

Chapitre 4

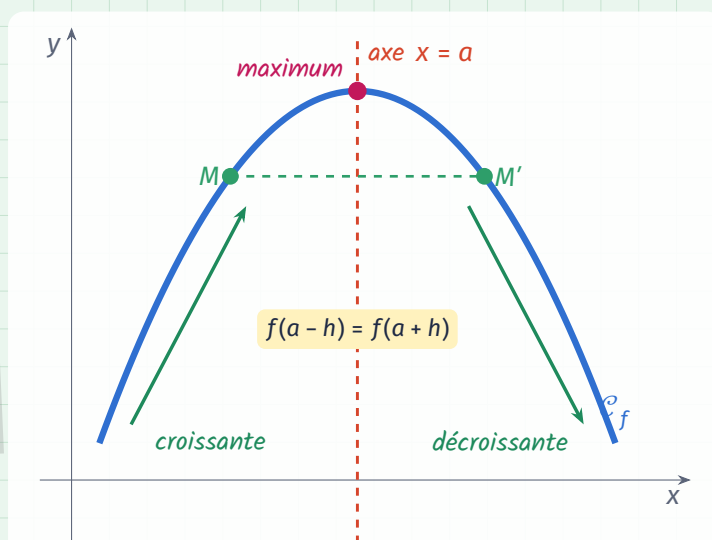
Généralités sur les fonctions

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

$$f \text{ paire : } f(-x) = f(x)$$

$$T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

*Défi de concours*Minimum de $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4}$ sans dérivée ?

Symétries, variations, extremums : tout se lit sur la courbe

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	19 Niveau 4 · Concours	27
1 Fonction et domaine	5	20 Domaine, égalité, opérations	29
2 Courbe et lectures graphiques	6	21 Parité, symétries, périodicité	30
3 Parité, symétries, périodicité	7	22 Majorants et extremums	32
4 Fonctions majorées et bornées	9	23 Sens de variation	34
5 Les extremums	10	24 Fonctions usuelles et courbes	35
6 Le sens de variation	12	25 Défis de concours	37
7 Opérations et composition	13	26 Corrigés du niveau 1	39
8 Second degré et fonction cube	14	27 Corrigés du niveau 2	41
9 Les fonctions homographiques	15	28 Corrigés du niveau 3	45
10 Racine, valeur absolue, $E(x)$	16	29 Corrigés du niveau 4	47
11 Transformer une courbe	17	30 Corrigés : domaine et opérations	50
12 Pour aller plus loin	18	31 Corrigés : parité et symétries	53
13 Les pièges classiques	19	32 Corrigés : majorants, extremums	56
14 Les astuces des concours	20	33 Corrigés : sens de variation	59
15 L'essentiel du chapitre en une page	22	34 Corrigés : fonctions usuelles	62
16 Niveau 1 · Bases	23	35 Corrigés : défis de concours	65
17 Niveau 2 · Bac	24	26 Corrigé du test d'entrée	69
18 Niveau 3 · Approfondissement	26		

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

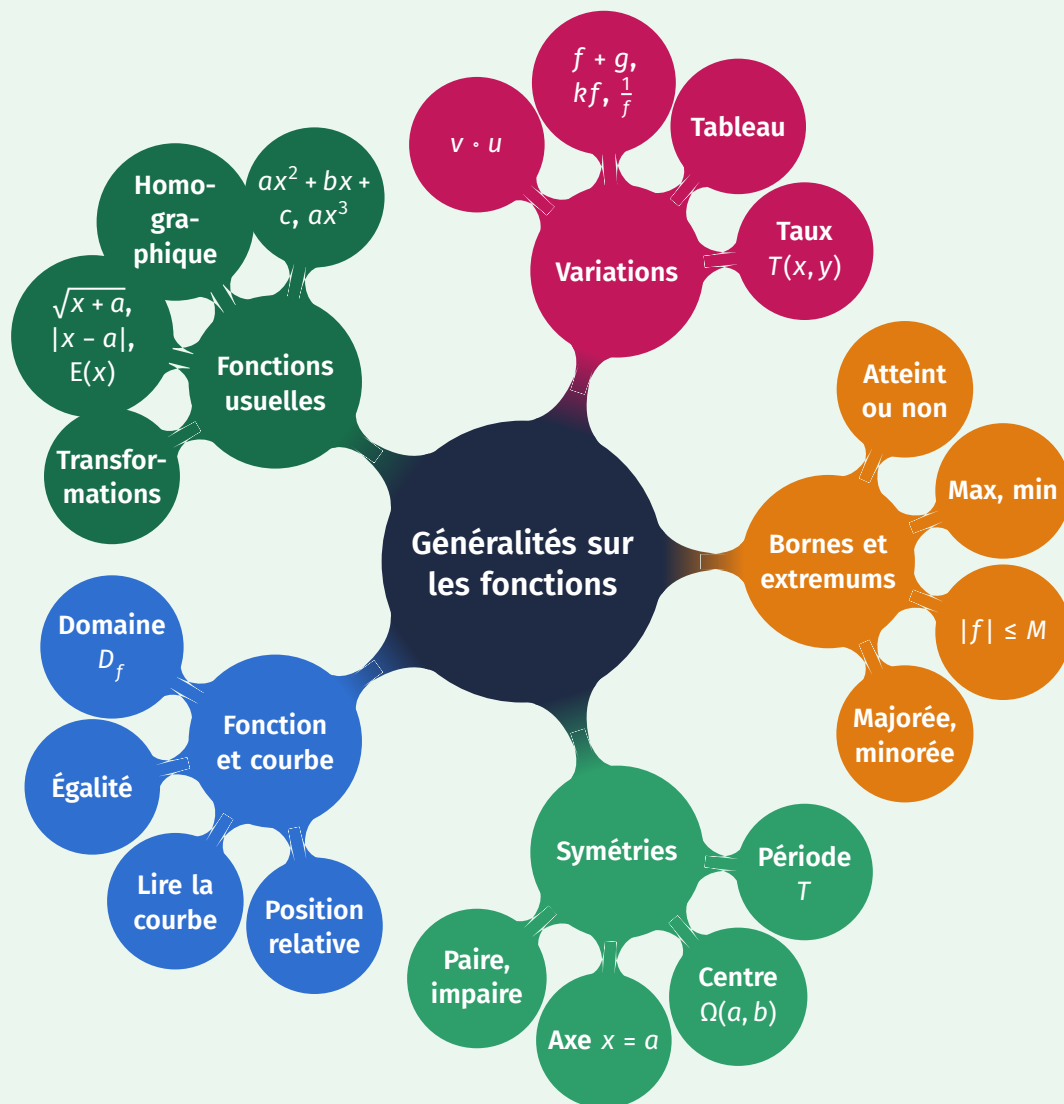
Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Domaine, égalité, opérations, Parité, symétries, périodicité, Majorants et extremums, Sens de variation, Fonctions usuelles et courbes, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|---|
| ☐ trouver un domaine, comparer deux fonctions ; | ☐ trouver un extremum sans dérivée ; |
| ☐ lire images, antécédents et solutions ; | ☐ étudier les variations par le taux $T(x, y)$; |
| ☐ résoudre graphiquement, comparer deux courbes ; | ☐ dresser et lire un tableau de variations ; |
| ☐ étudier la parité (domaine symétrique) ; | ☐ étudier $f + g, kf, \frac{1}{f}$ et $v \circ u$; |
| ☐ prouver un axe $x = a$, un centre $\Omega(a, b)$; | ☐ étudier $ax^2 + bx + c, ax^3, \frac{ax+b}{cx+d}$; |
| ☐ utiliser une fonction périodique ; | ☐ utiliser $\sqrt{x+a}, x-a $ et $E(x)$; |
| ☐ majorer, minorer, borner une fonction ; | ☐ tracer $f(x-a) + b, -f(x), f(x) , f(x)$. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point : blocs 1 et 2, les bases du tronc commun utiles au chapitre ; bloc 3, tes acquis des chapitres 1 à 3. Aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : page 69.

Bloc 1 · Calcul algébrique

___ / 4

① **Identités remarquables** Factoriser $A = (x + 1)^2 - (2x - 3)^2$ et $B = 8x^3 - 1$.

② **Forme canonique** Écrire $2x^2 + 8x + 6$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, puis en déduire ses racines.

③ **Tableau de signes** Étudier le signe de $P(x) = (x^2 - 4)(3 - x)$, puis résoudre $P(x) \geq 0$.

④ **Second degré** Résoudre dans $\mathbb{R}$:
(a) $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$; (b) $-x^2 + 3x - 5 < 0$.

Bloc 2 · Fonctions du tronc commun

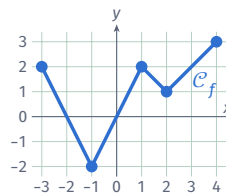
___ / 4

⑤ **La fonction carré** (a) Résoudre $x^2 > 5$.
(b) On sait que $-1 \leq x \leq 3$. Encadrer x^2 .

⑥ **La fonction inverse** (a) Si $-4 \leq x \leq -2$, encadrer $1/x$.
(b) Résoudre $1/x < 3$ (pour $x \neq 0$).

⑦ **Affine et valeur absolue** Soit $f(x) = |2x + 5|$.
(a) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue, pour $x \leq -\frac{5}{2}$, puis pour $x \geq -\frac{5}{2}$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 3$.

⑧ **Lire un graphique** La courbe de f est la ligne brisée ci-contre.
(a) Lire $f(-1)$, $f(0)$ et $f(4)$.
(b) Quels réels ont pour image 2 ?



Bloc 3 · Logique et applications (chapitres 1 à 3)

___ / 4

⑨ **Quantificateurs** P :
« $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2)$ ».
(a) Écrire la négation de P . (b) P est-elle vraie ?

⑩ **Intervalles** Écrire à l'aide d'intervalles l'ensemble des réels x tels que :
(a) $x \neq -2$ et $x \neq 3$; (b) $x \geq -1$ et $x \neq 2$.

⑪ **Image directe** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 - 3$ et $A = \{-1, 0, 1, 2\}$.
(a) Déterminer $f(A)$. (b) f est-elle injective ?

⑫ **Composition** $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
(a) Calculer $(v \circ u)(x)$ et $(u \circ v)(x)$. (b) A-t-on $v \circ u = u \circ v$?

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi page 69.

Bloc 1
___ / 4

+

Bloc 2
___ / 4

+

Bloc 3
___ / 4

=

Mon score
___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1

Fonction et domaine

Au tronc commun, tu as étudié $x \mapsto ax + b$, $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto \frac{a}{x}$. Ce chapitre donne le **vocabulaire commun** à toutes les fonctions (domaine, courbe, symétries, bornes, extremums, variations) et des **méthodes sans calcul savant** : inégalités, factorisations, taux d'accroissement.

Définition : fonction numérique, domaine de définition

Une **fonction numérique d'une variable réelle** f associe à chaque réel x **au plus un** réel, noté $f(x)$: l'**image** de x ; si $y = f(x)$, x est un **antécédent** de y . Le **domaine de définition** de f est $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \text{ existe}\}$. Alors $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ est une **application** (chapitre 3). Si f est donnée par une formule, D_f est l'ensemble des x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible.

l'expression contient...	on écrit...
$\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
$\sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$ (strict !)
$f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
polynôme, $ A(x) $, $E(A(x))$	rien de plus

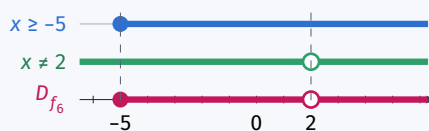
Méthode : Comment déterminer D_f

1. Repérer chaque opération « à risque » (dénominateur, racine carrée). **2.** Écrire une condition par opération. **3.** Résoudre chacune (tableau de signes, discriminant), puis prendre l'**intersection** : toutes les conditions à la fois. **4.** Conclure par « $D_f = \dots$ » avec des intervalles.

Exemple : sept domaines

- $f_1(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-12}$: $x^2+x-12 = (x+4)(x-3) \neq 0$, donc $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$. $f_2(x) = \sqrt{9-3x}$: $9-3x \geq 0 \iff x \leq 3$: $D_{f_2} =]-\infty, 3]$.
- $f_3(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$: $(x+1)(x-4) \geq 0$ (trinôme positif à l'extérieur de ses racines) : $D_{f_3} =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$.
- $f_4(x) = \sqrt{4-|x-1|}$: $|x-1| \leq 4 \iff -3 \leq x \leq 5$: $D_{f_4} = [-3, 5]$. $f_5(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$: $(x+1)^2+2 \geq 2 > 0$: $D_{f_5} = \mathbb{R}$.

- $f_6(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-2}$: $x \geq -5$ et $x \neq 2$: $D_{f_6} = [-5, 2[\cup]2, +\infty[$ (figure).
- $f_7(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$: $x \neq -2$ et $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$; le quotient s'annule en 3, est interdit en -2, et a le signe de $(3-x)(x+2)$, positif entre -2 et 3 : $D_{f_7} =]-2, 3]$.



on garde ce qui vérifie **toutes** les conditions

Définition : égalité de deux fonctions

$$f = g \iff D_f = D_g \text{ et } \forall x \in D_f, f(x) = g(x).$$

- $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ et $g(x) = |2x - 1|$: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$: $f = g$. De même $\frac{x^3+x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$ pour tout réel x (car $x^2 + 1 \neq 0$) : $x \mapsto \frac{x^3+x}{x^2+1}$ est égale à $x \mapsto x$.
- $u(x) = \frac{1}{1/x}$ et $v(x) = x$: $u(x) = x$ pour tout $x \neq 0$, mais $D_u = \mathbb{R}^* \neq D_v = \mathbb{R}$: $u \neq v$. Elles ont seulement la même **restriction** à $\mathbb{R}^*$: simplifier une formule peut **changer le domaine**.

Remarque. Un peu d'histoire. Le mot latin *functio* apparaît chez **Leibniz** (1692) pour des grandeurs attachées à un point d'une courbe (abscisse, ordonnée...). **Jean Bernoulli** (1718) appelle fonction d'une variable « une quantité composée de cette variable et de constantes ». **Euler** écrit pour la première fois $f(x)$ en 1734, et son *Introductio* (1748) fait de la fonction l'objet central de l'analyse.

2

Courbe et lectures graphiques

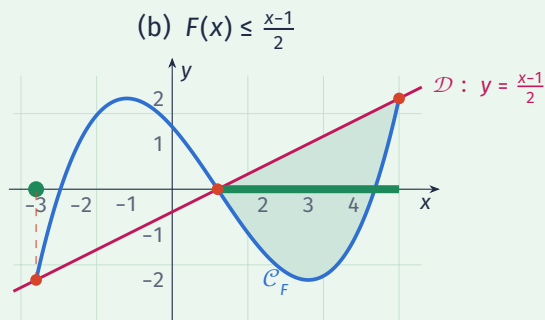
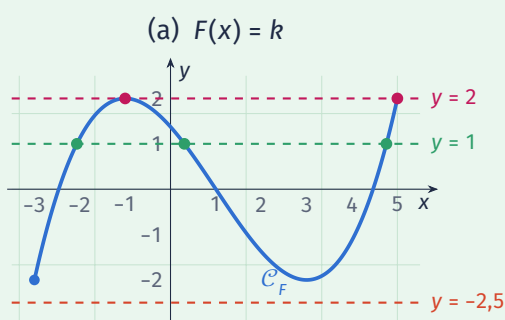
Définition : courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) ; x \in D_f\}$; son **équation** est $y = f(x)$: $M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff (a \in D_f \text{ et } b = f(a))$.
Une droite verticale $x = a$ coupe $\mathcal{C}_f$ en **au plus un point** (exactement un si $a \in D_f$).

on cherche...	on lit sur la figure...
l'image $f(a)$	l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a
les solutions de $f(x) = k$; leur nombre	les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite $y = k$; leur nombre
les solutions de $f(x) \geq k$	les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ sur ou au-dessus de la droite $y = k$
les solutions de $f(x) = g(x)$; de $f(x) \leq g(x)$	les abscisses des points communs ; des points de $\mathcal{C}_f$ sur ou sous $\mathcal{C}_g$
D_f ; $f(D_f)$ (ensemble des images)	la projection de $\mathcal{C}_f$ sur l'axe des abscisses ; sur l'axe des ordonnées

Exemple : lire la courbe d'une fonction F définie sur $[-3, 5]$ (figure (a) et (b))

Lectures. $D_F = [-3, 5]$; $F(-1) = 2$, $F(1) = 0$, $F(3) = -2$; $F([-3, 5]) = [-2, 2]$. Figure (a) : la droite $y = 1$ coupe $\mathcal{C}_F$ en **trois points**, donc $F(x) = 1$ a trois solutions (environ -2,1 ; 0,3 ; 4,8) ; $F(x) = 2$ en a deux, -1 et 5 ; $F(x) = -2,5$ aucune. $F(x) \geq 0 \iff x \in [a, 1] \cup [b, 5]$, avec $a \approx -2,5$ et $b \approx 4,5$. **Nombre de solutions de $F(x) = m$** (on fait « glisser » la droite $y = m$) :



m	$m < -2$	$m = -2$	$-2 < m < 2$	$m = 2$	$m > 2$
solutions	0	2 (-3 et 3)	3	2 (-1 et 5)	0

Inéquation (b). $F(x) \leq \frac{x-1}{2}$ pour les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ sur ou sous $\mathcal{D}$: $S = \{-3\} \cup [1, 5]$.

Contrôle par le calcul. Ici $F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 11}{8}$, et $F(x) - \frac{x-1}{2} = \frac{(x+3)(x-1)(x-5)}{8} \leq 0$ sur $[-3, 5]$ exactement pour $x = -3$ ou $1 \leq x \leq 5$. La lecture donne des valeurs **approchées** ; le calcul donne $a = 1 - 2\sqrt{3}$ et $b = 1 + 2\sqrt{3}$.

Méthode : position relative de deux courbes

On étudie le **signe de la différence** $d(x) = f(x) - g(x)$ sur $D_f \cap D_g$: si $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$; si $d(x) < 0$, au-dessous ; si $d(x) = 0$, elles se coupent. **Exemple** : $f(x) = x^2 - 5$ et $\Delta : y = 4x$: $d(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$; $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$, au-dessous sur $]-1, 5[$; points communs $(-1, -4)$ et $(5, 20)$.

3

Parité, symétries, périodicité

$D \subset \mathbb{R}$ est **symétrique par rapport à 0** lorsque $\forall x \in D, -x \in D$: c'est le cas de $\mathbb{R}$, $[-2, 2]$, $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, pas de $[-1, 2]$ ni de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Définition : fonction paire, fonction impaire

f est **paire** lorsque D_f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$; **impaire** lorsque D_f est symétrique et $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique

Dans un repère **orthogonal** : f paire $\iff \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; f impaire $\iff \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O . Si f est impaire et $0 \in D_f$, alors $f(0) = 0$ (car $f(0) = -f(0)$).

Démonstration. Les symétriques de $M(x, y)$ par rapport à (Oy) et à O sont $M'(-x, y)$ et $M''(-x, -y)$. Si f est paire, $y = f(x) \iff y = f(-x)$, donc $M \in \mathcal{C}_f \iff M' \in \mathcal{C}_f$; si f est impaire, $y = f(x) \iff -y = f(-x)$, donc $M \in \mathcal{C}_f \iff M'' \in \mathcal{C}_f$. $\square$

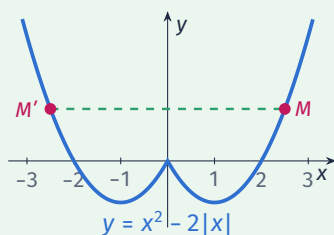
En pratique : on étudie f sur $D_f \cap [0, +\infty[$, puis on complète la courbe par symétrie.

Méthode : Comment étudier la parité

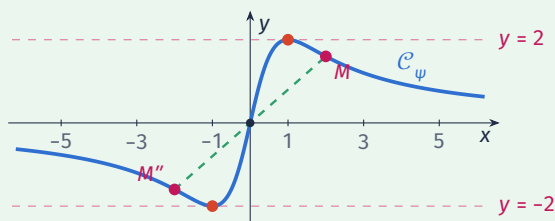
1. Domaine : D_f est-il symétrique ? Sinon, on exhibe $a \in D_f$ tel que $-a \notin D_f$: f n'est **ni paire ni impaire**. **2. Calcul :** pour $x \in D_f$, on calcule $f(-x)$ et on le compare à $f(x)$ et à $-f(x)$. **3. Réfuter :** pour montrer que f n'est pas paire (resp. impaire), **un** réel a tel que $f(-a) \neq f(a)$ (resp. $f(-a) \neq -f(a)$) suffit.

Exemple : cinq fonctions

- $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ est symétrique et $f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 9} = f(x)$: f est **paire**.
- $g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$: $D_g = [-1, 1]$ ($x \geq -1$ et $x \leq 1$) est symétrique et $g(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -g(x)$: **impaire**.
- $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$: $-1 \in D_h$ mais $1 \notin D_h$: **ni paire ni impaire**. $k(x) = x^2 + 2x$: $k(1) = 3$, $k(-1) = -1$: $k(-1) \neq k(1)$ et $k(-1) \neq -k(1)$: **ni l'une ni l'autre**.
- **Le fil rouge du cours :** $\psi(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$: $\psi(-x) = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -\psi(x)$: ψ est **impaire** (figure ci-dessous).



paire : symétrie par rapport à (Oy)



ψ impaire : symétrie par rapport à O (et $-2 \leq \psi \leq 2$, section 4)

Axe et centre de symétrie

- (Repère orthogonal) La droite $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f \iff \forall x \in D_f, (2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x))$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f \iff \forall x \in D_f, (2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b)$.

Démonstration. Le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à la droite $x = a$ est $M'(2a - x, y)$; par rapport à Ω , c'est $M''(2a - x, 2b - y)$ (Ω est le milieu de $[MM'']$) ; on conclut comme pour la parité. $\square$

Autre écriture (avec $x = a + h$) : $f(a - h) = f(a + h)$ pour l'axe, $f(a - h) + f(a + h) = 2b$ pour le centre ; autrement dit, $h \mapsto f(a + h)$ est paire, ou $h \mapsto f(a + h) - b$ est impaire : on « déplace l'origine » en $(a, 0)$ ou en Ω .

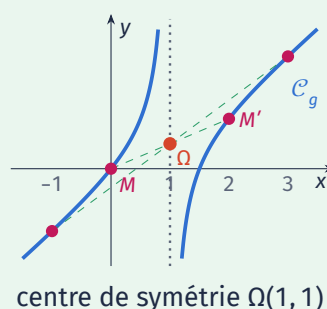
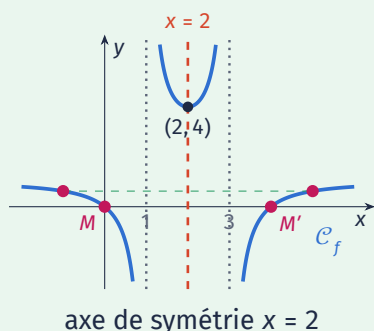
Méthode : Comment montrer qu'une droite $x = a$ est axe de symétrie

- 1. Domaine :** montrer que $x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$ (les valeurs interdites vont par paires de milieu a).
- 2. Calcul :** pour $x \in D_f$, calculer $f(2a - x)$, développer, retrouver $f(x)$.
- 3. Conclure.** Pour deviner a : milieu de deux valeurs interdites, ou de deux réels de même image. Pour un centre : même démarche avec $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exemple : un axe, puis un centre

Axe. $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$: $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$; on devine l'axe $x = 2$, milieu de 1 et 3. **Domaine** : si $x \in D_f$, alors $4 - x \neq 3$ (car $x \neq 1$) et $4 - x \neq 1$ (car $x \neq 3$). **Calcul** : $(4 - x)^2 - 4(4 - x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x = x^2 - 4x$: le numérateur ne change pas, ni le dénominateur (numérateur $+3$) ; donc $f(4 - x) = f(x)$, et **la droite $x = 2$ est axe de symétrie** ($f(0) = f(4) = 0$, $f(2) = 4$).

Centre. $g(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 1}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; comme $2x^2 - 3x = (x - 1)(2x - 1) - 1$, $g(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x-1}$. Si $x \neq 1$, alors $2 - x \neq 1$ et $g(2 - x) + g(x) = \left(3 - 2x + \frac{1}{x-1}\right) + \left(2x - 1 - \frac{1}{x-1}\right) = 2 = 2 \times 1$: $\Omega(1, 1)$ **est centre de symétrie** de $\mathcal{C}_g$ ($g(0) = 0$ et $g(2) = 2$; $g(-1) = -\frac{5}{2}$ et $g(3) = \frac{9}{2}$).

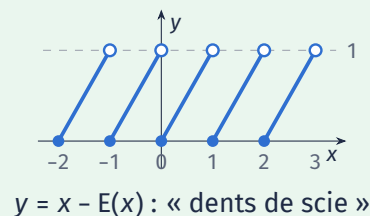


Définition : fonction périodique

Soit $T > 0$. f est **périodique de période T** lorsque, pour tout $x \in D_f$: $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

Propriété. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in D_f$, $f(x + nT) = f(x)$: $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$; il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T .

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence : $f(x + (n+1)T) = f((x + nT) + T) = f(x + nT) = f(x)$; puis $f(x - nT) = f((x - nT) + nT) = f(x)$, car $x - nT \in D_f$. $\square$



Exemple : la partie fractionnaire

Rappel : $E(x)$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$ (section 10). Soit $f(x) = x - E(x)$ sur $\mathbb{R}$: $0 \leq f(x) < 1$ et $f(x) = x$ sur $[0, 1[$. Comme $E(x) + 1 \leq x + 1 < E(x) + 2$, on a $E(x + 1) = E(x) + 1$, donc $f(x + 1) = f(x)$: f est **périodique de période 1** (et de période 2, 3...), et aucun $T \in]0, 1[$ n'est une période, car $f(0 + T) = T \neq f(0)$. De même, $x \mapsto (-1)^{E(x)}$ (1 sur $[2k, 2k + 1[$, -1 sur $[2k + 1, 2k + 2[$) est de période 2 ; et $\cos$, $\sin$ sont de période 2π (tronc commun).

4

Fonctions majorées et bornées

Définition : fonction majorée, minorée, bornée sur une partie I de D_f

f est **majorée** sur I lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$ (M est un **majorant**) ; **minorée** lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$; **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée. Graphiquement, au-dessus de I , $\mathcal{C}_f$ est sous la droite $y = M$, au-dessus de $y = m$, ou dans la bande comprise entre elles.

Propriété

f est bornée sur $I \iff \exists K \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq K$.

Démonstration. $(\Leftarrow) |f(x)| \leq K$ s'écrit $-K \leq f(x) \leq K$. $(\Rightarrow)$ Si $m \leq f(x) \leq M$ sur I , posons $K = \max(|m|, |M|)$: $f(x) \leq M \leq |M| \leq K$ et $f(x) \geq m \geq -|m| \geq -K$. $\square$

Négation : f n'est **pas majorée** sur $I \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$. Attention à l'ordre : M est choisi **avant** x ; « $\forall x \in I, \exists M, f(x) \leq M$ » est vraie pour toute fonction ($M = f(x)$).

Méthode : Comment majorer, minorer, encadrer

1. Partir de « $x \in I$ » et construire l'encadrement **étape par étape** (une fonction croissante conserve l'ordre, une fonction décroissante l'inverse). 2. Outils : un carré est ≥ 0 (forme canonique) ; $|a+b| \leq |a|+|b|$; pour un quotient de nombres **positifs**, majorer le numérateur **et** minorer le dénominateur. 3. Pour « non majorée » : « Soit $M \in \mathbb{R}$ », puis **construire** un x (qui dépend de M) tel que $f(x) > M$.

Exemple : trois situations

1. **Le fil rouge est borné.** Pour tout réel x : $|\psi(x)| \leq 2 \iff 4|x| \leq 2(x^2 + 1) \iff 2(|x| - 1)^2 \geq 0$ (car $x^2 = |x|^2$), ce qui est vrai : $-2 \leq \psi(x) \leq 2$ sur $\mathbb{R}$ (bande de la figure de la section 3).

2. **Un encadrement grossier.** $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$ sur $[0, 3]$: si $0 \leq x \leq 3$, alors $8 \leq x^2 + 8 \leq 17$ et $1 \leq x + 1 \leq 4$, donc $\frac{8}{4} \leq f(x) \leq \frac{17}{1}$: $2 \leq f(x) \leq 17$, et f est bornée sur $[0, 3]$. Ces bornes ne sont **pas les meilleures** : en section 5, on obtient $4 \leq f(x) \leq 8$, et 4, 8 sont atteints.

3. **Une fonction non majorée.** $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ sur $[0, +\infty[$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Pour $x \geq 1$, $x + 1 \leq 2x$, donc $g(x) \geq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$; le réel $x = 2|M| + 2 \geq 1$ vérifie donc $g(x) \geq |M| + 1 > M$: g n'est pas majorée (elle est minorée par 0).

Opérations. Si $|f| \leq K$ et $|g| \leq K'$ sur I , alors $|f + g| \leq K + K'$ et $|fg| \leq KK'$: somme et produit de fonctions bornées sont bornés.

5

Les extremums

Définition : maximum, minimum, extremum ($I \subset D_f, a \in I$)

f admet un **maximum** sur I en a lorsque $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$; le réel $f(a)$ est le **maximum** de f sur I . **Minimum** : $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$. Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

f admet un **maximum relatif** (ou local) en a lorsqu'il existe un intervalle ouvert J contenant a , inclus dans D_f , tel que $\forall x \in J, f(x) \leq f(a)$. De même pour un **minimum relatif**.

Un maximum est un **majorant atteint** : M est le maximum de f sur $I \iff (\forall x \in I, f(x) \leq M)$ et $(\exists a \in I, f(a) = M)$. La valeur est unique, mais elle peut être atteinte en plusieurs points (F, section 2 : maximum 2 atteint en -1 et en 5).

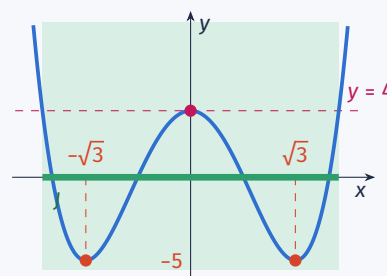
Méthode : Comment trouver un extremum sans dérivée

1. Conjecturer (tableau de valeurs, courbe, symétrie) une valeur m et un point a . **2. Démontrer l'inégalité** : $\forall x \in I, f(x) - m \geq 0$ (factoriser, faire apparaître un carré, utiliser une inégalité connue). **3. Démontrer qu'elle est atteinte** : $a \in I$ et $f(a) = m$ (cas d'égalité). **4. Conclure** : « f admet sur I un minimum égal à m , atteint en a ». **Sans l'étape 3, m n'est qu'un minorant.**

Exemple : par la forme canonique : $g(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

Minimum. $g(x) = (x^2 - 3)^2 - 5 \geq -5$ pour tout réel x , avec égalité si et seulement si $x^2 = 3$: g admet sur $\mathbb{R}$ un **minimum égal à -5 , atteint en $-\sqrt{3}$ et en $\sqrt{3}$.**

Maximum relatif. $g(x) - g(0) = x^4 - 6x^2 = x^2(x^2 - 6) \leq 0$ dès que $x^2 \leq 6$: sur l'intervalle ouvert $J =]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$, qui contient 0 , on a $g(x) \leq g(0) = 4$: **maximum relatif 4 en 0 .** Ce n'est **pas** un maximum sur $\mathbb{R}$: $g(3) = 31 > 4$.



Deux inégalités à connaître

- Pour tout réel $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$ (pour $x < 0$: $x + \frac{1}{x} \leq -2$).
- Pour tous réels a, b : $(a + b)^2 \geq 4ab$, soit $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, avec égalité si et seulement si $a = b$: deux réels de **somme fixée** ont un produit **maximal** lorsqu'ils sont égaux.

Démonstrations. 1. $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ si $x > 0$, nul si et seulement si $x = 1$. 2. $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$. □

Exemple : les deux inégalités en action

1. $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$ sur $[0, +\infty[$ (section 4). Posons $t = x + 1 \geq 1$: $x^2 + 8 = (t - 1)^2 + 8 = t^2 - 2t + 9$, donc

$$f(x) = t - 2 + \frac{9}{t} = 3\left(\frac{t}{3} + \frac{3}{t}\right) - 2 \geq 3 \times 2 - 2 = 4,$$

avec égalité si et seulement si $\frac{t}{3} = 1$, soit $t = 3$, $x = 2$: **minimum 4 atteint en 2** sur $[0, +\infty[$. Sur $[0, 3]$, $t \in [1, 4]$ et $f(x) - 8 = t + \frac{9}{t} - 10 = \frac{(t-1)(t-9)}{t} \leq 0$: le **maximum** de f sur $[0, 3]$ est $8 = f(0)$. Ainsi $4 \leq f(x) \leq 8$ sur $[0, 3]$, bien mieux que $2 \leq f(x) \leq 17$.

2. $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2, 2]$. Avec $a = x^2$ et $b = 4 - x^2$ (de somme 4) : $h(x)^2 = x^2(4 - x^2) \leq \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$, donc $|h(x)| \leq 2$, avec égalité si et seulement si $x^2 = 4 - x^2$, soit $x = \pm\sqrt{2}$. Comme $h(\sqrt{2}) = 2$ et $h(-\sqrt{2}) = -2$: **maximum 2 en $\sqrt{2}$, minimum -2 en $-\sqrt{2}$.**

Exemple : atteint ou non ? $k(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$

Comme $x^2 + 1 \geq 1$, on a $0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$, donc $1 < k(x) \leq 3$. **Maximum** : $k(0) = 3$, atteint en 0.
Pas de minimum : 1 est un minorant, mais $k(x) = 1$ est impossible. Mieux : **aucun réel** $m > 1$
n'est un minorant : si $m > 3$, $k(0) < m$; si $1 < m \leq 3$, le réel $x = \sqrt{\frac{2}{m-1}}$ vérifie $x^2 + 1 > \frac{2}{m-1}$, donc $\frac{2}{x^2 + 1} < m - 1$, soit $k(x) < m$. Ainsi 1 est le **plus grand des minorants**, et il n'est pas atteint : k n'a pas de minimum.

6

Le sens de variation

Définition : sens de variation sur un intervalle I inclus dans D_f

f est **croissante** sur I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$; **strictement croissante** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. f est **décroissante** sur I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$; **strictement décroissante** si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante ; **constante** si $\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y)$.

Définition : taux d'accroissement

Pour $x \neq y$ dans D_f : $T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. $T(x, y) = T(y, x)$ est le **coefficient directeur** de la droite (MN) , où $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$.

Théorème (taux d'accroissement et monotonie, I intervalle inclus dans D_f)

f est croissante sur $I \iff T(x, y) \geq 0$ pour tous $x \neq y$ de I ; strictement croissante $\iff T(x, y) > 0$; décroissante $\iff T(x, y) \leq 0$; strictement décroissante $\iff T(x, y) < 0$.

Démonstration (cas strict croissant). $(\Rightarrow)$ Soit $x \neq y$ dans I ; comme $T(x, y) = T(y, x)$, on peut supposer $x < y$; alors $f(x) < f(y)$: numérateur et dénominateur sont négatifs, et $T(x, y) > 0$. $(\Leftarrow)$ Si $x < y$, alors $f(x) - f(y) = T(x, y)(x - y) < 0$. Les autres cas sont identiques. $\square$

Méthode : Comment étudier les variations avec le taux d'accroissement

1. « Soit x et y deux réels distincts de I . » 2. Calculer $f(x) - f(y)$ et le **factoriser par $x - y$** (identités remarquables, même dénominateur, quantité conjuguée pour les racines). 3. Simplifier $T(x, y)$. 4. Trouver son **signe** en utilisant que x et y sont dans I . 5. Conclure et dresser le **tableau de variations**.

Exemple : les variations du fil rouge $\psi(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

Soit $x \neq y$: $\psi(x) - \psi(y) = \frac{4x(y^2 + 1) - 4y(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} = \frac{4[xy(y - x) + (x - y)]}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$, d'où

$T(x, y) = \frac{4(1 - xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$, du signe de $1 - xy$.

• **Sur $[1, +\infty[$** : $x, y \geq 1$ et l'un des deux est > 1 , donc $xy > 1$ et $T(x, y) < 0$: ψ est strictement décroissante.

- **Sur $[-1, 1]$** : $|xy| \leq 1$, et $|xy| = 1$ imposerait $|x| = |y| = 1$, donc $y = -x$ et $xy = -1$: toujours $xy < 1$, $T(x, y) > 0$: strictement croissante.
- **Sur $]-\infty, -1]$** : $-x \geq 1$ et $-y \geq 1$, donc $xy = (-x)(-y) > 1$: strictement décroissante (ou par imparité, ci-dessous).

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\psi(x)$			2	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2

Lecture : ψ admet sur $\mathbb{R}$ un **maximum 2, atteint en 1**, et un **minimum -2, atteint en -1** (on retrouve la section 4). Sur $[2, 3]$, ψ décroît : $\frac{6}{5} = \psi(3) \leq \psi(x) \leq \psi(2) = \frac{8}{5}$.

Monotonie, parité, extremums

1. Si f est **paire**, ses variations sur I et sur $-I = \{-x ; x \in I\}$ sont **contraires** ; si f est **impaire**, elles sont **les mêmes**.
2. Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$; si f croît sur $[a, c]$ et décroît sur $[c, b]$, $f(c)$ est le maximum de f sur $[a, b]$.

Démonstration de 1 (f impaire, croissante sur I). Si $u < v$ dans $-I$, alors $-v < -u$ dans I , donc $f(-v) \leq f(-u)$, soit $-f(v) \leq -f(u)$: $f(u) \leq f(v)$. $\square$

Stricte monotonie et équations (lien avec le chapitre 3)

Si f est strictement croissante sur I : pour tous a, b de I , $a < b \iff f(a) < f(b)$ et $a = b \iff f(a) = f(b)$. En particulier f est **injective** sur I , et l'équation $f(x) = k$ a **au plus une** solution dans I .

Démonstration. $\Rightarrow$ est la définition ; $\Leftarrow$ par contraposée : si $a \geq b$, alors $f(a) \geq f(b)$. $\square$

Exemple : résoudre sans élever au carré : $\sqrt{x+5} + x = 7$, puis $\sqrt{x+5} + x < 7$

Sur $I = [-5, +\infty[$, $\varphi(x) = \sqrt{x+5} + x$ est strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes, section 7) et $\varphi(4) = 3 + 4 = 7$. Donc $\varphi(x) = 7 \iff \varphi(x) = \varphi(4) \iff x = 4$: $S = \{4\}$; et $\varphi(x) < 7 \iff \varphi(x) < \varphi(4) \iff x < 4$: $S = [-5, 4[$.

7 Opérations et composition

Définition : opérations sur les fonctions

Pour $x \in D_f \cap D_g$ et $k \in \mathbb{R}$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(kf)(x) = kf(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour $x \in D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$.

Théorème (opérations et sens de variation sur un intervalle I)

1. f et g croissantes sur $I \Rightarrow f + g$ croissante sur I (strictement si l'une l'est) ; de même pour « décroissantes ».
2. Si $k > 0$, kf a le sens de variation de f ; si $k < 0$, le sens contraire.
3. Si f est monotone sur I et garde un **signe constant strict** sur I , alors $\frac{1}{f}$ a le sens de variation **contraire** de celui de f .
4. f et g croissantes **et positives** sur $I \Rightarrow fg$ croissante sur I .

Démonstrations. Soit $x < y$ dans I . 1. On additionne $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$. 3. $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} = \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)}$ avec $f(x)f(y) > 0$. 4. $f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(y)(g(y) - g(x)) + g(x)(f(y) - f(x)) \geq 0$, car les quatre

facteurs sont positifs. □

Sans hypothèse de signe, on ne peut rien dire de fg (section 13) ; mais si f croît et g décroît, $f - g = f + (-g)$ croît.

Définition : composée

$(v \circ u)(x) = v(u(x))$: on applique d'abord u , puis v .

$$D_{v \circ u} = \{x \in D_u ; u(x) \in D_v\}.$$

Théorème (sens de variation d'une composée)

Soit u monotone sur I et v monotone sur J , avec $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Si u et v ont le **même** sens de variation, $v \circ u$ est **croissante** sur I ; si elles ont des sens **contraires**, $v \circ u$ est **décroissante** sur I (règle des signes : croissante = +, décroissante = -).

Démonstration (u croissante, v décroissante). Si $x < y$ dans I , alors $u(x) \leq u(y)$, deux réels de J , où v décroît : $v(u(x)) \geq v(u(y))$. □

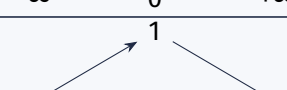
Méthode : Comment étudier $v \circ u$

1. Décomposer : $f = v \circ u$ (suivre le calcul « de l'intérieur vers l'extérieur »). 2. Domaine : $x \in D_u$ et $u(x) \in D_v$. 3. Découper D_f en intervalles I où u est monotone. 4. Sur chaque I , trouver un intervalle J qui contient les $u(x)$ et sur lequel v est monotone. 5. Appliquer la règle des signes.

Exemple : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$

$f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$ et $v(t) = \sqrt{t}$: $D_f = \mathbb{R}$. u décroît sur $]-\infty, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$ (section 8), et prend ses valeurs dans $J = [1, +\infty[$, où v croît : f a les variations de u ; **minimum** $f(2) = 1$.
 $g = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 1 \geq 1$ et $v(t) = \frac{1}{t}$, décroissante sur $J =]0, +\infty[$: g a les variations **contraires** de celles de u ; **maximum** $g(0) = 1$, et $0 < g(x) \leq 1$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$			

Attention au domaine de v : $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$, $D_h = \{x \geq 0 ; \sqrt{x} \neq 2\} = [0, 4[\cup]4, +\infty[$. $u(x) = \sqrt{x} - 2$ est strictement croissante ; sur $[0, 4[$, $u(x) \in [-2, 0[$, et sur $]4, +\infty[$, $u(x) > 0$; $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$: h est décroissante sur $[0, 4[$ **et** sur $]4, +\infty[$, mais pas sur D_h : $h(0) = -\frac{1}{2} < h(9) = 1$.

8

Second degré et fonction cube

Théorème (forme canonique, sommet, axe, variations)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Pour tout réel x : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Si $a > 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, de

minimum β en α . Si $a < 0$: l'inverse, **maximum** β en α . $\mathcal{C}_f$ est une **parabole** de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe $x = \alpha$: l'image de la courbe $y = ax^2$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ (section 11).

Démonstration. $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Ensuite $f(x) - f(y) = a(x^2 - y^2) + b(x - y)$, donc $T(x, y) = a(x + y) + b = a(x + y - 2\alpha)$ (car $b = -2a\alpha$) : si $x \neq y$ sont dans $[\alpha, +\infty[$, alors $x + y > 2\alpha$ et T a le signe de a ; dans $]-\infty, \alpha]$, $x + y < 2\alpha$. Enfin $f(2\alpha - x) = a(\alpha - x)^2 + \beta = f(x)$: la droite $x = \alpha$ est axe de symétrie. $\square$

$$a > 0$$

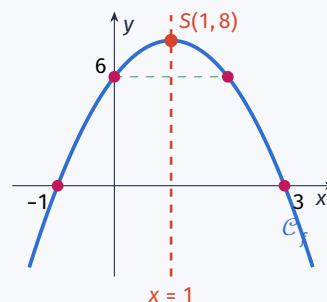
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

$$a < 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

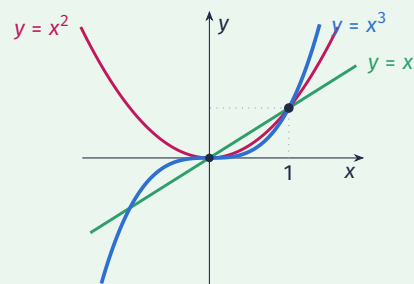
Exemple : $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

$\alpha = -\frac{4}{2 \times (-2)} = 1$ et $\beta = f(1) = 8$: $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$. Comme $a = -2 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, et admet sur $\mathbb{R}$ un **maximum égal à 8, atteint en 1**. Racines : $(x - 1)^2 = 4 \iff x = -1$ ou $x = 3$, d'où $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$ et $f(x) \geq 0 \iff x \in [-1, 3]$. **Tracé :** sommet $S(1, 8)$, axe $x = 1$, points $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 6)$ et son symétrique $(2, 6)$.



La fonction $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$)

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire (courbe symétrique par rapport à O). Son taux est $T(x, y) = a(x^2 + xy + y^2)$, et pour $x \neq y$, $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$. Donc : si $a > 0$, elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$; si $a < 0$, strictement décroissante.



Pourquoi > 0 ? La somme de deux carrés est nulle seulement si $y = 0$ et $x = -\frac{y}{2} = 0$, c'est-à-dire $x = y$, cas exclu. **Conséquence :** pour **tous** réels u, v , $u < v \iff u^3 < v^3$ et $u^{\frac{1}{3}} = v^{\frac{1}{3}} \iff u = v$ (sans condition de signe, contrairement aux carrés) : $x^3 = -8 \iff x = -2$; $x^3 \leq 27 \iff x \leq 3$. **Positions (figure) :** $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ et $x^2 - x = x(x - 1)$; sur $]0, 1[$, $x^3 < x^2 < x$; sur $]1, +\infty[$, $x < x^2 < x^3$.

9

Les fonctions homographiques

Définition : fonction homographique

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. (Si $c = 0$, f est affine ; si $ad - bc = 0$, f est constante sur D_f : $\frac{4x+2}{2x+1} = 2$.)

Théorème (forme réduite et étude)

1. Pour tout $x \in D_f$: $f(x) = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$ avec $\alpha = -\frac{d}{c}$, $\beta = \frac{a}{c}$, $k = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$.

2. Le point $\Omega(\alpha, \beta)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$. 3. Si $k > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$; si $k < 0$, strictement croissante sur chacun d'eux.

4. $\mathcal{C}_f$ est une **hyperbole**, image de $y = \frac{k}{x}$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$ **guident** le tracé : la courbe ne les coupe jamais ($\alpha \notin D_f$ et $f(x) \neq \beta$), et $|f(x) - \beta| = \frac{|k|}{|x - \alpha|}$ est petit lorsque x est loin de α (par exemple $\leq \frac{1}{10}$ dès que $|x - \alpha| \geq 10|k|$).

Démonstration. 1. $f(x) - \frac{a}{c} = \frac{c(ax+b) - a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{bc - ad}{c^2(\frac{d}{c} + x)}$. 2. Si $x \neq \alpha$, alors $2\alpha - x \neq \alpha$ et $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta + \frac{k}{\alpha - x} + \frac{k}{x - \alpha} = 2\beta$. 3. $f(x) - f(y) = \frac{k(y-x)}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$, donc $T(x, y) = \frac{-k}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$; si x et y sont du même côté de α , $(x - \alpha)(y - \alpha) > 0$ et T a le signe de $-k$. $\square$

Méthode : Comment étudier une homographie

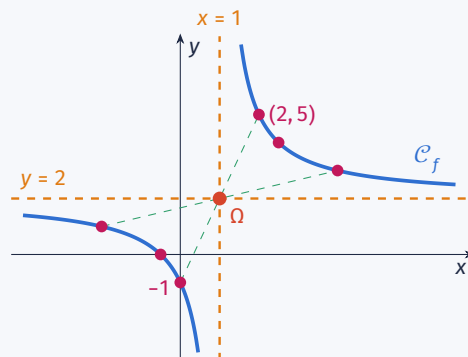
1. D_f . 2. Forme réduite (division : $ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + \dots$). 3. Centre Ω , signe de k , tableau (double barre en α). 4. Tracé : les deux droites, Ω , quelques points **et leurs symétriques par rapport à Ω** , deux branches.

Exemple : $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et $2x + 1 = 2(x - 1) + 3$, donc $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $k = 3 > 0$. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$; centre $\Omega(1, 2)$. Points symétriques par rapport à Ω : $(0, -1)$ et $(2, 5)$; $(-2, 1)$ et $(4, 3)$; $(-\frac{1}{2}, 0)$ et $(\frac{5}{2}, 4)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Attention : f n'est **pas** décroissante sur D_f : $0 < 2$ et pourtant $f(0) = -1 < f(2) = 5$. Avec $k < 0$: $g(x) = \frac{3x+1}{x+1} = 3 - \frac{2}{x+1}$ est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, de centre $\Omega(-1, 3)$.



10

Racine, valeur absolue, $E(x)$

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto |x-a|$ (a réel)

1. $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est définie sur $[-a, +\infty[$, **strictement croissante**, de minimum 0 en $-a$, non majorée. Sa courbe est une **demi-parabole** : $y = \sqrt{x+a} \iff (y \geq 0 \text{ et } x = y^2 - a)$; c'est l'image de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

2. $|x - a| = x - a$ si $x \geq a$, $a - x$ si $x \leq a$: c'est la **distance** de x à a . La fonction $x \mapsto |x - a|$ décroît sur $]-\infty, a]$, croît sur $[a, +\infty[$, a pour minimum 0 en a et pour axe de symétrie $x = a$;

sa courbe est formée de deux demi-droites issues de $(a, 0)$, de coefficients directeurs -1 et 1 .

Démonstration de 1. Pour $x \neq y$ dans $[-a, +\infty[$ (quantité conjuguée) : $T(x, y) = \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{y+a}}{(x+a)-(y+a)} = \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}} >$

0 . Non majorée : si $M \geq 0$, le réel $x = M^2 + 1 - a$ donne $\sqrt{x+a} = \sqrt{M^2+1} > M$. $\square$

Exemple. $f(x) = 2|x-1| - x$: $f(x) = x-2$ si $x \geq 1$, $f(x) = 2-3x$ si $x \leq 1$; f décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, de minimum $f(1) = -1$. $f(x) = 2$: $x-2 = 2$ (avec $x \geq 1$) ou $2-3x = 2$ (avec $x \leq 1$) : $S = \{0, 4\}$ (figure (b)).

Définition : partie entière

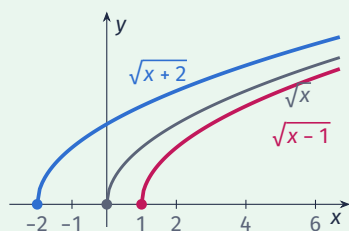
Pour tout réel x , il existe un **unique** entier n tel que $n \leq x < n+1$: c'est la **partie entière** $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x .

$E(3,7) = 3$, $E(-3,7) = -4$, $E(-5) = -5$, $E(\sqrt{10}) = 3$, $E(-\pi) = -4$. **Unicité** : si n et m conviennent, alors $-1 < n-m < 1$, donc $n = m$.

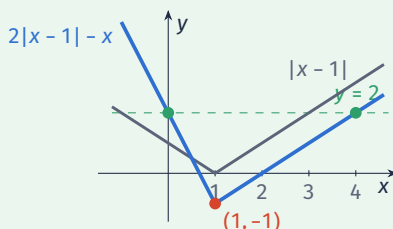
Propriétés de E ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$)

- $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x-1 < E(x) \leq x$; $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
- $E(x+n) = E(x) + n$.
- E est croissante sur $\mathbb{R}$, mais pas strictement : $E(x) = n$ sur $[n, n+1[$ (courbe en **escalier** : point plein à gauche de chaque marche, point vide à droite).
- $E(-x) = -E(x)$ si $x \in \mathbb{Z}$, $E(-x) = -E(x) - 1$ sinon.

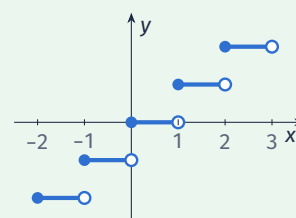
Démonstrations. 2. $E(x) + n$ est un entier et $E(x) + n \leq x + n < E(x) + n + 1$. 3. Si $x \leq y$, l'entier $E(x)$ vérifie $E(x) \leq x \leq y$, donc $E(x) \leq E(y)$ (plus grand entier $\leq y$). 4. Si $x \notin \mathbb{Z}$, $E(x) < x < E(x) + 1$, donc $-E(x) - 1 < -x < -E(x)$. $\square$



(a) demi-paraboles



(b) valeurs absolues



(c) $y = E(x)$, l'escalier

Méthode : $E(A) = n \iff n \leq A < n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$). $E(2x-1) = 3 \iff 3 \leq 2x-1 < 4 \iff 2 \leq x < \frac{5}{2}$: $S = [2, \frac{5}{2}[$. $E(x^2) = 3 \iff 3 \leq x^2 < 4 \iff \sqrt{3} \leq |x| < 2$: $S =]-\sqrt{3}, -2] \cup [\sqrt{3}, 2[$.

11

Transformer une courbe

Théorème (translation)

Soit a, b deux réels et $g(x) = f(x-a) + b$ (définie lorsque $x-a \in D_f$). La courbe $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la **translation de vecteur** $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Démonstration. $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x) \iff y + b = f((x+a)-a) + b \iff M'(x+a, y+b) \in \mathcal{C}_g$,

et $\vec{MM}' = \vec{u}$.

□

Symétries et valeurs absolues (repère orthogonal)

$y = -f(x)$: symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses ; $y = f(-x)$: par rapport à l'axe des ordonnées ; $y = -f(-x)$: par rapport à O .

$y = |f(x)|$: on garde les parties de $\mathcal{C}_f$ situées **au-dessus** de l'axe des abscisses et on remplace les autres par leurs symétriques par rapport à cet axe. $y = f(|x|)$: fonction **paire** ; on garde la partie de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $x \geq 0$ et on la complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

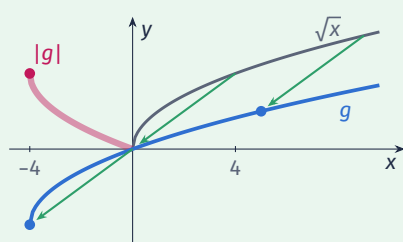
Justification. Comme pour la translation, $M(x, y) \mapsto M'(x, -y)$, $M'(-x, y)$, $M'(-x, -y)$; $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ et $-f(x)$ sinon ; $f(|x|) = f(x)$ si $x \geq 0$, et $f(|-x|) = f(|x|)$.

Méthode : Comment tracer $y = f(x - a) + b$

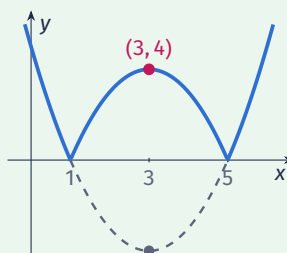
1. Reconnaître une fonction de référence f et écrire $g(x) = f(x - a) + b$ (forme canonique, forme réduite).
2. Lire le vecteur $\vec{u}(a, b)$; **attention aux signes** : $f(x + 3)$ donne $a = -3$, décalage vers la **gauche**.
3. Translater les points clés (origine, sommet, centre, extrémités).
4. Tracer, puis appliquer s'il le faut $|\cdot|$ ou une symétrie.

Exemple : une racine translatée, puis une parabole et ses valeurs absolues

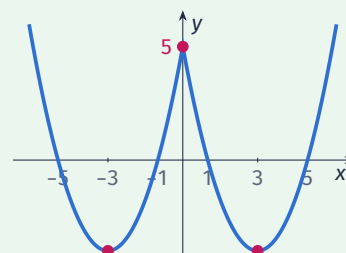
1. $g(x) = \sqrt{x+4} - 2 = r(x - (-4)) + (-2)$ avec $r(x) = \sqrt{x}$: translation de vecteur $\vec{u}(-4, -2)$. Les points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$ de $\mathcal{C}_r$ deviennent $(-4, -2)$, $(-3, -1)$, $(0, 0)$, $(5, 1)$; $D_g = [-4, +\infty[$ et $g(x) \geq 0 \iff x \geq 0$. Pour $h = |g|$, on retourne l'arc situé sur $[-4, 0]$: $h(-4) = 2$, h décroît sur $[-4, 0]$ et croît sur $[0, +\infty[$ (figure (a)).
2. $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4 = (x - 1)(x - 5)$: la parabole $y = x^2$ translatée de $\vec{u}(3, -4)$. $|f|$: l'arc situé sous l'axe, sur $]1, 5[$, est retourné ; il forme une « bosse » de sommet $(3, 4)$ (figure (b)). $f(|x|) = x^2 - 6|x| + 5$: paire, de zéros ± 1 et ± 5 , de minimum -4 atteint en -3 et en 3 , et $f(|0|) = 5$ (figure (c)).



(a) $\vec{u}(-4, -2)$, puis $|g|$



(b) $y = |f(x)|$



(c) $y = f(|x|)$

12

Pour aller plus loin

1. Une équation fonctionnelle. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y . Posons $a = f(1)$.

- $x = y = 0$ donne $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$; $y = -x$ donne $f(-x) = -f(x)$: f est impaire.
- Par récurrence, $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $f((n+1)x) = f(nx) + f(x)$), puis pour $n \in \mathbb{Z}$ par imparité.
- Pour $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) : $q f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = f(p) = pa$, donc $f(r) = ar$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, $x \mapsto ax$ convient. Sur $\mathbb{R}$, il faut une hypothèse de plus (par exemple f monotone : problème de niveau 4).

2. Des fonctions qui commutent. Cherchons les fonctions affines $g(x) = mx + p$ telles que $f \circ g = g \circ f$, avec $f(x) = 2x + 1$: $f(g(x)) = 2mx + 2p + 1$ et $g(f(x)) = 2mx + m + p$; elles sont égales pour tout $x \iff p = m - 1$: $g(x) = m(x + 1) - 1$, droites passant par $(-1, -1)$. **Pourquoi ?** -1 est l'unique **point fixe** de f ($f(c) = c \iff c = -1$), et $f(g(-1)) = g(f(-1)) = g(-1)$: $g(-1)$ est un point fixe de f , donc $g(-1) = -1$.

Point fixe d'une fonction croissante

Soit f croissante sur I , avec $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$. Pour $x \in I$: $f(f(x)) = x \iff f(x) = x$.

Démonstration. $\Leftarrow$ est immédiat. $\Rightarrow$ par l'absurde : si $f(x) > x$, alors (f croissante) $f(f(x)) \geq f(x) > x$, contradiction ; de même si $f(x) < x$. $\square$

Application : résoudre $\sqrt{6 + \sqrt{6 + x}} = x$. $f(t) = \sqrt{6 + t}$ est croissante sur $I = [-6, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[\subset I$; l'équation s'écrit $f(f(x)) = x$, donc équivaut à $f(x) = x$, soit $\sqrt{6 + x} = x \iff (x \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 6 = 0) \iff x = 3$: $S = \{3\}$. **Faux pour une fonction décroissante :** $f(x) = -x$ vérifie $f(f(x)) = x$ pour tout x , mais $f(x) = x$ seulement en 0.

3. Comparer sans calculatrice. $\frac{2026}{2027} < \frac{2027}{2028}$, car $x \mapsto \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. $\sqrt{2027} - \sqrt{2026} < \sqrt{2026} - \sqrt{2025}$, car $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (inverse d'une fonction positive strictement croissante), donc $g(2026) < g(2025)$.

13

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
« $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-2}$ se simplifie en x^2 , donc f est paire »	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ n'est pas symétrique ($-2 \in D_f$, $2 \notin D_f$) : ni paire ni impaire
« $f(-1) = f(1)$, donc f est paire »	il faut $f(-x) = f(x)$ pour tout x : $x^3 + x^2 - x$ vaut 1 en ± 1 , mais -2 en -2 et 10 en 2
« une fonction impaire vérifie $f(0) = 0$ »	seulement si $0 \in D_f$: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire
« f et g croissantes, donc fg croissante »	faux sans hypothèse de signe : sur $[0, 2]$, $x - 2$ et x croissent, mais $x(x - 2)$ vaut 0 en 0 et -1 en 1
« f croissante, donc $\frac{1}{f}$ décroissante »	il faut un signe constant : $x \mapsto x$ croît sur $\mathbb{R}^*$, mais $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$
« 1 est un minorant de f , donc son minimum »	un minimum est un minorant atteint : $\frac{x^2+3}{x^2+1} > 1$ pour tout x , sans minimum
« f majorée : $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ »	$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$: le majorant ne dépend pas de x
« le minimum de $(x - 1)^2 + 2$ sur $[3, 5]$ est 2 »	le sommet n'est pas dans $[3, 5]$: la fonction y croît, son minimum est $f(3) = 6$
« f décroît sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ »	$\frac{2x+1}{x-1}$: $0 < 2$ et pourtant $f(0) = -1 < f(2) = 5$

« $T(x, y) \geq 0$, donc $f(x) \geq f(y)$ »	$f(x) - f(y)$ et $x - y$ ont le même signe : $f(x) \geq f(y)$ seulement si $x > y$
$v \circ u = u \circ v$	$u(x) = x - 3$, $v(x) = \sqrt{x} : \sqrt{x - 3}$ (sur $[3, +\infty[$) n'est pas $\sqrt{x} - 3$ (sur $[0, +\infty[$)
$E(-x) = -E(x)$	$E(-1,5) = -2$ mais $-E(1,5) = -1$: $E(-x) = -E(x) - 1$ si $x \notin \mathbb{Z}$
« $y = f(x - 2)$: on décale $\mathcal{C}_f$ de 2 vers la gauche »	vers la droite : translation de vecteur $2\vec{i}$
« $y = f(x) $ et $y = f(x)$, c'est pareil »	pour $f(x) = x - 1$: $ x - 1 $ et $ x - 1$ valent 1 et -1 en 0
« f paire et croissante sur $[0, +\infty[$, donc croissante sur $\mathbb{R}$ »	elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$ (comme $x \mapsto x^2$)

14

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : la forme canonique, après un changement de variable

$P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$: on groupe les facteurs « extrêmes » et « du milieu » : $x(x+3) = x^2 + 3x = t$ et $(x+1)(x+2) = t+2$. Alors $P(x) = t(t+2) = (t+1)^2 - 1 \geq -1$, avec égalité si et seulement si $t = -1$, c'est-à-dire $x^2 + 3x + 1 = 0$: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **Minimum** -1, atteint en deux points (symétriques par rapport à $-\frac{3}{2}$: $P(-3-x) = P(x)$). On vérifie que $t = -1$ est bien atteint : $t = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$.

★ Astuce de concours : factoriser le taux d'accroissement

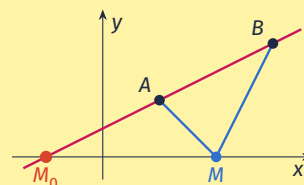
Taux usuels : $x^2 \rightarrow x + y$; $x^3 \rightarrow x^2 + xy + y^2$; $\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{xy}$; $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; et le taux d'une somme est la somme des taux. **Exemple** : $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ sur $]0, +\infty[$: $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{3}{xy}$. Pour $x \neq y$ dans $[1, +\infty[$, l'un dépasse 1 : $x^2 + xy + y^2 > 3$ et $\frac{3}{xy} < 3$, donc $T > 0$; dans $]0, 1]$, les inégalités s'inversent et $T < 0$. Ainsi f décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$: $\boxed{x^3 + \frac{3}{x} \geq 4}$ pour tout $x > 0$, égalité en 1.

★ Astuce de concours : déplacer l'origine pour voir une symétrie

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 10$. Posons $x = -2 + t$: $f(-2+t) = t^3 + 3t - 4$, donc $t \mapsto f(-2+t) + 4 = t^3 + 3t$ est **impair** : $\Omega(-2, -4)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ (section 3), et f est strictement croissante ($t^3 + 3t$ l'est). **En général**, pour $ax^3 + bx^2 + cx + d$, le changement $x = t - \frac{b}{3a}$ fait disparaître le terme en t^2 : le centre a pour abscisse $-\frac{b}{3a}$.

★ *Astuce de concours : une racine carrée, c'est une distance*

Soit $q(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. Dans un repère orthonormé, avec $M(x, 0)$, $A(1, 1)$ et $B(3, 2)$: $q(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 4} - \sqrt{(x-1)^2 + 1} = MB - MA$. Inégalité triangulaire : $MB \leq MA + AB$, donc $q(x) \leq AB = \sqrt{5}$, avec égalité si et seulement si $A \in [MB]$: M est le point $M_0(-1, 0)$ où la droite (AB) , d'équation $y = \frac{x+1}{2}$, coupe l'axe des abscisses. $q(-1) = \sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$: **maximum $\sqrt{5}$ en -1** . Pour une **somme** $MA + MB$, on remplace B par son symétrique par rapport à l'axe : c'est le défi de la couverture (niveau 4).



★ *Astuce de concours : paire et croissante sur $[0, +\infty[$: comparer les valeurs absolues*

Si h est paire et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors $h(u) \leq h(v) \iff h(|u|) \leq h(|v|) \iff |u| \leq |v|$. **Exemple** : résoudre $(x-1)^4 + (x-1)^2 \leq (2x+1)^4 + (2x+1)^2$. Avec $h(t) = t^4 + t^2$: $|x-1| \leq |2x+1| \iff (x-1)^2 \leq (2x+1)^2 \iff 3x^2 + 6x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$: $S =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, sans développer une seule puissance quatrième.

★ *Astuce de concours : compter les maillons décroissants*

$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$: $D_f = \{x \geq 0 ; \sqrt{x} \leq 4\} = [0, 16]$. Chaîne : $x \mapsto \sqrt{x}$ (croissante), $t \mapsto 4 - t$ (décroissante), $s \mapsto \sqrt{s}$ (croissante) : **un** maillon décroissant, donc f est décroissante sur $[0, 16]$, de maximum $f(0) = 2$ et de minimum $f(16) = 0$. Un nombre **impair** de maillons décroissants donne une composée décroissante, un nombre pair une composée croissante.

★ *Astuce de concours : une équation fonctionnelle : substituer, puis vérifier*

Trouver $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $3f(x) - f(2-x) = 4x$ pour tout réel x . **Analyse** : en remplaçant x par $2-x$, $3f(2-x) - f(x) = 8-4x$. On multiplie la première égalité par 3 et on ajoute : $8f(x) = 12x + 8 - 4x$, soit $f(x) = x+1$. **Synthèse** : $3(x+1) - (3-x) = 4x$: $f(x) = x+1$ est l'**unique** solution. (La substitution marche car $x \mapsto 2-x$ est une involution : l'appliquer deux fois redonne x .)

15

L'essentiel du chapitre en une page

Domaine et égalité

$\frac{A}{B} : B \neq 0$; $\sqrt{A} : A \geq 0$; $\frac{A}{\sqrt{B}} : B > 0$; somme, produit : $D_f \cap D_g$.

$f = g \iff D_f = D_g \text{ et } \forall x \in D_f, f(x) = g(x).$

Courbe et lectures

$M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff a \in D_f \text{ et } b = f(a).$

$f(x) = k$: abscisses des points de $\mathcal{C}_f \cap (y = k)$; leur nombre = nombre de solutions.

$f(x) \leq g(x) : \mathcal{C}_f$ sous $\mathcal{C}_g$; position relative : signe de $f(x) - g(x)$.

Symétries (D_f symétrique d'abord !)

Paire : $f(-x) = f(x)$ (axe des ordonnées) ;
impaire : $f(-x) = -f(x)$ (origine) ; impaire et $0 \in D_f \Rightarrow f(0) = 0$.

Axe $x = a : 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x).$

Centre $\Omega(a, b) : 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b.$

Période $T > 0 : x \pm T \in D_f, f(x + T) = f(x)$;
 $f(x + nT) = f(x), n \in \mathbb{Z}$. $x - E(x)$: période 1.

Bornes et extremums

Majorée : $\exists M, \forall x \in I, f(x) \leq M$; non majorée :
 $\forall M, \exists x \in I, f(x) > M$.

Bornée $\iff \exists K \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq K$.

Maximum en $a : \forall x \in I, f(x) \leq f(a)$ (majorant **atteint**) ; relatif : sur un intervalle ouvert $J \ni a$.

Sans dérivée : conjecturer, prouver $f(x) - m \geq 0$, montrer que m est atteint.

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($x > 0$, égalité en 1) ; $(a + b)^2 \geq 4ab$;
forme canonique.

Sens de variation

$T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : T > 0 \text{ sur } I \iff f$
strictement croissante ; $T < 0 \iff$ strictement
décroissante.

Strictement croissante : $a < b \iff f(a) < f(b)$;
injective, $f(x) = k$ a au plus une solution.

f, g croissantes $\Rightarrow f + g$ croissante ; $k < 0 : kf$
change de sens ; f de signe constant : $\frac{1}{f}$ change
de sens ; f, g croissantes **positives** $\Rightarrow fg$
croissante.

$D_{v \cdot u} = \{x \in D_u ; u(x) \in D_v\}$; même sens $\Rightarrow v \cdot u$
croissante, sens contraires $\Rightarrow$ décroissante.

Fonctions usuelles

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = -\frac{\Delta}{4a}$;
sommet $S(\alpha, \beta)$, axe $x = \alpha$; $T = a(x + y) + b$.

ax^3 : impaire, $T = a(x^2 + xy + y^2)$; strictement
croissante si $a > 0$.

$\frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}, \alpha = -\frac{d}{c}, \beta = \frac{a}{c}$; centre $\Omega(\alpha, \beta)$;
 $k > 0$: décroissante sur **chaque** intervalle.

$\sqrt{x+a} : [-a, +\infty[$, croissante ; $|x - a|$: décroît
puis croît, axe $x = a$.

$E(x) \leq x < E(x) + 1$; $E(x + n) = E(x) + n$;
 $E(A) = n \iff n \leq A < n + 1$.

Transformations

$y = f(x - a) + b$: translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$;
 $-f(x)$: symétrie d'axe (Ox) ; $f(-x)$: d'axe (Oy) ;
 $|f(x)|$: on retourne ce qui est sous (Ox) ; $f(|x|)$:
on garde $x \geq 0$ et on symétrise.

À retenir pour les concours

f croissante, $f(I) \subset I : f(f(x)) = x \iff f(x) = x$.
 $f(x + y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(r) = f(1)r$ sur $\mathbb{Q}$.

Cubique : centre d'abscisse $-\frac{b}{3a}$; $\sqrt{(x - a)^2 + b^2}$:
une distance.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours : D_f domaine de définition de f ; $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé ; $T(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ($x \neq y$) taux d'accroissement de f ; $E(x)$ partie entière de x (l'entier k tel que $k \leq x < k+1$). Ni dérivée, ni limite.

16

Niveau I • Bases

Exercice 1 Domaines de définition ★

corrigé p. 39

1. Déterminer le domaine de définition D_f de chaque fonction :

a) $f(x) = x^3 - 2x + 7$; b) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x+10}$; c) $f(x) = \sqrt{6-2x}$; d) $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-16x}$; e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-2}$;

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$; g) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}$; h) $f(x) = \frac{1}{|x|-4}$; i) $f(x) = \frac{1}{E(x)}$; j) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$. 2. Donner une fonction de domaine $[-2, 3[$.

Exercice 2 Images, antécédents, points de la courbe ★

corrigé p. 39

1. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-1}$. a) D_f ? $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$? b) Antécédents de 0 ? de -2 ? c) Montrer que tout réel k a exactement deux antécédents. d) Les points $A(3, 0)$, $B\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$, $C(5, 3)$ sont-ils sur $\mathcal{C}_f$?
2. Soit $g(x) = E(x) + |x|$ ($x \in \mathbb{R}$). Calculer $g(2,3)$, $g(-1,5)$, $g(-3)$; déterminer l'ensemble des antécédents de 0.

Exercice 3 Égalité de deux fonctions ★

corrigé p. 39

Les fonctions f et g sont-elles égales ? Sinon, donner un intervalle où elles coïncident.

a) $f(x) = \frac{x^4-16}{x^2+4}$ et $g(x) = x^2 - 4$; b) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$ et $g(x) = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x+2}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ et $g(x) = |x - 3|$; d) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$; e) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ et $g(x) = x$.

Exercice 4 Parité ★

corrigé p. 40

1. Étudier la parité de chaque fonction (commencer par le domaine) :

a) $f(x) = 3x^4 - x^2 + 5$; b) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-4}$; c) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$; d) $f(x) = x^3+1$; e) $f(x) = |2x+3| + |2x-3|$;

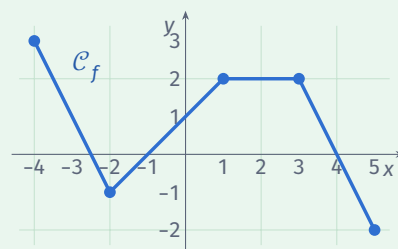
f) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$; g) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; h) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$; i) $f(x) = E(x)$.

2. f est paire, g est impaire, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$: parité de fg , g^2 , $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$?

Exercice 5 Lecture graphique ★

corrigé p. 40

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre est la ligne brisée qui joint les points $(-4, 3)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$ et $(5, -2)$.



- Donner D_f , $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ et les antécédents de 1, 2, -2, 4 (écrire $f(x)$ sur chaque segment).
- Selon le réel k , donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
- Résoudre $f(x) \geq 1$, puis $f(x) < 0$.
- Tableau de variations de f ; extremums de f sur D_f , puis sur $[-3, 3]$; un minimum relatif.

Exercice 6 Sens de variation ★

corrigé p. 40

- À partir des fonctions de référence, donner le sens de variation de : a) $f_1(x) = 7 - 3x$ sur $\mathbb{R}$; b) $f_2(x) = 2 - \frac{3}{x}$ sur $]0, +\infty[$; c) $f_3(x) = -2(x + 3)^2 + 1$ sur $[-3, +\infty[$; d) $f_4(x) = \sqrt{x - 2} + 1$ sur $[2, +\infty[$; e) $f_5(x) = -\frac{x^3}{2}$ sur $\mathbb{R}$; f) $f_6(x) = |x - 4|$ sur $\mathbb{R}$. Comparer $f_4(2 + \sqrt{3})$ et $f_4(3, 7)$.
- Soit $p(x) = 2x^2 - 8x + 1$. Calculer et factoriser son taux d'accroissement $T(x, y)$; en déduire les variations de p sur $]-\infty, 2]$ et sur $[2, +\infty[$, son tableau de variations, son minimum.

Exercice 7 Majorée, minorée, bornée ★

corrigé p. 41

- Écrire avec des quantificateurs « f est majorée sur I », « f est bornée sur I » et « f n'est pas minorée sur I ».
- Chaque fonction est-elle majorée, minorée, bornée sur l'intervalle indiqué ? Admet-elle un maximum, un minimum ?
a) $f(x) = 5 + 4x - x^2$ sur $\mathbb{R}$ (écrire $f(x) = 9 - (x - 2)^2$) ; b) $g(x) = \frac{2x}{x+3}$ sur $[0, +\infty[$ (écrire $g(x) = 2 - \frac{6}{x+3}$) ;
c) $h(x) = \sqrt{x+1} - 2$ sur $[0, 8]$; d) $k(x) = \frac{3}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8 Opérations et position relative ★

corrigé p. 41

- Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = \frac{x}{x-3}$. Déterminer les domaines de définition de $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$ et $\frac{g}{f}$.
- Soit $u(x) = x^2 - 2x$ et $v(x) = x + 4$. Signe de $u(x) - v(x)$? En déduire la position relative de $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ et leurs points communs.

17

Niveau 2 · Bac**Exercice 9** Type devoir surveillé (1) : parabole et hyperbole ★★

corrigé p. 41

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ et $g(x) = \frac{2x-10}{x-4}$.

- a) Forme canonique de $f(x)$; montrer que la droite $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. b) Variations de f par le taux d'accroissement ; tableau de variations. c) Résoudre $f(x) \geq 0$.
- a) D_g ? Montrer que $g(x) = 2 - \frac{2}{x-4}$ sur D_g . b) Montrer que $\Omega(4, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$. c) Variations de g sur chaque intervalle de D_g .
- a) Vérifier que $f(x) - g(x) = \frac{-(x-2)(x-3)(x-5)}{x-4}$ ($x \neq 4$). b) Points d'intersection et position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$? c) Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : taux d'accroissement et extremums ★★ corrigé p. 42

1. Soit $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Déterminer D_f et des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ sur D_f . Montrer que le taux d'accroissement de f est $T(x, y) = 1 - \frac{4}{(x-1)(y-1)}$.
2. Variations de f sur $]-\infty, -1]$, $[-1, 1[$, $[1, 3]$ et $[3, +\infty[$; tableau de variations.
3. Minimum de f sur $]1, +\infty[$? maximum sur $]-\infty, 1[$? f est-elle majorée, minorée sur D_f ? 4. Montrer que $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : composition ★★ corrigé p. 42

1. Soit $u(x) = x^2 - 8x + 15$ et $f(x) = \sqrt{u(x)}$. a) D_f ? b) Variations de u , puis de $f = v \circ u$, où $v(t) = \sqrt{t}$. c) Montrer que la droite $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Minimum de f ?
2. Soit $g(x) = x - 4\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. a) Écrire $g = w \circ s$, avec $s(x) = \sqrt{x}$ et w un polynôme du second degré. b) En déduire les variations de g sur $[0, 4]$ et sur $[4, +\infty[$, et son minimum. c) Résoudre $g(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$.
3. Soit $h(x) = \frac{1}{x-4\sqrt{x+5}}$. Justifier que $D_h = [0, +\infty[$; variations de h ? Montrer que $0 < h \leq 1$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : courbes et résolution graphique ★★ corrigé p. 43

Soit $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ et, pour tout réel m , $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = x + m$.

1. Déterminer D_f et le sens de variation de f . Tracer $\mathcal{C}_f$ (placer ses points d'abscisses $-1, 0, 3$ et 8), puis les droites $\mathcal{D}_{-2}, \mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2. Résoudre graphiquement, puis par le calcul : a) $f(x) = x - 2$; b) $f(x) \geq x - 2$.
3. Selon le réel m , lire le nombre de points communs à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{D}_m$; le confirmer par le calcul en posant $t = \sqrt{x+1}$.

Exercice 13 Axes et centres de symétrie ★★ corrigé p. 43

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet la droite indiquée pour axe de symétrie : a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$, $x = 1$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2-10x+21}$, $x = 5$; c) $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$, $x = 2$; montrer de plus que cette courbe est un demi-cercle.
2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet le point indiqué pour centre de symétrie : a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, $\Omega(1, 2)$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-8}$, $\Omega(-1, 0)$.

Exercice 14 Fonctions périodiques ★★ corrigé p. 43

1. Soit $f(x) = (x - E(x))(1 - x + E(x))$. a) Montrer que f est périodique de période 1. b) Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$; montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel x et préciser où le maximum est atteint. c) Montrer que f est paire. d) Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-2, 2]$.
2. On suppose $D_f = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{C}_f$ admet deux axes de symétrie $x = a$ et $x = b$ ($a < b$). Montrer que f est périodique de période $2(b - a)$. Exemple ?

Exercice 15 Retrouver une parabole et une hyperbole ★★ corrigé p. 44

1. Déterminer la fonction $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dont la courbe $\mathcal{P}$ a pour sommet $S(1, -2)$ et passe par $A(3, 6)$.
2. Déterminer k pour que la courbe $\mathcal{H}$ de $h : x \mapsto 2 + \frac{k}{x-2}$ passe par O . Centre de symétrie et droites remarquables de $\mathcal{H}$? Écrire $h(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + \delta}$. Tableaux de variations de p et de h .

3. Montrer que $p(x) - h(x) = \frac{2x(x-1)(x-3)}{x-2}$; en déduire les points communs et la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$. Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$.

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 44

Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple (f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, sauf mention contraire).

- a) Si f est impaire, alors $f(0) = 0$. b) Une fonction paire n'est jamais injective. c) Si f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$, elle l'est sur $[0, 2]$. d) Si f , définie sur $[0, 2]$, est strictement croissante sur $[0, 1[$ et sur $[1, 2]$, elle l'est sur $[0, 2]$. e) Toute fonction majorée sur $\mathbb{R}$ admet un maximum. f) Une fonction croissante et périodique est constante. g) Si $|f|$ est paire, alors f est paire. h) Si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante.

18

Niveau 3 • Approfondissement**Exercice 17 Équations avec la partie entière ★★★**

corrigé p. 45

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $E(x)^2 - 3E(x) + 2 \leq 0$; b) $E\left(\frac{x+3}{2}\right) = x - 1$; c) $x^2 = 2E(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ pour tout réel x (encadrer $E(nx)$ à l'aide de $k = E(x)$).

Exercice 18 Extremums sans dérivée ★★★

corrigé p. 45

1. Soit $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. a) Justifier que $D_f = \mathbb{R}$. b) Montrer que $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 3$ pour tout réel x ; en déduire le maximum et le minimum de f . c) En discutant l'équation $f(x) = y$, montrer que $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.
2. Soit $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$. a) Déterminer D_g et montrer que $\mathcal{C}_g$ admet la droite d'équation $x = 3$ pour axe de symétrie. b) Exprimer $g(x)^2$ à l'aide de $(x-3)^2$; en déduire que $2 \leq g(x) \leq 2\sqrt{2}$, puis les extremums de g .

Exercice 19 Une fonction cubique et une translation ★★★

corrigé p. 45

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2$ et $g(t) = t^3 - 12t$, définies sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $f(x) = g(x-2) - 16$; en déduire que $\mathcal{C}_f$ est l'image de $\mathcal{C}_g$ par une translation et que $\Omega(2, -16)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. a) Montrer que le taux d'accroissement de g est $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12$. b) Montrer que g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-2, 2]$; en déduire ses variations sur $]-\infty, -2]$.
3. En déduire le tableau de variations de f et ses extremums relatifs. 4. Factoriser $f(x)$ et $f(x)+32$; en déduire que $-32 \leq f(x) \leq 0$ sur $[-2, 6]$, puis le maximum et le minimum de f sur $[-2, 6]$.

Exercice 20 Sommes de valeurs absolues ★★★

corrigé p. 46

1. Soit $f(x) = |x+2| + 2|x-1| + |x-4|$. a) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$, $[-2, 1]$, $[1, 4]$ et $[4, +\infty[$. b) Dresser le tableau de variations de f ; minimum ? c) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. d) Résoudre $f(x) = 10$, puis $f(x) \leq 10$.
2. Soit $S(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-9|$. a) Soit $a \leq b$. Montrer que $|x-a| + |x-b| \geq b-a$, avec égalité si et seulement si $x \in [a, b]$. b) En regroupant les termes deux par deux, déterminer le minimum de S et le réel où il est atteint.

Exercice 21 Transformer une courbe ★★★

corrigé p. 46

Soit $\varphi(x) = \frac{x-3}{x-2}$, et $\mathcal{H}$ la courbe de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$; obtenir $\mathcal{C}_\varphi$ à partir de $\mathcal{H}$ par une symétrie et une translation. Tracer $\mathcal{C}_\varphi$, puis les courbes de $x \mapsto \varphi(-x)$, $x \mapsto |\varphi(x)|$ et $x \mapsto \varphi(|x|)$.
2. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $|\varphi(x)| \leq 1$.
3. Selon le réel m , donner le nombre de solutions de l'équation $\varphi(|x|) = m$ (justifier par le calcul).

Exercice 22 Monotonie et équations ★★★

corrigé p. 47

1. Soit $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4}$ sur $[1, +\infty[$. Montrer que f est strictement croissante; résoudre $f(x) = 5$ et $f(x) < 5$.
2. Soit $g(x) = x^3 + 2x$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Résoudre $g(x) = 12$, puis le système $x^3 + 2x = y^3 + 2y$ et $x^2 + xy + y^2 = 12$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 23 Équations fonctionnelles ★★★

corrigé p. 47

Trouver toutes les fonctions f vérifiant la relation (analyse : changer x en une expression bien choisie; synthèse).

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $f(x) + 2f(1-x) = x^2$. Montrer ensuite que $\mathcal{C}_f$ est une parabole dont on donnera l'axe.
2. $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour tout réel $x \neq 0$, $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$.

19

Niveau 4 • Concours**Exercice 24 L'identité de Hermite ★★★**

corrigé p. 47

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = E(x) + E\left(x + \frac{1}{n}\right) + E\left(x + \frac{2}{n}\right) + \dots + E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) - E(nx)$.

1. Montrer que $H\left(x + \frac{1}{n}\right) = H(x)$ pour tout réel x : H est périodique de période $\frac{1}{n}$.
2. Calculer $H(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. En déduire l'identité de Hermite : $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$ pour tout réel x .
3. Cas $n = 2$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(\frac{m+2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\frac{m}{2^k}\right) - E\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right)$ ($k \in \mathbb{N}$); calculer $\sum_{k=0}^{10} E\left(\frac{2026+2^k}{2^{k+1}}\right)$.
4. Cas $n = 3$. Résoudre $E(x) + E\left(x + \frac{1}{3}\right) + E\left(x + \frac{2}{3}\right) = 2x + 1$.

Exercice 25 Équation de Cauchy et monotonie ★★★

corrigé p. 47

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y , et $a = f(1)$. On admet (cours) que $f(r) = ar$ si $r \in \mathbb{Q}$.

1. Soit $u < v$ deux réels, $q = E\left(\frac{1}{v-u}\right) + 1$ et $r = \frac{E(qu)+1}{q}$. Montrer que r est un rationnel tel que $u < r < v$.
2. On suppose f croissante. Montrer que $a \geq 0$, puis, par l'absurde et avec 1., que $f(x) = ax$ pour tout réel x .
3. On suppose seulement f bornée sur $[0, 1]$. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - ax$ vérifie la même relation que f , est nulle sur $\mathbb{Q}$, de période 1 et bornée sur $\mathbb{R}$, puis (avec $g(nx)$, $n \in \mathbb{N}$) que $g = 0$.

Exercice 26 L'équation $f \circ f = -\text{Id}$ ★★★

corrigé p. 48

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = -x$ pour tout réel x . Calculer $f(f(f(x)))$ de deux façons; en déduire que f est impaire, puis que $f(0) = 0$.

- Montrer que f est bijective et que 0 est le seul réel x tel que $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.
- Montrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
- Vérifier que la fonction f définie par $f(0) = 0$, $f(x) = x + 1$ sur $]2n, 2n + 1]$, $f(x) = 1 - x$ sur $]2n + 1, 2n + 2]$ ($n \in \mathbb{N}$) et $f(x) = -f(-x)$ si $x < 0$ convient. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-4, 4]$.

Exercice 27 Périodes incommensurables ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

- Montrer que tout réel $\tau = m + n\sqrt{2} > 0$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) est une période de f .
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En plaçant les réels $k\sqrt{2} - E(k\sqrt{2})$ ($0 \leq k \leq N$) dans les intervalles $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]$, montrer que f a une période $\tau \in \left]0, \frac{1}{N}\right]$.
- On suppose de plus que f est croissante sur $[0, 1]$. Soit $0 < x < y \leq 1$. À l'aide d'une période $\tau < x$, montrer que $f(y) \leq f(x)$; en déduire que f est constante.
- Montrer que l'indicatrice de $G = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ (1 sur G , 0 ailleurs) admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes sans être constante. Que conclure ?

Exercice 28 Extremum d'un produit sous contrainte ★★★★★

corrigé p. 48

- a) Montrer que $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ pour tous réels a, b . b) En déduire que $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ pour tous réels positifs a, b, c, d . c) Soit $a, b, c \geq 0$ et $s = \frac{a+b+c}{3}$. Avec $d = s$ dans b), montrer que $abc \leq s^3$ (égalité si et seulement si $a = b = c$).
- La boîte. Dans un carré de carton de côté 6, on découpe aux quatre coins un carré de côté $x \in]0, 3[$, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle. Exprimer son volume $V(x)$; avec $a = 4x$ et $b = c = 6 - 2x$, montrer que $V(x) \leq 16$. Volume maximal ?
- Déterminer le minimum de $g(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ sur $]0, +\infty[$ (écrire $\frac{16}{x} = \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$).

Exercice 29 Des fonctions qui conservent les distances ★★★★★

corrigé p. 49

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous réels x, y , et $g(x) = f(x) - f(0)$. a) Que vaut $|T(x, y)|$? b) Montrer que $|g(x)| = |x|$, puis, en élevant au carré $|g(x) - g(y)| = |x - y|$, que $g(x)g(y) = xy$. c) En déduire que $f(x) = \varepsilon x + c$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $c \in \mathbb{R}$, et conclure. Quelle est f si, de plus, $f(1) = 3$ et $f(2) = 2$?
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ et $f(x) \leq x$ pour tous réels x, y . Calculer $f(0)$, puis montrer que $f(x) = x$ pour tout réel x (utiliser $f(x + (-x))$).

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 49

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$). On cherche le minimum de f , sans dérivée.

- Par la géométrie. Dans un repère orthonormé, soit $A(0, 1)$, $B(3, -2)$ et $M(x, 0)$. a) Montrer que $f(x) = MA + MB$. b) Avec l'inégalité triangulaire, montrer que $f(x) \geq 3\sqrt{2}$ pour tout réel x . c) Où la droite (AB) coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Conclure.
- Par l'algèbre : l'inégalité de Minkowski. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. a) Vérifier que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2$. b) En déduire que $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$, puis, en élevant au carré, que $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$ (égalité si et seulement si $ad = bc$ et $ac + bd \geq 0$). c) Retrouver le minimum de f et le réel où il est atteint.
- Plus généralement, soit $p, q > 0$ et $c \in \mathbb{R}$: déterminer le minimum de $x \mapsto \sqrt{x^2 + p^2} + \sqrt{(x - c)^2 + q^2}$ et le réel où il est atteint.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

20

Domaine, égalité, opérations

Pour un domaine, on écrit **toutes** les conditions (dénominateur non nul, radicande positif) avant de les résoudre. Deux fonctions sont égales si elles ont le **même domaine** et les **mêmes images**.

Exercice 31 Domaines de définition ★

corrigé p. 50

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes (intervalle ou réunion d'intervalles).

a) $f_1(x) = \frac{x+3}{2x^2-7x+3}$

d) $f_4(x) = \frac{x}{|2x-1|-3}$

g) $f_7(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-2x}$

b) $f_2(x) = \sqrt{10-5x} - \frac{3}{x+1}$

e) $f_5(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}$

h) $f_8(x) = \sqrt{x^3-4x}$

c) $f_3(x) = \sqrt{-x^2+2x+8}$

f) $f_6(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4-\sqrt{5-x}}$

i) $f_9(x) = \frac{1}{x-E(x)}$

Exercice 32 Égales ou pas ? ★

corrigé p. 50

Dans chaque cas, déterminer les domaines de f et de g , puis dire si $f = g$. Sinon, donner le plus grand ensemble sur lequel f et g sont définies et prennent les mêmes valeurs.

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ et $g(x) = \frac{|x|}{x}$;

d) $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ et $g(x) = 1+\sqrt{x-1}$;

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$ et $g(x) = |x|-1$;

e) $f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}-1$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ et $g(x) = x\sqrt{x-1}$;

f) $f(x) = (|x|+x)^2$ et $g(x) = 2x(|x|+x)$.

Exercice 33 Somme, produit, quotient ★★

corrigé p. 51

On pose $u(x) = \sqrt{3-x}$ et $v(x) = x^2-1$.

- Déterminer D_u , puis les domaines des fonctions $u+v$, uv , $\frac{u}{v}$, $\frac{v}{u}$ et $w = \frac{1}{u-1}$.
- Montrer que $w(x) = \frac{\sqrt{3-x}+1}{2-x}$ pour tout $x \in D_w$. Les fonctions w et $t : x \mapsto \frac{\sqrt{3-x}+1}{2-x}$ sont-elles égales ?
- Étudier le signe de $(uv)(x)$ et résoudre l'inéquation $(uv)(x) \leq 0$.
- Montrer que $u(x) \leq \frac{4-x}{2}$ pour tout $x \in D_u$, et préciser le cas d'égalité. Interpréter avec la courbe $\mathcal{C}_u$ et la droite Δ d'équation $y = \frac{4-x}{2}$.

Exercice 34 Position relative de deux courbes ★★

corrigé p. 51

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2$ ($x \in \mathbb{R}$), de courbe $\mathcal{C}_f$, et D la droite d'équation $y = x - 2$.

1. Factoriser $f(x) - (x - 2)$ et dresser son tableau de signes.
2. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D , et les coordonnées de leurs points communs. Résoudre $f(x) \leq x - 2$.
3. Pour tout réel m , on note D_m la droite d'équation $y = m(x - 2)$.
 - a) Vérifier que $A(2, 0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et à toutes les droites D_m , puis factoriser $f(x) - m(x - 2)$.
 - b) Selon les valeurs de m , déterminer le nombre de points communs à $\mathcal{C}_f$ et à D_m . Que retrouve-t-on pour $m = 1$?

Exercice 35 Domaines et paramètres ★★★

corrigé p. 51

1. Pour quels réels m la fonction $f_m : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2mx + 3m - 2}$ est-elle définie sur $\mathbb{R}$? Donner le domaine de f_3 .
2. Soit $g_m(x) = \frac{x+1}{mx^2-2x+m}$. Déterminer, selon le réel m , le domaine de g_m . Pour quels m est-il égal à $\mathbb{R}$? Montrer que g_{-1} est égale à une fonction très simple.
3. Déterminer les réels a et b tels que le domaine de $x \mapsto \sqrt{ax^2 + bx + 6}$ soit exactement $[-1, 3]$.
4. Déterminer le domaine de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - E(x^2)}$.

Exercice 36 Équations fonctionnelles ★★★

corrigé p. 52

On raisonne par *analyse-synthèse* (forme d'une solution éventuelle, puis vérification).

1. Montrer qu'aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne vérifie $f(x) + f(1 - x) = x$ pour tout réel x .
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$ pour tous réels x et y .
3. Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et $\varphi(x) = -\frac{1}{x+1}$ pour $x \in E$.
 - a) Montrer que $\varphi(x) \in E$ pour tout $x \in E$, calculer $\varphi(\varphi(x))$ et montrer que $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x$.
 - b) Déterminer les fonctions $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $h(x) + h(\varphi(x)) = 2x$ pour tout $x \in E$.

21

Parité, symétries, périodicité

On vérifie d'abord le domaine ($-x \in D_f$, ou $2a - x \in D_f$). La droite $x = a$ est un axe de $\mathcal{C}_f$ si $f(2a - x) = f(x)$; le point $\Omega(a, b)$ est un centre de $\mathcal{C}_f$ si $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exercice 37 Paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre ★

corrigé p. 53

1. Étudier la parité des fonctions suivantes (commencer par le domaine) :
 - a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$; b) $f_2(x) = \frac{x^3}{x^2 - |x|}$; c) $f_3(x) = \frac{x^2}{x - |x|}$; d) $f_4(x) = x|x| + 1$; e) $f_5(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$.
2. Soient a, b, c des réels et $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$. À quelle condition f est-elle paire ? impaire ?

Exercice 38 Axe ou centre de symétrie ★

corrigé p. 53

1. Soit $g(x) = (x+1)(3-x) + |x-1|$. Montrer que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_g$. La droite $x = 0$ en est-elle un ?
2. Soit $m(x) = x + \frac{x-1}{|x-1|}$. Montrer que $\Omega(1, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_m$. L'origine O en est-elle un ? Écrire $m(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
3. Soit $k(x) = \frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{|x+4|}$. Déterminer D_k et montrer que $\mathcal{C}_k$ admet un axe de symétrie.

Exercice 39 Une symétrie pour résoudre ★★

corrigé p. 54

1. Soit $f(x) = (x-1)^4 + (x-3)^4$. a) Montrer que la droite $x = 2$ est un axe de $\mathcal{C}_f$ et que $f(2+t) = 2t^4 + 12t^2 + 2$.
b) En déduire le minimum de f , puis résoudre $f(x) = 82$ et $f(x) \leq 82$.
2. Soit $h(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}$. Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet l'axe $x = 2$, exprimer $h(2+t)$ et résoudre $h(x) = \frac{10}{9}$.
3. Soit $k(x) = (x-1)|x-1| + (x-3)|x-3|$. a) Montrer que $\Omega(2, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_k$.
b) Écrire $k(2+t)$ sans valeur absolue pour $0 \leq t \leq 1$, puis pour $t \geq 1$. En déduire que $k(x) \leq 0$ pour $x \leq 2$.
c) Résoudre $k(x) = 8$, puis, sans nouveau calcul, $k(x) = -8$.

Exercice 40 Fonctions périodiques ★★

corrigé p. 54

1. Soit $g(x) = E(x) + E(-x)$. Calculer $g(x)$ selon que x est entier ou non. Montrer que g est paire, que tout entier $k \geq 1$ est une période de g , et que ce sont les seules périodes.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période 2, telle que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1, 1]$.
a) Calculer $f\left(\frac{7}{2}\right)$, $f\left(-\frac{13}{3}\right)$ et $f(2027)$. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [1, 3]$.
b) Vérifier la formule en $x = 1$, puis montrer que f est paire et que chaque droite $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) est un axe de $\mathcal{C}_f$.
c) Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $[-3, 3]$.
3. Montrer que $p : x \mapsto xf(x)$ n'est pas périodique (une fonction périodique de période T et bornée sur $[0, T]$ est bornée sur $\mathbb{R}$).

Exercice 41 Symétrie et bijection réciproque ★★★

corrigé p. 55

Soit $f : D \rightarrow J$ une bijection (D, J parties de $\mathbb{R}$), de réciproque $f^{-1} : J \rightarrow D$.

1. On suppose que $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Montrer que, si $y \in J$, alors $2b - y \in J$, et que $\Omega'(b, a)$ est un centre de symétrie de la courbe de f^{-1} . Cas où f est impaire ?
2. On suppose que D contient au moins deux réels. Montrer que $\mathcal{C}_f$ n'admet aucun axe de symétrie $x = a$.
3. Soit $\varphi(x) = \frac{1}{4-x} - \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, 4[$. a) Montrer que $\Omega(2, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_\varphi$.
b) Montrer que $\varphi(x) = y \iff yx^2 + (2-4y)x - 4 = 0$. Pour $y > 0$, montrer que cette équation a une seule solution dans $]0, 4[$.
c) À l'aide de a), montrer que φ est une bijection de $]0, 4[$ sur $\mathbb{R}$; expliciter φ^{-1} et vérifier le résultat de la question 1.

Exercice 42 Symétries des polynômes ★★★

corrigé p. 55

1. Soit $Q(t) = c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$. Montrer que Q est paire si et seulement si $c_3 = c_1 = 0$ (utiliser $t = 1$ et $t = 2$), et impaire si et seulement si $c_4 = c_2 = c_0 = 0$.
2. Soit $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$. En étudiant $t \mapsto P(a+t)$, montrer que $\mathcal{C}_P$ admet un axe de symétrie si et seulement si $p^3 - 4pq + 8r = 0$, l'axe étant alors $x = -\frac{p}{4}$, et que $\mathcal{C}_P$ n'a jamais de centre de symétrie.
3. Soit $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. Trouver l'axe de $\mathcal{C}_P$, calculer $P(-1+t)$, puis en déduire les racines et le signe de P .
4. Pour quel réel c la courbe de $x \mapsto x^4 + 2x^3 + cx^2 - 4x + 1$ admet-elle un axe de symétrie ?

22 Majorants et extremums

Pour prouver que M est le maximum de f sur I , on montre que $M - f(x) \geq 0$ sur I (carré, factorisation, forme canonique), puis on trouve $a \in I$ tel que $f(a) = M$; sinon, M n'est qu'un majorant.

Exercice 43 Majorée, minorée, bornée ? ★

corrigé p. 56

1. Soit $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 1}$. Montrer que $|f(x)| \leq 3$ pour tout réel x (distinguer $|x| \leq 1$ et $|x| \geq 1$).
2. Soit $g(x) = x|x| - 2x$. Montrer que g est bornée sur $[-1, 3]$, et déterminer son maximum et son minimum sur $[-1, 3]$.
3. Soit $k(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Écrire avec des quantificateurs « k n'est pas majorée » et « k n'est pas minorée », puis démontrer ces deux propriétés.
4. Soient f et g majorées sur I . Montrer que $f + g$ est majorée sur I ; à l'aide de $f = g : x \mapsto -x^2$ sur $\mathbb{R}$, montrer que fg ne l'est pas forcément ; montrer que fg l'est si, de plus, $f \geq 0$ et $g \geq 0$.

Exercice 44 Extremums et forme canonique ★

corrigé p. 57

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$. Écrire $f(x)$ sous forme canonique ; en déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$, puis le maximum et le minimum de f sur $[4, 6]$.
2. Soit $g(x) = -x^2 + 5x - 4$. Déterminer le maximum de g sur $\mathbb{R}$, puis le maximum et le minimum de g sur $[0, 2]$.
3. Soit $q(x) = x^2 + 4x + |x + 2|$. En posant $t = |x + 2|$, déterminer le minimum de q . Pourquoi la forme canonique $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ ne le donne-t-elle pas ?
4. Trouver la plus petite valeur de $x^2 + y^2$ lorsque $x + 2y = 5$, et le couple (x, y) qui la réalise. Interpréter dans un repère orthonormé.

Exercice 45 Atteint ou non ? ★★

corrigé p. 57

1. Soit $f(x) = x^2 - 4|x - 1|$. a) Écrire $f(x)$ sous forme canonique sans valeur absolue sur $[1, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 1]$.
b) Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$, un minimum relatif en 2, un maximum relatif en 1, et qu'elle n'est pas majorée.
c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3, 3]$, et où ils sont atteints.

2. Soit $g(x) = \frac{E(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$. a) Montrer que $g \leq 1$ et déterminer les réels où g vaut 1.
 b) Montrer que $g(x) > \frac{1}{2}$ pour tout $x \geq 1$ (distinguer $1 \leq x < 2$ et $x \geq 2$).
 c) Montrer qu'aucun réel $m > \frac{1}{2}$ ne minore g . La fonction g admet-elle un minimum ?

Exercice 46 Racines carrées ★★

corrigé p. 58

1. Soient $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}$ et $s(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1}$, pour $x \in \mathbb{R}$.
 a) Montrer que s admet un minimum, que l'on précisera, et que s n'est pas majorée.
 b) Montrer que $f(x) = \frac{3}{s(x)}$. En déduire que $0 < f(x) \leq 1$, et que f admet un maximum.
 c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $f\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) < \varepsilon$. La fonction f admet-elle un minimum ?
2. Soit $h(x) = x\sqrt{1-x}$ sur $[0, 1]$. a) Vérifier que $x^3 - x^2 + \frac{4}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$.
 b) En déduire le maximum et le minimum de h sur $[0, 1]$ (on pourra étudier $h(x)^2$).

Exercice 47 Factoriser pour conclure ★★★

corrigé p. 58

1. Vérifier que $x^4 - 4x + 3 = (x - 1)^2 (x^2 + 2x + 3)$. En déduire le minimum de $u : x \mapsto x^4 - 4x$ sur $\mathbb{R}$, puis celui de $w : x \mapsto x^4 + 4x$.
 2. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,
- $$x^n - 1 - n(x - 1) = (x - 1) [(x^{n-1} - 1) + \dots + (x^2 - 1) + (x - 1)],$$
- puis que $x^n - nx \geq 1 - n$, avec égalité seulement pour $x = 1$. Quel est le minimum de $x \mapsto x^5 - 5x$ sur $[0, +\infty[$?
3. Un rectangle a pour sommets $(-x, 0)$, $(x, 0)$, $(x, 4 - x^2)$ et $(-x, 4 - x^2)$, avec $0 < x < 2$ (il est inscrit sous la parabole $y = 4 - x^2$). Exprimer son aire $A(x)$, vérifier que $\frac{32\sqrt{3}}{9} - A(x) = 2 \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, et en déduire l'aire maximale.

Exercice 48 Moindres carrés ★★★

corrigé p. 58

1. Soit $f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 6)^2$. Écrire $f(x)$ sous forme canonique et déterminer son minimum. Comparer le réel où il est atteint à la moyenne de 1, 2 et 6.
 2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels, $m = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ leur moyenne et $F(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$. En écrivant $x - a_k = (x - m) + (m - a_k)$, montrer que $F(x) = n(x - m)^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - m)^2$, et en déduire le minimum de F sur $\mathbb{R}$.
 3. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ et $C(5, 4)$. Trouver le point M de l'axe des abscisses pour lequel $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal, et ce minimum.
 4. Soit $a > 0$. Déterminer, selon a , le minimum et le maximum de la fonction f de la question 1 sur $[0, a]$.

23

Sens de variation

Le signe du taux d'accroissement $T(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ($x \neq y$ dans I) donne le sens de variation de f sur I ; pour une somme, un produit ou une composée, on applique les règles du cours en vérifiant leurs hypothèses.

Exercice 49 Le taux d'accroissement pas à pas ★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = x^2 + 6x + 4$ ($x \in \mathbb{R}$) et $g(x) = 2x + \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$).

1. Montrer que le taux d'accroissement de f vaut $x + y + 6$. Étudier son signe lorsque x et y sont dans $]-\infty, -3]$, puis dans $[-3, +\infty[$; en déduire le tableau de variations et le minimum de f .
2. Montrer que le taux d'accroissement de g vaut $2 + \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}}$ et en déduire le sens de variation de g .
3. Sans calculer les images, comparer $f(-\sqrt{3})$ et $f(-\sqrt{2})$, puis $g(\pi)$ et $g(\sqrt{10})$ (on admet $\pi < 3,15$). Montrer que $f(-6-x) = f(x)$ et en déduire la comparaison de $f(-7)$ et $f(0)$; pourquoi ne peut-on pas comparer directement -7 et 0 ?

Exercice 50 Opérations et sens de variation ★

corrigé p. 59

Sur $I = [-2, +\infty[$, on pose $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = x^2 + 4x + 3$.

1. Montrer que f et g sont strictement croissantes sur I (écrire $g(x) = (x+2)^2 - 1$). En déduire le sens de variation sur I de $s = f + g$, $k = 2 - 3g$ et $r = \frac{1}{1+f}$, et dresser le tableau de variations de s en y plaçant $s(-2)$, $s(-1)$ et $s(2)$.
2. Soit $p = f \times g$. Calculer $p(-2)$, $p(-\frac{3}{2})$ et $p(-1)$: p est-elle monotone sur I ? Montrer que p est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Quelle hypothèse de la règle « produit de deux fonctions croissantes » manque sur I ?

Exercice 51 Composer dans les deux sens ★★

corrigé p. 60

Soit $v(t) = t^2 - 6t$ et $i(x) = \frac{1}{x}$.

1. Écrire $v(t)$ sous forme canonique, donner le sens de variation de v sur $]-\infty, 3]$ et sur $[3, +\infty[$, et le signe de $v(t)$.
2. Soit $g = v \circ i$, $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}$ ($x \neq 0$). Étudier les variations de g sur $]-\infty, 0[$, $]0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{1}{3}, +\infty[$, dresser son tableau, donner son minimum sur $]0, +\infty[$ et résoudre $g(x) = -8$.
3. Soit $h = i \circ v$. Déterminer D_h et montrer que $h(6-x) = h(x)$. Étudier les variations de h sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 3]$, $[3, 6[$, $]6, +\infty[$ et dresser son tableau. Montrer que $h(x) \leq -\frac{1}{9}$ pour tout $x \in]0, 6[$, résoudre $h(x) = -\frac{1}{8}$, et comparer g et h .

Exercice 52 Monotonie, équations et inéquations ★★

corrigé p. 60

1. Soit $h(t) = \frac{t-1}{t+2}$ ($t \neq -2$). a) Montrer que $h(t) = 1 - \frac{3}{t+2}$, que h est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$, et que $h(t) < 1$ si $t > -2$, $h(t) > 1$ si $t < -2$.
b) En reconnaissant $h(x^2)$, $h(3x)$ et $h(2x)$, résoudre $\frac{x^2-1}{x^2+2} = \frac{3x-1}{3x+2}$, puis $\frac{x^2-1}{x^2+2} \leq \frac{2x-1}{2x+2}$.

2. Soit $d(t) = \sqrt{9-t} - t$ ($t \leq 9$). Montrer que d est strictement décroissante, puis résoudre $\sqrt{9-x^2} - x^2 = \sqrt{9-2x} - 2x$ et $\sqrt{9-x^2} - x^2 > \sqrt{9-2x} - 2x$.

Exercice 53 Une somme croissante, une autre pas ★★★

corrigé p. 61

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = x + \frac{2}{x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que le taux d'accroissement de f vaut $T(x, y) = 1 - \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}$.
2. Montrer que $t^2 - |t| + \frac{1}{4} \geq 0$ pour tout réel t , puis que $(x^2+1)(y^2+1) > |x+y|$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bien que $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ ne soit pas monotone.
3. Résoudre $f(x) = 1$, $f(x) > 1$ et $f(2x-1) < f(x^2)$. Montrer que $x < f(x) \leq x+1$ et préciser le cas d'égalité.
4. Calculer $g(0)$, $g(\frac{1}{2})$ et $g(1)$: g est-elle monotone sur $\mathbb{R}$? Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$ (pour $x, y \geq 1$, comparer $(x^2+1)(y^2+1)$, $4xy$ et $2(x+y)$). Résoudre $g(x) = 2$ et $g(x) \geq 2$.

Exercice 54 Monotone ou pas ? ★★★

corrigé p. 61

Dans cet exercice, m est un paramètre réel.

1. Soit $f_m(x) = x^2 - 2mx + 1$ sur $I = [1, 3]$. Montrer que f_m est croissante sur I si et seulement si $m \leq 1$, décroissante sur I si et seulement si $m \geq 3$; pour $1 < m < 3$, dresser son tableau de variations sur I .
2. Soit $g_m(x) = |2x-1| + mx$ ($x \in \mathbb{R}$). a) Écrire $g_m(x)$ sans valeur absolue. b) Montrer que g_m est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m \geq 2$, décroissante si et seulement si $m \leq -2$. c) Pour $-2 < m < 2$, calculer le minimum de g_m . d) Pour quels m la fonction g_m est-elle injective ?
3. Soit $k_m(x) = E(x) + mx$. Montrer que k_m est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m \geq 0$, et qu'elle n'est décroissante pour aucune valeur de m (comparer $k_m(1)$ et $k_m(1-t)$, avec $t = \frac{1}{1+|m|}$).

24 Fonctions usuelles et courbes

Forme canonique pour une parabole, forme réduite pour une hyperbole, translations et symétries pour le reste : on ramène chaque courbe à une courbe de référence. Les repères sont orthonormés.

Exercice 55 Deux paraboles ★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 2$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme canonique ; en déduire le sommet et l'axe de chaque courbe, le sens de variation de chaque fonction, puis résoudre $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.
2. Déterminer les points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, puis résoudre $f(x) \leq g(x)$ et interpréter graphiquement.
3. Vérifier que $g(3-x) = 1 - f(x)$ pour tout réel x ; en déduire que $\mathcal{C}_g$ est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport au point $I(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Vérifier que I est le milieu des deux sommets et des deux points

communs.

Exercice 56 Une hyperbole à points entiers ★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$.

1. Déterminer D_f , montrer que $f(x) = 1 + \frac{4}{x+1}$, et étudier à l'aide du taux d'accroissement le sens de variation de f sur chacun des deux intervalles de D_f .
2. Montrer que $\Omega(-1, 1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Par quelle translation $\mathcal{C}_f$ se déduit-elle de la courbe de $x \mapsto \frac{4}{x}$?
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ dont les deux coordonnées sont entières. Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses deux droites remarquables, puis résoudre $f(x) \geq 3$ par le calcul et contrôler sur la figure.

Exercice 57 Racine contre valeur absolue ★★

corrigé p. 63

Soit $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = |x-3|$.

1. Préciser D_f . Montrer que $\mathcal{C}_f$ se déduit de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ par une translation, et que $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff (y \geq 0 \text{ et } x = y^2 - 3)$. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.
2. Résoudre $f(x) = g(x)$, puis $f(x) > g(x)$.
3. Soit $h = f - g$. Montrer que h est strictement croissante sur $[-3, 3]$, puis (taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{x+3} - x$) strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. En déduire le maximum de h et l'interpréter sur la figure.

Exercice 58 Partie entière : équations et segments ★★

corrigé p. 63

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $E(\sqrt{x}) = 2$ et $E(\frac{1}{x}) = 3$; b) $E(x) \times E(-x) = -6$ (distinguer $x \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \mathbb{Z}$).
2. Soit $f(x) = x E(x)$. a) Écrire $f(x)$ sans partie entière sur $[-2, -1[$, $[-1, 0[$, $[0, 1[$, $[1, 2[$, $[2, 3[$, et tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-2, 3[$ en soignant les extrémités des segments. b) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout réel x . c) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ a une seule solution réelle (poser $n = E(x)$ et discuter selon l'entier n).

Exercice 59 Valeurs absolues emboîtées ★★★

corrigé p. 63

Soit $f(x) = ||x| - 2| - 1|$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Tracer successivement les courbes de $u_1(x) = |x| - 2$, $u_2 = |u_1|$, $u_3 = u_2 - 1$ et $f = |u_3|$, en précisant à chaque étape la transformation utilisée.
2. Montrer que f est paire, écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, +\infty[$, et donner les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer par le calcul, selon le réel m , le nombre de solutions de $f(x) = m$ (exprimer les valeurs possibles de $|x|$) et contrôler sur la figure. Résoudre $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 60 Les axes cachés d'une hyperbole ★★★

corrigé p. 64

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. On admet que la symétrie orthogonale d'axe $\Delta_1 : y = x + 3$ envoie $M(x, y)$ sur $M_1(y-3, x+3)$, et que celle d'axe $\Delta_2 : y = -x + 1$ envoie M sur $M_2(1-y, 1-x)$.

1. Écrire $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$; préciser le centre Ω de $\mathcal{C}_f$, la translation qui transforme la courbe de $x \mapsto -\frac{3}{x}$ en $\mathcal{C}_f$, et le sens de variation de f .
2. Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff (x+1)(y-2) = -3$. En déduire que le produit des distances d'un point de $\mathcal{C}_f$ aux droites $x = -1$ et $y = 2$ est constant.
3. Vérifier que $\Omega \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, puis montrer que Δ_1 et Δ_2 sont des axes de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ ne rencontre pas Δ_1 et coupe Δ_2 en deux points S et S' (les *sommets*) ; calculer SS' . Tracer $\mathcal{C}_f$, Δ_1 , Δ_2 et les droites $x = -1$, $y = 2$.

25 Défis de concours

Chaque problème mélange plusieurs notions du chapitre (inégalités, symétries, taux, composées, partie entière) : il faut des idées et des calculs bien menés.

Exercice 61 Le trinôme le plus plat ★★★

corrigé p. 65

Pour b, c réels, $P(x) = x^2 + bx + c$ vérifie (H) si $|P(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

1. Montrer que $P(1) + P(-1) - 2P(0) = 2$; en déduire que l'un au moins des nombres $|P(-1)|$, $|P(0)|$, $|P(1)|$ est $\geq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que $P_0(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ vérifie (H), et que c'est le **seul** trinôme de la forme $x^2 + bx + c$ qui la vérifie.
3. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $|Q(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$. a) Exprimer a, b, c à l'aide de $Q(-1)$, $Q(0)$, $Q(1)$, et en déduire $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, $|a| \leq 2$. b) Montrer que $|a| + |b| + |c| \leq 3$ (se ramener à $a \geq 0, b \geq 0$ en remplaçant au besoin $Q(x)$ par $-Q(x)$ ou $Q(-x)$, puis discuter selon le signe de c). Cas d'égalité ?

Exercice 62 Un graphe sur deux droites ★★★

corrigé p. 65

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que (E) : $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) - 1)(f(x) - x) = 0$, et l'on note $J = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$.

1. Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $f(x) \in \{1, x\}$ pour tout x ; montrer que $1 \in J$ et interpréter (E) graphiquement. Donner une solution qui n'est pas monotone.
2. On suppose que f vérifie (E). a) Si f est croissante, montrer que tout réel compris entre un élément de J et 1 appartient à J . b) En déduire que f est croissante si et seulement si J est un intervalle contenant 1. c) Quelles sont les solutions strictement croissantes ?
3. Montrer, par l'absurde, que la seule solution décroissante est la fonction constante égale à 1.
4. Déterminer les solutions paires, les solutions impaires, et les solutions périodiques.

Exercice 63 Une droite et un demi-cercle ★★★★★

corrigé p. 66

Soit $f(x) = x + 2\sqrt{5 - x^2}$.

- Déterminer D_f et vérifier que $(x + 2y)^2 + (2x - y)^2 = 5(x^2 + y^2)$. En déduire que $-\sqrt{5} \leq f(x) \leq 5$ sur D_f , et préciser les cas d'égalité.
- a) Comparer $2t$ et $\sqrt{5 - t^2}$ selon que $t \leq 1$ ou $t \geq 1$ ($t \in D_f$). b) Pour $x \neq y$ dans D_f , $\{x, y\} \neq \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$, montrer que $T(x, y) = 1 - \frac{2(x+y)}{\sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-y^2}}$; en déduire le tableau de variations de f .
- Montrer que $f(x) = m \iff (x \leq m \text{ et } 5x^2 - 2mx + m^2 - 20 = 0)$, et en déduire, selon m , le nombre de solutions de $f(x) = m$. Interpréter à l'aide du demi-cercle $\Gamma : x^2 + y^2 = 5, y \geq 0$, et de la droite $D_m : x + 2y = m$.

Exercice 64 Deux fonctions de même monotonie ★★★★★

corrigé p. 67

- Soit f, g définies sur un intervalle I , de taux d'accroissement T_f, T_g . Montrer que $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = (x - y)^2 T_f(x, y) T_g(x, y)$ pour $x \neq y$; en déduire le signe de ce produit si f et g ont le même sens de variation, puis des sens contraires.
- Soit $x_1, x_2, x_3 \in I, f_i = f(x_i), g_i = g(x_i)$. Vérifier que $3(f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3) - (f_1 + f_2 + f_3)(g_1 + g_2 + g_3) = (f_1 - f_2)(g_1 - g_2) + (f_1 - f_3)(g_1 - g_3) + (f_2 - f_3)(g_2 - g_3)$, et en déduire l'inégalité de Tchebychev : si f et g ont le même sens de variation, $(f_1 + f_2 + f_3)(g_1 + g_2 + g_3) \geq 3(f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3)$ (et l'inégalité contraire sinon).
- a) Montrer que $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)$ pour $a, b, c \geq 0$, et que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ pour $a, b, c > 0$, avec égalité si et seulement si $a = b = c$.
b) Si $a, b, c > 0$ et $a + b + c = 1$, montrer que $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2}$ (cas d'égalité ?). En déduire le minimum de $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ sur $]0, +\infty[^3$.

Exercice 65 Une symétrie qui calcule des sommes ★★★★★

corrigé p. 67

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-x)^2}$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que $f(x) + f(1-x) = 1$; interpréter graphiquement.
- Montrer que $0 \leq f \leq 1$ et préciser les extremums de f ; montrer que $f(x) < \frac{1}{2} \iff x < \frac{1}{2}$.
- Pour $x \neq 0$, montrer que $f(x) = w(u(x))$ avec $u(x) = \frac{1}{x} - 1$ et $w(t) = \frac{1}{1+t^2}$; en déduire, à l'aide des variations de w (vues en cours), le tableau de variations de f .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$, puis S_{2026} .

Exercice 66 Équations avec parties entières ★★★★★

corrigé p. 68

- Montrer que, pour tous réels a et b : $E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1$.
- Résoudre $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x}{3}\right) = x - 2$ (montrer que x est entier et écrire $x = 6q + r, q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq 5$).
- Soit $g(x) = x - E\left(\frac{x}{2}\right) - E\left(\frac{x}{3}\right) - E\left(\frac{x}{6}\right)$. a) Montrer que g est 6-périodique. b) À l'aide de 1, montrer que $g(x) \geq x - E(x) \geq 0$, puis que $g(x) = 0 \iff x \in 6\mathbb{Z}$. c) Calculer $g(x)$ sur $[0, 2[, [2, 3[, [3, 4[, [4, 6[$; en déduire $g(\mathbb{R})$, et montrer que g est majorée par 3 mais n'a pas de maximum.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

26 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

1. On écrit les conditions d'existence : dénominateur non nul, quantité sous la racine positive.

- a) Fonction polynôme : $D_f = \mathbb{R}$. b) $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$. c) $6 - 2x \geq 0 \iff x \leq 3$: $D_f =]-\infty, 3]$. d) $x^3 - 16x = x(x - 4)(x + 4)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$. e) $x + 1 \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \neq 2 \iff x \neq 3$: $D_f = [-1, 3[\cup]3, +\infty[$. f) $x^2 - 9 > 0 \iff |x| > 3$: $D_f =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$. g) Il faut $x \neq -2$ et $\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \geq 0$; le tableau de signes (trois facteurs) donne $D_f =]-2, -1] \cup [1, +\infty[$. h) $|x| \neq 4$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$. i) $E(x) = 0 \iff 0 \leq x < 1$: $D_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$. j) $x \geq 0$ et $-x \geq 0$: $D_f = \{0\}$.

2. Par exemple $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$: il faut $x + 2 \geq 0$ et $3 - x > 0$, soit $-2 \leq x < 3$.

■ Corrigé de l'exercice 2

1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f(0) = 0$, $f(-1) = \frac{1+3}{-2} = -2$, $f(2) = \frac{4-6}{1} = -2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-5/4}{-1/2} = \frac{5}{2}$, $f(\sqrt{2}) = \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2-1} = -4 - \sqrt{2}$.
b) Pour $x \neq 1$: $f(x) = 0 \iff x(x - 3) = 0$: antécédents de 0 : 0 et 3 . $f(x) = -2 \iff x^2 - 3x = -2x + 2 \iff (x - 2)(x + 1) = 0$: antécédents de -2 : -1 et 2 .
c) On résout $f(x) = k$. Pour $x \neq 1$: $f(x) = k \iff x^2 - (3 + k)x + k = 0$. Discriminant : $(3 + k)^2 - 4k = (k + 1)^2 + 8 > 0$: deux solutions distinctes, et aucune ne vaut 1 (en 1, le trinôme vaut -2). Donc k a **exactement deux antécédents**.
d) $f(3) = 0$: $A \in \mathcal{C}_f$; $f(-3) = \frac{18}{-4} = -\frac{9}{2}$: $B \in \mathcal{C}_f$; $f(5) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \neq 3$: $C \notin \mathcal{C}_f$.
2. $g(2,3) = 2 + 2,3 = 4,3$; $g(-1,5) = -2 + 1,5 = -0,5$; $g(-3) = -3 + 3 = 0$. **Disjonction des cas.** Si $x \geq 0$: $E(x) \geq 0$ et $|x| = x \geq 0$, donc $g(x) = 0 \iff E(x) = 0$ et $x = 0 \iff x = 0$. Si $x < 0$: $g(x) = E(x) - x = 0 \iff x = E(x) \iff x \in \mathbb{Z}$. Antécédents de 0 : $\{0, -1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z} \cap]-\infty, 0]$ (une infinité).

■ Corrigé de l'exercice 3

Deux fonctions sont égales lorsqu'elles ont le même domaine et les mêmes images.

- a) $x^2 + 4 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R} = D_g$, et $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$: $f = g$ (ici, simplifier ne change pas le domaine).

- b) $D_f = \{x / (x-1)(x+2) \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ et $D_g = [1, +\infty[: f \neq g$ ($f(-3) = 2$, $g(-3)$ n'existe pas).
 Sur $[1, +\infty[$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$) : $f = g$.
- c) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| : \boxed{f = g}$. d) $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) : D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ et $\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = g(x) : \boxed{f = g}$.
- e) $D_f = [0, +\infty[\neq \mathbb{R} : f \neq g$; elles coïncident sur $[0, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- On vérifie que D_f est symétrique, puis on compare $f(-x)$ à $f(x)$ et à $-f(x)$. a) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$: **paire**. b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(-x) = \frac{-x^3-x}{x^2-4} = -f(x)$: **impaire**. c) $D_f = [-3, 3]$, $f(-x) = -x\sqrt{9-x^2} = -f(x)$: **impaire**. d) $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0 : f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1) : \text{ni paire ni impaire}$. e) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = |-2x+3| + |-2x-3| = |2x-3| + |2x+3| = f(x) : \text{paire}$. f) $D_f = [-2, 2]$, $f(-x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = f(x) : \text{paire}$. g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(-x) = \frac{1}{-x-1} + \frac{1}{-x+1} = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -f(x) : \text{impaire}$. h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ n'est pas symétrique ($1 \in D_f$, $-1 \notin D_f$) : **ni paire ni impaire**. i) $E\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0 : \text{ni paire ni impaire}$.
- Pour tout réel $x : (fg)(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x) : fg$ **impaire** ; $g^2(-x) = (-g(x))^2 = g^2(x) : \text{paire}$; $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) : f \circ g$ **paire** ; $g(f(-x)) = g(f(x)) : g \circ f$ **paire** ; $g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x)) : g \circ g$ **impaire**.

■ Corrigé de l'exercice 5

- Chaque segment est porté par une droite : $f(x) = -2x-5$ sur $[-4, -2]$, $f(x) = x+1$ sur $[-2, 1]$, $f(x) = 2$ sur $[1, 3]$, $f(x) = 8-2x$ sur $[3, 5]$. $D_f = [-4, 5]$; $f(-3) = 1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 0$. Antécédents : de 1 : $\boxed{-3, 0, \frac{7}{2}}$; de 2 : $-\frac{7}{2}$ et **tous** les réels de $[1, 3]$; de -2 : $\boxed{5}$ seulement ; de 4 : aucun ($f \leq 3$).
- On compte les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale $y = k$: $k < -2 : 0$; $-2 \leq k < -1 : 1$; $k = -1 : 2$ (-2 et $\frac{9}{2}$) ; $-1 < k < 2 : 3$; $k = 2$: une infinité ; $2 < k \leq 3 : 1$; $k > 3 : 0$.
- Sur chaque segment : $-2x-5 \geq 1 \iff x \leq -3$; $x+1 \geq 1 \iff x \geq 0$; $8-2x \geq 1 \iff x \leq \frac{7}{2}$: $f(x) \geq 1 \iff x \in [-4, -3] \cup [0, \frac{7}{2}]$. De même $f(x) < 0 \iff x \in]-\frac{5}{2}, -1[\cup]4, 5]$.
- Tableau ci-dessus (f est constante sur $[1, 3]$). Sur D_f : maximum $\boxed{3}$ atteint en -4 , minimum $\boxed{-2}$ atteint en 5 . Sur $[-3, 3]$: maximum 2 (atteint en tout point de $[1, 3]$), minimum -1 (en -2). $f(-2) = -1$ est un **minimum relatif** : $f(x) \geq -1$ pour $x \in [-3, 1]$, mais pas sur tout D_f .

x	-4	-2	1	3	5
f(x)	3		2	2	-2

$\swarrow$ $\nearrow$ $\rightarrow$ $\searrow$
 $\quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad$

■ Corrigé de l'exercice 6

- a) f_1 est affine de coefficient $-3 < 0$: strictement **décroissante**. b) $x \mapsto \frac{3}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $x \mapsto -\frac{3}{x}$ et f_2 sont strictement **croissantes**. c) Si $-3 \leq x < x'$, alors $0 \leq x+3 < x'+3$, d'où $(x+3)^2 < (x'+3)^2$ et $f_3(x) > f_3(x') : \text{décroissante}$. d) $x \mapsto x-2$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ sont croissantes : f_4 strictement **croissante**. e) $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, le coefficient $-\frac{1}{2}$ est négatif : f_5 strictement **décroissante**. f) $f_6(x) = 4-x$ si $x \leq 4$, $x-4$ si $x \geq 4$: décroissante sur $]-\infty, 4]$, croissante sur $[4, +\infty[$. Enfin $1,7^2 = 2,89 < 3$, donc $2 + \sqrt{3} > 3,7$ et, f_4 étant strictement croissante, $\boxed{f_4(2 + \sqrt{3}) > f_4(3,7)}$.

2. On factorise $p(x) - p(y)$. $T(x, y) = \frac{2(x^2 - y^2) - 8(x - y)}{x - y} = 2(x + y - 4)$.
 Si $x \neq y$ sont dans $]-\infty, 2]$, alors $x + y < 4$ (car $x + y \leq 4$, avec égalité seulement si $x = y = 2$) : $T(x, y) < 0$, p est strictement **décroissante** sur $]-\infty, 2]$. Si $x \neq y$ sont dans $[2, +\infty[$, alors $x + y > 4$: p est strictement **croissante** sur $[2, +\infty[$. Minimum : $p(2) = -7$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$		-7	

■ Corrigé de l'exercice 7

- f majorée sur I : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$; f bornée sur I : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$; f non minorée sur I : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) < m$.
- a) $f(x) = 9 - (x - 2)^2 \leq 9 = f(2)$: f est **majorée** et admet un **maximum**, $\boxed{9}$, en 2. Elle n'est **pas minorée** : pour tout m , $x = 2 + \sqrt{|m| + 10}$ donne $f(x) = -1 - |m| < m$; donc ni minimum, ni bornée.
 b) $2 - \frac{6}{x+3} = \frac{2x}{x+3}$; pour $x \geq 0$, $x+3 \geq 3$, donc $0 < \frac{6}{x+3} \leq 2$ et $\boxed{0 \leq g(x) < 2}$: g est **bornée**, de **minimum** $\boxed{0 = g(0)}$. Le majorant 2 n'est pas atteint, et g n'a **pas de maximum** : g est strictement croissante ($x \mapsto -\frac{6}{x+3}$ l'est), donc $g(x_0 + 1) > g(x_0)$ pour tout $x_0 \geq 0$.
 c) Pour $0 \leq x \leq 8$: $1 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$, d'où $\boxed{-1 \leq h(x) \leq 1}$: **bornée**, minimum $-1 = h(0)$, maximum $1 = h(8)$.
 d) $k(x) > 0$: **minorée** par 0. Non majorée : pour tout M , $k\left(1 + \frac{3}{|M|+1}\right) = |M| + 1 > M$. Pas de minimum : k est strictement décroissante, donc $k(x_0 + 1) < k(x_0)$ pour tout $x_0 > 1$.

■ Corrigé de l'exercice 8

- $D_f = [-2, +\infty[$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. $D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = \boxed{[-2, 3[\cup]3, +\infty[}$. Pour $\frac{f}{g}$, on exclut aussi $g(x) = 0 \iff x = 0$: $\boxed{[-2, 0[\cup]0, 3[\cup]3, +\infty[}$. Pour $\frac{g}{f}$, on exclut $f(x) = 0 \iff x = -2$: $\boxed{]-2, 3[\cup]3, +\infty[}$.
- $u(x) - v(x) = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$. **La position relative se lit sur le signe de la différence** : $\mathcal{C}_u$ est au-dessus de $\mathcal{C}_v$ sur $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$, au-dessous sur $]-1, 4[$; points communs : $\boxed{(-1, 3) \text{ et } (4, 8)}$.

27

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- a) $f(x) = -(x^2 - 6x) - 5 = -[(x-3)^2 - 9] - 5 = \boxed{-(x-3)^2 + 4}$. Pour tout réel x , $6-x \in \mathbb{R}$ et $f(6-x) = -(3-x)^2 + 4 = f(x)$: la droite $x = 3$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$.
 b) $T(x, y) = \frac{(y-3)^2 - (x-3)^2}{x-y} = -(x+y-6)$. Si $x \neq y$ sont dans $]-\infty, 3]$, $x+y < 6$ et $T > 0$: f strictement **croissante** ; sur $[3, +\infty[$, $x+y > 6$ et $T < 0$: strictement **décroissante**. Maximum $f(3) = 4$ (tableau ci-contre).
 c) $f(x) \geq 0 \iff (x-3)^2 \leq 4 \iff |x-3| \leq 2 \iff \boxed{x \in [1, 5]}$.

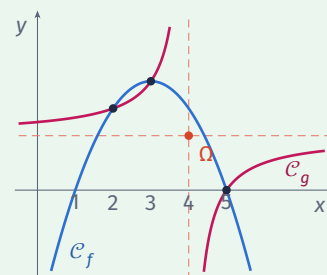
2. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $2 - \frac{2}{x-4} = \frac{2x-8-2}{x-4} = g(x)$. b) Deux conditions.

Si $x \neq 4$, alors $8 - x \neq 4$, et $g(8 - x) + g(x) = 2 - \frac{2}{4-x} + 2 - \frac{2}{x-4} = 4 = 2 \times 2$: $\Omega(4, 2)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_g$. c)

$T(x, y) = \frac{-2}{x-y} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{y-4} \right) = \frac{2}{(x-4)(y-4)}$, strictement positif si x, y sont du même côté de 4 : g est strictement **croissante** sur $] -\infty, 4[$ et sur $]4, +\infty[$ (pas sur D_g : $g(3) = 4 > g(5) = 0$).

3. a) $(-x^2 + 6x - 5)(x - 4) - (2x - 10) = -x^3 + 10x^2 - 31x + 30 = -(x - 2)(x - 3)(x - 5)$. b) $f - g$ s'annule en 2, 3, 5 : points communs $(2, 3), (3, 4), (5, 0)$. Tableau de signes de $\frac{-(x-2)(x-3)(x-5)}{x-4}$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ sur $]2, 3[\cup]4, 5[$, **au-dessous** sur $] -\infty, 2[\cup]3, 4[\cup]5, +\infty[$. c) Figure ci-contre (droites remarquables $x = 4$ et $y = 2$ en pointillés).

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		4	



■ Corrigé de l'exercice 10

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $x^2 + 3 = (x - 1)(x + 1) + 4$, donc $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$ ($a = b = 1, c = 4$). Puis $T(x, y) = 1 + \frac{4}{x-y} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} \right) = 1 + \frac{4(y-x)}{(x-y)(x-1)(y-1)} = 1 - \frac{4}{(x-1)(y-1)}$.

2. On compare $P = (x - 1)(y - 1)$ à 4, pour $x \neq y$ dans un même intervalle : $T(x, y) = \frac{P-4}{P}$. Sur $] -\infty, -1[$: $x - 1 \leq -2$ et $y - 1 \leq -2$, non tous deux égaux à -2, donc $P > 4$, $T > 0$: **croissante**. Sur $[-1, 1[$: $x - 1, y - 1 \in [-2, 0]$, donc $0 < P < 4$, $T < 0$: **décroissante**. Sur $]1, 3[$: $0 < P < 4$: **décroissante**. Sur $]3, +\infty[$: $P > 4$: **croissante** (toutes strictement). $f(-1) = -2, f(3) = 6$.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f(x)$		-2		6	

3. Sur $]1, +\infty[$, f décroît sur $]1, 3[$ puis croît sur $]3, +\infty[$: $f(x) \geq f(3)$, **minimum** $\boxed{6}$ en 3. Sur $] -\infty, 1[$: **maximum** $\boxed{-2}$ en -1. Pour $x > 1$, $f(x) > x + 1$: f n'est **pas majorée** ($f(|M| + 2) > M$) ; pour $x < 1$, $f(x) < x + 1$: **pas minorée** ($f(-|m| - 2) < m$).
4. Pour $x \neq 1$, $2 - x \neq 1$; $f(2 - x) = 3 - x - \frac{4}{x-1}$, donc $f(2 - x) + f(x) = 4 = 2 \times 2$: $\Omega(1, 2)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$.

■ Corrigé de l'exercice 11

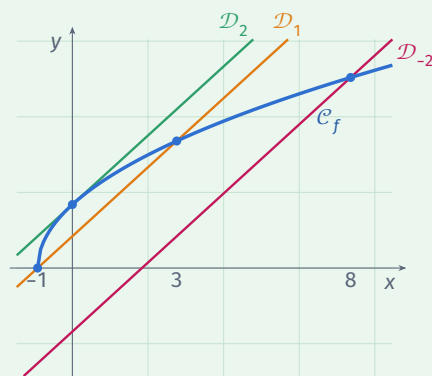
1. a) $u(x) = (x - 3)(x - 5) \geq 0 \iff x \in D_f =] -\infty, 3] \cup [5, +\infty[$. b) $u(x) = (x - 4)^2 - 1$: u décroît sur $] -\infty, 4[$, croît sur $]4, +\infty[$. **Règle de la composée : même sens $\Rightarrow$ croissante, sens contraires $\Rightarrow$ décroissante**. Sur $] -\infty, 3[$, u est décroissante à valeurs dans $[0, +\infty[$, où v est croissante : f est **décroissante** ; sur $]5, +\infty[$, u et v croissantes : f **croissante**. c) $u(8 - x) = u(x)$, donc $x \in D_f \Rightarrow 8 - x \in D_f$ et $f(8 - x) = f(x)$: axe $x = 4$. $f \geq 0$ et $f(3) = f(5) = 0$: **minimum** $\boxed{0}$, en 3 et en 5.
2. a) $g(x) = (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} = w(s(x))$ avec $w(t) = t^2 - 4t = (t - 2)^2 - 4$. b) s est croissante ; w décroît sur $] -\infty, 2[$ et croît sur $]2, +\infty[$. Pour $x \in [0, 4]$, $s(x) \in [0, 2]$: g est **décroissante** sur $[0, 4]$; pour $x \geq 4$, $s(x) \geq 2$: g est **croissante** sur $[4, +\infty[$. Tableau : $g(0) = 0 \searrow g(4) = -4 \nearrow$; **minimum** $\boxed{-4}$ en 4. c) $g(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)$: $g(x) = 0 \iff x \in \{0, 16\}$; $g(x) \leq 0 \iff \sqrt{x} \leq 4 \iff x \in [0, 16]$.
3. $x - 4\sqrt{x} + 5 = g(x) + 5 \geq 1 > 0$: $D_h = [0, +\infty[$. h est la composée de $g + 5$ (décroissante sur $[0, 4]$, croissante sur $[4, +\infty[$, à valeurs dans $[1, +\infty[$) et de $t \mapsto \frac{1}{t}$ (décroissante sur $]0, +\infty[$) : h

est **croissante** sur $[0, 4]$ et **décroissante** sur $[4, +\infty[$. Comme $g(x) + 5 \geq 1$: $0 < h(x) \leq 1 = h(4)$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $D_f = [-1, +\infty[$. **Composée de fonctions croissantes :**

$x \mapsto x + 1$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ sont strictement croissantes, donc f aussi. $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(3) = 4$, $f(8) = 6$;
 $y = f(x) \iff (y \geq 0 \text{ et } x = \frac{y^2}{4} - 1)$: $\mathcal{C}_f$ est une demi-parabole (figure). Les droites $\mathcal{D}_m$ sont parallèles (coefficient directeur 1).



2. a) **Lecture :** un seul point commun, $(8, 6)$. **Calcul :**
 $f(x) = x - 2$ impose $x - 2 \geq 0$; alors $f(x) = x - 2 \iff$
 $4(x + 1) = (x - 2)^2 \iff x^2 - 8x = 0 \iff x \in \{0, 8\}$;
 seul $8 \geq 2$ convient (0 est une solution parasite : $f(0) = 2 \neq -2$) : $S = \{8\}$.

b) **Lecture :** $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}_{-2}$ pour $-1 \leq x \leq 8$.
Calcul : si $-1 \leq x \leq 2$, $x - 2 \leq 0 \leq f(x)$: vrai ; si $x > 2$,
 les deux membres sont positifs et $f(x) \geq x - 2 \iff$
 $4(x + 1) \geq (x - 2)^2 \iff x(x - 8) \leq 0 \iff x \leq 8$.
 $S = [-1, 8]$.

3. **Lecture :** $\mathcal{D}_2$ n'a qu'un point commun avec $\mathcal{C}_f$, le point $(0, 2)$; au-dessus ($m > 2$), aucun ; pour $1 \leq m < 2$, deux ($\mathcal{D}_1$ passe par $(-1, 0)$ et $(3, 4)$) ; pour $m < 1$, un seul. **Calcul :** $x \mapsto t = \sqrt{x + 1}$ est une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, de réciproque $t \mapsto t^2 - 1$, et $f(x) = x + m \iff 2t = t^2 - 1 + m \iff (t - 1)^2 = 2 - m$. Si $m > 2$: aucune solution ; si $m = 2$: $t = 1$; si $m < 2$: $t = 1 \pm \sqrt{2 - m}$, où $1 + \sqrt{2 - m} > 0$ et $1 - \sqrt{2 - m} \geq 0 \iff m \geq 1$. 0 point si $m > 2$; 1 si $m = 2$; 2 si $1 \leq m < 2$; 1 si $m < 1$.

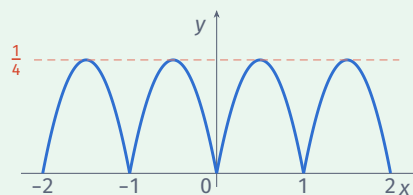
■ Corrigé de l'exercice 13

1. **Axe $x = a$:** pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$. a) $f(x) = (x^2 - 2x)^2 + 1$ et $(2 - x)^2 - 2(2 - x) = x^2 - 2x$: $f(2 - x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}$: axe $x = 1$. b) $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3, 7\}$, stable par $x \mapsto 10 - x$ (qui échange 3 et 7) ; $(10 - x)^2 - 10(10 - x) + 21 = x^2 - 10x + 21$: $f(10 - x) = f(x)$: axe $x = 5$. c) $x(4 - x) \geq 0 \iff x \in [0, 4]$, stable par $x \mapsto 4 - x$, et $f(4 - x) = \sqrt{(4 - x)x} = f(x)$: axe $x = 2$. De plus $y = f(x) \iff (y \geq 0 \text{ et } y^2 = 4x - x^2) \iff (y \geq 0 \text{ et } (x - 2)^2 + y^2 = 4)$: $\mathcal{C}_f$ est le **demi-cercle supérieur** de centre $(2, 0)$ et de rayon 2.
2. **Centre $\Omega(a, b)$:** pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$. a) $f(x) = (x - 1)^3 + 2(x - 1) + 2$; avec $x = 1 + t$: $f(1 + t) + f(1 - t) = (t^3 + 2t + 2) + (-t^3 - 2t + 2) = 4 = 2 \times 2$: $\Omega(1, 2)$ est centre de symétrie. b) $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, stable par $x \mapsto -2 - x$; $(-2 - x)^2 + 2(-2 - x) - 8 = x^2 + 2x - 8$, donc $f(-2 - x) = \frac{-1 - x}{x^2 + 2x - 8} = -f(x)$ et $f(-2 - x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$: centre $\Omega(-1, 0)$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. a) Pour tout réel x , $E(x + 1) = E(x) + 1$, donc $(x + 1) - E(x + 1) = x - E(x)$ et $f(x + 1) = f(x)$: f est périodique de période 1. b) Sur $[0, 1]$, $E(x) = 0$ et $f(x) = x(1 - x)$. Pour x réel, $t = x - E(x) \in [0, 1]$ et $f(x) = t(1 - t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$, donc $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$, avec $f(x) = \frac{1}{4} \iff t = \frac{1}{2} \iff x = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

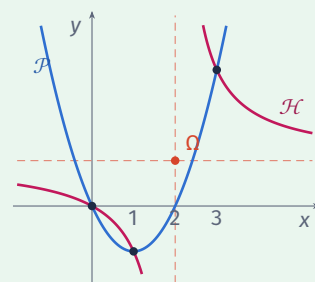
- c) Si $x \in \mathbb{Z}$, $f(-x) = 0 = f(x)$. Sinon, $k < x < k+1$ ($k = E(x)$) donne $-k-1 < -x < -k$, donc $E(-x) = -k-1$ et $-x - E(-x) = 1-t$: $f(-x) = (1-t)t = f(x)$. f est **paire**.
 d) Courbe ci-contre : des arcs de parabole identiques, translatés de 1 en 1.



2. **On compose les deux symétries.** Pour tout x : $f(2a-x) = f(x)$ et $f(2b-x) = f(x)$. Alors $f(x+2(b-a)) = f(2b-(2a-x)) = f(2a-x) = f(x)$, avec $2(b-a) > 0$: f est périodique de période $2(b-a)$. **Exemple** : la fonction de 1. est paire (axe $x=0$) et $f(1-x) = f(-x) = f(x)$ (axe $x=\frac{1}{2}$) : on retrouve la période $2(\frac{1}{2}-0) = 1$.

■ Corrigé de l'exercice 15

1. **Forme canonique imposée par le sommet** : $p(x) = a(x-1)^2 - 2$. $p(3) = 4a - 2 = 6$ donne $a = 2$:
 $p(x) = 2(x-1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$.
 2. $h(0) = 2 - \frac{k}{2} = 0$: $k = 4$, et $h(x) = \frac{2(x-2)+4}{x-2} = \frac{2x}{x-2}$ ($\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\delta = -2$). Centre $\Omega(2, 2)$, droites remarquables $x=2$ et $y=2$. p : $a=2 > 0$, décroissante sur $]-\infty, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$, minimum -2 . h : $T(x, y) = \frac{-4}{(x-2)(y-2)} < 0$ pour x, y du même côté de 2 : h décroissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ (tableaux ci-dessous).
 3. $p(x) - h(x) = 2x(x-2) - \frac{2x}{x-2} = \frac{2x[(x-2)^2-1]}{x-2} = \frac{2x(x-1)(x-3)}{x-2}$. Points communs : $O(0, 0)$, $(1, -2)$, $(3, 6)$. Tableau de signes : $\mathcal{P}$ est **au-dessus** de $\mathcal{H}$ sur $]-\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[$, **au-dessous** sur $]0, 1[\cup]2, 3[$.



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$p(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		-2	

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$

■ Corrigé de l'exercice 16

- a) **Vrai** : $0 \in D_f$ et $f(-0) = -f(0)$, donc $2f(0) = 0$. b) **Vrai** : $f(-1) = f(1)$ avec $-1 \neq 1$. c) **Vrai** : soit $0 \leq x < y \leq 2$; si x et y sont dans un même intervalle, c'est l'hypothèse ; sinon $x < 1 < y$ et $f(x) < f(1) < f(y)$. d) **Faux** : $f(x) = x$ sur $[0, 1[$ et $f(x) = x-1$ sur $[1, 2]$: $f(0,5) = 0,5 > 0 = f(1)$. e) **Faux** : $f(x) = x - E(x)$ est majorée par 1, mais si $f(x_0) = t_0 < 1$ était un maximum, $f(\frac{t_0+1}{2}) = \frac{t_0+1}{2} > t_0$. f) **Vrai** : soit T une période, $x < y$ et $n = E(\frac{y-x}{T}) + 1$: $x < y < x+nT$, d'où $f(x) \leq f(y) \leq f(x+nT) = f(x)$: $f(x) = f(y)$. g) **Faux** : $f(x) = x$: $|f|$ est paire, f ne l'est pas. h) **Vrai** : si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$, puis $g(f(x)) \leq g(f(y))$.

28 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- a) On pose $n = E(x)$: $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) \leq 0 \iff 1 \leq n \leq 2$; n étant entier, $E(x) \in \{1, 2\} \iff x \in [1, 3[$.

b) $x-1 = E(\dots)$ est un entier n : $x = n+1$ et l'équation devient $E\left(\frac{n+4}{2}\right) = n \iff n \leq \frac{n+4}{2} < n+1 \iff 2 < n \leq 4$. Donc $n \in \{3, 4\}$: $S = \{4, 5\}$ (contrôle : $E\left(\frac{7}{2}\right) = 3$, $E(4) = 4$).

c) Si $x < 0$, $2E(x) \leq -2 < 0 \leq x^2$: pas de solution. Si $x \geq 0$, posons $n = E(x) \in \mathbb{N}$: $x = \sqrt{2n}$, et il faut $n \leq \sqrt{2n} < n+1$. Or $n \leq \sqrt{2n} \iff n^2 \leq 2n \iff n \in \{0, 1, 2\}$, et $\sqrt{2n} < n+1$ est toujours vrai ($2n < n^2 + 2n + 1$). $S = \{0, \sqrt{2}, 2\}$.
- On encadre $E(nx)$. Avec $k = E(x)$: $k \leq x < k+1$, donc $nk \leq nx < nk+n$. L'entier nk est inférieur à nx , donc à $E(nx)$ (le plus grand entier inférieur à nx), et $E(nx) \leq nx < nk+n$: $nk \leq E(nx) < n(k+1)$. En divisant par $n > 0$: $k \leq \frac{E(nx)}{n} < k+1$, c'est-à-dire $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = k = E(x)$.

■ Corrigé de l'exercice 18

- a) $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$: $D_f = \mathbb{R}$. b) Le dénominateur étant positif, on chasse les fractions.
 $f(x) \leq 3 \iff x^2 + x + 1 \leq 3x^2 - 3x + 3 \iff 0 \leq 2(x-1)^2$, vrai ; $f(x) \geq \frac{1}{3} \iff 3x^2 + 3x + 3 \geq x^2 - x + 1 \iff 2(x+1)^2 \geq 0$, vrai. Comme $f(1) = 3$ et $f(-1) = \frac{1}{3}$: **maximum** $\boxed{3}$ en 1, **minimum** $\boxed{\frac{1}{3}}$ en -1. c) $f(x) = y \iff (1-y)x^2 + (1+y)x + (1-y) = 0$. Si $y = 1$: $x = 0$ convient. Si $y \neq 1$: équation du second degré de discriminant $(1+y)^2 - 4(1-y)^2 = (3y-1)(3-y)$, positif si et seulement si $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$. Donc y a un antécédent $\iff y \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$: $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.
- a) $x-1 \geq 0$ et $5-x \geq 0$: $D_g = [1, 5]$, stable par $x \mapsto 6-x$, et $g(6-x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} = g(x)$: axe $x = 3$. b) $g(x)^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} = 4 + 2\sqrt{4-(x-3)^2}$. Pour $x \in [1, 5]$, $0 \leq (x-3)^2 \leq 4$, donc $4 \leq g(x)^2 \leq 8$ et, g étant positive, $\boxed{2 \leq g(x) \leq 2\sqrt{2}}$. Maximum $2\sqrt{2} = g(3)$; minimum $2 = g(1) = g(5)$.

■ Corrigé de l'exercice 19

- $g(x-2) - 16 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 12x + 24 - 16 = x^3 - 6x^2 = f(x)$. **Lecture géométrique** : $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y + 16 = g(x-2) \iff M'(x-2, y+16) \in \mathcal{C}_g$: $\mathcal{C}_f$ est l'image de $\mathcal{C}_g$ par la translation de vecteur $\vec{u}(2, -16)$. g est impaire : O est centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$, donc son image $\boxed{\Omega(2, -16)}$ l'est pour $\mathcal{C}_f$.
- a) $T(x, y) = \frac{x^3 - y^3 - 12(x-y)}{x-y} = x^2 + xy + y^2 - 12$. b) Si $x \neq y$ sont dans $[2, +\infty[$: x^2, xy, y^2 sont ≥ 4 et ne valent pas tous 4, donc $T > 0$: g strictement **croissante**. Si $x \neq y$ sont dans $[-2, 2]$: $x^2 + xy + y^2 \leq x^2 + |x||y| + y^2 \leq 12$, l'égalité exigeant $|x| = |y| = 2$ et $xy \geq 0$, c'est-à-dire $x = y$: donc $T < 0$, g strictement **décroissante**. Enfin, si $x < y \leq -2$, alors $-x > -y \geq 2$, $g(-x) > g(-y)$, soit $g(x) < g(y)$: g **croissante** sur $]-\infty, -2]$ (imparité).

3. $x \mapsto x - 2$ est croissante : f a les variations de g , décalées de 2 : croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, 4]$, croissante sur $[4, +\infty[$. Maximum relatif $f(0) = 0$, minimum relatif $f(4) = -32$.
4. $f(x) = x^2(x - 6)$ et $f(x) + 32 = (x - 4)^2(x + 2)$. Sur $[-2, 6]$: $x - 6 \leq 0$ et $x + 2 \geq 0$, donc $-32 \leq f(x) \leq 0$; maximum 0 (en 0 et 6), minimum -32 (en -2 et 4).

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f(x)$		0	-32	

■ Corrigé de l'exercice 20

1. a) On enlève les valeurs absolues intervalle par intervalle : $f(x) = -4x + 4$ sur $]-\infty, -2]$; $-2x + 8$ sur $[-2, 1]$; $2x + 4$ sur $[1, 4]$; $4x - 4$ sur $[4, +\infty[$ (les expressions se raccordent : 12, 6, 12).

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$f(x)$		12	6	12	

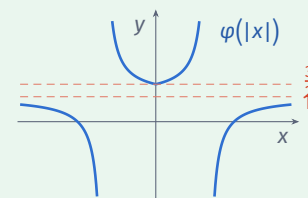
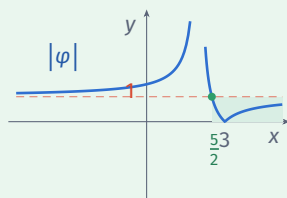
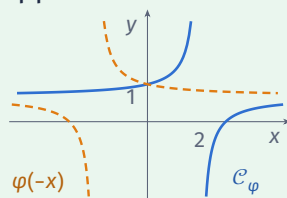
b) Pentas -4, -2, puis 2, 4 : f décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$; minimum $f(1) = 6$.

c) $f(2 - x) = |4 - x| + 2|1 - x| + |-2 - x| = |x - 4| + 2|x - 1| + |x + 2| = f(x)$ sur $\mathbb{R}$: axe $x = 1$. d) $-4x + 4 = 10$ donne $x = -\frac{3}{2} \notin]-\infty, -2]$; $-2x + 8 = 10$ donne $x = -1 \checkmark$; $2x + 4 = 10$ donne $x = 3 \checkmark$; $4x - 4 = 10$ donne $\frac{7}{2} \notin [4, +\infty[$: $S = \{-1, 3\}$ (symétriques par rapport à 1). Par stricte monotonie de part et d'autre de 1, $f(x) \leq 10 \iff x \in [-1, 3]$.

2. a) **Inégalité triangulaire** : $|x - a| + |x - b| = |x - a| + |b - x| \geq |(x - a) + (b - x)| = b - a$, avec égalité si et seulement si $x - a$ et $b - x$ sont de même signe, donc tous deux positifs ($a \leq x \leq b$). b) $S(x) = (|x - 1| + |x - 9|) + (|x - 2| + |x - 8|) + (|x - 3| + |x - 7|) + (|x - 4| + |x - 6|) + |x - 5| \geq 8 + 6 + 4 + 2 + 0 = 20$, avec égalité si et seulement si $x \in [1, 9] \cap [2, 8] \cap [3, 7] \cap [4, 6]$ et $x = 5$: minimum $\boxed{20}$, atteint en $\boxed{5}$ seulement.

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2} = \varphi(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **Deux transformations** : la courbe de $u : x \mapsto -\frac{1}{x}$ est la symétrique de $\mathcal{H}$ par rapport à l'axe des abscisses ($y = -f(x)$) ; puis $\varphi(x) = u(x - 2) + 1$: $\mathcal{C}_\varphi$ est l'image de cette courbe par la translation de vecteur $(2, 1)$. C'est une hyperbole de centre $(2, 1)$, de droites remarquables $x = 2$ et $y = 1$. La courbe de $x \mapsto \varphi(-x)$ est la symétrique de $\mathcal{C}_\varphi$ par rapport à l'axe des ordonnées. Pour $|\varphi|$, on garde les points d'ordonnée positive et on replie les autres ($\varphi(x) < 0 \iff 2 < x < 3$) par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Pour $\varphi(|x|)$ (paire, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$), on garde la partie d'abscisse $x \geq 0$ de $\mathcal{C}_\varphi$, complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



2. $\mathcal{C}_{|\varphi|}$ est sous la droite $y = 1$ pour $x \geq \frac{5}{2}$ (zone verte). Par le calcul : $|\varphi(x)| \leq 1 \iff -1 \leq 1 - \frac{1}{x-2} \leq 1 \iff 0 \leq \frac{1}{x-2} \leq 2 \iff x - 2 \geq \frac{1}{2} : S = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
3. Pour $x \geq 0$, $x \neq 2$: $\varphi(x) = m \iff \frac{1}{x-2} = 1 - m \iff (m \neq 1 \text{ et } x = x_m = 2 + \frac{1}{1-m})$. Si $m < 1$: $x_m > 2$. Si $m > 1$: $x_m = 2 - \frac{1}{m-1} < 2$, et $x_m \geq 0 \iff m - 1 \geq \frac{1}{2} \iff m \geq \frac{3}{2}$ (avec $x_m = 0$ si $m = \frac{3}{2}$). Par parité, chaque solution $x_m > 0$ donne deux solutions $\pm x_m$:

$$2 \text{ solutions si } m < 1 \text{ ou } m > \frac{3}{2}; 0 \text{ si } 1 \leq m < \frac{3}{2}; 1 \text{ si } m = \frac{3}{2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 22

1. $x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $x \mapsto \sqrt{x+4}$ sont strictement croissantes sur $[1, +\infty[$, donc leur somme f aussi. On devine une solution, la stricte monotonie donne l'unicité : $f(5) = 2+3 = 5$, et f est injective : $f(x) = 5 \iff x = 5$. De plus $f(x) < f(5) \iff x < 5$: $f(x) < 5 \iff x \in [1, 5[$.
2. $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x$ sont strictement croissantes : g aussi, donc injective. $g(2) = 8+4 = 12$: $g(x) = 12 \iff x = 2$. Système : $g(x) = g(y) \iff x = y$, puis $3x^2 = 12 \iff x = \pm 2$: $S = \{(2, 2), (-2, -2)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. **Analyse.** Soit f une solution. En remplaçant x par $1-x$: $f(1-x) + 2f(x) = (1-x)^2$. Avec la relation de départ, $2 \times (\text{cette égalité}) - (\text{relation de départ})$ donne $3f(x) = 2(1-x)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 2$, donc $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3}$. **Synthèse.** $f(1-x) = \frac{(1-x)^2 - 4(1-x) + 2}{3}$ et $f(x) + 2f(1-x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$ ✓. Unique solution : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3}$. Comme $f(x) = \frac{(x-2)^2 - 2}{3}$, $\mathcal{C}_f$ est la parabole de sommet $(2, -\frac{2}{3})$ et d'axe $x = 2$.
2. **Analyse.** En remplaçant x par $\frac{1}{x}$: $2f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{3}{x}$. Deux fois la relation de départ, moins celle-ci : $3f(x) = 6x - \frac{3}{x}$, donc $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$. **Synthèse.** $2(2x - \frac{1}{x}) + (\frac{2}{x} - x) = 3x$ ✓. Unique solution : $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

29 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. **On décale les indices.** $H(x + \frac{1}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k+1}{n}) - E(nx + 1) = \sum_{j=1}^{n-1} E(x + \frac{j}{n}) + E(x + 1) - E(nx) - 1$. Or $E(x + 1) = E(x) + 1$: on retrouve $H(x)$.
2. Si $0 \leq x < \frac{1}{n}$: $0 \leq nx < 1$ et $0 \leq x + \frac{k}{n} < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$, donc tous les termes sont nuls : $H(x) = 0$. Pour x réel, soit $p = E(nx)$: $y = x - \frac{p}{n} \in [0, \frac{1}{n}[$, et la périodicité (appliquée $|p|$ fois, dans un sens ou dans l'autre) donne $H(x) = H(y) = 0$: $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$.
3. Avec $n = 2$ et $y = \frac{m}{2^{k+1}}$: $E(y) + E(y + \frac{1}{2}) = E(2y)$, et $y + \frac{1}{2} = \frac{m+2^k}{2^{k+1}}$, $2y = \frac{m}{2^k}$: c'est la relation demandée. La somme est **télescopique** : $\sum_{k=0}^{10} [E(\frac{2026}{2^k}) - E(\frac{2026}{2^{k+1}})] = E(2026) - E(\frac{2026}{2048}) = \boxed{2026}$.
4. Avec $n = 3$, l'équation s'écrit $E(3x) = 2x + 1$. Donc $q = 2x + 1 \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{q-1}{2}$, et $E(\frac{3q-3}{2}) = q \iff q \leq \frac{3q-3}{2} < q+1 \iff 3 \leq q < 5$. $q \in \{3, 4\}$: $S = \{1, \frac{3}{2}\}$.

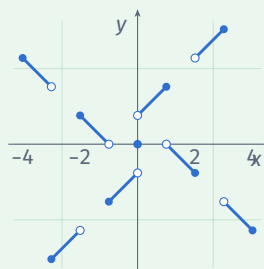
■ Corrigé de l'exercice 25

1. q est un entier tel que $q > \frac{1}{v-u} > 0$, donc $qv - qu > 1$. Avec $E(qu) \leq qu < E(qu) + 1$: $qu < E(qu) + 1 \leq qu + 1 < qv$; en divisant par $q > 0$: $u < r < v$, et r , quotient de deux entiers, est rationnel.
2. $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$ et $a = f(1) \geq f(0) = 0$. **Par l'absurde**, soit x tel que $f(x) \neq ax$. Si $f(x) > ax$: avec 1., on prend $r \in \mathbb{Q}$ dans $]x, x+1[$ si $a = 0$, dans $]x, \frac{f(x)}{a}[$ si $a > 0$: $r > x$ et $f(r) = ar < f(x)$, ce qui contredit la croissance. Si $f(x) < ax$: de même avec $r \in]x-1, x[$ ou $r \in]\frac{f(x)}{a}, x[$: $r < x$ et $f(r) > f(x)$. Donc $f(x) = ax$ pour tout réel x (et ces fonctions conviennent pour $a \geq 0$).

3. $g(x+y) = f(x)+f(y)-ax-ay = g(x)+g(y)$; pour $r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = ar-ar = 0$; $g(x+1) = g(x)+g(1) = g(x)$: période 1. Si $|f| \leq M$ sur $[0, 1]$, alors $|g| \leq K = M + |a|$ sur $[0, 1]$, puis sur $\mathbb{R}$, car $g(x) = g(x - E(x))$ avec $x - E(x) \in [0, 1]$. Par récurrence, $g(nx) = ng(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. **Par l'absurde**, si $g(x_0) \neq 0$, l'entier $n = E\left(\frac{K}{|g(x_0)|}\right) + 1$ vérifie $|g(nx_0)| = n|g(x_0)| > K$: contradiction. Donc $g = 0$ et $\boxed{f(x) = ax}$.

■ Corrigé de l'exercice 26

- En appliquant f à $f(f(x)) = -x$: $f(f(f(x))) = f(-x)$; en écrivant la relation au point $f(x)$: $f(f(f(x))) = -f(x)$. Donc $\boxed{f(-x) = -f(x)}$: f est impaire ($D_f = \mathbb{R}$), et $f(0) = -f(0)$ donne $f(0) = 0$.
- $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow x = y$: injective; tout y s'écrit $y = f(f(-y))$: surjective. Si $f(x) = x$, alors $-x = f(f(x)) = f(x) = x$, donc $x = 0$; si $f(x) = -x$, alors $-x = f(-x) = -f(x) = x$, donc $x = 0$.
- Si f était croissante, ou décroissante, $f \circ f$ serait croissante (exercice 16 h); or $0 < 1$ et $(f \circ f)(0) = 0 > -1 = (f \circ f)(1)$: **contradiction**. f n'est pas monotone.
- Tout $x > 0$ est dans un seul intervalle $]2n, 2n+1]$ ou $]2n+1, 2n+2]$: f est bien définie, et impaire. Si $x \in]2n, 2n+1]$: $f(x) = x+1 \in]2n+1, 2n+2]$, donc $f(f(x)) = 1 - (x+1) = -x$. Si $x \in]2n+1, 2n+2]$: $f(x) = 1-x < 0$, donc $f(f(x)) = -f(x-1) = -x$, car $x-1 \in]2n, 2n+1]$. Si $x < 0$: $f(f(x)) = f(-f(-x)) = -f(f(-x)) = -(-(-x)) = -x$. Avec $f(0) = 0$: f **convient** (courbe ci-dessus, extrémités exclues en blanc).



■ Corrigé de l'exercice 27

- $f(x-1) = f((x-1)+1) = f(x)$: 1 et -1 « conservent » f , donc (récurrence) tout entier m ; de même $n\sqrt{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $f(x+m+n\sqrt{2}) = f(x)$ pour tout x : $\tau = m+n\sqrt{2} > 0$ est une période.
- Principe des tiroirs** : les $N+1$ réels $a_k = k\sqrt{2} - E(k\sqrt{2}) \in [0, 1[$ sont dans N intervalles; deux d'entre eux, a_k et a_l ($k > l$), sont dans le même : $|a_k - a_l| < \frac{1}{N}$. Or $a_k - a_l = (k-l)\sqrt{2} - (E(k\sqrt{2}) - E(l\sqrt{2}))$ est de la forme $m+n\sqrt{2}$ avec $n = k-l \neq 0$, donc non nul ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Ainsi $\tau = |a_k - a_l| \in]0, \frac{1}{N}[$ est une période (par 1.).
- Soit $0 < x < y \leq 1$ et (2., avec $\frac{1}{N} < x$) une période $\tau \in]0, x[$. Avec $p = E\left(\frac{y-x}{\tau}\right) + 1$: $y-x < p\tau \leq y-x+\tau < y$, donc $z = y-p\tau \in]0, x[$ et $f(y) = f(z) \leq f(x)$ (f croissante sur $[0, 1]$). Comme $f(x) \leq f(y)$: $f(x) = f(y)$. f est constante sur $]0, 1]$, et $f(0) = f(1)$: constante sur $[0, 1]$, donc sur $\mathbb{R}$ (période 1).
- Si $x \in G$, alors $x \pm 1$ et $x \pm \sqrt{2}$ sont dans G ; donc $x \in G \iff x+1 \in G \iff x+\sqrt{2} \in G$, et 1_G admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. $1_G(0) = 1$, mais $\frac{1}{2} \notin G$ (si $\frac{1}{2} = m+n\sqrt{2}$, alors $n = 0$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis $m = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$) : $1_G\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. **Conclusion** : dans 3., l'hypothèse de monotonie est indispensable.

■ Corrigé de l'exercice 28

- a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $a = b$. b) Avec $A = \frac{a+b}{2}$ et $B = \frac{c+d}{2}$ (positifs) : $0 \leq ab \leq A^2$ et $0 \leq cd \leq B^2$, donc $abcd \leq (AB)^2 \leq \left[\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ (on a appliqué a) à A, B , puis élevé au carré des nombres positifs). c) Avec $d = s$: $\frac{a+b+c+s}{4} = \frac{3s+s}{4} = s$, donc $abc s \leq s^4$. Si $s > 0$: $\boxed{abc \leq s^3}$; si $s = 0$, alors $a = b = c = 0$. **Égalité** : si $a = b = c$, $abc = s^3$.

Réciproquement, si $abc = s^3$ avec $s > 0$, la chaîne n'a que des égalités : $A = B = s$, $ab = A^2$ ($a = b = s$) et $cs = B^2$ ($c = s$).

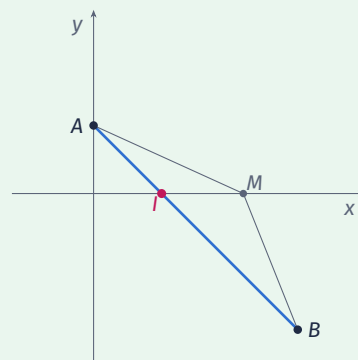
- La base est un carré de côté $6 - 2x$ et la hauteur vaut x : $V(x) = x(6 - 2x)^2$. Avec $a = 4x$, $b = c = 6 - 2x$ (positifs), $a + b + c = 12$, donc $s = 4$ et $4V(x) = abc \leq 64$: $V(x) \leq 16$, avec égalité si et seulement si $4x = 6 - 2x$, soit $x = 1$. Volume maximal 16 , pour $x = 1$.
- Avec $a = x^2$, $b = c = \frac{8}{x}$: $abc = 64$ et $s = \frac{g(x)}{3}$. Donc $s^3 \geq 64$, puis $s \geq 4$ ($t \mapsto t^3$ est strictement croissante) : $g(x) \geq 12$, avec égalité si et seulement si $x^2 = \frac{8}{x}$, soit $x = 2$. Minimum $12 = g(2)$. (Contrôle : $g(x) - 12 = \frac{(x-2)^2(x+4)}{x} \geq 0$.)

■ Corrigé de l'exercice 29

- a) Pour $x \neq y$: $|T(x, y)| = 1$. b) $g(x) - g(y) = f(x) - f(y)$, donc $|g(x) - g(y)| = |x - y|$; avec $y = 0$ ($g(0) = 0$) : $|g(x)| = |x|$. En élevant au carré : $g(x)^2 - 2g(x)g(y) + g(y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$; comme $g(x)^2 = x^2$ et $g(y)^2 = y^2$: $g(x)g(y) = xy$. c) Soit $\varepsilon = g(1)$: $|\varepsilon| = 1$, donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon^2 = 1$. Avec $y = 1$: $\varepsilon g(x) = x$, donc $g(x) = \varepsilon x$ et $f(x) = \varepsilon x + c$, où $c = f(0)$. Réciproquement, $|\varepsilon(x - y)| = |x - y|$: les solutions sont les fonctions $x \mapsto x + c$ et $x \mapsto -x + c$ ($c \in \mathbb{R}$). Si $f(1) = 3$ et $f(2) = 2$: $\varepsilon = f(2) - f(1) = -1$ et $c = 4$: $f(x) = 4 - x$.
- $f(0) \leq 0$, et $f(0) = f(0 + 0) \leq 2f(0)$ donne $f(0) \geq 0$: $f(0) = 0$. Pour tout réel x : $0 = f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x)$, et $f(-x) \leq -x$, donc $f(x) \geq -f(-x) \geq x$. Avec $f(x) \leq x$: $f(x) = x$ (et l'identité convient).

■ Corrigé de l'exercice 30

- a) $MA = \sqrt{(x - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{x^2 + 1}$ et $MB = \sqrt{(x - 3)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + 4}$: $f(x) = MA + MB$. b) **Inégalité triangulaire** : $AB \leq AM + MB$, et $AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$: $f(x) \geq 3\sqrt{2}$. c) Égalité si et seulement si $M \in [AB]$. La droite (AB) , de coefficient directeur -1 , a pour équation $y = 1 - x$: elle coupe l'axe des abscisses en $I(1, 0)$, point de $[AB]$ (A et B sont de part et d'autre de l'axe). Donc $\min f = 3\sqrt{2}$, atteint seulement en $x = 1$ (contrôle : $f(1) = \sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$).
- a) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2$. b) Donc $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, puis $ac + bd \leq |ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$. Les deux membres de l'inégalité de Minkowski étant positifs, elle équivaut à son carré, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \geq (a + c)^2 + (b + d)^2$, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \geq ac + bd$: vrai. Égalité $\iff \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = ac + bd \iff (ac + bd \geq 0 \text{ et } (ad - bc)^2 = 0)$. c) Avec $(a, b) = (x, 1)$ et $(c, d) = (3 - x, 2)$: $f(x) \geq \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, avec égalité si et seulement si $2x = 3 - x$ et $x(3 - x) + 2 \geq 0$, soit $x = 1$. On retrouve $\min f = 3\sqrt{2} = f(1)$.
- Même méthode**, avec $A(0, p)$, $B(c, -q)$ et $M(x, 0)$: $MA + MB \geq AB = \sqrt{c^2 + (p + q)^2}$, avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$. Le point de $[AB]$ d'ordonnée nulle est $A + s\vec{AB}$ avec $p - s(p + q) = 0$, soit $s = \frac{p}{p + q} \in]0, 1[$: son abscisse est sc. Minimum $\sqrt{c^2 + (p + q)^2}$, atteint en $x = \frac{cp}{p + q}$ (avec $p = 1$, $q = 2$, $c = 3$, on retrouve $3\sqrt{2}$ en 1).



30 Corrigés : domaine et opérations

■ Corrigé de l'exercice 31

On écrit les conditions d'existence, puis on les résout.

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0 : \Delta = 49 - 24 = 25$, racines $\frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{7+5}{4} = 3$. $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$.

b) $10 - 5x \geq 0 \iff x \leq 2$, et $x \neq -1$: $D_{f_2} =]-\infty, -1[\cup]-1, 2]$.

c) $-x^2 + 2x + 8 = -(x-4)(x+2) \geq 0 \iff (x-4)(x+2) \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 4$: $D_{f_3} = [-2, 4]$.

d) $|2x - 1| = 3 \iff 2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3 \iff x = 2$ ou $x = -1$: $D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

e) Il faut $x \geq -2$ et $x \neq \sqrt{x+2}$. Or $x = \sqrt{x+2} \iff (x \geq 0 \text{ et } (x-2)(x+1) = 0) \iff x = 2$ (-1 est rejeté : $-1 - \sqrt{1} = -2 \neq 0$). $D_{f_5} = [-2, 2[\cup]2, +\infty[$.

f) Il faut $-3 \leq x \leq 5$ et $\sqrt{5-x} \neq 4$, soit $x \neq -11$: condition automatique, car sur $[-3, 5]$, $\sqrt{5-x} \leq \sqrt{8} < 4$. Le dénominateur ne s'annule jamais : $D_{f_6} = [-3, 5]$.

g) $9 - x^2 \geq 0 \iff -3 \leq x \leq 3$, et $x(x-2) \neq 0 \iff x \notin \{0, 2\}$: $D_{f_7} = [-3, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 3]$.

h) $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$; tableau de signes (racines -2, 0, 2) : signe -, +, -, + de gauche à droite. $D_{f_8} = [-2, 0] \cup [2, +\infty[$.

i) $x - E(x) = 0 \iff E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$: $D_{f_9} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

■ Corrigé de l'exercice 32

On compare d'abord les domaines, puis les images.

a) $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$. Si $x > 0$: $f(x) = 1 = g(x)$; si $x < 0$: $f(x) = \frac{x}{-x} = -1 = \frac{-x}{x} = g(x)$. $f = g$.

b) $|x| + 1 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R} = D_g$, et $x^2 - 1 = |x|^2 - 1 = (|x| - 1)(|x| + 1)$ donne $f(x) = |x| - 1$. $f = g$.

c) $x^2(x-1) \geq 0 \iff (x=0 \text{ ou } x \geq 1)$: $D_f = \{0\} \cup [1, +\infty[\neq D_g = [1, +\infty[$, $f \neq g$. Pour $x \geq 1$: $f(x) = |x|\sqrt{x-1} = g(x)$: elles coïncident sur $[1, +\infty[$.

d) Pour $x \geq 1$: $x + 2\sqrt{x-1} = (x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2$. Donc $D_f = [1, +\infty[= D_g$ et $f(x) = |\sqrt{x-1} + 1| = g(x)$. $f = g$.

e) De même $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2$: $D_f = D_g = [1, +\infty[$ et $f(x) = |\sqrt{x-1} - 1|$. Mais $f(1) = 1 \neq g(1) = -1$: $f \neq g$. Et $f(x) = g(x) \iff \sqrt{x-1} \geq 1 \iff x \geq 2$: elles coïncident exactement sur $[2, +\infty[$.

f) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et, comme $|x|^2 = x^2$: $(|x| + x)^2 = 2x^2 + 2x|x| = 2x(x + |x|)$. $f = g$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $D_u =]-\infty, 3]$, $D_v = \mathbb{R}$. $D_{u+v} = D_{uv} =]-\infty, 3]$; $D_{u/v} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 3]$ (zéros de v retirés); $D_{v/u} =]-\infty, 3[$ (zéro de u retiré); $u(x) = 1 \iff x = 2$, donc $D_w =]-\infty, 2[\cup]2, 3]$.
2. Pour $x \in D_w$, on multiplie par la quantité conjuguée $u(x) + 1 \geq 1$ (non nulle) :

$$w(x) = \frac{u(x) + 1}{(u(x) - 1)(u(x) + 1)} = \frac{\sqrt{3-x} + 1}{(3-x) - 1} = \frac{\sqrt{3-x} + 1}{2-x}.$$

Le domaine de t est $\{x \leq 3; x \neq 2\} = D_w$, et $w(x) = t(x)$ sur ce domaine : $w = t$.

3. $u(x) \geq 0$, nul seulement en 3; $v(x) = (x-1)(x+1) \leq 0 \iff x \in [-1, 1]$. Donc $(uv)(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, 3[$ et $(uv)(x) \leq 0 \iff (u(x) = 0 \text{ ou } v(x) \leq 0)$: $S = [-1, 1] \cup \{3\}$ (ne pas oublier 3).
4. Pour $x \leq 3$: $\frac{4-x}{2} - u(x) = \frac{(3-x) - 2\sqrt{3-x} + 1}{2} = \frac{(\sqrt{3-x} - 1)^2}{2} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\sqrt{3-x} = 1$, soit $x = 2$. **Interprétation** : $\mathcal{C}_u$ est au-dessous de Δ , avec un seul point commun $A(2, 1)$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. $f(x) = x^2(x-2)$, donc $f(x) - (x-2) = (x-2)(x^2 - 1) = (x-2)(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$f(x) - (x-2)$	-	0	+	0	+

2. $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de D sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, 2[$, **au-dessus** sur $]-1, 1[$ et sur $]2, +\infty[$; points communs : $(-1, -3), (1, -1), (2, 0)$. Et $f(x) \leq x-2 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, 2]$.
3. a) $f(2) = 0 = m(2-2)$: $A \in \mathcal{C}_f \cap D_m$. Puis $f(x) - m(x-2) = x^2(x-2) - m(x-2) = (x-2)(x^2 - m)$.
- b) Les abscisses des points communs sont 2 et les solutions de $x^2 = m$. Si $m < 0$: un seul point, A. Si $m = 0$: $x = 0$, deux points (A et O). Si $m > 0$: $x = \pm\sqrt{m}$, avec $-\sqrt{m} \neq 2$ et $\sqrt{m} = 2 \iff m = 4$; pour $m = 4$, deux points (A et $(-2, -16)$), sinon trois.
- 1 point si $m < 0$; 2 points si $m \in \{0, 4\}$; 3 points si $m \in]0, 4[\cup]4, +\infty[$. Pour $m = 1$, $D_1 = D$: on retrouve les abscisses 2, 1, -1.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. Il faut $x^2 - 2mx + 3m - 2 \geq 0$ pour tout réel x . Le coefficient de x^2 est positif : c'est le cas si et seulement si $\Delta' \leq 0$ (sinon le trinôme est strictement négatif entre ses racines). $\Delta' = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) \leq 0 \iff m \in [1, 2]$.

Pour $m = 3$: $x^2 - 6x + 7 \geq 0$ hors des racines $3 \pm \sqrt{2}$: $D_{f_3} =]-\infty, 3 - \sqrt{2}] \cup [3 + \sqrt{2}, +\infty[$.

2. On retire les zéros de $d_m(x) = mx^2 - 2x + m$. Si $m = 0$: $d_0(x) = -2x$, $D = \mathbb{R}^*$. Si $m \neq 0$: $\Delta' = 1 - m^2$; si $|m| > 1$, pas de racine, $D = \mathbb{R}$; si $m = 1$, $d_1(x) = (x-1)^2$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; si $m = -1$, $d_{-1}(x) = -(x+1)^2$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; si $0 < |m| < 1$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}, \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m} \right\}$.

Donc $D_{g_m} = \mathbb{R} \iff |m| > 1$. Pour $x \neq -1$: $g_{-1}(x) = \frac{x+1}{-(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}$, avec le même domaine $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $g_{-1} = \left(x \mapsto -\frac{1}{x+1} \right)$.

3. Analyse. Si $a = 0$, le domaine est $\mathbb{R}$ ou une demi-droite ; si $a > 0$, le trinôme est positif pour $|x|$ grand : le domaine n'est pas borné. Donc $a < 0$, et le trinôme est positif exactement entre ses racines, qui sont -1 et 3 : $ax^2 + bx + 6 = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$, d'où $-3a = 6$ et $b = -2a$. Synthèse. $-2x^2 + 4x + 6 = -2(x+1)(x-3) \geq 0 \iff x \in [-1, 3]$ ✓. $a = -2$, $b = 4$.

4. Il faut $E(x^2) \leq 1$. C'est un entier, donc $E(x^2) \leq 1 \iff E(x^2) < 2 \iff x^2 < 2$ (car $E(y) \geq 2 \iff y \geq 2$). $D =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

■ Corrigé de l'exercice 36

1. Par l'absurde, si f existe : $x = 0$ donne $f(0) + f(1) = 0$ et $x = 1$ donne $f(1) + f(0) = 1$, d'où $0 = 1$. Aucune fonction ne convient (le membre de gauche est inchangé si l'on remplace x par $1-x$, pas celui de droite).

2. Analyse. Avec $y = x$: $f(2x) - f(0) = 4x^2$; pour $t \in \mathbb{R}$ et $x = \frac{t}{2}$: $f(t) = t^2 + c$, où $c = f(0)$. Synthèse. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ ✓. Solutions : $x \mapsto x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3. a) Pour $x \in E$: $\varphi(x) \neq 0$, et $\varphi(x) = -1 \iff x+1 = 1 \iff x = 0$, exclu : $\varphi(x) \in E$. Puis

$$\varphi(\varphi(x)) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{-1}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{x+1}{x}, \quad \varphi(\varphi(\varphi(x))) = \frac{-1}{1 - \frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = x.$$

b) Analyse. Soit h une solution, $x \in E$, $x_1 = \varphi(x)$ et $x_2 = \varphi(x_1)$ (dans E , avec $\varphi(x_2) = x$). L'équation en x, x_1, x_2 donne :

$$(1) h(x) + h(x_1) = 2x, \quad (2) h(x_1) + h(x_2) = 2x_1, \quad (3) h(x_2) + h(x) = 2x_2.$$

Avec (1) - (2) + (3) : $2h(x) = 2x - 2x_1 + 2x_2$, d'où $h(x) = x + \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = x - 1 - \frac{1}{x(x+1)}$.

Synthèse. Si $h(x) = x - \varphi(x) + \varphi(\varphi(x))$, alors $h(\varphi(x)) = \varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) + x$, et la somme vaut $2x$ ✓.

Unique solution : $h(x) = x - 1 - \frac{1}{x(x+1)}$.

31 Corrigés : parité et symétries

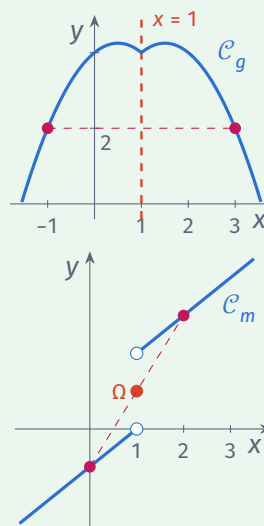
■ Corrigé de l'exercice 37

- $x^2 \pm x + 1 = \left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$: $D_{f_1} = \mathbb{R}$, et $f_1(-x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} = -f_1(x)$: f_1 impaire.
 - $x^2 - |x| = |x|(|x| - 1) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$: $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est symétrique et, comme $|-x| = |x|$, $f_2(-x) = -f_2(x)$: f_2 impaire.
 - $x - |x| = 0 \iff x \geq 0$: $D_{f_3} =]-\infty, 0[$; $-1 \in D_{f_3}$ mais $1 \notin D_{f_3}$: f_3 ni paire ni impaire (bien que $f_3(x) = \frac{x}{2}$ sur D_{f_3}).
 - $D_{f_4} = \mathbb{R}$, $f_4(1) = 2$ et $f_4(-1) = 0$: $f_4(-1) \neq f_4(1)$ et $f_4(-1) \neq -f_4(1)$: f_4 ni paire ni impaire.
 - $|x|(|x| - 1) \geq 0 \iff (x = 0 \text{ ou } |x| \geq 1)$: $D_{f_5} =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$ est symétrique (0 est un point isolé) et $f_5(-x) = f_5(x)$: f_5 paire.
- $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{ax^2 - bx + c}{x^2 + 1}$. f paire $\iff \forall x, 2bx = 0 \iff b = 0$ (prendre $x = 1$). f impaire $\iff \forall x, ax^2 + c = 0 \iff a = c = 0$ ($x = 0$, puis $x = 1$). f paire $\iff b = 0$; f impaire $\iff a = c = 0$, soit $f(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}$.

■ Corrigé de l'exercice 38

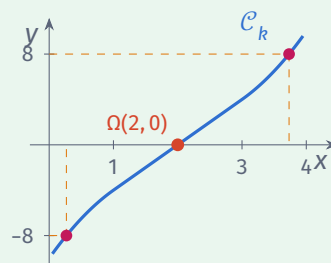
- $D_g = \mathbb{R}$, donc $2 - x \in D_g$ pour tout x , et $g(2 - x) = (3 - x)(x + 1) + |1 - x| = g(x)$.
 $x = 1$ est un axe de $\mathcal{C}_g$.
 $g(-1) = 0 + 2 = 2$ et $g(1) = 4 + 0 = 4$: g n'est pas paire, $x = 0$ n'est pas un axe.
- $D_m = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \neq 1 \iff 2 - x \neq 1$. Pour $x \neq 1$:

$$m(2 - x) = 2 - x + \frac{1 - x}{|1 - x|} = 2 - x - \frac{x - 1}{|x - 1|},$$
 donc $m(2 - x) + m(x) = 2 = 2 \times 1$:
 $\Omega(1, 1)$ est un centre de $\mathcal{C}_m$.
 O n'en est pas un : $-1 \in D_m$, mais $1 \notin D_m$. Sans valeur absolue :
 $m(x) = x + 1$ si $x > 1$, $m(x) = x - 1$ si $x < 1$: deux demi-droites parallèles, symétriques par rapport à Ω .
- $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$; on essaie $x = -1$, milieu de -4 et 2 .
 On a $-2 - x = 2 \iff x = -4$ et
 $-2 - x = -4 \iff x = 2$: $x \in D_k \iff -2 - x \in D_k$.
 Puis $k(-2 - x) = \frac{1}{|-4 - x|} + \frac{1}{|2 - x|} = k(x)$.
 $x = -1$ est un axe de $\mathcal{C}_k$.



■ Corrigé de l'exercice 39

1. a) $D_f = \mathbb{R}$ et $f(4-x) = (3-x)^4 + (1-x)^4 = f(x)$ (puissances paires) : $x = 2$ est un axe. Pour $t \in \mathbb{R}$, les termes de degré impair de $(t \pm 1)^4 = t^4 \pm 4t^3 + 6t^2 \pm 4t + 1$ s'éliminent : $f(2+t) = (t+1)^4 + (t-1)^4 = 2t^4 + 12t^2 + 2$.
- b) $f(2+t) \geq 2$, avec égalité si et seulement si $t = 0$: $\min f = 2$, atteint en 2. $f(2+t) = 82 \iff t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \iff (t^2 + 10)(t^2 - 4) = 0 \iff t = \pm 2$: $S = \{0, 4\}$ (symétriques par rapport à 2). De même $f(2+t) \leq 82 \iff t^2 \leq 4 \iff |x-2| \leq 2$: $S = [0, 4]$.
2. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ est symétrique par rapport à 2 et $h(4-x) = h(x)$: axe $x = 2$. Pour $t \neq \pm 1$: $h(2+t) = \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{2(t^2+1)}{(t^2-1)^2}$. Avec $u = t^2 \geq 0, u \neq 1$: $h = \frac{10}{9} \iff 18(u+1) = 10(u-1)^2 \iff 5u^2 - 19u - 4 = 0 \iff (u-4)(5u+1) = 0 \iff u = 4$, d'où $t = \pm 2$: $S = \{0, 4\}$.
3. a) $D_k = \mathbb{R}$ et, comme $(-a)|-a| = -a|a|$: $k(4-x) = (3-x)|3-x| + (1-x)|1-x| = -k(x)$, soit $k(4-x) + k(x) = 0$: $\Omega(2, 0)$ est un centre.
- b) $k(2+t) = (t+1)|t+1| + (t-1)|t-1|$. Si $0 \leq t \leq 1$: $k(2+t) = (t+1)^2 - (1-t)^2 = 4t$; si $t \geq 1$: $k(2+t) = (t+1)^2 + (t-1)^2 = 2t^2 + 2$. Donc $k \geq 0$ sur $[2, +\infty[$ et, par la symétrie de centre Ω , si $x \leq 2$: $k(x) = -k(4-x) \leq 0$.
- c) Si $x \leq 2$, $k(x) \leq 0$; si $2 \leq x \leq 3$, $k(x) = 4t \leq 4$; si $x \geq 3$: $2t^2 + 2 = 8 \iff t = \sqrt{3}$. $k(x) = 8 \iff x = 2 + \sqrt{3}$.
Puis $k(x) = -8 \iff k(4-x) = 8 \iff 4-x = 2 + \sqrt{3}$: $x = 2 - \sqrt{3}$ (point symétrique par rapport à Ω).



■ Corrigé de l'exercice 40

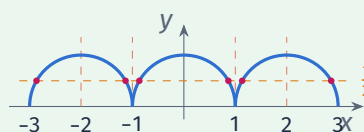
1. Si $x \in \mathbb{Z}$: $E(-x) = -x$ et $g(x) = 0$. Si $x \notin \mathbb{Z}$ et $n = E(x)$: $-n-1 < -x < -n$, donc $E(-x) = -n-1$ et $g(x) = -1$. $g(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$, $g(x) = -1$ sinon. $g(-x) = E(-x) + E(x) = g(x)$: g est **paire**. Si $k \in \mathbb{N}^*$: $x+k \in \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$, donc $g(x+k) = g(x)$. Réciproquement, si $T > 0$ est une période, $g(T) = g(0) = 0$, donc $T \in \mathbb{Z}$: les périodes de g sont les entiers $k \geq 1$.
2. a) On retranche un multiple de 2 : $f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(-\frac{13}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $f(2027) = f(-1) = 0$. Si $x \in [1, 3]$, $x-2 \in [-1, 1]$ et $f(x) = f(x-2) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.
- b) $f(1) = f(-1) = 0 = \sqrt{1-1^2}$: la formule vaut sur $[-1, 1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x-2n \in [-1, 1]$; alors $-x+2n = -y \in [-1, 1]$, donc $f(-x) = \sqrt{1-y^2} = f(x)$: f est **paire**. Pour $k \in \mathbb{Z}$: $f(2k-x) = f(-x) = f(x)$ ($2k$ est un multiple de la période) : chaque droite $x = k$ est un axe.

c) Sur $[-1, 1]$:

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \iff x^2 = \frac{3}{4} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; sur $[-3, 3]$, $k \in \{-1, 0, 1\}$:

$$S = \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} ; \pm \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; \pm \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$



3. **Lemme.** Si p est de période T et $|p| \leq K$ sur $[0, T]$: tout réel s'écrit $x = y + nT$, avec $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$ et $y \in [0, T[$, donc $|p(x)| = |p(y)| \leq K$.

Par l'absurde, si p est de période $T > 0$: sur $[0, T]$, $0 \leq f \leq 1$, donc $|p| \leq T$, et par le lemme $|p| \leq T$ sur $\mathbb{R}$. Or $p(2n) = 2nf(0) = 2n > T$ dès que $n > \frac{T}{2}$. Contradiction : p n'est pas périodique.

■ Corrigé de l'exercice 41

1. Hypothèse : pour tout $x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$. Soit $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. Alors $2b - y = f(2a - x)$, avec $2a - x \in D$: donc $2b - y \in J$ et $f^{-1}(2b - y) = 2a - x = 2a - f^{-1}(y)$. Ainsi $f^{-1}(2b - y) + f^{-1}(y) = 2a$ pour tout $y \in J$: $\Omega'(b, a)$ est un centre de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Avec $a = b = 0$: si f est impaire, f^{-1} l'est aussi.
2. Par l'absurde, si $x = a$ était un axe : pour tout $x \in D$, $f(2a - x) = f(x)$, donc $2a - x = x$ (injectivité), soit $x = a$; alors $D = \{a\}$: contradiction. $\Omega(2, 0)$ (une bijection n'est jamais paire, sauf sur $\{0\}$).

3. a) $x \in]0, 4[\iff 4 - x \in]0, 4[$ et $\varphi(4 - x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4 - x} = -\varphi(x)$: $\Omega(2, 0)$ est un centre de $\mathcal{C}_\varphi$.

b) Pour $x \in]0, 4[$, $\varphi(x) = \frac{2x-4}{x(4-x)}$, donc

$$\varphi(x) = y \iff 2x - 4 = yx(4 - x) \iff yx^2 + (2 - 4y)x - 4 = 0.$$

Soit $y > 0$: le discriminant réduit vaut

$$(1 - 2y)^2 + 4y = 4y^2 + 1 > 0 \text{ et le produit des racines}$$

$$-\frac{4}{y} < 0 ; \text{ seule la racine positive } x_y = \frac{2y-1+\sqrt{4y^2+1}}{y} \text{ peut}$$

$$\text{convenir, et } x_y < 4 \iff \sqrt{4y^2+1} < 2y+1 \iff 4y^2+1 <$$

$$(2y+1)^2 \iff y > 0 \checkmark. \text{ Donc } y \text{ a exactement un}$$

antécédent x_y .

c) Si $y = 0$: $2x - 4 = 0$, seul antécédent 2. Si $y < 0$: par

a), $\varphi(x) = y \iff \varphi(4 - x) = -y$, et $-y > 0$ a un seul

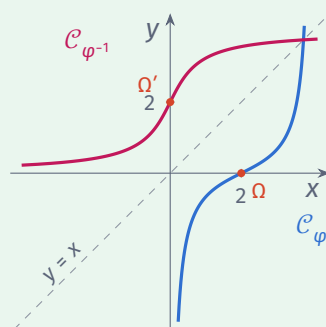
antécédent x_{-y} : y a l'unique antécédent $4 - x_{-y}$.

φ est une bijection de $]0, 4[$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $y < 0$: $\varphi^{-1}(y) = 4 - x_{-y} = 4 - \frac{-2y-1+\sqrt{4y^2+1}}{-y} = \frac{2y-1+\sqrt{4y^2+1}}{y}$, la même formule. Donc

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{2y-1+\sqrt{4y^2+1}}{y} \quad (y \neq 0), \quad \varphi^{-1}(0) = 2.$$

Vérification : $\varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(-y) = \frac{4y}{y} = 4 = 2 \times 2$ pour $y \neq 0$ (et $2\varphi^{-1}(0) = 4$) : $\Omega'(0, 2)$, symétrique de Ω par rapport à la droite $y = x$, est bien un centre de $\mathcal{C}_{\varphi^{-1}}$.



■ Corrigé de l'exercice 42

1. $Q(t) - Q(-t) = 2(c_3t^3 + c_1t)$. Si $c_3 = c_1 = 0$, Q est paire. Si Q est paire : $t = 1$ et $t = 2$ donnent $c_3 + c_1 = 0$ et $8c_3 + 2c_1 = 0$, d'où $6c_3 = 0$: $c_3 = c_1 = 0$. De même, $Q(t) + Q(-t) = 2(c_4t^4 + c_2t^2 + c_0)$: $t = 0$ donne $c_0 = 0$, puis $t = 1$ et $t = 2$ donnent $c_4 + c_2 = 0 = 16c_4 + 4c_2$, d'où $c_4 = c_2 = 0$.
2. Avec $x = a + t$, $2a - x = a - t$: la droite $x = a$ est un axe $\iff \forall t, P(a - t) = P(a + t) \iff t \mapsto P(a + t)$ est paire. Or

$$P(a + t) = t^4 + (4a + p)t^3 + (6a^2 + 3pa + q)t^2 + (4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r)t + P(a).$$

Par 1, elle est paire $\iff 4a + p = 0$ et $4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r = 0$. La première donne $a = -\frac{p}{4}$, et la seconde devient $-\frac{p^3}{16} + \frac{3p^3}{16} - \frac{pq}{2} + r = \frac{p^3 - 4pq + 8r}{8} = 0$. $\mathcal{C}_p$ a un axe $\iff p^3 - 4pq + 8r = 0$, l'axe étant alors $x = -\frac{p}{4}$.

De même $\Omega(a, b)$ est un centre $\iff t \mapsto P(a + t) - b$ est impaire, ce qui est impossible : son coefficient de t^4 vaut $1 \neq 0$. **Jamais de centre.**

3. $p^3 - 4pq + 8r = 64 + 32 - 96 = 0$ ✓ : axe $x = -1$. En développant $(t - 1)^4 + 4(t - 1)^3 - 2(t - 1)^2 - 12(t - 1)$:

$$P(-1 + t) = t^4 - 8t^2 + 7 = (t^2 - 1)(t^2 - 7).$$

Les racines correspondent à $t = \pm 1, t = \pm\sqrt{7}$:

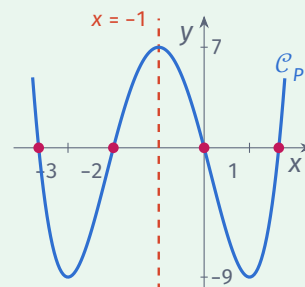
$$x \in \{-2, 0, -1 \pm \sqrt{7}\}. \text{ Et }$$

$$P(x) \leq 0 \iff 1 \leq t^2 \leq 7 \iff 1 \leq |x + 1| \leq \sqrt{7} :$$

$$P(x) \leq 0 \iff x \in [-1 - \sqrt{7}, -2] \cup [0, -1 + \sqrt{7}],$$

$P(x) > 0$ ailleurs (courbe en W, $P(-1) = 7$).

4. $p = 2, q = c, r = -4$: $8 - 8c - 32 = 0 \iff c = -3$; l'axe est $x = -\frac{1}{2}$ (contrôle : $P(-\frac{1}{2} + t) = t^4 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{33}{16}$, paire en t).



32

Corrigés : majorants, extremums

■ Corrigé de l'exercice 43

- $x^4 + 1 \geq 1$, donc $D_f = \mathbb{R}$. Si $|x| \leq 1$: $|x^3 + 2x| \leq |x|^3 + 2|x| \leq 3$ (inégalité triangulaire) et $x^4 + 1 \geq 1$, donc $|f(x)| \leq 3$. Si $|x| \geq 1$: $|x| \leq |x|^3$, donc $|x^3 + 2x| \leq 3|x|^3$, et $x^4 + 1 > x^4$: $|f(x)| < \frac{3|x|^3}{x^4} = \frac{3}{|x|} \leq 3$. Ainsi $|f(x)| \leq 3$: f est bornée.
- Sur $[0, 3]$: $g(x) = (x - 1)^2 - 1$ et $-1 \leq x - 1 \leq 2$, donc $0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$ et $-1 \leq g(x) \leq 3$. Sur $[-1, 0[$: $g(x) = -x^2 - 2x = 1 - (x + 1)^2$ et $0 \leq x + 1 < 1$, donc $0 < g(x) \leq 1$. Donc $-1 \leq g \leq 3$ sur $[-1, 3]$, avec $g(1) = -1$ et $g(3) = 3$: $\min g = -1$ en 1, $\max g = 3$ en 3.
- « k non majorée » : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x > 0, k(x) > M$; « k non minorée » : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x > 0, k(x) < m$.
Pour $M \in \mathbb{R}$ et $x = (|M| + 2)^2$: $k(x) = |M| + 2 - \frac{1}{(|M| + 2)^2} \geq |M| + 2 - \frac{1}{4} > M$. Pour $m \in \mathbb{R}$ et $x = \frac{1}{|m| + 2} \in]0, 1[$: $\sqrt{x} < 1$ et $\frac{1}{x} = |m| + 2$, donc $k(x) < 1 - |m| - 2 < m$. k n'est ni majorée ni minorée.
- Si $f \leq M$ et $g \leq M'$, alors $f + g \leq M + M'$. Avec $f = g : x \mapsto -x^2$ (majorées par 0) : $(fg)(x) = x^4$, et $x = |M| + 1 \geq 1$ donne $x^4 \geq x > M$: fg n'est pas majorée. Si $0 \leq f \leq M$ et $0 \leq g \leq M'$, on multiplie des inégalités entre réels positifs : $0 \leq fg \leq MM'$.

■ Corrigé de l'exercice 44

1. $f(x) = 2[(x-3)^2 - 9] + 7 = 2(x-3)^2 - 11$, donc $f(x) \geq -11 = f(3)$: $\min_{\mathbb{R}} f = -11$ en 3. Sur $[4, 6]$: $1 \leq x-3 \leq 3$, donc $1 \leq (x-3)^2 \leq 9$ et $-9 \leq f(x) \leq 7$, avec $f(4) = -9$, $f(6) = 7$: $\min = -9$ en 4, $\max = 7$ en 6.
2. $g(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq g\left(\frac{5}{2}\right)$: $\max_{\mathbb{R}} g = \frac{9}{4}$ en $\frac{5}{2}$. Sur $[0, 2]$ (le sommet n'y est pas) : $-\frac{5}{2} \leq x - \frac{5}{2} \leq -\frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$ et $-4 \leq g(x) \leq 2$, avec $g(0) = -4$, $g(2) = 2$: $\min = -4$ en 0, $\max = 2$ en 2.
3. $q(x) = (x+2)^2 + |x+2| - 4 = t^2 + t - 4$, avec $t = |x+2| \geq 0$. Or $t^2 + t \geq 0$ pour $t \geq 0$, avec égalité seulement si $t = 0$: $q(x) \geq -4$, avec égalité si et seulement si $x = -2$. $\min q = -4$ en -2 . La forme canonique montre seulement que $-\frac{17}{4}$ est un minorant : cette valeur demanderait $t = -\frac{1}{2}$, impossible car $t \geq 0$.
4. Si $x+2y = 5$: $x^2 + y^2 = (5-2y)^2 + y^2 = 5y^2 - 20y + 25 = 5(y-2)^2 + 5 \geq 5$, avec égalité si et seulement si $y = 2$ (et $x = 1$). **Minimum 5, pour $(x, y) = (1, 2)$.** **Interprétation :** $x^2 + y^2 = OM^2$ pour $M(x, y)$ sur la droite $x+2y = 5$; le point de cette droite le plus proche de O est $H(1, 2)$, et la distance de O à la droite est $\sqrt{5}$.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. a) Si $x \geq 1$: $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Si $x \leq 1$: $f(x) = x^2 + 4x - 4 = (x+2)^2 - 8$ (les deux donnent $f(1) = 1$).
b) *Minimum absolu.* Si $x \geq 1$, $f(x) \geq 0$; si $x \leq 1$, $f(x) \geq -8$; et $f(-2) = -8$: $\min_{\mathbb{R}} f = -8$ en -2 .
Minimum relatif en 2. Sur $]1, 3[$, $f(x) = (x-2)^2 \geq 0 = f(2)$; il n'est pas absolu ($f(-2) < 0$).
Maximum relatif en 1. Sur $]0, 1]$, $2 < x+2 \leq 3$, donc $f(x) \leq 9 - 8 = 1$; sur $[1, 2]$, $|x-2| \leq 1$, donc $f(x) \leq 1$. Ainsi $f \leq f(1) = 1$ sur $]0, 2[$.
Non majorée. Pour $M \in \mathbb{R}$, $x = |M| + 3$ donne $f(x) = (|M| + 1)^2 \geq |M| + 1 > M$.
c) Sur $[-3, 1]$: $-1 \leq x+2 \leq 3$, donc $f(x) \leq 9 - 8 = 1$; sur $[1, 3]$: $|x-2| \leq 1$, donc $f(x) \leq 1$; et $f(1) = f(3) = 1$, $f(-2) = -8$ avec $-2 \in [-3, 3]$. $\max_{[-3, 3]} f = 1$ en 1 et 3 ; $\min_{[-3, 3]} f = -8$ en -2 .
2. a) $E(x) \leq x$ et $x > 0$, donc $g(x) \leq 1$; et $g(x) = 1 \iff E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$. $\max g = 1$, atteint en tout entier $n \geq 1$.
b) Si $1 \leq x < 2$: $g(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. Si $x \geq 2$: $E(x) > x - 1 \geq \frac{x}{2}$ (car $x - 1 \geq \frac{x}{2} \iff x \geq 2$), donc $g(x) > \frac{1}{2}$.
c) Soit $m > \frac{1}{2}$. Si $m > 1$: $g(1) = 1 < m$. Si $\frac{1}{2} < m \leq 1$: $1 \leq \frac{1}{m} < 2$, et $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + 2\right)$ vérifie $\frac{1}{m} < x < 2$, donc $g(x) = \frac{1}{x} < m$. Aucun $m > \frac{1}{2}$ ne minore $g : \frac{1}{2}$ **est le plus grand minorant**. Un minimum $g(a)$ serait un minorant strictement supérieur à $\frac{1}{2}$: **g n'a pas de minimum**.

■ Corrigé de l'exercice 46

1. a) Pour tout x , $\sqrt{x^2 + 4} \geq 2$ et $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ (égalités pour $x = 0$ seulement), donc $s(x) \geq 3 = s(0)$: $\boxed{\min s = 3 \text{ en } 0}$. Et $s(|M|) > |M| \geq M$ pour tout réel M : s n'est pas majorée.

b) On multiplie par la quantité conjuguée $s(x) > 0$: $f(x) = \frac{(x^2 + 4) - (x^2 + 1)}{s(x)} = \frac{3}{s(x)}$. Comme $s(x) \geq 3$: $0 < f(x) \leq 1 = f(0)$, $\boxed{\max f = 1 \text{ en } 0}$.

c) Pour $x = \frac{3}{\varepsilon}$: $s(x) > 2\sqrt{x^2} = \frac{6}{\varepsilon}$, donc $f(x) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Aucun $\varepsilon > 0$ ne minore f : 0 est le plus grand minorant, non atteint ($f > 0$). $\boxed{f \text{ n'a pas de minimum}}$.

2. a) $\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}x + \frac{4}{27} = x^3 - x^2 + \frac{4}{27}$ ✓.

b) Sur $[0, 1]$: $h(x) \geq 0$ et $\frac{4}{27} - h(x)^2 = \frac{4}{27} - x^2 + x^3 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) \geq 0$. Donc $h(x)^2 \leq \frac{4}{27}$, puis

$h(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, avec égalité pour $x = \frac{2}{3}$. $\boxed{\max h = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ en } \frac{2}{3}}$; $h \geq 0$ et $h(0) = h(1) = 0$:

$\boxed{\min h = 0 \text{ en } 0 \text{ et } 1}$.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 6x + x^2 + 2x + 3 = x^4 - 4x^2 + 3$ ✓. Comme $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$: $u(x) + 3 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. $\boxed{\min u = -3 \text{ en } 1}$. Puis $w(x) = u(-x) \geq -3$, avec égalité si et seulement si $-x = 1$: $\boxed{\min w = -3 \text{ en } -1}$.

2. Comme $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$ (n termes) : $x^n - 1 - n(x - 1) = (x - 1)[(x^{n-1} + \dots + x + 1) - n]$, et le crochet vaut $(x^{n-1} - 1) + \dots + (x - 1) + (1 - 1)$.

Pour $x \geq 0$ et $k \geq 1$, $x^k - 1$ a le signe de $x - 1$ ($x \geq 1 \Rightarrow x^k \geq 1$; $0 \leq x < 1 \Rightarrow x^k < 1$) : chaque produit $(x - 1)(x^k - 1)$ est positif, la somme aussi, d'où $\boxed{x^n - nx \geq 1 - n}$. Si $x \neq 1$, le terme $k = 1$ vaut $(x - 1)^2 > 0$: l'égalité n'a lieu qu'en 1. $n = 5$: $\boxed{\min_{[0, +\infty[} (x^5 - 5x) = -4 \text{ en } 1}$.

3. $A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$ (base $2x$, hauteur $4 - x^2$). Avec $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$: $c^2 = \frac{4}{3}$, $c^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$, et $(x - c)^2(x + 2c) = x^3 - 3c^2x + 2c^3 = x^3 - 4x + \frac{16\sqrt{3}}{9}$. Donc

$$\frac{32\sqrt{3}}{9} - A(x) = 2x^3 - 8x + \frac{32\sqrt{3}}{9} = 2(x - c)^2(x + 2c) \geq 0 \quad (0 < x < 2),$$

nul seulement pour $x = c$: $\boxed{A_{\max} = \frac{32\sqrt{3}}{9}, \text{ pour } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ (rectangle de côtés $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{8}{3}$).

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $f(x) = 3x^2 - 18x + 41 = 3(x - 3)^2 + 14$: $\boxed{\min f = 14 \text{ en } 3}$, et $3 = \frac{1+2+6}{3}$ est la moyenne.

2. $(x - a_k)^2 = (x - m)^2 + 2(x - m)(m - a_k) + (m - a_k)^2$. On somme de $k = 1$ à n , et $\sum_{k=1}^n (m - a_k) = nm - \sum_{k=1}^n a_k = 0$:

$$F(x) = n(x - m)^2 + 2(x - m) \times 0 + \sum_{k=1}^n (a_k - m)^2.$$

Ainsi $F(x) \geq \sum(a_k - m)^2$, avec égalité si et seulement si $x = m$: $\min F = \sum(a_k - m)^2$, atteint en la moyenne m .

3. Pour $M(x, 0)$: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x-1)^2 + (x-3)^2 + (x-5)^2 + (4+1+16)$. D'après 2 (moyenne $m = 3$) : $(x-1)^2 + (x-3)^2 + (x-5)^2 = 3(x-3)^2 + 8$, donc la somme vaut $3(x-3)^2 + 29$. Minimum 29, pour $M(3, 0)$.

4. Sur $[0, a]$: $-3 \leq x-3 \leq a-3$. Minimum. Si $a \geq 3$: $\min = 14$ en 3. Si $a < 3$: $x-3 \leq a-3 < 0$, donc $(x-3)^2 \geq (a-3)^2$: $\min = 3(a-3)^2 + 14$ en a .

Maximum. Si $a \leq 6$: $|x-3| \leq 3$, donc $f(x) \leq 41 = f(0)$: $\max = 41$ en 0 (et en 6 si $a = 6$). Si $a > 6$: $|x-3| \leq a-3$, donc $f(x) \leq f(a)$: $\max = 3(a-3)^2 + 14$ en a .

33

Corrigés : sens de variation

■ Corrigé de l'exercice 49

1. Pour $x \neq y$: $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2) + 6(x - y) = (x - y)(x + y + 6)$, donc $T(x, y) = x + y + 6$. Sur $]-\infty, -3]$: $x \leq -3$, $y \leq -3$, non tous deux égaux à -3 , donc $x + y < -6$ et $T < 0$: f est strictement décroissante. Sur $[-3, +\infty[$: $x + y > -6$, $T > 0$: f est strictement croissante. D'après le tableau, $f(x) \geq f(-3)$ pour tout x : le minimum de f est $f(-3) = -5$.

2. Pour $x \neq y$ dans $[1, +\infty[$, $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} > 0$ et la quantité conjuguée donne $\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = \frac{x-y}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}}$, d'où $T_g(x, y) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} > 0$: g est **strictement croissante** sur $[1, +\infty[$, avec $g(1) = 2$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$		-5	

x	1	$+\infty$
$g(x)$	2	

3. On a $\sqrt{2} < \sqrt{3} < 3$, donc $-3 < -\sqrt{3} < -\sqrt{2}$; or f croît strictement sur $[-3, +\infty[$, d'où $f(-\sqrt{3}) < f(-\sqrt{2})$. De même $\pi^2 < 3,15^2 = 9,9225 < 10$, donc $1 \leq \pi < \sqrt{10}$, et g est strictement croissante : $g(\pi) < g(\sqrt{10})$.

$f(-6-x) = (x+6)^2 - 6(x+6) + 4 = x^2 + 6x + 4 = f(x)$: la droite $x = -3$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Donc $f(-7) = f(1)$, et comme $0 < 1$ dans $[-3, +\infty[$: $f(0) < f(-7)$ ($4 < 11$ ✓). On ne pouvait pas comparer directement -7 et 0 : ils ne sont pas dans un même intervalle où f est monotone ($-7 < -3 < 0$).

■ Corrigé de l'exercice 50

1. Pour $x \neq y$ dans I : $T_f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}} > 0$ et $T_g(x, y) = x + y + 4 > 0$: f et g sont **strictement croissantes**. Donc $s = f + g$ est **strictement croissante** ; si $x < y$, $2 - 3g(x) > 2 - 3g(y)$: k est **strictement décroissante** ; et $1 \leq 1 + f(x) < 1 + f(y)$ donne $\frac{1}{1+f(x)} > \frac{1}{1+f(y)}$: r est **strictement décroissante**. Enfin $s(-2) = -1$, $s(-1) = 1$, $s(2) = 17$.

x	-2	-1	2	$+\infty$
$s(x)$	-1	1	17	

2. $p(-2) = 0 \times (-1) = 0$, $p(-1) = 1 \times 0 = 0$ et $p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{9}{4} - 6 + 3\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Ainsi $-2 < -\frac{3}{2} < -1$ avec $p(-2) > p\left(-\frac{3}{2}\right) < p(-1)$: p n'est pas monotone sur I , bien que f et g soient croissantes. Sur $[-1, +\infty[$, $f \geq 1 > 0$ et $g \geq 0$; pour $-1 \leq x < y$: $p(y) - p(x) = f(y)(g(y) - g(x)) + g(x)(f(y) - f(x)) > 0$: p est **strictement croissante** sur $[-1, +\infty[$. La règle exige des fonctions **positives**, or $g < 0$ sur $]-2, -1[$.

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $v(t) = (t-3)^2 - 9$: v est **strictement décroissante** sur $]-\infty, 3]$, **strictement croissante** sur $[3, +\infty[$, de minimum $v(3) = -9$; et $v(t) = t(t-6)$ est < 0 sur $]0, 6[$, > 0 sur $]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$.
2. i est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Règle des composées : sur $]-\infty, 0[$, $i(x) < 0 \leq 3$ et v décroît : décroissante $\cdot$ décroissante, g est **strictement croissante** ; sur $]0, \frac{1}{3}]$, $i(x) \geq 3$ et v croît : g est **strictement décroissante** ; sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$, $0 < i(x) \leq 3$: g est **strictement croissante**.
Minimum sur $]0, +\infty[$: $g\left(\frac{1}{3}\right) = -9$. $g(x) = -8 \iff \left(\frac{1}{x} - 2\right)\left(\frac{1}{x} - 4\right) = 0 \iff x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ (pour $x < 0$, $g(x) > 0$).
3. $x \in D_h \iff v(x) \neq 0$: $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$, $h(x) = \frac{1}{x^2 - 6x}$. Si $x \in D_h$, alors $6 - x \in D_h$ et $v(6 - x) = (6 - x)(-x) = v(x)$: $h(6 - x) = h(x)$ (axe $x = 3$). Sur $]-\infty, 0[$: v décroît et $v(x) > 0$, où i décroît : h **croît**. Sur $]0, 3]$: v décroît, $v(x) \in [-9, 0[$, où i décroît : h **croît**. Sur $]3, 6[$: v croît, $v(x) \in [-9, 0[$: h **décroît**. Sur $]6, +\infty[$: v croît, $v(x) > 0$: h **décroît**.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g(x)$				

x	$-\infty$	0	3	6	$+\infty$
$h(x)$					

Sur $]0, 6[$: $-9 \leq v(x) < 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $]-\infty, 0[$, donc $\frac{1}{v(x)} \leq \frac{1}{-9}$: $h(x) \leq -\frac{1}{9}$ (maximum de h sur $]0, 6[$, atteint en 3). $h(x) = -\frac{1}{8} \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff x \in \{2, 4\}$. Enfin $g(1) = -5 \neq -\frac{1}{5} = h(1)$: $v \circ i \neq i \circ v$, l'ordre de composition compte.

■ Corrigé de l'exercice 52

1. a) $1 - \frac{3}{t+2} = \frac{t+2-3}{t+2} = \frac{t-1}{t+2} = h(t)$, et $T_h(x, y) = \frac{3}{(x+2)(y+2)} > 0$ lorsque x, y sont dans le même intervalle : h est **strictement croissante** sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$. Si $t > -2$, $\frac{3}{t+2} > 0$ et $h(t) < 1$; si $t < -2$, $h(t) > 1$.
- b) Le premier membre est $h(x^2)$, avec $x^2 > -2$; le second est $h(3x)$ ($x \neq -\frac{2}{3}$). Si $3x > -2$: x^2 et $3x$ sont dans $]-2, +\infty[$, où h est injective : $x^2 = 3x$, soit $x \in \{0, 3\}$, qui conviennent. Si $3x < -2$: $h(3x) > 1 > h(x^2)$: pas de solution. $S = \{0, 3\}$.
- Inéquation ($x \neq -1$) : c'est $h(x^2) \leq h(2x)$. Si $x > -1$: $2x > -2$, et la stricte croissance donne $x^2 \leq 2x \iff 0 \leq x \leq 2$. Si $x < -1$: $h(2x) > 1 > h(x^2)$: toujours vrai. $S =]-\infty, -1[\cup [0, 2]$: on ne compare les antécédents que dans un même intervalle de monotonie.
2. $t \mapsto 9 - t$ décroît et la racine croît, donc $t \mapsto \sqrt{9 - t}$ décroît ; $t \mapsto -t$ décroît strictement : leur somme d est **strictement décroissante** sur $]-\infty, 9]$. Les deux équations ont un sens pour $x^2 \leq 9$ et $2x \leq 9$, soit $x \in [-3, 3]$, et s'écrivent $d(x^2) = d(2x)$ et $d(x^2) > d(2x)$. Donc $d(x^2) = d(2x) \iff x^2 = 2x$: $S = \{0, 2\}$; et, d étant **décroissante**, $d(x^2) > d(2x) \iff x^2 < 2x$: $S =]0, 2[$.

■ Corrigé de l'exercice 53

$$1. f(x) - f(y) = (x - y) + \frac{(y^2+1)-(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)} = (x - y) \left[1 - \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)} \right], \text{ d'où la formule.}$$

$$2. t^2 - |t| + \frac{1}{4} = \left(|t| - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0. \text{ Donc } x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \geq |x| + |y| \geq |x + y|, \text{ puis}$$

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq x^2 + y^2 + 1 > x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \geq |x + y|.$$

Ainsi $\left| \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)} \right| < 1$ et $T(x, y) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (La somme d'une fonction croissante et d'une fonction non monotone peut être croissante.)

$$3. f(0) = 1, \text{ donc } f(x) = 1 \iff x = 0 \text{ et } f(x) > 1 \iff x > 0 : \\ S = \{0\} \text{ et } S =]0, +\infty[. f(2x - 1) < f(x^2) \iff 2x - 1 < x^2 \iff \\ (x - 1)^2 > 0 : S = \mathbb{R} \setminus \{1\}. \text{ Comme } 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1 : x < f(x) \leq x + 1, \\ \text{avec } f(x) = x + 1 \iff x = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		1	

$$4. g(0) = 2, g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{8}{5} = \frac{21}{10}, g(1) = 2 : 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ avec } g(0) < g\left(\frac{1}{2}\right) > g(1) : g \text{ n'est pas monotone. Son} \\ \text{taux vaut } 1 - \frac{2(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}. \text{ Sur }]-\infty, 0] : x + y < 0, \text{ donc le taux est } > 0. \text{ Sur } [1, +\infty[: x^2 + 1 \geq 2x > 0 \text{ et} \\ y^2 + 1 \geq 2y > 0 \text{ (car } (x - 1)^2 \geq 0), \text{ donc } (x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq 4xy, \text{ avec égalité seulement si } x = y = 1 ; \\ \text{et } xy \geq x, xy \geq y \text{ donnent } 4xy \geq 2(x + y). \text{ Ainsi } (x^2 + 1)(y^2 + 1) > 2(x + y) \text{ et le taux est } > 0 : g \text{ est} \\ \text{strictement croissante sur }]-\infty, 0] \text{ et sur } [1, +\infty[.$$

$$\text{Enfin } g(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x-1)^2}{x^2 + 1} : g(x) = 2 \iff x \in \{0, 1\} \text{ et } g(x) \geq 2 \iff x \geq 0.$$

■ Corrigé de l'exercice 54

$$1. T(x, y) = x + y - 2m. \text{ Si } m \leq 1 : \text{ pour } x \neq y \text{ dans } [1, 3], x + y > 2 \geq 2m, T > 0 : \text{croissante. Si } m > 1 : \\ \text{avec } y_0 = \min(m, 3) \in]1, 3], T(1, y_0) = 1 + y_0 - 2m < 0, \text{ donc } f_m(1) > f_m(y_0) : \text{pas croissante. D'où} \\ \text{croissante} \iff m \leq 1. \text{ De même, si } m \geq 3, x + y < 6 \leq 2m \text{ et } T < 0 ; \text{ si } m < 3, \text{ avec } x_0 = \max(m, 1), \\ T(x_0, 3) = x_0 + 3 - 2m > 0 : \text{décroissante} \iff m \geq 3. \text{ Pour } 1 < m < 3, f_m(x) = (x - m)^2 + 1 - m^2 \\ \text{décroît sur } [1, m] \text{ et croît sur } [m, 3] :$$

x	1	m	3
$f_m(x)$	$2 - 2m$	$1 - m^2$	$10 - 6m$

$$2. a) g_m(x) = (m + 2)x - 1 \text{ si } x \geq \frac{1}{2}, \quad g_m(x) = (m - 2)x + 1 \text{ si } x \leq \frac{1}{2}.$$

b) Si $m \geq 2$: les pentes $m - 2$ et $m + 2$ sont positives : g_m croît sur chaque demi-droite, et pour $x \leq \frac{1}{2} \leq y, g_m(x) \leq g_m\left(\frac{1}{2}\right) \leq g_m(y)$: croissante sur $\mathbb{R}$. Si $m < 2$: $g_m(0) = 1 > \frac{m}{2} = g_m\left(\frac{1}{2}\right)$: pas croissante. De même, si $m \leq -2, g_m$ est décroissante ; si $m > -2, g_m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{2} < m + 1 = g_m(1)$: pas décroissante.

$$c) \text{ Pour } -2 < m < 2 : g_m \text{ décroît sur }]-\infty, \frac{1}{2}] \text{ et croît sur } \left[\frac{1}{2}, +\infty[: \min g_m = g_m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{2}.$$

d) Si $|m| > 2, g_m$ est strictement monotone, donc injective. Si $m = \pm 2, g_m$ est constante sur une demi-droite ; si $-2 < m < 2, x_0 = \frac{2}{m+2} > \frac{1}{2}$ vérifie $g_m(x_0) = 1 = g_m(0)$: non injective.

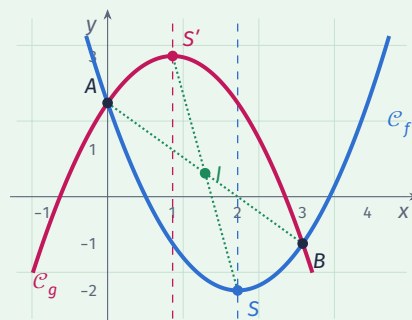
$$g_m \text{ injective} \iff |m| > 2.$$

3. Si $m \geq 0$: E et $x \mapsto mx$ sont croissantes, k_m aussi ; si $m < 0$: $k_m(0) = 0 > \frac{m}{2} = k_m(\frac{1}{2})$. Donc **croissante** $\iff m \geq 0$. **Jamais décroissante** : avec $t = \frac{1}{1+|m|} \in]0, 1]$, $1-t \in [0, 1[$, donc $k_m(1-t) = m(1-t)$ et $k_m(1) - k_m(1-t) = 1 + mt \geq 1 - \frac{|m|}{1+|m|} = \frac{1}{1+|m|} > 0$: $1-t < 1$ et $k_m(1-t) < k_m(1)$, pour **tout** m (le saut de E en 1 l'emporte).

34 Corrigés : fonctions usuelles

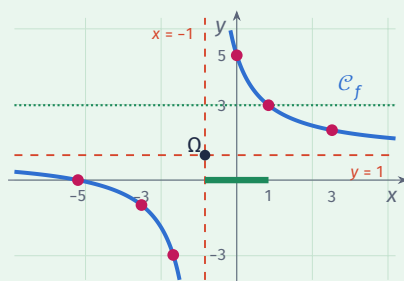
■ Corrigé de l'exercice 55

- $f(x) = (x-2)^2 - 2$: sommet $S(2, -2)$, axe $x = 2$; $a = 1 > 0$: f décroît sur $]-\infty, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$. $g(x) = -[(x-1)^2 - 1] + 2 = -(x-1)^2 + 3$: sommet $S'(1, 3)$, axe $x = 1$; $a = -1 < 0$: g croît sur $]-\infty, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$.
 $f(x) = 0 \iff (x-2)^2 = 2 \iff x = 2 \pm \sqrt{2}$; $g(x) = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{3}$. Courbes ci-contre.
- $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x = 2x(x-3)$: points communs $A(0, 2)$ et $B(3, -1)$. Ce trinôme est négatif entre ses racines : $f(x) \leq g(x) \iff x \in [0, 3]$: sur $[0, 3]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$; ailleurs, au-dessus.
- $g(3-x) = -(3-x)^2 + 2(3-x) + 2 = -x^2 + 4x - 1 = 1 - f(x)$ ✓. Le symétrique de $M(x, f(x))$ par rapport à I est $M'(3-x, 1-f(x)) = (3-x, g(3-x)) \in \mathcal{C}_g$, et tout point $(x', g(x'))$ de $\mathcal{C}_g$ est le symétrique du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $3-x'$: $\mathcal{C}_g$ est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à I . Le milieu de S et S' est $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = I$, de même que celui de A et B (la symétrie échange A et B).



■ Corrigé de l'exercice 56

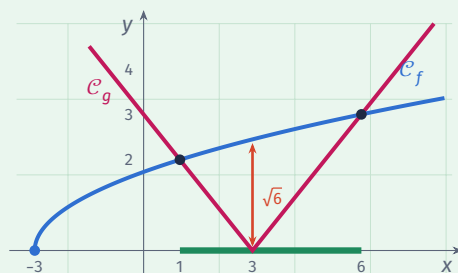
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $1 + \frac{4}{x+1} = \frac{x+5}{x+1}$. Puis $f(x) - f(y) = \frac{4(y-x)}{(x+1)(y+1)}$, donc $T(x, y) = \frac{-4}{(x+1)(y+1)} < 0$ si x, y sont dans le même intervalle ($x+1$ et $y+1$ de même signe) : f est **strictement décroissante sur** $]-\infty, -1[$ et **sur** $]-1, +\infty[$ (pas sur D_f : $f(-2) = -3 < 5 = f(0)$).
- Si $x \neq -1$, alors $-2-x \neq -1$ et $f(-2-x) + f(x) = 1 - \frac{4}{x+1} + 1 + \frac{4}{x+1} = 2$: $\Omega(-1, 1)$ est **centre de symétrie**. Le point $(X, \frac{4}{X})$ a pour image par la **translation de vecteur** $\vec{u}(-1, 1)$ le point $(X-1, \frac{4}{X} + 1) = (x, f(x))$ avec $x = X-1$.
- Pour x entier, $x \neq -1$, le réel $f(x)$ est entier si et seulement si $x+1$ divise 4, c'est-à-dire $x+1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Six points, deux à deux symétriques par rapport à Ω : $(-5, 0), (-3, -1), (-2, -3), (0, 5), (1, 3), (3, 2)$ (en rouge).



$f(x) \geq 3 \iff \frac{4}{x+1} \geq 2$: impossible si $x < -1$ (membre de gauche négatif) ; si $x > -1$, cela équivaut à $4 \geq 2(x+1)$, soit $x \leq 1$: $S =]-1, 1]$ (segment vert) : la branche de droite est au-dessus de la droite $y = 3$ jusqu'au point $(1, 3)$.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. $D_f = [-3, +\infty[$. Le point $(X, \sqrt{X})$ a pour image par la translation de vecteur $(-3, 0)$ le point $(X - 3, \sqrt{X}) = (x, \sqrt{x+3})$: $\mathcal{C}_f$ est la courbe de la racine **décalée de 3 vers la gauche**. Et $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff (x \geq -3 \text{ et } y = \sqrt{x+3}) \iff (y \geq 0 \text{ et } y^2 = x+3)$: une **demi-parabole** de sommet $(-3, 0)$. $\mathcal{C}_g$ est un « V » de sommet $(3, 0)$.

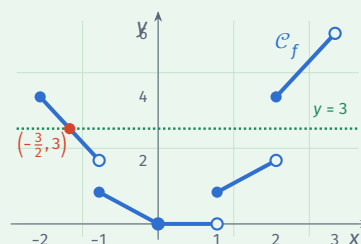


2. Pour $x \geq -3$, les deux membres sont positifs : $f(x) = g(x) \iff x+3 = (x-3)^2 \iff (x-1)(x-6) = 0$: $S = \{1, 6\}$, points $(1, 2)$ et $(6, 3)$; et (le carré conserve l'ordre sur les positifs) $f(x) > g(x) \iff (x-1)(x-6) < 0 \iff x \in]1, 6[$.
3. Sur $[-3, 3]$, $h(x) = \sqrt{x+3} + x - 3$ est somme de deux fonctions strictement croissantes : **strictement croissante**. Sur $[3, +\infty[$, $h(x) = \sqrt{x+3} - x + 3$ a pour taux $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{y+3}} - 1 < 0$ (car $\sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} \geq 2\sqrt{6} > 1$) : **strictement décroissante**. Donc $\max h = h(3) = \sqrt{6}$: l'écart vertical entre les courbes est le plus grand en $x = 3$, entre la pointe du « V » et le point $(3, \sqrt{6})$ de $\mathcal{C}_f$ (flèche).

■ Corrigé de l'exercice 58

1. a) $E(\sqrt{x}) = 2 \iff 2 \leq \sqrt{x} < 3 \iff x \in [4, 9[$ (racine croissante). $E(\frac{1}{x}) = 3 \iff 3 \leq \frac{1}{x} < 4$, ce qui impose $x > 0$, puis (inverse décroissant sur $]0, +\infty[$) $x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.
- b) Si $x \in \mathbb{Z}$: $E(x)E(-x) = -x^2 = -6$ est impossible (6 n'est pas un carré). Si $x \notin \mathbb{Z}$, avec $N = E(x)$: $N < x < N+1$, donc $-N-1 < -x < -N$ et $E(-x) = -N-1$. L'équation devient $N(N+1) = 6 \iff (N-2)(N+3) = 0$: $E(x) = 2$ ou $E(x) = -3$, x non entier : $S =]-3, -2[\cup]2, 3[$.

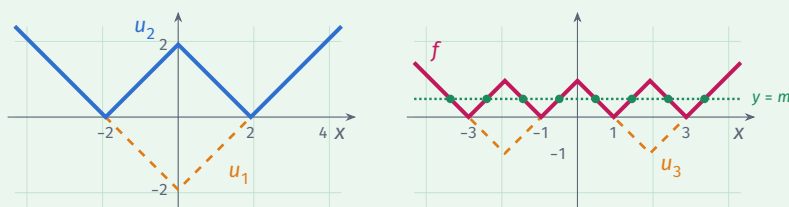
2. a) Sur $[k, k+1[$, $f(x) = kx$: $-2x, -x, 0, x, 2x$ sur les cinq intervalles. Chaque segment va de (k, k^2) (inclus, disque plein) à $(k+1, k(k+1))$ (exclu, cercle vide) : figure.
- b) Si $x \geq 0$: $E(x) > x-1 \geq -1$, donc $E(x) \geq 0$ et $f(x) \geq 0$. Si $x < 0$: $E(x) \leq x < 0$, produit de deux négatifs. Donc $f \geq 0$.



- c) Soit x solution et $n = E(x)$: $nx = 3$, donc $n \neq 0$, $x = \frac{3}{n}$ et $n \leq \frac{3}{n} < n+1$. Si $n \geq 1$: $n^2 \leq 3 < n^2 + n$ impose $n = 1$, puis $3 < 2$: impossible. Si $n \leq -1$ (l'ordre change en multipliant par n) : $n^2 \geq 3$ et $n(n+1) < 3$, donc $n \leq -2$, et $n = -2$ convient ($2 < 3$) alors que $n(n+1) \geq 6$ pour $n \leq -3$. Seule possibilité : $x = -\frac{3}{2}$, et $-\frac{3}{2} \times (-2) = 3$ ✓ : $S = \{-\frac{3}{2}\}$.

■ Corrigé de l'exercice 59

1. $\mathcal{C}_{u_1}$: le « V » de $y = |x|$ translaté de vecteur $(0, -2)$. $\mathcal{C}_{u_2}$: on garde la partie de $\mathcal{C}_{u_1}$ au-dessus de l'axe des abscisses et l'on remplace la partie au-dessous ($|x| < 2$) par sa symétrique par rapport à cet axe. $\mathcal{C}_{u_3}$: translation de vecteur $(0, -1)$. $\mathcal{C}_f$: même opération qu'à la deuxième étape. On obtient une ligne brisée en « double W » :



2. $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique et $|-x| = |x|$: f est **paire**. Pour $x \geq 0$, $f(x) = ||x-2|-1|$; sur $[0, 2]$, $|x-2| = 2-x$ et $f(x) = |1-x|$; sur $[2, +\infty[$, $f(x) = |x-3|$. D'où

$$f(x) = 1-x \text{ sur } [0, 1], \quad x-1 \text{ sur } [1, 2], \quad 3-x \text{ sur } [2, 3], \quad x-3 \text{ sur } [3, +\infty[.$$

f décroît sur $[0, 1]$ et sur $[2, 3]$, croît sur $[1, 2]$ et sur $[3, +\infty[$, et par parité décroît sur $]-\infty, -3]$ et $[-2, -1]$, croît sur $[-3, -2]$ et $[-1, 0]$: minimum 0 en $\pm 1, \pm 3$; maximums relatifs 1 en 0 et ± 2 .

3. Si $m < 0$: aucune solution. Si $m \geq 0$: $f(x) = m \iff ||x-2| \in \{1+m, 1-m\}$, et pour $c \geq 0$, $||x-2| = c \iff |x| = 2+c$ ou $|x| = 2-c$ (si $c \leq 2$).

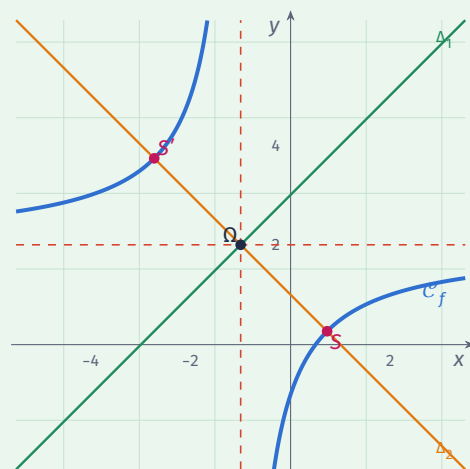
• $m = 0$: $|x| \in \{1, 3\}$, **4 solutions**. • $0 < m < 1$: $|x| \in \{1-m, 1+m, 3-m, 3+m\}$, quatre valeurs distinctes et positives : **8 solutions** (figure). • $m = 1$: $|x| \in \{0, 2, 4\}$, soit $x \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$: **5 solutions**. • $m > 1$: $1-m < 0$ et $2-(1+m) < 0$: seul $|x| = 3+m$ convient, **2 solutions**.

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq ||x-2| \leq \frac{3}{2} \iff |x| \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right] : S = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right].$$

■ Corrigé de l'exercice 60

1. $f(x) = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: centre $\Omega(-1, 2)$, et le point $(X, -\frac{3}{X})$ a pour image par la **translation de vecteur** $(-1, 2)$ le point $(X-1, 2-\frac{3}{X}) = (x, f(x))$. Le taux $\frac{3}{(x+1)(y+1)}$ est > 0 sur chaque intervalle : f est **strictement croissante** sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

2. Si $M \in \mathcal{C}_f$, alors $x \neq -1$ et $y-2 = -\frac{3}{x+1}$, d'où $(x+1)(y-2) = -3$. Réciproquement, si $(x+1)(y-2) = -3$, alors $x \neq -1$ et $y = 2 - \frac{3}{x+1} = f(x)$. Les distances de M aux droites $x = -1$ et $y = 2$ sont $|x+1|$ et $|y-2|$: leur produit vaut $\boxed{3}$, pour tout point de $\mathcal{C}_f$.



3. $-1+3=2$ et $-(-1)+1=2$: $\Omega \in \Delta_1 \cap \Delta_2$. Si $(x+1)(y-2) = -3$: pour $M_1(y-3, x+3)$, $(y-3+1)(x+3-2) = (y-2)(x+1) = -3$; pour $M_2(1-y, 1-x)$, $(1-y+1)(1-x-2) = (2-y)(-1-x) = -3$. Donc $M_1, M_2 \in \mathcal{C}_f$: Δ_1 et Δ_2 sont des axes de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

4. Sur Δ_1 , $y-2 = x+1$, et $(x+1)^2 = -3$ est impossible : $\mathcal{C}_f \cap \Delta_1 = \emptyset$. Sur Δ_2 , $y-2 = -(x+1)$, et $(x+1)^2 = 3$ donne $x = -1 \pm \sqrt{3}$: $S(-1+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$, $S'(-1-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, symétriques par rapport à Ω , et $SS' = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \boxed{2\sqrt{6}}$. Figure ci-dessus : l'hyperbole est symétrique par rapport à Ω et à ses deux axes Δ_1, Δ_2 , qui sont les bissectrices des droites $x = -1$ et $y = 2$.

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. $P(1) = 1 + b + c$, $P(-1) = 1 - b + c$, $P(0) = c$, d'où $P(1) + P(-1) - 2P(0) = 2$. Par l'absurde, si $|P(-1)|$, $|P(0)|$, $|P(1)|$ étaient tous $< \frac{1}{2}$, l'inégalité triangulaire donnerait $2 \leq |P(1)| + |P(-1)| + 2|P(0)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$: contradiction. Aucun trinôme unitaire ne reste donc strictement entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sur $[-1, 1]$.
2. Pour $x \in [-1, 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $-\frac{1}{2} \leq P_0(x) \leq \frac{1}{2}$: P_0 vérifie (H). **Unicité.** Si P vérifie (H) : $P(1) \leq \frac{1}{2}$, $P(-1) \leq \frac{1}{2}$, $-P(0) \leq \frac{1}{2}$, donc $P(1) + P(-1) - 2P(0) \leq 2$; comme cette somme vaut 2, ce sont des égalités : $P(\pm 1) = \frac{1}{2}$, $P(0) = -\frac{1}{2}$, d'où $c = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{P(1)-P(-1)}{2} = 0$: $P = P_0$, le trinôme unitaire le plus « plat » sur $[-1, 1]$.
3. a) $Q(\pm 1) = a \pm b + c$ et $Q(0) = c$: $c = Q(0)$, $b = \frac{Q(1)-Q(-1)}{2}$, $a = \frac{Q(1)+Q(-1)}{2} - Q(0)$, d'où $|b| \leq \frac{1+1}{2} = 1$, $|c| \leq 1$, $|a| \leq 1 + 1 = 2$.
 b) $-Q(x)$ a pour coefficients $(-a, -b, -c)$, $Q(-x)$ a pour coefficients $(a, -b, c)$; tous deux vérifient l'hypothèse et ont la même somme $|a| + |b| + |c|$. On peut donc supposer $a \geq 0$ (quitte à remplacer Q par $-Q$), puis $b \geq 0$ (quitte à remplacer $Q(x)$ par $Q(-x)$). Si $c \geq 0$: $|a| + |b| + |c| = Q(1) \leq 1$. Si $c < 0$: $|a| + |b| + |c| = a + b - c = Q(1) - 2Q(0) \leq 1 + 2 = 3$. Donc $|a| + |b| + |c| \leq 3$, avec égalité pour $Q(x) = 2x^2 - 1 = 2P_0(x)$ ($-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$ sur $[-1, 1]$, et $2 + 0 + 1 = 3$).

■ Corrigé de l'exercice 62

1. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est : $(E) \iff \forall x, f(x) \in \{1, x\}$. En $x = 1$, $\{1, x\} = \{1\}$, donc $f(1) = 1 : 1 \in J$. Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ **est contenue dans la réunion des droites** $y = 1$ et $y = x$. La fonction égale à x partout sauf $f(2) = 1$ convient et n'est pas monotone : $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} > f(2) = 1 < f(3) = 3$.
2. a) Soit $x \in J$ et y strictement entre x et 1. Si $x < y < 1$: $f(y) \geq f(x) = 1$; si l'on avait $f(y) = y$, alors $y \geq 1$: exclu ; donc $f(y) = 1$. Si $1 < y < x$: $f(y) \leq f(x) = 1$, et $f(y) = y$ donnerait $y \leq 1$: exclu ; donc $y \in J$.
 b) $(\Rightarrow)$ Soit $x < x'$ dans J et $y \in [x, x']$: y est entre x et 1, ou entre 1 et x' (selon la position de 1), donc $y \in J$ d'après a) : J est un **intervalle contenant** 1. $(\Leftarrow)$ Si J est un intervalle contenant 1, tout réel hors de J est soit « à gauche » de J (donc < 1 , et $f(x) = x < 1$), soit « à droite » (donc > 1 , et $f(x) = x > 1$). Soit $u < w$: si u, w sont du même côté de J , $f(u) = u < w = f(w)$; si u est à gauche et $w \in J$ ou à droite, $f(u) < 1 \leq f(w)$; si $u \in J$, alors $w \in J$ ou w est à droite, et $f(u) = 1 \leq f(w)$. Donc f **est croissante**. Exemples : $J = \{1\}$ ($f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$), $J = \mathbb{R}$ ($f = 1$), $J = [0, 2]$.
 c) Une solution strictement croissante est injective, donc J (où f vaut 1) a un seul élément : $J = \{1\}$ et $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, qui convient : $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
3. Soit f décroissante et, par l'absurde, $y \neq 1$ tel que $f(y) = y$. Si $y > 1$, posons $x = \frac{1+y}{2} \in]1, y[$: $f(x) \geq f(y) = y$, alors que $f(x) \in \{1, x\}$ et $1 < x < y$: contradiction. Si $y < 1$, $x = \frac{y+1}{2} \in]y, 1[$ vérifie $f(x) \leq y$, alors que $1 > x > y$: contradiction. Donc $f(y) = 1$ pour tout y : $f = 1$, qui est bien décroissante (au sens large).
4. **Paires** : pour $x \neq 0$, $f(x) = f(-x) \in \{1, x\} \cap \{1, -x\} = \{1\}$, et $f(0) \in \{0, 1\}$: **deux solutions**, la constante 1 et la fonction égale à 1 sauf en 0 où elle vaut 0. **Impaires** : si $f(x) = 1$ avec $x \neq 1$,

alors $f(-x) = -1 \in \{1, -x\}$ impose $x = 1$: absurde ; donc $f(x) = x$ pour tout x : **seule solution** $\text{Id}_{\mathbb{R}}$. Périodiques (période $T > 0$) : si $f(x) = x$ avec $x \neq 1$, alors $f(x+T) = f(x) = x \notin \{1, x+T\}$: absurde ; donc **seule solution la constante 1**.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. $D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, et $(x+2y)^2 + (2x-y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 = 5(x^2 + y^2)$. Pour $x \in D_f$, posons $y = \sqrt{5-x^2} \geq 0$: $x^2 + y^2 = 5$, $f(x) = x+2y$ et $f(x)^2 = 25 - (2x-y)^2 \leq 25$, donc $f(x) \leq 5$. Si $f(x) = 5$, alors $y = 2x$, donc $x \geq 0$ et $5x^2 = 5$: $x = 1$; réciproquement $f(1) = 5$. Et $f(x) \geq x \geq -\sqrt{5}$, avec égalité si et seulement si $x = -\sqrt{5}$: **max 5 en 1, min $-\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$** .
2. a) Si $t \leq 0$: $2t \leq 0 \leq \sqrt{5-t^2}$ (sans égalité possible). Si $t > 0$: $2t \leq \sqrt{5-t^2} \iff 4t^2 \leq 5-t^2 \iff t \leq 1$. Donc $2t \leq \sqrt{5-t^2}$ sur $[-\sqrt{5}, 1]$ et $2t \geq \sqrt{5-t^2}$ sur $[1, \sqrt{5}]$, avec égalité seulement en 1.
- b) Soit $s = \sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-y^2} > 0$ (nul seulement pour $\{x, y\} = \{\pm\sqrt{5}\}$). Par la quantité conjuguée, $\sqrt{5-x^2} - \sqrt{5-y^2} = \frac{y^2-x^2}{s}$, d'où

$$T(x, y) = 1 - \frac{2(x+y)}{s} = \frac{(\sqrt{5-x^2} - 2x) + (\sqrt{5-y^2} - 2y)}{s}.$$

Pour $x \neq y$ dans $[-\sqrt{5}, 1]$, les deux parenthèses sont ≥ 0 , l'une au moins > 0 : $T > 0$. Sur $[1, \sqrt{5}]$, de même $T < 0$. Donc f **croît strictement sur $[-\sqrt{5}, 1]$ et décroît strictement sur $[1, \sqrt{5}]$** :

x	$-\sqrt{5}$	1	$\sqrt{5}$
$f(x)$	$-\sqrt{5}$	5	$\sqrt{5}$

3. $2\sqrt{5-x^2} = m-x$ exige $m-x \geq 0$; on élève au carré deux nombres positifs : $f(x) = m \iff x \leq m$ et $5x^2 - 2mx + m^2 - 20 = 0$ (la condition $x \in D_f$ est alors automatique). Discriminant réduit : $4(25-m^2)$. • $|m| > 5$: aucune solution. • $m = \pm 5$: racine double $\frac{m}{5}$; 1 ≤ 5 convient, $-1 > -5$ non. • $|m| < 5$: racines $x_{\pm} = \frac{m \pm 2\sqrt{25-m^2}}{5}$, et $x_{\pm} \leq m \iff \pm\sqrt{25-m^2} \leq 2m$. Pour x_- : vrai si $m \geq 0$; si $m < 0$, cela équivaut à $25-m^2 \geq 4m^2$, soit $m \geq -\sqrt{5}$. Pour x_+ : il faut $m \geq 0$ et $25-m^2 \leq 4m^2$, soit $m \geq \sqrt{5}$. Bilan :

$$0 \text{ solution si } m < -\sqrt{5} \text{ ou } m > 5 ; \quad 1 \text{ si } -\sqrt{5} \leq m < \sqrt{5} \text{ ou } m = 5 ; \quad 2 \text{ si } \sqrt{5} \leq m < 5.$$

Quand x décrit D_f , $M(x, \sqrt{5-x^2})$ décrit Γ , et $f(x) = m \iff M \in D_m$: on compte les points communs à Γ et D_m . Pour $m = 5$, seul $A(1, 2)$: la distance de O à D_5 vaut $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ (le rayon) et $D_5 \perp (OA)$. Pour $m = \sqrt{5}$, D_m passe par l'extrémité $(\sqrt{5}, 0)$ de Γ et la recoupe : c'est là que commencent les deux solutions.

■ **Corrigé de l'exercice 64**

1. $f(x) - f(y) = (x - y)T_f(x, y)$ et $g(x) - g(y) = (x - y)T_g(x, y)$: le produit vaut $(x - y)^2 T_f T_g$. Si f et g ont le même sens de variation, T_f et T_g ont le même signe (au sens large) : **produit** ≥ 0 ; de sens contraires : **produit** ≤ 0 (il est nul si $x = y$).
2. À gauche : $2 \sum_i f_i g_i - \sum_{i \neq j} f_i g_j$. À droite, $(f_i - f_j)(g_i - g_j) = f_i g_i + f_j g_j - f_i g_j - f_j g_i$: chaque $f_i g_i$ apparaît dans deux produits et chaque $f_i g_j$ ($i \neq j$) une fois avec le signe $-$: même résultat ✓. Si f et g ont le même sens de variation, les trois produits sont ≥ 0 (question 1) : $(f_1 + f_2 + f_3)(g_1 + g_2 + g_3) \leq 3(f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3)$; sinon, l'inégalité est renversée.
3. a) $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ croissent sur $[0, +\infty[$: avec $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, on obtient la première inégalité. $t \mapsto t$ croît et $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $]0, +\infty[$: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\left(a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}\right) = 9$. Il y a égalité si et seulement si les trois produits $(a - b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -\frac{(a-b)^2}{ab}$, ... sont nuls, c'est-à-dire $a = b = c$.
b) $a, b, c \in]0, 1[$, et $t \mapsto t$, $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ croissent sur $]0, 1[$ ($1 - t$ décroît en restant > 0). Tchebychev avec $a + b + c = 1$, puis a) appliqué à $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ (de somme 2) :

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right) \geq \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

L'égalité impose l'égalité dans a), donc $a = b = c = \frac{1}{3}$, qui donne bien $3 \times \frac{1/3}{2/3} = \frac{3}{2}$. Pour $a, b, c > 0$ quelconques, avec $s = a + b + c$ et $a' = \frac{a}{s}$, $b' = \frac{b}{s}$, $c' = \frac{c}{s}$ (de somme 1) : $\frac{a}{b+c} = \frac{a'}{1-a'}$, etc. Donc $S \geq \frac{3}{2}$, avec égalité si et seulement si $a = b = c$: $\min S = \frac{3}{2}$ (inégalité de Nesbitt).

■ **Corrigé de l'exercice 65**

1. $x^2 + (1-x)^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$: $D_f = \mathbb{R}$. Le dénominateur ne change pas quand on remplace x par $1 - x$, d'où $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + (1-x)^2}{x^2 + (1-x)^2} = 1$: c'est $f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec $a = b = \frac{1}{2}$, $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. $f \geq 0$, et $1 - f(x) = \frac{(1-x)^2}{x^2 + (1-x)^2} \geq 0$; $f(0) = 0$, $f(1) = 1$: **minimum 0 (en 0), maximum 1 (en 1)**. Et $f(x) < \frac{1}{2} \iff x^2 < (1-x)^2 \iff 0 < 1 - 2x \iff x < \frac{1}{2}$.
3. En divisant par x^2 : $f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} = w(u(x))$. Or w croît strictement sur $]-\infty, 0]$ et décroît strictement sur $[0, +\infty[$, et u décroît strictement sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Sur $]-\infty, 0[$: $u(x) < -1$, w croissante : f **décroît**. Sur $]0, 1]$: $u(x) \geq 0$, w décroissante : f **croît**. Sur $[1, +\infty[$: $-1 < u(x) \leq 0$: f **décroît**. Comme $f(0) = 0 < f(x)$ pour $x \neq 0$, on adjoint 0 :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$		0	1	

4. Les termes $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f\left(\frac{n-k}{n}\right) = f\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ ont pour somme 1 : en écrivant S_n dans les deux ordres et en ajoutant, $2S_n = n + 1$: $S_n = \frac{n+1}{2}$ et $S_{2026} = \frac{2027}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. $E(a) + E(b)$ est un entier $\leq a + b$, et $E(a + b)$ est le plus grand d'entre eux : $E(a) + E(b) \leq E(a + b)$. Et $E(a + b) \leq a + b < E(a) + E(b) + 2$: l'entier $E(a + b)$ est $< E(a) + E(b) + 2$, donc $E(a + b) \leq E(a) + E(b) + 1$.
2. Si x est solution, $x - 2$ est entier, donc $x \in \mathbb{Z}$; écrivons $x = 6q + r$. Comme $E(y + n) = E(y) + n$: $E(\frac{x}{2}) = 3q + E(\frac{r}{2})$, $E(\frac{x}{3}) = 2q + E(\frac{r}{3})$, et l'équation équivaut à $q = E(\frac{r}{2}) + E(\frac{r}{3}) + 2 - r$:

r	0	1	2	3	4	5
$E(\frac{r}{2}) + E(\frac{r}{3})$	0	0	1	2	3	3
q	2	1	1	1	1	0
$x = 6q + r$	12	7	8	9	10	5

$$S = \{5, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

3. a) $E(\frac{x+6}{2}) = E(\frac{x}{2}) + 3$, $E(\frac{x+6}{3}) = E(\frac{x}{3}) + 2$, $E(\frac{x+6}{6}) = E(\frac{x}{6}) + 1$, d'où $g(x + 6) = g(x)$.
- b) Par 1, deux fois : $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x}{3}) + E(\frac{x}{6}) \leq E(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}) + E(\frac{x}{6}) \leq E(x)$, donc $g(x) \geq x - E(x) \geq 0$. Si $g(x) = 0$, x est un entier $6q + r$, et $g(x) = r - E(\frac{r}{2}) - E(\frac{r}{3})$; pour $1 \leq r \leq 5$, $E(\frac{r}{2}) + E(\frac{r}{3}) \leq \frac{5r}{6} < r$, donc $r = 0$. Réciproquement $g(6q) = 6q - 3q - 2q - q = 0$: $g(x) = 0 \iff x \in 6\mathbb{Z}$.
- c) $g(x) = x$ sur $[0, 2[$, $x - 1$ sur $[2, 3[$, $x - 2$ sur $[3, 4[$, $x - 3$ sur $[4, 6[$: images $[0, 2[$, $[1, 2[$, $[1, 2[$, $[1, 3[$, donc, par périodicité, $g(\mathbb{R}) = [0, 3[$. Ainsi $g < 3$: **g est majorée par 3** ; mais $[0, 3[$ n'a pas de plus grand élément (si $y < 3$, $\frac{y+3}{2} \in]y, 3[$) : **g n'a pas de maximum.**

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Calcul algébrique

- ① $A = (4 - x)(3x - 2)$;
 $B = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.
 $a^2 - b^2$ ($a = x + 1$,
 $b = 2x - 3$); $a^3 - b^3$ ($a = 2x$,
 $b = 1$).
- ② $2(x + 2)^2 - 2$; **racines -3 et -1**. $2[(x + 2)^2 - 4] + 6$;
 $(x + 2)^2 = 1$ donne
 $x + 2 = \pm 1$.
- ③ $S =]-\infty, -2] \cup [2, 3]$. $x + 2$,
 $x - 2$, $3 - x$: P est +, -, +, -
sur les intervalles
délimités par -2, 2, 3.
- ④ (a) $S =]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[$;
(b) $S = \mathbb{R}$. (a) Racines -1 et
 $\frac{1}{3}$: signe de $a = 3$ à
l'extérieur.
(b) $\Delta = -11 < 0$: signe de
 $a = -1$ partout.

Bloc 2 · Fonctions de référence

- ⑤ (a) $x < -\sqrt{5}$ ou $x > \sqrt{5}$;
(b) $0 \leq x^2 \leq 9$. (a) $|x| > \sqrt{5}$.
(b) $x = 0$ est permis : pas
« $1 \leq x^2$ ».
- ⑥ (a) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$; (b) $x < 0$
ou $x > \frac{1}{3}$. L'inverse
renverse l'ordre (même
signe); si $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0 < 3$.
- ⑦ (a) $-2x - 5$, puis $2x + 5$;
(b) $S = \{-4; -1\}$. $2x + 5$ a le
signe de $x + \frac{5}{2}$; $2x + 5 = \pm 3$.
- ⑧ (a) -2, 0 et 3; (b) -3, 1 et
3. Sur $[2, 4]$, $f(x) = x - 1$:
 $f(3) = 2$.

Bloc 3 · Logique et applications

- ⑨ (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
et $x^2 > y^2$. (b) **Non**. $x = -2$,
 $y = 1$: $-2 \leq 1$ mais $4 > 1$.
- ⑩ (a) $]-\infty, -2[\cup]-2, 3[$
 $\cup]3, +\infty[$;
(b) $[-1, 2[\cup]2, +\infty[$. Retirer
un point coupe
l'intervalle.
- ⑪ (a) $f(A) = \{-3; -1; 5\}$;
(b) **non**. $f(-1) = f(1) = -1$
alors que $-1 \neq 1$.
- ⑫ (a) $(2x + 3)^2$ et $2x^2 + 3$;
(b) **non**. En 0 : $9 \neq 3$;
l'ordre compte.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 et 2 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 55**, p. 35. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 11), puis les pièges de la section 13. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 30 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 11 en lecture rapide), puis les sections 12 à 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Calcul algébrique

Relis : les sections 1, 5 et 8 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 23,
exercice 34, p. 30, **exercice 44**,
p. 32 et **exercice 49**, p. 34.

Bloc 2 · Fonctions de référence

Relis : les sections 2, 8 et 10 du cours.
Fais : **exercice 5**, p. 24,
exercice 6, p. 24, **exercice 56**,
p. 36 et **exercice 57**, p. 36.

Bloc 3 · Logique et applications

Relis : les sections 4, 6 et 7 du cours.
Fais : **exercice 16**, p. 26,
exercice 43, p. 32, **exercice 51**,
p. 34 et **exercice 52**, p. 34.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Domaine, égalité, opérations	31 à 36	/ 6	
Thème B · Parité, symétries, périodicité	37 à 42	/ 6	
Thème C · Majorants et extremums	43 à 48	/ 6	
Thème D · Sens de variation	49 à 54	/ 6	
Thème E · Fonctions usuelles et courbes	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : *Le barycentre dans le plan*

Maths Olympiad