: tangentes **horizontales**, que $\mathcal{C}_f$ traverse puisque f croît strictement. En O : $f'(0) = 9$, tangente $y = 9x$, et $f(x) - 9x = \frac{-8x^3}{x^2+1}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus pour $x < 0$, au-dessous pour $x > 0$.

4. Strictement croissante, f prend au plus une fois chaque valeur ; elle va de $-\infty$ à $+\infty$, et la courbe coupe chaque droite $y = m$: une solution pour tout m .



■ Corrigé de l'exercice 54

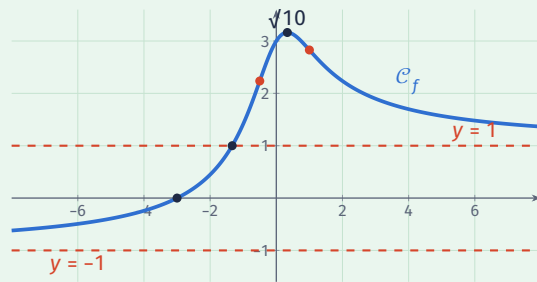
1. Pour $x \neq 0$, $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$: si $x > 0$, $f(x) = \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow 1$; si $x < 0$, $f(x) = -\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow -1$.

Asymptotes $y = 1$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$. Puis $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, du signe de $1-3x$: f croît sur $] -\infty, \frac{1}{3}]$, décroît sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$, de maximum $f(\frac{1}{3}) = \frac{10/3}{\sqrt{10/3}} = \sqrt{10}$.

2. Avec $f'(x) = (1-3x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$: $f''(x) = \frac{-3(x^2+1)-3x(1-3x)}{(x^2+1)^{5/2}} = \frac{3(2x^2-x-1)}{(x^2+1)^{5/2}} = \frac{3(2x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$: $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ et $[1, +\infty[$, concave sur $[-\frac{1}{2}, 1]$; inflexions $(-\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ et $(1, 2\sqrt{2})$.

3. $f(x) = 1 \iff x+3 = \sqrt{x^2+1} \iff (x \geq -3 \text{ et } 6x+8=0) \iff x = -\frac{4}{3}$. Si $x > -\frac{4}{3}$: $x+3 > 0$ et $(x+3)^2 - (x^2+1) = 6x+8 > 0$, donc $f(x) > 1$; si $x < -\frac{4}{3}$, ou $x+3 \leq 0$, ou $6x+8 < 0$: $f(x) < 1$. Donc $f(x) > 1 \iff x > -\frac{4}{3}$: $\mathcal{C}_f$ **coupe** l'asymptote $y = 1$ en $(-\frac{4}{3}, 1)$ et est au-dessus à sa droite. Enfin $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$ donne $x+3+\sqrt{x^2+1} > 3$, soit $f(x) > -1$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $y = -1$.

4. Sur $]-\infty, \frac{1}{3}]$, f croît de -1 (exclu) à $\sqrt{10}$; sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$, elle décroît de $\sqrt{10}$ à 1 (exclu). Au plus une solution sur chacun : **aucune** si $m \leq -1$ ou $m > \sqrt{10}$, **une** si $-1 < m \leq 1$ ou $m = \sqrt{10}$, **deux** si $1 < m < \sqrt{10}$.



34 Corrigés : lectures graphiques

■ Corrigé de l'exercice 55

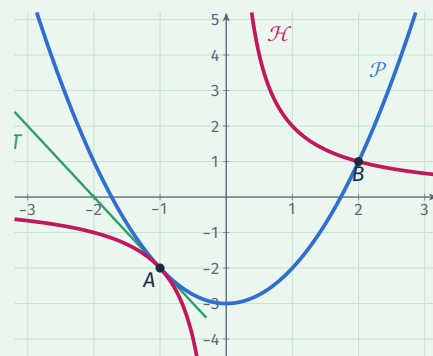
- $f(x)$ se comporte comme $3x^4$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x+1)(x-2)$, d'où le tableau ; $f(-1) = 0$, $f(0) = 5$, $f(2) = -27$.
- $(x+1)^2(3x^2 - 10x + 5) = 3x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 6x^3 - 20x^2 + 10x + 3x^2 - 10x + 5 = f(x)$ ✓. Donc $f(x) = 0 \iff x = -1$ ou $3x^2 - 10x + 5 = 0$ ($\Delta = 40$) : $S = \left\{-1, \frac{5-\sqrt{10}}{3}, \frac{5+\sqrt{10}}{3}\right\}$. En -1 , $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 0$: $\mathcal{C}_f$ est **tangente** à (Ox) (minimum local, racine double). $f(x) = 5 \iff x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0$ ($\Delta' = 40$) : $S = \left\{0, \frac{2-2\sqrt{10}}{3}, \frac{2+2\sqrt{10}}{3}\right\}$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

- f est strictement monotone sur chacun des quatre intervalles du tableau : au plus une solution sur chacun, et l'on lit : **aucune** solution si $m < -27$, **une** si $m = -27$, **deux** si $-27 < m < 0$, **trois** si $m = 0$, **quatre** si $0 < m < 5$, **trois** si $m = 5$, **deux** si $m > 5$. Pour $m = 0$ et $m = 5$, on retrouve bien les trois solutions de la question 2.

■ Corrigé de l'exercice 56

- $(x+1)^2(x-2) = (x^2 + 2x + 1)(x-2) = x^3 - 3x - 2$, donc $x^2 - 3 - \frac{2}{x} = \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x}$. Points communs : $x \in \{-1, 2\}$, soit $A(-1, -2)$ et $B(2, 1)$. Comme $(x+1)^2 \geq 0$ et $\frac{x-2}{x} > 0 \iff (x < 0 \text{ ou } x > 2)$: $\mathcal{P}$ est **au-dessus** de $\mathcal{H}$ sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $[2, +\infty[$, **au-dessous** sur $]0, 2[$; et $x^2 - 3 \leq \frac{2}{x} \iff x \in \{-1\} \cup [0, 2]$.
- En -1 : pente de $\mathcal{P}$: $2x = -2$; pente de $\mathcal{H}$: $-\frac{2}{x^2} = -2$. Même point, même pente : même tangente $T : y = -2x - 4$. Puis $x^2 - 3 - (-2x - 4) = (x+1)^2 \geq 0$: $\mathcal{P}$ est au-dessus de T ; $\frac{2}{x} - (-2x - 4) = \frac{2(x+1)^2}{x}$: $\mathcal{H}$ est au-dessous de T pour $x < 0$, au-dessus pour $x > 0$. En B , les pentes 4 et $-\frac{1}{2}$ diffèrent : les courbes s'y **coupent** sans être tangentes.
- Figure ci-contre ($\mathcal{P}$ en bleu, $\mathcal{H}$ en rouge, T en vert).



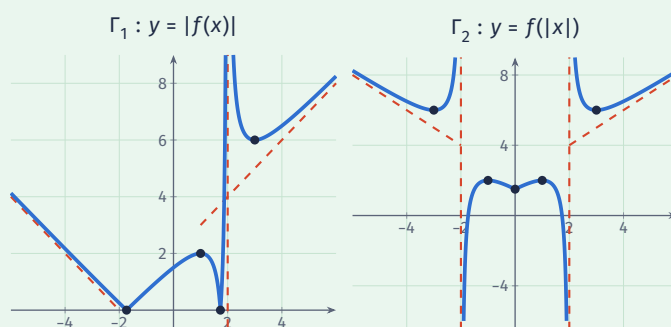
■ Corrigé de l'exercice 57

1. $x + 2 + \frac{1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+1}{x-2} = f(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$ et $\frac{1}{x-2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: asymptotes

$x = 2$ et $y = x + 2$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, d'où le tableau ; zéros $\pm\sqrt{3}$, et $f < 0$ sur $] -\infty, -\sqrt{3}[\cup] \sqrt{3}, 2[$.

2. Γ_1 : là où $f \geq 0$, $|f| = f$; là où $f < 0$, $|f| = -f$: on garde les parties de $\mathcal{C}_f$ au-dessus de (Ox) et l'on remplace les autres par leurs **symétriques par rapport à (Ox)** . $\Gamma_2 : D_g = \{x ; |x| \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, g est paire et $g(x) = f(x)$ pour $x \geq 0$: on garde la partie de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses positives et on la complète par **symétrie d'axe (Oy)** (Γ_2 a un point anguleux en $(0, \frac{3}{2})$, car $f'(0) = \frac{3}{4} \neq 0$).

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$



3. $|f(x)| = m$ (sur les intervalles $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $[-\sqrt{3}, 1]$, $[1, \sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, 2[$, $[2, 3]$, $[3, +\infty[$, $|f|$ est strictement monotone) : **aucune** solution si $m < 0$, **deux** si $m = 0$, **quatre** si $0 < m < 2$, **trois** si $m = 2$, **deux** si $2 < m < 6$, **trois** si $m = 6$, **quatre** si $m > 6$. $f(|x|) = m$: on compte les solutions $x \geq 0$ de $f(x) = m$ (sur $[0, 1]$, f croît de $\frac{3}{2}$ à 2), puis on double, sauf $x = 0$: **deux** solutions si $m < \frac{3}{2}$, **trois** si $m = \frac{3}{2}$, **quatre** si $\frac{3}{2} < m < 2$, **deux** si $m = 2$, **aucune** si $2 < m < 6$, **deux** si $m = 6$, **quatre** si $m > 6$. Enfin, pour $t \geq 0$, $f(t) = \frac{3}{2} \iff 2t^2 - 6 = 3t - 6 \iff t(2t - 3) = 0$: $f(|x|) = \frac{3}{2} \iff x \in \left\{0, \pm\frac{3}{2}\right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. $D_f = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$. Pour $x > -\frac{5}{2}$, $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} > 0$: f est strictement croissante. En $-\frac{5}{2}$: $\frac{f(x)-0}{x+\frac{5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2x+5}} \rightarrow +\infty$: **demi-tangente verticale** en $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$. $f''(x) = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}} < 0$: $\mathcal{C}_f$ est **concave**. Enfin $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \rightarrow 0$: **branche parabolique de direction (Ox)** .
2. $f'(x) = 1 \iff 2x + 5 = 1 \iff x = -2$: $A(-2, 1)$, $T : y = x + 3$. Avec $u = \sqrt{2x+5}$, $x = \frac{u^2-5}{2}$ et $x + 3 - u = \frac{u^2-2u+1}{2} = \frac{(u-1)^2}{2} \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de T , avec contact en A seulement (c'est la concavité).

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	3	$-\infty$

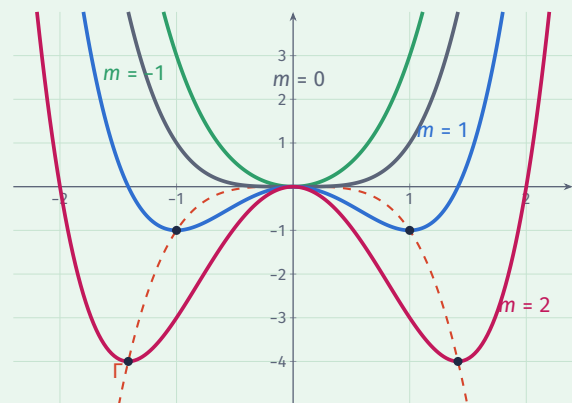
3. $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \cap D_m \iff y = \sqrt{2x+5} = x + m \iff g(x) = m$. $g'(x) = \frac{1-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}}$ est > 0 sur $]-\frac{5}{2}, -2[$, < 0 sur $]-2, +\infty[$; $g(-\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}$, $g(-2) = 3$, et $g(x) = x\left(\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1\right) \rightarrow -\infty$. D'où le nombre de points communs : **aucun** si $m > 3$, **un** si $m = 3$ ($D_3 = T$), **deux** si $\frac{5}{2} \leq m < 3$, **un** si $m < \frac{5}{2}$.

Contrôle. $m = 1 : \sqrt{2x+5} = x+1 \iff (x \geq -1 \text{ et } x^2 = 4) \iff x = 2 : \text{un point } \checkmark$. $m = \frac{5}{2} : (x \geq -\frac{5}{2} \text{ et } x^2 + 3x + \frac{5}{4} = 0) \iff x \in \{-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\} : \text{deux points } \checkmark$.

■ Corrigé de l'exercice 59

- $f_m(0) = 0 : O \in \mathcal{C}_m$ pour tout m . Si $m \neq m'$, $f_m(x) - f_{m'}(x) = -2(m - m')x^2 = 0 \iff x = 0 : O$ est le seul point commun. $f'_m(x) = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$, $f'_m(0) = 0$: tangente commune $y = 0$.
- f_m est paire. Si $m \leq 0 : x^2 - m \geq 0$ (nul au plus en 0), f'_m a le signe de x : f_m décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, minimum $f_m(0) = 0$. Si $m > 0 : f'_m(x) = 4x(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m})$ (tableau) : maximum local $f_m(0) = 0$ et minimums $f_m(\pm\sqrt{m}) = -m^2$.
- Les minimums $(\pm\sqrt{m}, -m^2)$ vérifient $y = -m^2 = -x^4$: ils sont sur Γ . Réciproquement, $(x_0, -x_0^4)$ avec $x_0 \neq 0$ est un minimum de $\mathcal{C}_m$ pour $m = x_0^2$ (car $x_0 = \pm\sqrt{m}$) : le lieu est Γ privée de O .
- $f''_m(x) = 12x^2 - 4m$. Si $m \leq 0 : f''_m \geq 0$ (nul au plus en 0, sans changer de signe) : $\mathcal{C}_m$ est **convexe**, sans inflexion. Si $m > 0 : f''_m < 0$ sur $]-\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}[$, > 0 au-dehors : deux points d'inflexion $(\pm\sqrt{\frac{m}{3}}, -\frac{5m^2}{9})$, et comme $m = 3x^2$, ils sont sur la courbe $y = -5x^4$ (lieu : cette courbe privée de O , par le même argument).

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f_m(x)$	$+\infty$	$-m^2$	0	$-m^2$	$+\infty$



- $f_m(\sqrt{m}X) = m^2X^4 - 2m \cdot mX^2 = m^2f_1(X) : (X, Y) \in \mathcal{C}_1 \iff (\sqrt{m}X, m^2Y) \in \mathcal{C}_m : \mathcal{C}_m$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par $(x, y) \mapsto (\sqrt{m}x, m^2y)$: même allure pour tout $m > 0$. Si $a \neq 0 : b = a^4 - 2ma^2 \iff m = \frac{a^4 - b}{2a^2} : \text{une seule courbe passe par } M$.

■ Corrigé de l'exercice 60

- Chaque $x \mapsto \cos kx$ est paire et 2π -périodique : f aussi. On l'étudie sur $[0, \pi]$, puis symétrie d'axe (Oy) .
- $f'(x) = -\sin x - \sin 2x - \sin 3x = -(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x$. Or $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ donne $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$, d'où $f'(x) = -2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = -\sin 2x(1 + 2 \cos x)$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{11}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{6}$

- Sur $[0, \pi]$: $\sin 2x > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, < 0 sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$; $1 + 2 \cos x > 0$ sur $[0, \frac{2\pi}{3}[$, < 0 sur $]\frac{2\pi}{3}, \pi]$. D'où $f' < 0$, puis > 0 , puis < 0 ; $f(0) = \frac{11}{6}$, $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{5}{12}$, $f(\pi) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$. Sur $[-\pi, 0]$, le tableau se déduit par symétrie.

- On compte d'abord sur $[0, \pi]$ (au plus une solution par intervalle de monotonie), puis on double, sauf pour $x = 0$ et $x = \pi$ ($-\pi$ est exclu) :

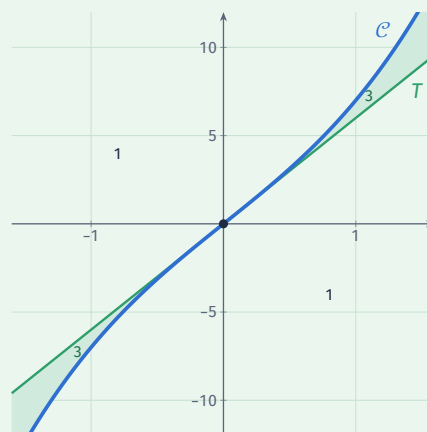
m	$< -\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$]-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}[$	$-\frac{1}{2}$	$]-\frac{1}{2}, -\frac{5}{12}[$	$-\frac{5}{12}$	$]-\frac{5}{12}, \frac{11}{6}[$	$\frac{11}{6}$	$> \frac{11}{6}$
sur $[0, \pi]$	0	1 (π)	1	2	3	2	1	1 (0)	0
sur $]-\pi, \pi]$	0	1	2	4	6	4	2	1	0

35

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

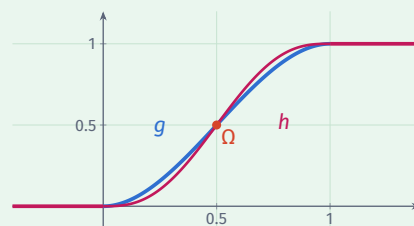
1. $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$: f est strictement croissante. $f(-x) = -f(x)$: O est centre de symétrie. $f''(x) = 6x$ change de signe en 0 : O est point d'inflexion, de tangente $y = f'(0)x$, soit $T : y = 6x$; $f(x) - 6x = x^3$: $\mathcal{C}$ est au-dessous de T pour $x < 0$, au-dessus pour $x > 0$.
2. a) Les abscisses des points communs à $\mathcal{C}$ et à D : $y = px + q$ sont les racines de $x^3 + (6-p)x - q$; ayant trois racines distinctes, ce polynôme unitaire s'écrit $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, et l'identification des coefficients de x^2 donne $0 = -(x_1 + x_2 + x_3)$: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
 b) $T_t : y = f'(t)(x-t) + f(t) = (3t^2+6)(x-t) + t^3 + 6t = (3t^2+6)x - 2t^3$, et $f(x) - (3t^2+6)x + 2t^3 = x^3 - 3t^2x + 2t^3 = (x-t)^2(x+2t)$ (on développe). Les points communs ont pour abscisses t (contact) et $-2t$; si $t \neq 0$, $-2t \neq t$: T_t recoupe $\mathcal{C}$ en **un seul** autre point, M_{-2t} .
 c) $u_{n+1} = -2u_n$: suite géométrique de raison -2 , $u_n = (-2)^n u_0$; $|u_n| = 2^n |u_0|$ devient aussi grand qu'on veut : les points M_{u_n} partent à l'infini, alternativement de part et d'autre de O .
3. a) $M \in T_t \iff b = (3t^2+6)a - 2t^3 \iff -2t^3 + 3at^2 = b - 6a \iff \varphi(t) = b - 6a$. b) Si $t \neq s$ et $T_t = T_s$: pentes égales, $3t^2 + 6 = 3s^2 + 6$, donc $s = -t \neq 0$; ordonnées à l'origine égales, $-2t^3 = -2s^3 = 2t^3$, donc $t = 0$: *absurde*. Le nombre de tangentes issues de M est donc le nombre de solutions de $\varphi(t) = b - 6a$.
4. $\varphi'(t) = -6t(t-a)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = a^3$, $\varphi \rightarrow +\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$. Si $a > 0$: φ décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, a]$, décroît sur $[a, +\infty[$: une valeur k est prise **trois fois** si $0 < k < a^3$, **deux fois** si $k \in \{0, a^3\}$, **une fois** sinon. Si $a < 0$: de même avec $a^3 < k < 0$. Si $a = 0$: $\varphi = -2t^3$ décroît strictement : une fois. Or, pour $k = b - 6a$: k strictement entre 0 et $a^3 \iff b$ strictement entre $6a$ et $a^3 + 6a$; $k = 0 \iff M \in T$; $k = a^3 \iff M \in \mathcal{C}$. D'où : **trois** tangentes si M est strictement entre T et $\mathcal{C}$ (zone colorée), **deux** si $M \in \mathcal{C} \cup T$, $M \neq O$, **une** sinon.



Nombre de tangentes issues de M : 3 dans la zone colorée, 2 sur $\mathcal{C}$ ou T (sauf O), 1 ailleurs.

■ Corrigé de l'exercice 62

- Sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, F est constante ; sur $]0, 1[$, $F' = g'$, $g'(x) = 6x(1-x)$. En 0 : à gauche le taux est nul, à droite $\frac{g(x)-0}{x} = 3x - 2x^2 \rightarrow 0$. En 1 : à droite le taux est nul et, à gauche, comme $g(x) - 1 = -(x-1)^2(2x+1)$, $\frac{g(x)-1}{x-1} = -(x-1)(2x+1) \rightarrow 0$. Donc F est **dérivable sur $\mathbb{R}$** , $F'(0) = F'(1) = 0$, et $F' \geq 0$: F est **croissante**.
- $g(1-x) = (1-x)^2[3-2(1-x)] = (1-x)^2(1+2x) = 1-g(x)$, et hors de $[0, 1]$, $F(1-x) = 1-F(x)$ se vérifie directement (si $x < 0$, $1-x > 1$) : $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_F$. $g''(x) = 6-12x$ change de signe en $\frac{1}{2}$: inflexion en Ω , de pente $g'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$. Enfin $\frac{F'(x)-F'(0)}{x}$ vaut 0 si $x < 0$ et $6(1-x) \rightarrow 6$ si $x > 0$: F' **n'est pas dérivable en 0** (la « courbure » saute de 0 à 6).
- $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ d'office. Les conditions en 1 donnent $a+b+c=1$, $5a+4b+3c=0$, $20a+12b+6c=0$; la dernière moins deux fois la deuxième donne $10a+4b=0$, d'où $b = -\frac{5}{2}a$, puis $c = \frac{5}{3}a$ et $\frac{a}{6} = 1$: $h(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$, $h'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x-1)^2$. Comme pour F , H est dérivable ($h(1) = 1$, $h'(0) = h'(1) = 0$). Taux de H' : en 0, $\frac{h'(x)}{x} = 30x(x-1)^2 \rightarrow 0$ à droite, 0 à gauche ; en 1, $\frac{h'(x)}{x-1} = 30x^2(x-1) \rightarrow 0$ à gauche, 0 à droite : H' **est dérivable en 0 et en 1** ($H''(0) = H''(1) = 0$).
- $h(x) - g(x) = 6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 3x^2 = 3x^2(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) = 3x^2(x-1)^2(2x-1)$: l'arc de h est **au-dessous** de celui de g sur $]0, \frac{1}{2}[$, **au-dessus** sur $]\frac{1}{2}, 1[$ (et $h(1-x) = 1-h(x)$: même centre Ω). Pentes en Ω : $g'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} < h'(\frac{1}{2}) = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$: le raccord le plus doux aux bouts est le plus raide au milieu.



■ Corrigé de l'exercice 63

- f est impaire, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4x^3 = \pm\infty$, $f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x-1)(2x+1)$: f croît sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$, décroît sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, croît sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, avec $f(-\frac{1}{2}) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = -1$, $f(\pm 1) = \pm 1$. $f''(x) = 24x$: concave puis convexe, inflexion en O , tangente $y = -3x$ ($f(x) + 3x = 4x^3$). Si $|x| > 1$: $4x^2 - 3 > 1$, donc $|f(x)| = |x| |4x^2 - 3| > 1$.
- Avec $c = \cos \theta$: $\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$, soit $\cos 3\theta = (2c^2 - 1)c - 2(1 - c^2)c = 4c^3 - 3c$: $f(\cos \theta) = \cos 3\theta$. Pour $m = \cos \alpha$, $\alpha \in]0, \pi[$, les réels $\theta_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{3}$ vérifient $\cos 3\theta_k = \cos \alpha = m$, donc $x_k = \cos \theta_k$ est solution ($k = 0, 1, 2$). Or $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{3}[$, $\theta_1 \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$ et $\cos \theta_2 = \cos \frac{2\pi-\alpha}{3}$ avec $\frac{2\pi-\alpha}{3} \in]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$: $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$, $x_1 \in]-1, -\frac{1}{2}[$, $x_2 \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sont **distincts**. Au plus une solution par intervalle de monotonie : **exactement trois**, une par intervalle, comme le montre le tableau (f y passe de -1 à 1 , de 1 à -1 , de -1 à 1). Si $|m| > 1$: **une** solution (hors de $[-1, 1]$) ; $f(x) - 1 = (x-1)(2x+1)^2$: pour $m = 1$, **deux** solutions 1 et $-\frac{1}{2}$ (et $-1, \frac{1}{2}$ pour $m = -1$).
- Si $|m| < 1$, $f(f(x)) = m \iff f(x) \in \{y_1, y_2, y_3\}$, les trois solutions (dans $]-1, 1[$) de $f(y) = m$; chaque $f(x) = y_i$ a trois solutions, et ces ensembles sont disjoints : **9 solutions**. Si $m = 1$: $f(x) \in \{1, -\frac{1}{2}\}$, soit $2 + 3 =$ **5 solutions**. Les solutions de $f(f(x)) = 0$ sont dans $[-1, 1]$ (sinon $|f(f(x))| > 1$) ; avec $x = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$: $\cos 9\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}$, d'où $x = \cos(\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9})$.

($0 \leq k \leq 8$) : neuf réels distincts ($\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$). De même, avec n fois $f : \cos(3^n \theta) = 0$ donne 3^n solutions.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $f_m(x) - (1+m)x = m(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{m}{\sqrt{x^2+1}+x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, et $f_m(x) - (1-m)x = m(\sqrt{x^2+1} + x) = \frac{m}{\sqrt{x^2+1}-x} \rightarrow 0$ en $-\infty$: asymptotes $y = (1+m)x$ en $+\infty$, $y = (1-m)x$ en $-\infty$ (horizontale $y = 0$ en $+\infty$ si $m = -1$, en $-\infty$ si $m = 1$). Comme $\sqrt{x^2+1} > |x|$, les deux écarts ont le signe de m : $\mathcal{C}_m$ est **au-dessus** de ses asymptotes si $m > 0$, **au-dessous** si $m < 0$ ($\mathcal{C}_0$ est la droite $y = x$).
2. $f'_m(x) = 1 + \frac{mx}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''_m(x) = m \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{m}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$: $\mathcal{C}_m$ est **convexe** si $m > 0$, **concave** si $m < 0$. $f'_m(0) = 1$ pour tout m : les tangentes aux points $(0, m)$ sont toutes **parallèles** à $y = x$. Si $|m| \leq 1$: $\left| \frac{mx}{\sqrt{x^2+1}} \right| < |m| \leq 1$, donc $f'_m > 0$: **strictement croissante**.
3. Si $m > 1$, $f''_m > 0$: f'_m est strictement croissante, et $f'_m(x) = 0$ équivaut à $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{m}$, soit $x < 0$ et $m^2 x^2 = x^2 + 1$, c'est-à-dire $x = x_m = -\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$; $f'_m < 0$ avant, > 0 après : minimum, et comme $\sqrt{x_m^2+1} = \frac{m}{\sqrt{m^2-1}}$: $f_m(x_m) = \frac{-1+m^2}{\sqrt{m^2-1}} = \sqrt{m^2-1}$. Puis $f_{-m}(x) = x - m\sqrt{x^2+1} = -f_m(-x)$: $\mathcal{C}_{-m}$ est la symétrique de $\mathcal{C}_m$ par rapport à O ; si $m < -1$, f_m a un **maximum** $-\sqrt{m^2-1}$ en $\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$.
4. Pour $m > 1$, le point minimum $(x_m, \sqrt{m^2-1})$ vérifie $x_m y_m = -1$, $x_m < 0$; réciproquement, pour $u < 0$, $m = \frac{\sqrt{1+u^2}}{-u} > 1$ donne $x_m = u$. Par la symétrie de centre O ($m < -1$), on obtient l'autre branche : le lieu est **toute l'hyperbole** $y = -\frac{1}{x}$. Enfin $M(a, b) \in \mathcal{C}_m \iff m = \frac{b-a}{\sqrt{a^2+1}}$: **une seule** courbe par M (les $\mathcal{C}_m$ ne se coupent pas).

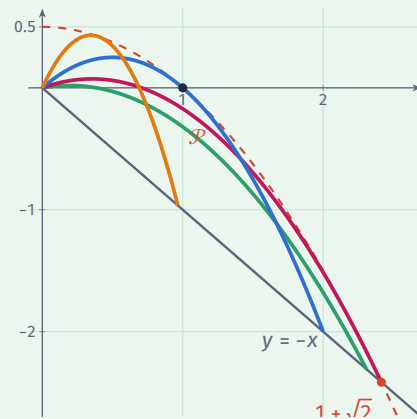
■ Corrigé de l'exercice 65

1. $P_2(x) = (x-1)^2$: **une** solution (double), 1. Pour $n \geq 3$: $P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$. n pair : $x \mapsto x^{n-1}$ ($n-1$ impair) est strictement croissante, donc P'_n a le signe de $x-1$: P'_n décroît sur $]-\infty, 1]$ de $+\infty$ à $P'_n(1) = 2-n < 0$, puis croît jusqu'à $+\infty$: **deux solutions**, l'une dans $]0, 1[$ ($P_n(0) = 1 > 0$), l'autre dans $]1, +\infty[$. n impair : $x^{n-1} - 1$ a le signe de $|x| - 1$: P'_n croît sur $]-\infty, -1]$ de $-\infty$ à $P'_n(-1) = n > 0$, décroît sur $[-1, 1]$ jusqu'à $2-n < 0$, puis croît jusqu'à $+\infty$: **trois solutions** (au plus une par intervalle, et la courbe coupe (Ox) sur chacun).
2. $P''_n(x) = n(n-1)x^{n-2}$. n pair : $P''_n \geq 0$: $\mathcal{C}_n$ est **convexe**, sans inflexion. n impair : P''_n a le signe de x : concave puis convexe, **inflexion en** $A(0, 1)$. Tangente $T : y = 1 - nx$ et $P_n(x) - (1 - nx) = x^n$: $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de T si n est pair, la traverse en A si n est impair.
3. Pour $n \geq 3$, $P'_n < 0$ sur $[0, 1]$: P_n décroît strictement de 1 à $2-n < 0$ sur $[0, 1]$: une seule solution $a_n \in]0, 1[$. Puis $na_n = 1 + a_n^n$ et $0 < a_n^n < 1$: $1 < na_n < 2$, soit $\frac{1}{n} < a_n < \frac{2}{n}$; enfin $a_n - \frac{1}{n} = \frac{a_n^n}{n} < \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^n = \frac{2^n}{n^{n+1}}$. Pour $n = 10$: $0 < a_{10} - 0,1 < \frac{1024}{10^{11}}$, donc $0,1 < a_{10} < 0,100\,000\,010\,3$.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. $f_t(x) = x \left[t - \frac{1+t^2}{2}x \right]$ s'annule en 0 et en $R(t) = \frac{2t}{1+t^2}$; $f'_t(x) = t - (1+t^2)x$ s'annule en $\frac{t}{1+t^2}$: hauteur maximale $f_t\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{t^2}{2(1+t^2)}$. $R'(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$: R croît sur $]0, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$: portée maximale $R(1) = 1$ pour la **pen**te 1 (tir à 45°).
2. $M \in \mathcal{C}_t \iff Y = tX - \frac{1+t^2}{2}X^2 \iff X^2t^2 - 2Xt + X^2 + 2Y = 0$, équation du second degré en t de discriminant réduit $X^2 - X^2(X^2 + 2Y) = X^2(1 - X^2 - 2Y)$: **deux** trajectoires si $Y < \frac{1-X^2}{2}$ (M sous $\mathcal{P}$), **une** si $M \in \mathcal{P}$, **aucune** si M est au-dessus.
3. $f_t(x) - \frac{1-x^2}{2} = tx - \frac{t^2x^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(tx - 1)^2 \leq 0$: $\mathcal{C}_t$ est sous $\mathcal{P}$, avec un seul point commun d'abscisse $\frac{1}{t}$ (racine double : même tangente) : contact en $\left(\frac{1}{t}, \frac{t^2-1}{2t^2}\right)$. $\mathcal{P}$ « enveloppe » toutes les trajectoires.

4. $f_t(x) = -x \iff x \left[(t+1) - \frac{1+t^2}{2}x \right] = 0$:
 $d(t) = \frac{2(t+1)}{1+t^2} > 0$. $d'(t) = \frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t^2)^2}$, et $1-2t-t^2 > 0$
entre ses racines $-1 \pm \sqrt{2}$: d croît sur $] -1, \sqrt{2} - 1]$, décroît ensuite ;
 $d(\sqrt{2} - 1) = \frac{2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Avec
 $T = \tan \frac{\pi}{8} > 0$: $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2T}{1-T^2}$, d'où $T^2 + 2T - 1 = 0$
et $T = \sqrt{2} - 1$. Enfin la pente sort de la zone
atteignable là où elle coupe $\mathcal{P}$:
 $\frac{1-x^2}{2} = -x \iff x = 1 + \sqrt{2} \ (x > 0)$. ✓



Trajectoires pour $t = 0,2$; $\sqrt{2} - 1$ (rouge, la plus longue sur la pente) ; 1 ; 2,5.

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Limites (chapitre 10)

- ① (a) $-\infty$; (b) $-\frac{1}{4}$. Termes de plus haut degré : $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$; $\frac{-x^2}{4x^2}$.
- ② (a) 1 ; (b) $\frac{1}{2}$.
 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \rightarrow \frac{3}{3}$;
 $\cos x \times \frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow 1 \times \frac{1}{2}$.
- ③ (a) $\frac{1}{3}$; (b) $+\infty$. Conjugué :
 $\frac{2}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}$; $\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$.
- ④ (a) -1, $+\infty$, $+\infty$; (b) $x = 0$,
 $x = -4$, $y = -1$. $\frac{2}{x} \rightarrow 0$,
 $\frac{x}{x+4} \rightarrow 1$; en -4^+ : $-x \rightarrow 4$
et $x+4 \rightarrow 0^+$.

Bloc 2 · Dérivées (chapitre 11)

- ⑤ $f'(x) = \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2+x+1)^2}$;
 $g'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}}$.
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- ⑥ (a) $y = -x + 4$; (b) (1, 3) et (-3, 3). $f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$,
 $f(-2) = 6$, $f'(-2) = -1$;
 $f'(x) = 8 \iff 3(x-1)(x+3) = 0$.
- ⑦ $f'(x) = \cos x (1 + 2 \sin x)$;
minimum $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$.
 $\cos x \geq 0$;
 $1 + 2 \sin x < 0 \iff x < -\frac{\pi}{6}$:
 f décroît, puis croît.
- ⑧ (a) 1, 2 et 0 ; (b) $[0, 2]$.
Pente de la tangente en A :
 $\frac{3-1}{1-0}$; f croît sur $[0, 2]$.

Bloc 3 · Courbes et symétries

- ⑨ (a) impaire ; (b) ni paire, ni impaire. $f(-x) = -f(x)$ sur $\mathbb{R}$; $1 \in D_g$, mais $-1 \notin D_g$.
- ⑩ (a) $f(4-x) = f(x)$;
(b) $f(5) = f(-1) = 6$.
 $|3-x| + |1-x| = f(x)$;
 $5 = 4 - (-1)$.
- ⑪ (a) $f(1+t) = \frac{t^2+t+1}{t^2+1}$;
(b) vecteur $\vec{u}(1, 1)$; $\Omega(1, 1)$.
 g est impaire : le centre O de $\mathcal{C}_g$ a pour image Ω .
- ⑫ (a) $f(-x) = -f(x)$,
 $f(x+\pi) = f(x)$;
(b) symétrie de centre O ,
puis translations de vecteurs $(k\pi, 0)$. D_f symétrique et stable par $x \mapsto x + \pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 6 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 22 ; puis **exercice 31**, p. 28 et **exercice 43**, p. 31. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 11), puis les pièges de la section 13. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 23 ; puis les thèmes A et D, **exercices 31 à 36**, p. 28 et **49 à 54**, p. 33.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 11 en lecture rapide), puis les sections 12 à 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 25 ; les thèmes B et E, **exercices 37 à 42**, p. 30 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 26, et le thème F, **61 à 66**, p. 36.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Limites (chapitre 10)

Relis : les sections 2, 3 et 4 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 22, **exercice 2**, p. 22, **exercice 32**, p. 28 et **exercice 33**, p. 28.

Bloc 2 · Dérivées (chapitre 11)

Relis : les sections 1, 5 et 7 du cours.
Fais : **exercice 4**, p. 22, **exercice 6**, p. 23, **exercice 37**, p. 30 et **exercice 38**, p. 30.

Bloc 3 · Courbes et symétries

Relis : les sections 6, 10 et 11 du cours.
Fais : **exercice 5**, p. 22, **exercice 7**, p. 23, **exercice 44**, p. 32 et **exercice 45**, p. 32.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Branches infinies	31 à 36	/ 6	
Thème B · Concavité et inflexion	37 à 42	/ 6	
Thème C · Symétries et réduction	43 à 48	/ 6	
Thème D · Études complètes	49 à 54	/ 6	
Thème E · Équations et lectures graphiques	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Maths Olympiad