

Chapitre 11

La dérivation

Du niveau de base au niveau concours

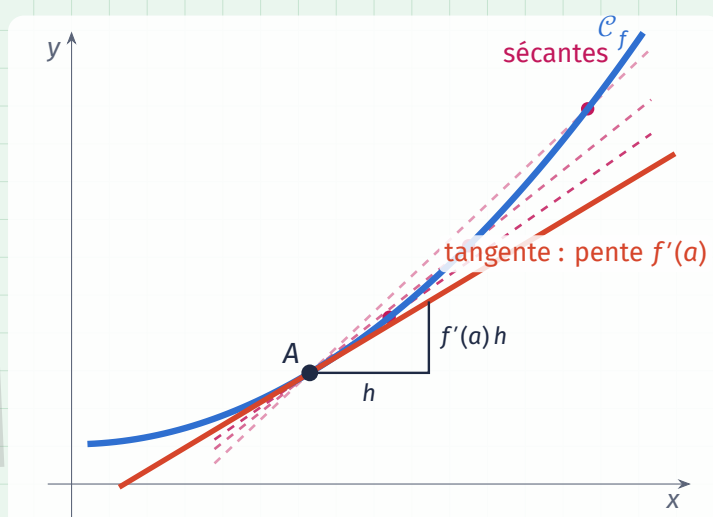
À connaître par cœur

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{Tangente : } y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Défi de concours

Montrer que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$



Zoomer sur la courbe : les sécantes deviennent la tangente

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	19 Niveau 4 · Concours	27
1 Nombre dérivé	5	20 Nombre dérivé et tangente	29
2 Tangente et approximation	6	21 Calculer des dérivées	30
3 Dérivabilité à droite et à gauche	7	22 Dérivabilité et demi-tangentes	32
4 Dérivées des fonctions usuelles	8	23 Variations et extremums	34
5 Opérations sur les dérivées	9	24 Inégalités et optimisation	35
6 Dérivées successives	11	25 Défis de concours	37
7 Dérivée et sens de variation	12	26 Corrigés du niveau 1	39
8 Les extremums	13	27 Corrigés du niveau 2	41
9 Démontrer une inégalité	14	28 Corrigés du niveau 3	44
10 Optimisation	15	29 Corrigés du niveau 4	46
11 Applications de la tangente	16	30 Corrigés : nombre dérivé, tangente	49
12 Pour aller plus loin	17	31 Corrigés : calcul des dérivées	52
13 Les pièges classiques	18	32 Corrigés : demi-tangentes	55
14 Les astuces des concours	19	33 Corrigés : variations et extremums	58
15 L'essentiel du chapitre en une page	22	34 Corrigés : inégalités et optimum	62
16 Niveau 1 · Bases	23	35 Corrigés : défis de concours	64
17 Niveau 2 · Bac	24	26 Corrigé du test d'entrée	68
18 Niveau 3 · Approfondissement	26		

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Nombre dérivé et tangente, Calculer des dérivées, Dérivabilité et demi-tangentes, Variations et extremums, Inégalités et optimisation, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|--|
| ☐ calculer $f'(a)$ par la limite du taux ; | ☐ calculer f'' et $f^{(n)}$ (récurrence) ; |
| ☐ écrire l'équation d'une tangente ; | ☐ dresser un tableau de variations ; |
| ☐ utiliser l'approximation affine ; | ☐ trouver les extremums (local, sur $[a, b]$) ; |
| ☐ étudier la dérivabilité à droite, à gauche ; | ☐ démontrer une inégalité par une fonction ; |
| ☐ interpréter : point anguleux, demi-tangente ; | ☐ résoudre un problème d'optimisation ; |
| ☐ démontrer les dérivées usuelles ; | ☐ trouver les tangentes parallèles ou issues d'un point ; |
| ☐ dériver $uv, \frac{u}{v}, u^n, \sqrt{u}, f(ax + b)$; | ☐ reconnaître un nombre dérivé dans une limite. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point : les limites du **chapitre 10**, les droites du tronc commun, les fonctions du **chapitre 4**. Aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : **page 68**.

Bloc 1 · Limites (chapitre 10)

___ / 4

① **Formes indéterminées** Calculer

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 9}$; (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x}{1 - 6x^2}$.

② **Le conjugué** Calculer (a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 10x})$.

③ **Limites trigonométriques** Calculer

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 - 3x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2 + x^3}$.

④ **À droite, à gauche** $g(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}$.

(a) Limites de g en -2^+ et en -2^- ? (b) En -2 ?

Bloc 2 · Droites et pentes (repère orthonormé)

___ / 4

⑤ **Deux points** $A(-2; 5)$, $B(2; -1)$.

(a) Coefficient directeur et équation réduite de (AB) ? (b) $C(4; -4)$ est-il sur (AB) ?

⑥ **Point et pente** Δ passe par $A(-2; 3)$, de

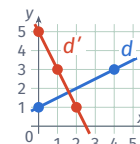
pente $\frac{1}{2}$. (a) Équation $y = m(x - x_A) + y_A$, puis réduite? (b) Point de Δ d'abscisse $-1,8$?

⑦ **Parallèle, perpendiculaire**

$D : 3x - 2y + 5 = 0$ et $\Delta_k : y = (k - 1)x + 2$ ($k \in \mathbb{R}$). (a) Coefficient directeur de D ? (b) Pour quel réel k a-t-on $\Delta_k \parallel D$? $\Delta_k \perp D$?

⑧ **Lire des pentes** Ci-contre : d et d' . (a) Lire leurs pentes, puis leurs équations.

(b) $d \perp d'$? Calculer leur point commun.



Bloc 3 · Fonctions et variations (chapitre 4)

___ / 4

⑨ **Taux d'accroissement** $f(x) = x^3 + 3x$.

(a) Montrer que son taux entre $a \neq b$ vaut $a^2 + ab + b^2 + 3$. (b) Variations de f sur $\mathbb{R}$?

⑩ **Lire un tableau**

(a) Extremums de f ? (b) Comparer $f(-3)$ et $f(-2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

x	-4	-1	2	5
f	3	-2	4	1

⑪ **Signe d'un trinôme** Étudier, selon $x \in \mathbb{R}$, le signe de (a) $-3x^2 + 5x + 2$; (b) $3x^2 - 12x + 12$.

⑫ **Variations par étapes** $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 13}$.

(a) Écrire $x^2 + 6x + 13 = (x - \alpha)^2 + \beta$: f est définie sur $\mathbb{R}$. (b) Variations et minimum?

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 68**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1

Nombre dérivé

Une voiture parcourt 150 km en 2 h : sa vitesse **moyenne** est 75 km/h, mais son compteur affiche à chaque instant une vitesse **instantanée**. Le nombre dérivé fait passer du « moyen » à l'« instantané » : on calcule un taux de variation sur un petit intervalle $[a, a + h]$, puis on fait tendre h vers 0 (limites du chapitre 10).

Définition : taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Pour $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, le

taux de variation (ou taux d'accroissement) de f entre a et $a + h$ est $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

C'est le **coefficient directeur** de la **sécante** (AM), où $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ sont deux points de $\mathcal{C}_f$.

Définition : nombre dérivé

f est **dérivable en a** lorsque $\tau(h)$ admet une limite **finie** l quand h tend vers 0 ; ce réel est le **nombre dérivé de f en a** , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{on a posé } x = a + h).$$

Si cette limite est infinie, ou n'existe pas, f n'est **pas** dérivable en a (section 3).

Méthode : Comment calculer $f'(a)$ par la définition

1. Calculer $f(a)$.
2. Calculer $f(a+h) - f(a)$ et le **factoriser par h** : développer, réduire au même dénominateur, multiplier par la quantité conjuguée, utiliser une formule de trigonométrie.
3. Simplifier $\tau(h)$ par h (permis, car $h \neq 0$).
4. Calculer la limite quand $h \rightarrow 0$: si elle est finie, c'est $f'(a)$.

Exemple : cinq nombres dérivés calculés par la limite

- $p(x) = 3x - x^2$ en $a = 1$: $p(1) = 2$ et $p(1+h) - p(1) = 3 + 3h - (1 + 2h + h^2) - 2 = h - h^2$, donc $\tau(h) = 1 - h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$: $\boxed{p'(1) = 1}$.

- $g(x) = \sqrt{5x-1}$ en $a = 2$: $g(2) = 3$; avec la quantité conjuguée,

$$\tau(h) = \frac{\sqrt{9+5h}-3}{h} = \frac{(9+5h)-9}{h(\sqrt{9+5h}+3)} = \frac{5}{\sqrt{9+5h}+3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{5}{3+3} : \quad \boxed{g'(2) = \frac{5}{6}}.$$

- $k(x) = \frac{x+3}{x-1}$ en $a = 2$: $k(2) = 5$ et $k(2+h) - 5 = \frac{5+h}{1+h} - 5 = \frac{5+h-5-5h}{1+h} = \frac{-4h}{1+h}$, donc $\tau(h) = \frac{-4}{1+h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -4$: $\boxed{k'(2) = -4}$.

- $\sin$ et $\cos$ en 0 (limites du chapitre 10) : $\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ et $\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \frac{-h \times \frac{1 - \cos h}{h^2}}{h} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$: $\boxed{\sin'(0) = 1}$ et $\boxed{\cos'(0) = 0}$.

Remarque. Un peu d'histoire. Vers 1636, **Fermat** trouve tangentes et extremums en comparant $f(a)$ et $f(a+h)$ pour h « évanouissant ». **Newton** (1665–1671) parle de *fluxions* (des vitesses), notées $\dot{x}$; **Leibniz** publie en 1684 sa *Nova methodus*, avec les « différentielles » dx et dy : d'où la notation $\frac{dy}{dx}$ (quotient de deux accroissements « infiniment petits »), toujours utilisée en physique. **Lagrange** (1797) introduit le mot « dérivée » et la notation $f'(x)$; **Cauchy** (1823) fonde enfin le nombre dérivé sur la notion de limite.

2 Tangente et approximation

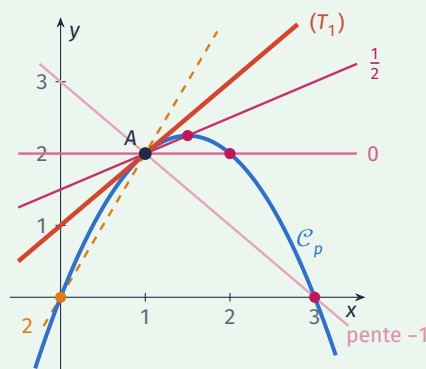
Définition : tangente en un point

Si f est dérivable en a , la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et a pour coefficient directeur $f'(a)$:

$$(T_a) : \quad y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

C'est la **position limite des sécantes** (AM) quand M glisse sur $\mathcal{C}_f$ vers A : leurs pentes $\tau(h)$ tendent vers $f'(a)$.

Justification. Une droite non verticale passant par A et de coefficient directeur m a pour équation $y - f(a) = m(x - a)$; ici $m = f'(a)$. **Figure :** $p(x) = 3x - x^2$, $A(1, 2)$; les sécantes vers $M(3, 0)$, $M(2, 2)$, $M(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ ont pour pentes $1 - h = -1, 0, \frac{1}{2}$; à gauche, vers $M(0, 0)$, la pente est 2 ; toutes tendent vers $p'(1) = 1$, pente de la tangente $(T_1) : y = x + 1$.



Méthode : Comment écrire l'équation d'une tangente

1. Calculer $f(a)$.
2. Calculer $f'(a)$ (par la définition, ou par les formules des sections 4 et 5).
3. Écrire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis réduire sous la forme $y = mx + p$.
4. **Contrôler** : les coordonnées de A vérifient l'équation. Si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale** : $y = f(a)$.

Exemple : les tangentes des fonctions de la section 1

(T_1) à $\mathcal{C}_p$: $y = 1 \times (x - 1) + 2$, soit $y = x + 1$. À $\mathcal{C}_g$ en 2 : $y = \frac{5}{6}(x - 2) + 3$, soit $y = \frac{5}{6}x + \frac{4}{3}$ (contrôle : $\frac{10}{6} + \frac{4}{3} = 3$ ✓). À $\mathcal{C}_k$ en 2 : $y = -4(x - 2) + 5$, soit $y = -4x + 13$. À la courbe de sin en O : $y = x$; à celle de cos au point (0, 1) : $y = 1$ (tangente horizontale).

Approximation affine

f est dérivable en a , de nombre dérivé ℓ , si et seulement si, pour h voisin de 0, $f(a + h) = f(a) + \ell h + h \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Ainsi, pour h proche de 0 : $f(a + h) \approx f(a) + h f'(a)$: près de A, on remplace la courbe par sa tangente.

Démonstration. ($\Rightarrow$) On pose $\varepsilon(h) = \tau(h) - f'(a)$ pour $h \neq 0$ (et $\varepsilon(0) = 0$) : $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ et $f(a + h) = f(a) + h \tau(h) = f(a) + h f'(a) + h \varepsilon(h)$. ($\Leftarrow$) Pour $h \neq 0$, $\tau(h) = \ell + \varepsilon(h) \rightarrow \ell$. $\square$

Exemples numériques (avec les nombres dérivés de la section 1). L'erreur $h \varepsilon(h)$ est **négligeable devant h** : pour p , elle vaut exactement $p(1 + h) - (2 + h) = -h^2$. En physique, on écrit $\Delta y \approx f'(a) \Delta x$.

valeur	approximation	erreur
$p(1,1) = 2,09$	$2 + 0,1 = 2,1$	10^{-2}
$\sqrt{9,3} = g(2,06)$	$3 + 0,06 \times \frac{5}{6} = 3,05$	4×10^{-4}
$k(2,01) = \frac{5,01}{1,01}$	$5 - 4 \times 0,01 = 4,96$	4×10^{-4}
$\sin 0,05$	0,05	2×10^{-5}

3 Dérivabilité à droite et à gauche**Définition : nombres dérivés à droite et à gauche**

Soit f définie sur un intervalle $[a, a + r[$ ($r > 0$). f est **dérivable à droite en a** lorsque $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ est un réel, noté $f'_d(a)$. De même, si f est définie sur $]a - r, a]$, f est **dérivable à gauche en a** lorsque la limite quand $h \rightarrow 0^-$ est un réel, noté $f'_g(a)$.

Théorème

Si f est définie sur un intervalle ouvert contenant a : f est dérivable en $a \iff f$ est dérivable à droite et à gauche en a , avec $f'_d(a) = f'_g(a)$; alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Justification. Au chapitre 10 : une fonction admet une limite en 0 si et seulement si elle admet en 0 une limite à droite et une limite à gauche, égales ; on l'applique à $h \mapsto \tau(h)$.

Interprétation graphique

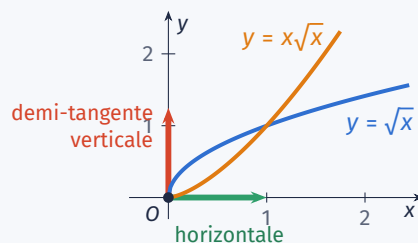
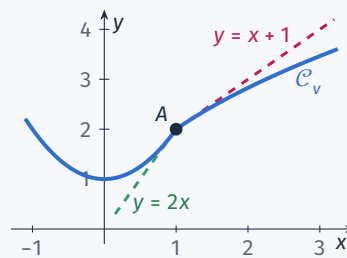
- Si $f'_d(a)$ existe, $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a, f(a))$ une **demi-tangente à droite** : $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$, avec $x \geq a$; de même à gauche, avec $x \leq a$.
- Si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont **différents**, A est un **point anguleux** : deux demi-tangentes de directions différentes ; f n'est pas dérivable en a .
- Si $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $h \rightarrow 0^+$ (ou $h \rightarrow 0^-$), f n'est pas dérivable à droite (ou à gauche) en a , et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**, dirigée vers le haut ou vers le bas selon le signe de $f(x) - f(a)$.

Méthode : Comment étudier la dérivabilité en un point

1. Repérer le point délicat : borne du domaine, zéro sous une racine carrée ou dans une valeur absolue, point de raccord de deux formules. Ailleurs, les théorèmes des sections 4 et 5 suffisent. **2.** Calculer $f(a)$ (avec la **bonne** formule !), puis le taux $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, **séparément** pour $h > 0$ et $h < 0$ si les formules diffèrent ($|h| = h$ ou $-h$). **3.** Calculer les limites à droite et à gauche (conjugué, factorisation). **4. Conclure :** limites finies égales $\Rightarrow$ dérivable, tangente ; finies différentes $\Rightarrow$ point anguleux, deux demi-tangentes ; infinie $\Rightarrow$ demi-tangente verticale. **5.** Interpréter sur la courbe.

Exemple : valeur absolue, racine carrée, fonctions par morceaux

- $u(x) = |x-1|$ en 1. $\frac{u(1+h)-u(1)}{h} = \frac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$: $u'_d(1) = 1 \neq u'_g(1) = -1$. u n'est pas dérivable en 1 ; le point $(1, 0)$ est un **point anguleux**, de demi-tangentes $y = x-1$ ($x \geq 1$) et $y = 1-x$ ($x \leq 1$) (ce sont ici les deux morceaux de la courbe).
- $r(x) = \sqrt{x}$ en 0 (définie sur $[0, +\infty[$). Pour $h > 0$: $\frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} +\infty$: r n'est pas dérivable à droite en 0 ; demi-tangente **verticale** en 0, dirigée vers le haut (figure (b)). En revanche $s(x) = x\sqrt{x}$ donne $\frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h} \rightarrow 0$: $s'_d(0) = 0$, demi-tangente **horizontale**.
- **Par morceaux :** $v(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$, $v(x) = 2\sqrt{x}$ si $x > 1$; $v(1) = 2$ (première formule). À gauche ($h < 0$) : $\frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = 2 + h \rightarrow 2$. À droite ($h > 0$) : $\frac{2\sqrt{1+h} - 2}{h} = \frac{2h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{1+h} + 1} \rightarrow 1$. Donc $v'_g(1) = 2 \neq v'_d(1) = 1$: **point anguleux** $A(1, 2)$, demi-tangentes $y = 2x$ ($x \leq 1$) et $y = x + 1$ ($x \geq 1$) (figure (a)).
- **Un raccord dérivable :** $w(x) = x^2$ si $x \leq 1$, $w(x) = 2x - 1$ si $x > 1$: $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h \rightarrow 2$ et $\frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = 2$; w est dérivable en 1, $w'(1) = 2$: la demi-droite prolonge la parabole **le long de sa tangente**, sans angle.

(b) en 0 : $\sqrt{x}$ et $x\sqrt{x}$ (a) point anguleux en $A(1, 2)$

4

Dérivées des fonctions usuelles**Définition : fonction dérivée**

f est **dérivable sur un intervalle ouvert** I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I ; **sur** $[a, b]$: dérivable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b . La **fonction dérivée** de f est alors $f' : x \mapsto f'(x)$ (notation de Leibniz : $\frac{df}{dx}$). Le **domaine de dérivabilité** peut être plus petit que D_f : $\sqrt{}$ est définie sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$.

$f(x)$	$f'(x)$	dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[,] 0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty, 0[,] 0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$

Une seule formule pour les puissances :

$(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (avec $x \neq 0$ si $n < 0$) : $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ a pour dérivée $-nx^{-n-1}$ (démontré en section 5).

Lecture du tableau. $(x^7)' = 7x^6$; $(\frac{1}{x^4})' = -\frac{4}{x^5}$;

$\tan'(\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Tangente à la courbe de $\sqrt{}$ au point d'abscisse 4 :

$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 = \frac{x}{4} + 1$. Tangente à la courbe

de $\sin$ en π : $y = \cos \pi(x - \pi) + \sin \pi$, soit

$y = -x + \pi$. Tangente à la courbe de $\tan$ en O :

$y = x$.

Démonstrations (pour x fixé et $h \neq 0$ voisin de 0, on calcule le taux $\tau(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$).

- **Constante et identité** : $\tau(h) = \frac{k-k}{h} = 0$; $\tau(h) = \frac{(x+h)-x}{h} = 1$.
- x^n ($n \geq 2$). Pour tous réels A, B : $B^n - A^n = (B-A)(B^{n-1} + B^{n-2}A + \dots + BA^{n-2} + A^{n-1})$ (on développe : tout se simplifie deux à deux). Avec $B = x+h$ et $A = x$: $\tau(h) = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}$: n termes qui tendent chacun vers x^{n-1} , donc $\tau(h) \rightarrow nx^{n-1}$.
- $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). $\tau(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$.
- $\sqrt{x}$ ($x > 0$). $\tau(h) = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (en 0 : section 3).
- **sin et cos**. Avec les formules d'addition et les limites $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$, $\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow 0$ (chapitre 10) :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos x,$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \rightarrow -\sin x.$$

- **tan** (sur un intervalle où $\cos \neq 0$). $\tan(x+h) - \tan x = \frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}$, donc $\tau(h) = \frac{\sin h}{h} \times \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$ (car $\cos(x+h) \rightarrow \cos x$, chapitre 10), et $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. $\square$

5

Opérations sur les dérivées**Théorème (opérations)**

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et $k \in \mathbb{R}$. Alors, sur I :

- $(u+v)' = u' + v'$, $(ku)' = k u'$, $(uv)' = u'v + uv'$;
- si v ne s'annule pas sur I : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;
- pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ (vrai aussi pour $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, si u ne s'annule pas sur I) ;

• si $u > 0$ sur I : $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$;

- si f est dérivable sur un intervalle J et $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable en tout x tel que $ax + b \in J$, et $\boxed{(f(ax + b))' = a f'(ax + b)}$: $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$, $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$.

Démonstrations. Lemme : si v est dérivable en x , alors $v(x + h) \rightarrow v(x)$ quand $h \rightarrow 0$, car $v(x + h) = v(x) + h \times \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \rightarrow v(x) + 0 \times v'(x)$. Notons $\tau_u(h) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \rightarrow u'(x)$, et de même $\tau_v(h) \rightarrow v'(x)$.

- **Somme, ku :** le taux de $u + v$ est $\tau_u + \tau_v$, celui de ku est $k\tau_u$.

- **Produit :** $\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \tau_u(h)v(x+h) + u(x)\tau_v(h) \rightarrow u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ (lemme).

- **Inverse :** $\frac{1}{h} \left(\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)} \right) = -\tau_v(h) \times \frac{1}{v(x+h)v(x)} \rightarrow -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$. **Quotient :** $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

- **Puissance :** récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$: $u' = 1 \times u' \times u^0$. Si $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, alors $(u^{n+1})' = (u^n \times u)' = nu'u^{n-1} \times u + u^n \times u' = (n+1)u'u^n$. Pour $n = -m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) : $\left(\frac{1}{u^m}\right)' = -\frac{mu'u^{m-1}}{u^{2m}} = -m u' u^{-m-1} = n u' u^{n-1}$. Avec $u(x) = x$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- **Racine :** $\frac{\sqrt{u(x+h)} - \sqrt{u(x)}}{h} = \tau_u(h) \times \frac{1}{\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}} \rightarrow \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ (lemme et limite de $\sqrt{\cdot}$, chapitre 10).

- $f(ax + b)$: avec $X = ax + b$ et $k = ah$ ($k \neq 0$, et $k \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$) : $\frac{f(X+ah) - f(X)}{h} = a \times \frac{f(X+k) - f(X)}{k} \rightarrow a f'(X)$. $\square$

Conséquences : un polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$; une fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son domaine ; cos, sin et leurs sommes, produits, quotients aussi.

Méthode : Comment calculer une dérivée sans se tromper

1. Domaine de dérivabilité : dénominateurs non nuls, $u > 0$ sous une racine (là où $u = 0$, revenir au taux, section 3). **2. Reconnaître la forme principale :** somme ? produit ? quotient ? puissance u^n ? racine $\sqrt{u}$? $f(ax + b)$? (Une constante en facteur se garde : $\left(\frac{u}{5}\right)' = \frac{u'}{5}$, inutile d'utiliser le quotient.) **3.** Appliquer la formule en écrivant u, u', v, v' à part. **4. Simplifier et factoriser :** le signe de f' servira (section 7) ; ne jamais développer $(x+2)^2$ au dénominateur.

Exemple : dix dérivées, entièrement simplifiées

• $f_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 7$ (sur $\mathbb{R}$) :
 $f_1'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 2$.

• $f_2(x) = (x-2)\sqrt{x}$ (produit, sur $]0, +\infty[$) :
 $f_2'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-2}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$.

• $f_6(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$ ($\sqrt{u}$, $u > 0$ sur $\mathbb{R}$) :
 $f_6'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 4}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$.

• $f_7(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$:
 $f_7'(x) = 3 \times 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 6 \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

• $f_3(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ (quotient, sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$) :

$$f'_3(x) = \frac{4(x+2) - (4x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}.$$

• $f_4(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$ (inverse, sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$) :

$$f'_4(x) = -\frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 4)^2}.$$

• $f_5(x) = (2-5x)^4$ (u^4 , $u' = -5$) :

$$f'_5(x) = 4 \times (-5) \times (2-5x)^3 = -20(2-5x)^3.$$

• $f_8(x) = \frac{1}{(2x+1)^3} = (2x+1)^{-3}$ ($x \neq -\frac{1}{2}$) :

$$f'_8(x) = -3 \times 2(2x+1)^{-4} = -\frac{6}{(2x+1)^4}.$$

• $f_9(x) = \sin^2 x$ (u^2 , $u = \sin$) :

$$f'_9(x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x.$$

• $f_{10}(x) = \tan x - x$:

$$f'_{10}(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

6

Dérivées successives

Définition : dérivées successives

Si f' est elle-même dérivable sur I , sa dérivée est la **dérivée seconde** $f'' = (f')'$; puis $f''' = (f'')'$, et par récurrence $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, avec $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. On dit alors que f est **n fois dérivable** sur I . En physique, si $x(t)$ est une position, $x'(t)$ est la vitesse et $x''(t)$ l'accélération (section 11).

Polynômes

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq p$: $(x^p)^{(k)} = p(p-1)\dots(p-k+1)x^{p-k}$, donc $(x^p)^{(p)} = p!$ et $(x^p)^{(k)} = 0$ si $k > p$. Ainsi, si P est un polynôme de degré p et de coefficient dominant a_p : $P^{(p)} = p! a_p$ (constante) et $P^{(k)} = 0$ pour $k > p$.

Exemple. $P(x) = 2x^5 - x^3 + 4x$: $P'(x) = 10x^4 - 3x^2 + 4$, $P''(x) = 40x^3 - 6x$, $P'''(x) = 120x^2 - 6$, $P^{(4)}(x) = 240x$, $P^{(5)}(x) = 240 = 5! \times 2$, et $P^{(n)} = 0$ pour $n \geq 6$.

Quatre formules à connaître (pour $n \in \mathbb{N}$)

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (x \neq 0),$$

$$(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) \quad (\text{si } f \text{ est } n \text{ fois dérivable}).$$

Démonstration pour sin. Récurrence : c'est vrai pour $n = 0$; si $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, alors $\sin^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, car $\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$. Même preuve pour $\cos$ ($-\sin t = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$) ; les dérivées de sin tournent en boucle : $\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos \rightarrow \sin$. La dernière formule s'obtient par récurrence avec la règle $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$.

Rédaction modèle pour $\frac{1}{x}$ (récurrence en trois étapes). Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ».

Initialisation : $f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n . Alors $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ et, avec $(x^m)' = mx^{m-1}$ ($m \in \mathbb{Z}$) : $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times (-(n+1)) x^{-(n+2)} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Exemple : utiliser les formules

$$(\cos 3x)^{(n)} = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}; \quad \text{avec } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} :$$

$$\left(\cos^2\right)^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ pour } n \geq 1 \text{ (contrôle : } n = 1 \text{ donne } \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x = -2 \sin x \cos x \checkmark).$$

7 Dérivée et sens de variation

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

1. Si $f' \geq 0$ sur I , f est croissante sur I ; si $f' \leq 0$ sur I , f est décroissante sur I ; si $f' = 0$ sur I , f est constante sur I .
2. Si $f' > 0$ sur I , sauf en des **points isolés** où f' s'annule, f est **strictement croissante** sur I ; de même, $f' < 0$ (sauf en des points isolés) donne f strictement décroissante.

Réciproque (démontrée)

Si f est dérivable et croissante sur I , alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$; si f est décroissante, $f' \leq 0$.

Démonstration. Soit $x \in I$. Pour $h \neq 0$ (avec $x+h \in I$), $f(x+h) - f(x)$ est du signe de h (ou nul), donc $\tau(h) \geq 0$; par passage à la limite (chapitre 10), $f'(x) = \lim \tau(h) \geq 0$. □

Attention : « strictement croissante » ne donne pas $f' > 0$: $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(0) = 0$ ($3x^2 > 0$ sauf au point isolé 0). Et l'hypothèse « intervalle » est **indispensable**: $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, mais $f(-1) = -1 < f(1) = 1$; f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, pas sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode : Comment dresser le tableau de variations

1. Domaine de définition et de dérivabilité, découpé en **intervalles**.
2. Calculer $f'(x)$ et le **factoriser**.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ (tableau de signes : facteurs affines, trinômes, carrés, dénominateurs positifs).
4. Dresser le tableau : ligne x (bornes, valeurs interdites avec une double barre, zéros de f'); ligne $f'(x)$ (signes et zéros); ligne f (flèches, valeurs aux extremums, limites aux bornes du chapitre 10).
5. Lire : extremums, encadrements, signe de f .

Exemple : le fil rouge du cours : $\varphi(x) = x(2x-3)^2 = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ sur $\mathbb{R}$

φ est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $\varphi'(x) = 12x^2 - 24x + 9 = 3(4x^2 - 8x + 3)$. Le trinôme a pour discriminant $64 - 48 = 16$ et pour racines $\frac{8 \pm 4}{8}$, soit $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$: $\varphi'(x) = 3(2x-1)(2x-3)$, positif à l'extérieur des racines. $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, et φ a les limites de $4x^3$ en $\pm\infty$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
φ		2		0	$+\infty$
	$-\infty$				

Lecture : φ admet un **maximum local** 2 en $\frac{1}{2}$ et un **minimum local** 0 en $\frac{3}{2}$ (racine double : la courbe est tangente à l'axe des abscisses, section 12). Comme $(2x - 3)^2 \geq 0$, $\varphi(x)$ a le signe de x . Nous retrouverons φ aux sections 8, 11 et 12.

Exemple : une valeur interdite : $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$g'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 6)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$, soit $g'(x) = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}$, du signe de $(x + 3)(x - 1)$. $g(-3) = \frac{6}{-2} = -3$, $g(1) = \frac{10}{2} = 5$. Limites : en $\pm\infty$, celles de $\frac{x^2}{x} = x$ (terme de plus haut degré) ; en -1 , le numérateur tend vers $4 > 0$ et $x + 1 \rightarrow 0^\pm$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
g		-3		$+\infty$	5	$+\infty$

Lecture : maximum local -3 en -3 , minimum local 5 en 1 : le maximum local est **plus petit** que le minimum local ! « Local » signifie « au voisinage ». Sur $]-1, +\infty[$, $g(x) \geq 5$; sur $]-\infty, -1[$, $g(x) \leq -3$.

Exemple : trigonométrique : $h(x) = \tan x - 2x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$h'(x) = 1 + \tan^2 x - 2 = \tan^2 x - 1 = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$. Comme $\tan$ est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$: $\tan x + 1 > 0 \iff x > -\frac{\pi}{4}$ et $\tan x - 1 > 0 \iff x > \frac{\pi}{4}$. $h(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - 1$, $h(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{2}$; en $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x \rightarrow +\infty$, donc $h(x) \rightarrow +\infty$; h est impaire.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$-\infty$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$1 - \frac{\pi}{2}$	$+\infty$	

Lecture : maximum local $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$ en $-\frac{\pi}{4}$, minimum local $1 - \frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$. Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, h décroît depuis $h(0) = 0$: $\tan x \leq 2x$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

8

Les extremums

Définition : extremum local, extremum sur un intervalle

f admet un **maximum local** (ou relatif) en a lorsqu'il existe un intervalle ouvert J contenant a , inclus dans D_f , tel que $\forall x \in J$, $f(x) \leq f(a)$; **minimum local** : $f(x) \geq f(a)$ sur J . f admet sur un intervalle I un **maximum** en $a \in I$ lorsque $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ (de même pour le minimum). Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Théorème (condition nécessaire)

Si f est **dérivable** en a et admet un extremum **local** en a , alors $f'(a) = 0$: la tangente en $A(a, f(a))$ est horizontale.

Démonstration (maximum local ; pour un minimum, on applique le résultat à $-f$). Sur $J =]a-r, a+r[$, on a $f(a+h) - f(a) \leq 0$ pour $|h| < r$. Si $0 < h < r$, $\tau(h) \leq 0$, donc $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) \leq 0$; si $-r < h < 0$, $\tau(h) \geq 0$, donc $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h) \geq 0$. Ainsi $f'(a) = 0$. $\square$

Trois mises en garde : 1. La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais $x^3 < 0$ pour $x < 0$ et $x^3 > 0$ pour $x > 0$: pas d'extremum en 0. **2.** Un extremum peut se trouver en un point où f n'est pas dérivable : $|x|$ a un minimum en 0. **3.** Le théorème exige un intervalle ouvert autour de a : sur $[0, 1]$, $x \mapsto x$ a un minimum en 0 et un maximum en 1, avec $f' = 1 \neq 0$.

Théorème (condition suffisante)

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f' **s'annule en a en changeant de signe**, f admet un extremum local en a : un **maximum** si f' passe de $+$ à $-$, un **minimum** si f' passe de $-$ à $+$.

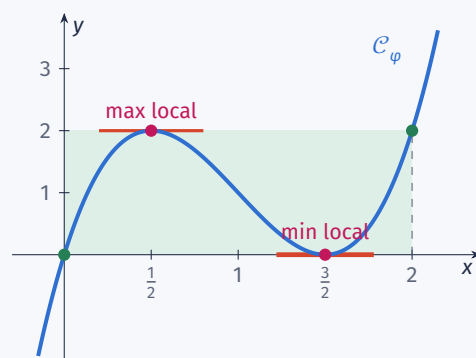
Démonstration. Si $f' \geq 0$ sur $]a-r, a]$ et $f' \leq 0$ sur $[a, a+r[$, alors f croît sur $]a-r, a]$ et décroît sur $[a, a+r[$ (section 7) : $f(x) \leq f(a)$ sur $]a-r, a+r[$. $\square$

Méthode : Comment trouver le maximum et le minimum de f sur un segment $[a, b]$

1. Les candidats : les points de $]a, b[$ où f' s'annule, les points où f n'est pas dérivable, et les bornes a et b . **2.** Calculer f en chacun d'eux. **3.** La plus grande valeur est le maximum, la plus petite le minimum (on peut aussi lire le tableau de variations). **4.** Conclure en donnant la **valeur** et le ou les **points** où elle est atteinte.

Exemple : le fil rouge φ sur $[0, 2]$, puis une fonction sur un intervalle ouvert

1. Candidats pour $\varphi(x) = x(2x-3)^2$ sur $[0, 2]$: $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$, avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = 2$, $\varphi(\frac{3}{2}) = 0$, $\varphi(2) = 2$. **Maximum 2, atteint en $\frac{1}{2}$ et en 2 ; minimum 0, atteint en 0 et en $\frac{3}{2}$:** $0 \leq \varphi(x) \leq 2$ sur $[0, 2]$ (la bande verte). Sur $[0, 3]$, le maximum devient $\varphi(3) = 27$, atteint en une borne. Sur $\mathbb{R}$, φ n'a ni maximum ni minimum (limites $\pm\infty$), seulement des extremums locaux.



tangentes horizontales en $\frac{1}{2}$ et en $\frac{3}{2}$

2. $q(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$: $q'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$, du signe de $x-1$ (car $x^2 + x + 1 > 0$ et $x^3 > 0$). q décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$: **minimum** $q(1) = 3$: $2x + \frac{1}{x^2} \geq 3$ pour tout $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. Pas de maximum : $q \rightarrow +\infty$ en 0^+ et en $+\infty$.

9

Démontrer une inégalité

Méthode : Comment démontrer une inégalité par l'étude d'une fonction

Pour montrer que $u(x) \leq v(x)$ pour tout x d'un intervalle I : **1.** Poser la **fonction différence** $d(x) = v(x) - u(x)$. **2.** Étudier ses variations sur I (dériver, factoriser, signe). **3.** En déduire le **minimum** m de d sur I (souvent $d(a) = 0$ en une borne a , ou en un point où d' s'annule). **4.** Conclure : $d(x) \geq m \geq 0$, donc $u(x) \leq v(x)$; préciser le cas d'égalité. **Rédaction type** : « d est croissante sur $[0, +\infty[$, donc pour tout $x \geq 0$, $d(x) \geq d(0) = 0$. » Si le signe de d' n'est pas clair, on étudie d'' (section 14).

Exemple : un polynôme : pour tout $x \geq -1$, $3x^5 + 2 \geq 5x^3$

$d(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$, $d'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1)$. Sur $[-1, +\infty[$, $x^2(x+1) \geq 0$, donc $d'(x)$ a le signe de $x-1$ (et s'annule en $-1, 0, 1$) : d est décroissante sur $[-1, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$, de minimum $d(1) = 3 - 5 + 2 = 0$. Donc $d(x) \geq 0$: $3x^5 + 2 \geq 5x^3$ pour $x \geq -1$, avec égalité seulement en 1 (d est strictement monotone sur chaque morceau). **Contrôle** : $d(x) = (x-1)^2(3x^3 + 6x^2 + 4x + 2)$. **Remarques** : $d'(0) = 0$ sans extremum en 0 (d' ne change pas de signe) ; et l'hypothèse $x \geq -1$ compte : $d(-2) = -54 < 0$.

Exemple : une racine : pour tout $x > 0$, $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3$

$d(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$ sur $]0, +\infty[$: $d'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$, car $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2}$. Comme $x \mapsto x\sqrt{x}$ est strictement croissante et vaut 1 en 1, $d'(x)$ a le signe de $x-1$: d décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, de minimum $d(1) = 2 + 1 - 3 = 0$: $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3$, égalité si et seulement si $x = 1$.

Exemple : avec cos : pour tout $x \in [0, \pi]$, $x \cos x \leq \sin x$

$d(x) = \sin x - x \cos x$: $d'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x \geq 0$ sur $[0, \pi]$ (et > 0 sur $]0, \pi[$) : d est strictement croissante et $d(0) = 0$, donc $x \cos x \leq \sin x$ sur $[0, \pi]$, avec égalité seulement en 0. **Conséquences** : sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, en divisant par $\cos x > 0$, on retrouve $\tan x \geq x$ (chapitre 10) ; et $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \leq 0$: $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est **décroissante** sur $]0, \pi]$. **L'intervalle compte** : sur $[\pi, 2\pi]$, $d' \leq 0$ et $d(2\pi) = -2\pi < 0$.

10

Optimisation

Méthode : Comment résoudre un problème d'optimisation

1. La variable : choisir une inconnue x (une longueur, une abscisse) et préciser l'**intervalle** où elle varie (longueurs positives, figure possible). **2. La fonction** : exprimer la grandeur à optimiser (aire, volume, distance, coût) en fonction de x . **3.** Étudier ses variations sur l'intervalle. **4. Conclure** : valeur optimale, valeur de x correspondante, et **répondre à la question posée** (dimensions, position du point). **Pour une distance** $\sqrt{D(x)}$: étudier $D(x)$, qui a les mêmes variations (car $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante).

Exemple : la boîte de volume maximal (figure (a))

Dans une plaque de 16 cm sur 10 cm, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x , puis on relève les bords : on obtient une boîte sans couvercle. **Variable :** $x \in]0, 5[$ (il faut $10 - 2x > 0$). **Volume :** $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$. $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(x - 2)(3x - 20)$; sur $]0, 5[$, $3x - 20 < 0$, donc $V'(x)$ a le signe de $2 - x$: V croît sur $]0, 2]$, décroît sur $[2, 5[$. **Conclusion :** le volume est maximal pour $x = 2$ cm : $V_{\max} = V(2) = 2 \times 12 \times 6 = 144 \text{ cm}^3$ (boîte de $12 \times 6 \times 2$).

Exemple : distance minimale d'un point à une courbe (figure (b))

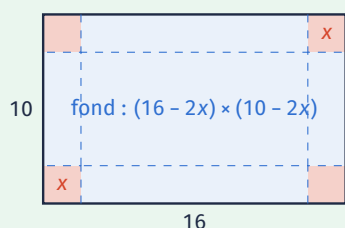
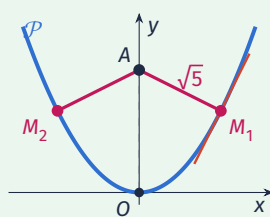
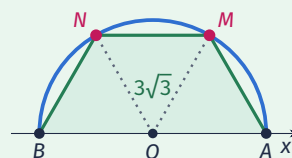
Soit $A(0, 3)$ et la parabole $\mathcal{P} : y = \frac{x^2}{2}$ (repère orthonormé). Pour $M(x, \frac{x^2}{2}) \in \mathcal{P} : AM^2 = x^2 + (\frac{x^2}{2} - 3)^2 = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 9 = D(x)$. $D'(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$: D décroît sur $]-\infty, -2]$, croît sur $[-2, 0]$, décroît sur $[0, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$; $D(\pm 2) = 4 - 8 + 9 = 5$ et $D(0) = 9$. **Conclusion :** AM est minimale, égale à $\sqrt{5}$, pour $M_1(2, 2)$ et $M_2(-2, 2)$; le sommet O n'est **pas** le point le plus proche ($AO = 3 > \sqrt{5}$: maximum local de D en O). **Géométrie :** la tangente en M_1 a pour pente 2, de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2)$, et $\vec{AM}_1(2, -1) : \vec{AM}_1 \cdot \vec{u} = 2 - 2 = 0$: (AM_1) est **perpendiculaire** à la tangente.

Exemple : l'aire maximale d'un trapèze inscrit dans un demi-cercle (figure (c))

Demi-cercle de centre O , de rayon 2, de diamètre $[BA]$ avec $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$; $M(x, \sqrt{4 - x^2})$ et $N(-x, \sqrt{4 - x^2})$, $x \in [0, 2]$. Le trapèze $ABNM$ a pour bases 4 et $2x$, pour hauteur $\sqrt{4 - x^2}$: $\mathcal{A}(x) = \frac{4+2x}{2}\sqrt{4 - x^2} = (x + 2)\sqrt{4 - x^2}$. Sur $[0, 2]$:

$$\mathcal{A}'(x) = \sqrt{4 - x^2} + (x + 2) \times \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2 - x^2 - 2x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2(x - 1)(x + 2)}{\sqrt{4 - x^2}},$$

du signe de $1 - x$: $\mathcal{A}$ croît sur $[0, 1]$, décroît sur $[1, 2]$. **Maximum** $\mathcal{A}(1) = 3\sqrt{3} \approx 5,20$ (contre $\mathcal{A}(0) = 4$). Alors $MN = 2 = OA$ et $AM = \sqrt{1 + 3} = 2$: le trapèze optimal est un **demi-hexagone régulier** (trois triangles équilatéraux).

(a) $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$ (b) AM minimale

(c) demi-hexagone

11 Applications de la tangente

Méthode : Tangentes parallèles à une droite, tangentes passant par un point

Parallèle à (D) : $y = mx + p$: $(T_a) \parallel (D) \iff f'(a) = m$; on résout cette équation d'inconnue a . **Perpendiculaire à (D)** (repère orthonormé, $m \neq 0$) : $f'(a) \times m = -1$. **Passant par $B(\alpha, \beta)$:** l'inconnue est l'abscisse a du **point de contact** : $B \in (T_a) \iff \beta = f'(a)(\alpha - a) + f(a)$; chaque solution a donne une tangente.

Exemple : deux tangentes parallèles à $\mathcal{C}_\varphi$, deux tangentes à l'hyperbole issues d'un point

1. Tangentes à $\mathcal{C}_\varphi$ parallèles à (D) : $y = 9x + 4$: $\varphi'(a) = 9 \iff 12a^2 - 24a + 9 = 9 \iff 12a(a - 2) = 0 \iff a \in \{0, 2\}$. $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2) = 2$: $(T_0) : y = 9x$ et $(T_2) : y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$ (figure (a)). (Tangentes horizontales : $\varphi'(a) = 0 \iff a \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.)

2. Tangentes à l'hyperbole $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ passant par $B(1, -3)$: en $a \neq 0$, $(T_a) : y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$. $B \in (T_a) \iff -3 = -\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \iff 3a^2 + 2a - 1 = 0 \iff (3a - 1)(a + 1) = 0$: $a = \frac{1}{3}$ ou $a = -1$: $y = -9x + 6$ (contact en $(\frac{1}{3}, 3)$) et $y = -x - 2$ (contact en $(-1, -1)$) (figure (b)). En général, $B(\alpha, \beta) \in (T_a) \iff \beta a^2 - 2a + \alpha = 0$: si $\alpha\beta > 1$, aucune tangente ne passe par B .

Position d'une courbe polynomiale par rapport à une tangente

Si P est un polynôme, $d(x) = P(x) - [P'(a)(x - a) + P(a)]$ se factorise par $(x - a)^2$ (section 12) : $d(x) = (x - a)^2 Q(x)$. La courbe est **au-dessus** de (T_a) là où $Q(x) > 0$, **au-dessous** là où $Q(x) < 0$.

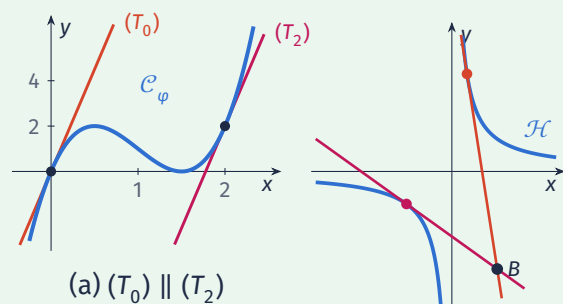
Exemple. $\varphi(x) - 9x = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$:

$\mathcal{C}_\varphi$ est au-dessous de (T_0) sur $]-\infty, 3[$ (contact en 0), au-dessus sur $]3, +\infty[$, et la recoupe en $(3, 27)$.

$\varphi(x) - (9x - 16) = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x - 2)^2(x + 1)$:

$\mathcal{C}_\varphi$ est au-dessous de (T_2) sur $]-\infty, -1[$, au-dessus sur $]-1, +\infty[$ (sauf au point de contact $(2, 2)$) ; elle la recoupe en $(-1, -25)$.

Vitesse instantanée. Si un mobile a pour position $z(t)$ à l'instant t , sa vitesse **moyenne** entre t_0 et $t_0 + h$ est le taux $\frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h}$, sa vitesse **instantanée** est $v(t_0) = z'(t_0)$ et son **accélération** $a(t_0) = v'(t_0) = z''(t_0)$.



(a) $(T_0) \parallel (T_2)$

(b) issues de $B(1, -3)$

Exemple : une balle lancée vers le haut : $z(t) = -5t^2 + 20t$ (en m, pour $t \in [0, 4]$ en s)

$v(t) = z'(t) = -10t + 20$: la vitesse de lancement est $v(0) = 20$ m/s, et $v(1) = 10$ m/s (alors que la vitesse moyenne sur $[0, 1]$ est $\frac{z(1) - z(0)}{1} = 15$ m/s). $v(t) > 0$ sur $[0, 2[$ (la balle monte) et $v(t) < 0$ sur $]2, 4]$: **hauteur maximale** $z(2) = 20$ m. Retour au sol en $t = 4$ avec $v(4) = -20$ m/s ; l'accélération $z''(t) = -10$ m/s² est constante (la pesanteur).

12

Pour aller plus loin

1. La dérivée d'une composée.

Théorème (admis)

Si u est dérivable sur un intervalle I , v dérivable sur un intervalle J , et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$, c'est-à-dire $(v(u(x)))' = u'(x) v'(u(x))$.

On **retrouve** la section 5 : $v(t) = \sqrt{t}$ donne $(\sqrt{u})' = u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$; $v(t) = t^n$ donne $(u^n)' = u' \times nu^{n-1}$. Et l'on obtient $(\cos u)' = -u' \sin u$, $(\sin u)' = u' \cos u$, $(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u)$. **Exemples** : $(\cos \sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$; $(\sin(x^3 + 1))' = 3x^2 \cos(x^3 + 1)$; $(\sqrt{1 + \sin^2 x})' = \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

2. La dérivée n -ième de $x \mapsto \frac{1}{x-a}$. La règle $(f(x+b))^{(n)} = f^{(n)}(x+b)$ appliquée à $\frac{1}{x}$ (section 6) donne

$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ ($x \neq a$). **Application** : $r(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$ (on réduit pour vérifier), donc

$$r^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right] \quad \text{et} \quad r^{(n)}(0) = n! \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right).$$

Contrôle : $r'(x) = -\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}$, d'où $r'(0) = \frac{5}{36} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$ ✓ : décomposer évite de dériver n fois un quotient.

3. Polynômes et racines doubles. On dit que a est une **racine double** (au moins) du polynôme P lorsque $(x-a)^2$ divise P : $P(x) = (x-a)^2 Q(x)$, avec Q polynôme.

Théorème

a est racine double de $P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$. La courbe de P est alors **tangente à l'axe des abscisses** en $(a, 0)$.

Démonstration. $(\Rightarrow) P'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x)$, donc $P(a) = P'(a) = 0$. $(\Leftarrow) P(a) = 0$, donc $P(x) = (x-a)R(x)$ avec R polynôme (tronc commun) ; alors $P'(x) = R(x) + (x-a)R'(x)$, d'où $R(a) = P'(a) = 0$, donc $R(x) = (x-a)Q(x)$ et $P(x) = (x-a)^2 Q(x)$. $\square$

Exemples. $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$: c'est le facteur $(2x-3)^2$. Trouvons a, b pour que 1 soit racine double de $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 2$: $P(1) = 3 + a + b = 0$ et $P'(1) = 4 + 2a + b = 0$, d'où $a = -1, b = -2$

et $P(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (car $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$).

Tangentes : pour un polynôme P , la fonction $d(x) = P(x) - [P'(a)(x-a) + P(a)]$ vérifie $d(a) = 0$ et $d'(a) = P'(a) - P'(a) = 0$: a est racine double de d , ce qui justifie la section 11. (De même : $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \iff (x-a)^3$ divise P .)

13

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
« $(uv)' = u'v'$ »	$(uv)' = u'v + uv'$: $(x \times x)' = 2x$, et non 1×1
« $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ », « $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{1}{v'}$ »	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$: $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$, pas $\frac{1}{2x}$
« $(\sin 3x)' = \cos 3x$ », « $(\sqrt{5x})' = \frac{1}{2\sqrt{5x}}$ »	ne pas oublier le facteur a de $f(ax + b)$: $3 \cos 3x$; $\frac{5}{2\sqrt{5x}}$
« $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)' = \cos \frac{\pi}{3}$ »	$\sin \frac{\pi}{3}$ est une constante : sa dérivée est 0
« Tangente : $y = f'(a)x + f(a)$ »	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$: sans le « $-a$ », la droite ne passe pas par A
« f dérivable à droite et à gauche en a , donc dérivable en a »	il faut de plus $f'_d(a) = f'_g(a)$: $ x - 1 $ en 1 (point anguleux)
« $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ partout où $\sqrt{u}$ existe »	seulement où $u > 0$; ailleurs, revenir au taux : $\sqrt{x^2} = x $ n'est pas dérivable en 0, $\sqrt{x^4} = x^2$ l'est
« $\sqrt{x}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ »	sur $]0, +\infty[$ seulement : demi-tangente verticale en 0
« $f'(a) = 0$, donc f a un extremum en a »	il faut que f' change de signe en a : x^3 en 0
« f a un extremum en a , donc $f'(a) = 0$ »	seulement si f est dérivable en a et si a n'est pas une borne : $ x $ en 0 ; x sur $[0, 1]$
« f est positive, donc croissante » ou « f' est croissante, donc f aussi »	seul le signe de f' compte : $\frac{1}{x}$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$; $(x^2)' = 2x$ croît, mais x^2 décroît sur $]-\infty, 0]$
« $f' < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ »	le théorème exige un intervalle : $\left(\frac{1}{x}\right)' < 0$, mais $f(-1) < f(1)$
« Le maximum sur $[a, b]$ est atteint là où $f' = 0$ »	il peut être atteint en une borne : sur $[0, 3]$, φ a pour maximum $\varphi(3) = 27$, et $\varphi'(3) = 45 \neq 0$
« Un maximum local est plus grand qu'un minimum local »	$\frac{x^2+3x+6}{x+1}$: maximum local -3 , minimum local 5 (section 7)

14

Les astuces des concours

★ **Astuce de concours : reconnaître un nombre dérivé dans une limite**Si f est dérivable en a , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$: une forme $\frac{0}{0}$ devient un calcul de dérivée.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2026} - 1}{x - 1} = 2026 \quad (\text{dérivée de } x^{2026} \text{ en } 1) ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} =$$

$$\frac{2}{3} \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x} = f'(0) \text{ avec } f(x) = \sqrt{1 + \sin x}, \text{ soit } \frac{\cos 0}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

★ *Astuce de concours : factoriser la dérivée, ne jamais tout développer*

$f(x) = (x-1)^3(x+2)^2$: $f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^2 + 2(x-1)^3(x+2) = (x-1)^2(x+2)[3(x+2) + 2(x-1)] = (x-1)^2(x+2)(5x+4)$. Le signe se lit aussitôt : f croît sur $]-\infty, -2]$, décroît sur $[-2, -\frac{4}{5}]$, croît sur $[-\frac{4}{5}, +\infty[$; $f'(1) = 0$ sans extremum (facteur au carré). Développer donnait un polynôme de degré 4 impossible à étudier.

★ *Astuce de concours : étudier la dérivée de la dérivée*

Montrons que $(1+x)\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ pour $x \geq 0$. Avec $d(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - (1+x)\sqrt{1+x}$ et $((1+x)\sqrt{1+x})' = \sqrt{1+x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1+x}} = \frac{3}{2}\sqrt{1+x}$: $d'(x) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\sqrt{1+x}$, de signe peu clair. On dérive encore : $d''(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4\sqrt{1+x}} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Donc d' croît et $d'(0) = 0$: $d' \geq 0$; donc d croît et $d(0) = 0$: $d \geq 0$ ✓. Avec $e(x) = (1+x)\sqrt{1+x} - 1 - \frac{3}{2}x$, $e'(x) = \frac{3}{2}(\sqrt{1+x} - 1) \geq 0$: $1,15 \leq 1,1\sqrt{1,1} \leq 1,15375$.

★ *Astuce de concours : changer de fonction : étudier $f^2, \frac{1}{f}, AM^2 \dots$*

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$ sur $[0, +\infty[$: $f \geq 0$, donc f et $F = f^2$ ont les mêmes variations ($t \mapsto t^2$ croît sur $[0, +\infty[$), et $F(x) = \frac{x}{(x^2+3)^2}$ se dérive sans racine : $F'(x) = \frac{(x^2+3) - 4x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$.

Maximum de F en 1 : $F(1) = \frac{1}{16}$, donc $\boxed{\frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \leq \frac{1}{4}}$ pour tout $x \geq 0$, égalité en 1.

★ *Astuce de concours : la tangente comme majorant ou minorant*

Pour $a > 0$, la tangente à la courbe de $\sqrt{x}$ en a est $y = \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$, et $\sqrt{x} - \frac{x+a}{2\sqrt{a}} = -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} \leq 0$: la courbe est **sous toutes ses tangentes** : $\boxed{\sqrt{x} \leq \frac{x+a}{2\sqrt{a}}}$ pour $x \geq 0$. Avec $a = 9$: $\sqrt{10} \leq \frac{19}{6} \approx 3,167$; avec

$a = \frac{9}{4}$: $\sqrt{2} \leq \frac{17}{12} \approx 1,417$. De même, une tangente à $\mathcal{C}_\varphi$ « qui ne recoupe pas » la courbe sur un intervalle donne une inégalité gratuite (section 11).

★ *Astuce de concours : la stricte monotonie prouve l'unicité*

$x^5 + 2x^3 + 3x = 6$: $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x$ a pour dérivée $5x^4 + 6x^2 + 3 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation a **au plus une** solution ; or $f(1) = 6$: $\boxed{S = \{1\}}$. Et $f(x) < 6 \iff f(x) < f(1) \iff x < 1$.

★ *Astuce de concours : dériver une identité*

Pour $x \neq 1$: $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (chapitre 8). On dérive les deux membres :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

En $x = 2$: $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ (contrôle pour $n = 3$: $1 + 4 + 12 = 17 = 2 \times 8 + 1$ ✓), sans récurrence.

★ *Astuce de concours : maximiser $x^p(1-x)^q$ sur $[0, 1]$*

Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^p(1-x)^q$: $f'(x) = px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}(p - (p+q)x)$ (on met en facteur les plus petites puissances). Sur $]0, 1[$, $f'(x)$ a le signe de $p - (p+q)x$:

maximum en $x = \frac{p}{p+q}$. Exemple : $x(1-x)^3 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$ sur $[0, 1]$. Autrement dit, si $a + b = 1$ ($a, b \geq 0$), le produit $a^p b^q$ est maximal lorsque $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.

★ *Astuce de concours : l'approximation affine pour estimer une erreur relative*

Si $y = f(x)$ et si x varie d'une petite quantité Δx , alors $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$. Pour $f(x) = x^n$: $\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{nx^{n-1} \Delta x}{x^n} = n \frac{\Delta x}{x}$: l'erreur relative est **multipliée par n** . Une erreur de 1 % sur le rayon d'une boule donne environ 3 % d'erreur sur son volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (exact : $1,01^3 = 1,030301$). Pour $\sqrt{x}$, elle est **divisée par 2** : $\sqrt{1,02} \approx 1,01$ (exact : $1,00995 \dots$).

15

L'essentiel du chapitre en une page

Nombre dérivé et tangente

Taux : $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (pente de la sécante).

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (limite finie).

$(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$; $f'(a) = 0$: tangente horizontale.

$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$; près de 0 :

$(1+h)^n \approx 1 + nh$, $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$, $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$,
 $\sin h \approx h$, $\tan h \approx h$.

À droite, à gauche

$f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h)$, $f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h)$; dérivable

$\Leftrightarrow f'_d(a) = f'_g(a)$ (réels).

$f'_d(a) \neq f'_g(a)$: point anguleux ($|x - a|$ en a);

$\tau \rightarrow \pm\infty$: demi-tangente verticale ($\sqrt{x}$ en 0).

Dérivées usuelles

$(k)' = 0$; $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$); $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$);

$\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$; $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$;

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ($u > 0$); $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$;

$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$,

$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$.

Composée (admise) : $(v \cdot u)' = u' \times (v' \cdot u)$;

$(\cos u)' = -u' \sin u$.

Dérivées successives

$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$;

$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$; $(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$;

$\deg P = p$: $P^{(p)} = p! a_p$, $P^{(k)} = 0$ si $k > p$.

Variations (sur un intervalle !)

$f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante;
 $f' = 0 \Rightarrow$ constante.

$f' > 0$ sauf en des points isolés $\Rightarrow$ strictement croissante.

Tableau : domaine, f' factorisée, signe, flèches, limites (double barre si valeur interdite).

Extremums

Extremum local en a intérieur, f dérivable en a
 $\Rightarrow f'(a) = 0$ (réciproque fautive : x^3).

f' s'annule en changeant de signe : + / - maximum, - / + minimum.

Sur $[a, b]$: comparer f aux zéros de f' , aux points non dérivables et aux bornes.

Inégalités et optimisation

$u \leq v$ sur I : étudier $d = v - u$, montrer $\min d \geq 0$;
 si besoin, étudier d'' pour avoir le signe de d' .

Optimiser : variable et intervalle, fonction, variations, réponse; distance : étudier AM^2 .

Tangentes

$(T_a) \parallel (y = mx + p) \Leftrightarrow f'(a) = m$;

$(T_a) \perp (y = mx + p) \Leftrightarrow f'(a)m = -1$.

(T_a) passe par $B(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \beta = f'(a)(\alpha - a) + f(a)$
 (inconnue : a).

Position : signe de $f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$;
 polynôme : $(x - a)^2$ en facteur.

Racine double : $(x - a)^2 \mid P \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = 0$.

Vitesse $v = z'$, accélération $a = v' = z''$.

À retenir pour les concours

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$.

Factoriser f' , ne pas développer; f strictement monotone : au plus une solution.

$\sqrt{x} \leq \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$ (sous ses tangentes); étudier f^2 ou $\frac{1}{f}$.

Dériver $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ donne $\sum kx^{k-1}$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations : $f'_d(a)$, $f'_g(a)$ nombres dérivés à droite, à gauche ; $(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Outils : « $f' \geq 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ croissante » (admis) et $f'(a) = 0$ en un extremum.

16

Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Nombre dérivé par la définition ★

corrigé p. 39

Par la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h \rightarrow 0$, calculer le nombre dérivé au point indiqué : a) $f(x) = x^2 + 3x$ en $a = -2$; b) $g(x) = \frac{8}{x}$ en 2 ; c) $k(x) = \sqrt{3x-2}$ en 2 (quantité conjuguée) ; d) $m(x) = x^3 - 2x$ en 1 ; e) $\sin$ en $\frac{\pi}{3}$ (formule $\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$ et limites du chapitre 10) ; f) $u(x) = \frac{1}{x^2}$ en 1, sous la forme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x)-u(1)}{x-1}$.

Exercice 2 Tangentes et approximation affine ★

corrigé p. 39

1. Avec l'exercice 1, écrire une équation de la tangente à la courbe de chacune des six fonctions au point indiqué. Lesquelles sont parallèles ? 2. Avec l'approximation affine $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$, donner une valeur approchée de $\sqrt{4,06}$, de $\frac{8}{1,996}$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0,02\right)$; comparer avec la calculatrice.

Exercice 3 Dérivées des fonctions usuelles ★

corrigé p. 39

Où chaque fonction est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée (factoriser si possible) : a) $2x^5 - 4x^3 + x - 7$; b) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$; c) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$; d) $\frac{1}{x^5}$; e) $4\sqrt{x} - 3x$; f) $2 \sin x - 3 \cos x$; g) $5 \tan x + x^2$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; h) $x^2 - 6\sqrt{x} + \pi^2$.

Exercice 4 Opérations sur les dérivées ★

corrigé p. 40

Calculer la dérivée (en précisant où la fonction est dérivable) : a) $(x^2 + 1)(3x - 2)$; b) $\frac{2x-1}{x+3}$; c) $\frac{1}{x^2+4}$; d) $(x^2 - 2x)^3$; e) $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$; f) $x^2\sqrt{x}$; g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; h) $\sin x \cos x$; i) $x \sin x + \cos x$; j) $\frac{x^2-4}{x^2+2}$.

Exercice 5 Dérivées successives, vitesse et accélération ★

corrigé p. 40

1. Soit $f(x) = x^6 - 4x^3 + x$. Calculer f' , f'' , ..., $f^{(6)}$, puis $f^{(n)}$ pour $n \geq 7$. 2. Un point mobile sur un axe a pour abscisse $x(t) = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$ (en cm, t en s). a) Vitesse $v(t) = x'(t)$, accélération $a(t) = v'(t)$, vitesse initiale ? b) Montrer que $a = -4x$, puis, par récurrence, que $x^{(2n)} = (-4)^n x$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 6 Sens de variation ★

corrigé p. 40

Sens de variation et tableau de variations de : a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$; c) $h(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que $x^2 + 3 \geq 4\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$; d) $k(x) = 3x - \sin 2x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Extremums ★

corrigé p. 40

1. Soit $g(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$. Montrer que $g'(x) = 5x^2(x-1)(x-3)$; tableau de variations, extremums locaux. Pourquoi g n'a-t-elle pas d'extremum en 0, bien que $g'(0) = 0$?
2. Trouver a, b réels tels que $f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$ ($x \neq 0$) ait en 2 un extremum local égal à 1. Est-ce un maximum ? Montrer que $f \leq 1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 8 Dérivable à droite, à gauche ★

corrigé p. 41

Dérivabilité à droite et à gauche au point indiqué ; interprétation graphique (demi-tangentes) : a) $f(x) = |x-3|(x+1)$ en 3 ; b) $g(x) = \sqrt{10-2x}$ en 5 (à gauche) ; c) $h(x) = x^2 + x$ si $x \leq 0$ et $h(x) = \sin x$ si $x > 0$, en 0.

17

Niveau 2 • Bac**Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : dérivabilité et demi-tangentes ★★**

corrigé p. 41

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$ si $x \leq 2$ et $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ si $x > 2$.

1. Étudier la dérivabilité de f à gauche, puis à droite en 2. f est-elle dérivable en 2 ? Interpréter graphiquement.
2. Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$; tableau de variations de f (limites en $\pm\infty$ comprises).
3. Équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 ? Résoudre $f(x) = 3$. 4. Tracer $\mathcal{C}_f$, (T) et les demi-tangentes en $A(2, 0)$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : dérivées, variations, extremums ★★

corrigé p. 41

1. Calculer les dérivées : a) $u(x) = (3x+1)^4(x-2)$; b) $v(x) = \sqrt{x^4+1}$; c) $w(x) = \sin^2(3x)$; d) $z(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$).
2. Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$. a) Montrer que $f'(x) = 2x(2x+1)(x-2)$; tableau de variations de f . b) Extremums locaux ? Vérifier que $f(x) + 8 = (x-2)^2(x^2+2x+2)$; minimum de f sur $\mathbb{R}$? c) Tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 ?

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : tangentes à une courbe ★★

corrigé p. 42

Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. f est-elle dérivable à droite en -1 ? Calculer $f'(x)$ pour $x > -1$. 2. Tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ? 3. Tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à $D : x - 6y + 1 = 0$?
4. Soit $a > -1$ et $t = \sqrt{a+1}$. Montrer que la tangente au point d'abscisse a passe par $P(2, 2)$ si et seulement si $t^2 - 4t + 3 = 0$; en déduire les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P .
5. Soit $P(\alpha, \beta)$, $\alpha > -1$. Montrer que par P passent deux tangentes à $\mathcal{C}$ si $\beta > f(\alpha)$, une seule si $\beta = f(\alpha)$, aucune si $\beta < f(\alpha)$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : une inégalité, une optimisation ★★

corrigé p. 42

1. Soit $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 32$. Variations de φ sur $[0, 6]$; en déduire que $\varphi \geq 0$ sur $[0, 6]$. Factoriser $\varphi(x)$.
2. Dans un cône de révolution de hauteur 9 cm et de rayon de base 6 cm, on inscrit un cylindre de même axe, de rayon $r \in]0, 6[$, posé sur la base du cône. a) Montrer (Thalès) que sa hauteur est $h = 9 - \frac{3}{2}r$ et que son volume est $V(r) = \frac{3\pi}{2}r^2(6 - r)$. b) Avec 1., montrer que $V(r) \leq 48\pi$; dimensions du cylindre de volume maximal ? Quelle fraction du cône occupe-t-il ? c) Le cylindre d'aire latérale maximale est-il le même ?

Exercice 13 Une fonction trigonométrique ★★

corrigé p. 42

Soit $f(x) = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

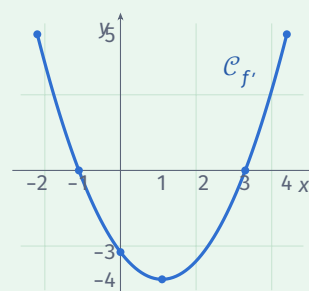
1. Montrer que $f'(x) = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x + \cos x)$. 2. Signe de $f'(x)$ sur $[0, 2\pi]$ (écrire $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$) ; tableau de variations sur $[0, 2\pi]$. Maximum et minimum de f sur $\mathbb{R}$?
3. Retrouver ces extremums en exprimant $f(x)$ en fonction de $t = \sin x + \cos x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Exercice 14 Lire la courbe de la dérivée ★★

corrigé p. 43

La courbe ci-contre est celle de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[-2, 4]$: c'est la parabole d'équation $y = x^2 - 2x - 3$.

1. Signe de $f'(x)$; sens de variation de f ; extremums locaux de f sur $]-2, 4[$.
2. Coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1. En quels points la tangente est-elle horizontale ? parallèle à la droite $y = -3x$? Quel est le plus petit coefficient directeur d'une tangente à $\mathcal{C}_f$?
3. $\mathcal{C}_f$ passe par $A(0, 2)$. Laquelle des fonctions $f_1(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$, $f_2(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 2$, $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5$ peut être f ? Est-ce la seule possible ?

**Exercice 15** Tangentes à un demi-cercle ★★

corrigé p. 43

Soit $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ pour $x \in [-5, 5]$; sa courbe $\mathcal{C}$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 5 situé dans le demi-plan $y \geq 0$.

1. Dérivabilité de f à gauche en 5 et à droite en -5 ; interprétation. Calculer $f'(x)$ pour $-5 < x < 5$.
2. Soit $M(a, b) \in \mathcal{C}$ avec $-5 < a < 5$. Montrer que la tangente en M a pour équation $ax + by = 25$, puis (produit scalaire) qu'elle est perpendiculaire à (OM) .
3. Tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $P\left(0, \frac{25}{4}\right)$? Tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à la droite $y = x$?

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 43

Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple (f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$).

- a) Si f est dérivable en a , alors $|f|$ est dérivable en a . b) Si $f + g$ est dérivable en a , alors f et g sont dérivables en a . c) Si f est dérivable en a et g ne l'est pas, alors $f + g$ n'est pas dérivable en a . d) Si ni f ni g ne sont dérivables en a , alors fg n'est pas dérivable en a . e) Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $f \leq g$ et $f(a) = g(a)$, alors $f'(a) = g'(a)$. f) Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ existe, alors f est

dérivable en a . g) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ et $f'(x) \leq 1$ pour tout $x \geq 0$, alors $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$. h) Toute fonction polynôme de degré 3 admet un maximum local et un minimum local.

18

Niveau 3 • Approfondissement

Exercice 17 La bitangente ★★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1 et 1 ? Que remarque-t-on ? 2. Vérifier que $f(x) - (x-1) = (x^2 - 1)^2$; position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\Delta : y = x - 1$?
3. On admet (cours) que la droite $y = mx + p$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a si et seulement si a est racine au moins double de $x \mapsto f(x) - (mx + p)$. Montrer que Δ est la seule droite tangente à $\mathcal{C}_f$ en deux points distincts. 4. En quels points de $\mathcal{C}_f$ la tangente est-elle parallèle à Δ ?

Exercice 18 Tangentes communes à deux paraboles ★★★

corrigé p. 44

Soit les paraboles $\mathcal{P}_1 : y = x^2$ et $\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + 2x - 5$.

1. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont aucun point commun. 2. Tangentes à $\mathcal{P}_1$ au point d'abscisse a , à $\mathcal{P}_2$ au point d'abscisse b ?
3. Déterminer les droites tangentes à la fois à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$, et leurs points de contact.
4. Montrer que ces deux droites se coupent en $\Omega\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ et que la symétrie de centre Ω échange $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 19 Les dérivées successives de $\sqrt{x}$ ★★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.

1. Calculer f', f'', f''' sous la forme $c \frac{\sqrt{x}}{x^n}$. 2. Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = a_n \frac{\sqrt{x}}{x^n}$ ($n \geq 1$), avec $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - n\right)a_n$.
3. En déduire que $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n}$ pour $n \geq 2$, puis la valeur de $f^{(5)}(1)$. 4. Soit $g(x) = \sqrt{1+2x}$ ($x > -\frac{1}{2}$). Exprimer $g^{(n)}(0)$ à l'aide de a_n ; calculer $g^{(4)}(0)$.

Exercice 20 Fixer une variable ★★★

corrigé p. 45

1. Soit $n \geq 2$ entier, $b \geq 0$ et $\varphi(x) = \frac{x^n + b^n}{2} - \left(\frac{x+b}{2}\right)^n$ ($x \geq 0$). Variations de φ ? En déduire que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$ pour $a, b \geq 0$ (égalité ?), puis que $a^n + b^n \geq 2$ si $a + b = 2$, et $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$.
2. Soit $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ($x, y \geq 0$). a) À $y > 0$ fixé, étudier $x \mapsto F(x, y)$; montrer que $F(x, y) \geq y^3 - 2y\sqrt{y}$. b) Avec $G(y) = y^3 - 2y\sqrt{y}$, montrer que $F(x, y) \geq -1$, avec égalité seulement en $(1, 1)$. c) F est-elle minorée sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 21 Une inégalité trigonométrique ★★★

corrigé p. 45

Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On rappelle que $\tan x \geq x$ pour tout $x \in I$ (cours : $x \cos x \leq \sin x$).

1. Vérifier que $\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2 \tan x = \sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)^2$ pour $x \in I$. 2. Soit $\varphi(x) = \sin x \tan x - x^2$ sur I . Montrer que $\varphi'(x) \geq 2(\tan x - x)$; en déduire que $\sin x \tan x \geq x^2$ pour tout $x \in I$.
3. En déduire que $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \geq \cos x$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis, avec $x = \frac{\pi}{6}$, que $\pi^2 \leq 6\sqrt{3}$.

Exercice 22 La propriété optique de la parabole ★★★

corrigé p. 45

Soit la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$, le point $F(0, \frac{1}{4})$ et la droite $\Delta : y = -\frac{1}{4}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $M(a, a^2) \in \mathcal{P}$ et $H(a, -\frac{1}{4})$ son projeté orthogonal sur Δ .

1. Montrer que $MF = MH$. 2. La tangente T_a en M coupe (Oy) en K : montrer que $FK = FM$.
3. Montrer que T_a est la médiatrice de $[FH]$.
4. En déduire que T_a est une bissectrice de l'angle $F\hat{M}H$, puis qu'un rayon lumineux vertical descendant qui frappe le miroir $\mathcal{P}$ en M est réfléchi vers F . Pourquoi les antennes « paraboliques » et les fours solaires ont-ils cette forme ?

Exercice 23 Deux optimisations en physique ★★★

corrigé p. 46

1. *La lampe.* Une lampe est à la hauteur h (en m) au-dessus du centre d'une table ronde de rayon 1 m. L'éclairement au bord de la table est $E = \frac{k \sin \theta}{d^2}$ (d : distance de la lampe au bord ; θ : angle des rayons avec la table ; $k > 0$). a) Montrer que $E(h) = \frac{kh}{(1+h^2)\sqrt{1+h^2}}$. b) À quelle hauteur le bord est-il le mieux éclairé ?
2. *Le transfert de puissance.* Un générateur ($E = 12$ V, résistance interne $r = 2 \Omega$) alimente une résistance $R > 0 : I = \frac{E}{R+r}$ et la puissance reçue par R est $P = RI^2$. Étudier $P(R)$; pour quel R la puissance est-elle maximale ? Généraliser à E, r quelconques.

19**Niveau 4 • Concours****Exercice 24 Racines multiples d'un polynôme ★★★★★**

corrigé p. 46

On admet (cours) que $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$, avec Q polynôme, si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

1. Montrer que $P(x) = (x - a)^3 Q(x)$, avec Q polynôme, si et seulement si $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$.
2. Trouver a, b, c réels tels que $(x - 2)^3$ divise $x^4 + ax^2 + bx + c$; factoriser.
3. a) Soit P un polynôme positif sur $\mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$: montrer que $P'(a) = 0$. b) Trouver a, b réels tels que $x^4 - 2x^3 + ax + b$ soit positif sur $\mathbb{R}$ et nul en 2.
4. Soit $n \geq 1$ et $Q_n(x) = x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$. Montrer que $(x - 1)^3$ divise Q_n , mais que $(x - 1)^4$ ne le divise pas (calculer $Q_n'''(1)$).

Exercice 25 Leibniz et Fibonacci ★★★★★

corrigé p. 46

Soit u et v deux fonctions dérivables autant de fois que nécessaire sur un intervalle I .

1. Montrer que $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$. 2. Si v est un polynôme de degré au plus 2, montrer par récurrence que, pour $n \geq 2$: $(uv)^{(n)} = v u^{(n)} + n v' u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} v'' u^{(n-2)}$.
3. Soit $f(x) = x^2 \sin x$. Calculer $f^{(n)}(0)$ (on rappelle que $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$) ; valeurs de $f^{(2026)}(0)$ et de $f^{(2027)}(0)$?
4. Soit $g(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ sur $I =]-\varphi, \frac{1}{\varphi}[$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. a) En dérivant n fois l'égalité $(1 - x - x^2)g(x) = 1$, montrer que $g^{(n)}(0) = n g^{(n-1)}(0) + n(n-1)g^{(n-2)}(0)$ pour $n \geq 2$. b) On pose $u_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$: reconnaître la suite de Fibonacci. Calculer $g^{(10)}(0)$.

Exercice 26 Le triangle d'aire minimale ★★★★★

corrigé p. 47

Soit $P(2, 1)$ (repère orthonormé). Une droite D passant par P coupe les demi-axes $[Ox)$ et $[Oy)$ en $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ ($a, b > 0$).

1. Montrer que $a > 2$, $b = \frac{a}{a-2}$ et que l'aire du triangle OAB est $S(a) = \frac{a^2}{2(a-2)}$. 2. Étudier S ; en déduire la droite D_0 d'aire minimale. Vérifier que P est le milieu de $[AB]$.
3. Soit $\mathcal{H}$ la courbe de $x \mapsto \frac{2}{x}$ ($x > 0$). Montrer que D_0 est tangente à $\mathcal{H}$ en P , et que la tangente à $\mathcal{H}$ en $M\left(m, \frac{2}{m}\right)$ découpe avec les axes un triangle d'aire 4 dont l'hypoténuse a pour milieu M .
4. Généraliser : pour $P(p, q)$ ($p, q > 0$), l'aire minimale vaut $2pq$.

Exercice 27 Cônes et sphère ★★★★★

corrigé p. 47

1. *Cône inscrit.* Un cône de révolution de hauteur H a son sommet et le cercle de sa base sur une sphère de rayon R . Montrer que le rayon r de sa base vérifie $r^2 = H(2R - H)$, puis que son volume maximal est $\frac{32\pi R^3}{81}$, soit $\frac{8}{27}$ du volume de la boule.
2. *Cône circonscrit.* Un cône de hauteur H et de rayon de base r contient une boule de rayon 1 tangente à sa base et à sa surface latérale. a) Dans une coupe axiale, exprimer de deux façons le sinus du demi-angle au sommet ; en déduire que $r^2 = \frac{H}{H-2}$ ($H > 2$). b) Montrer que le volume du cône est minimal pour $H = 4$ et vaut alors le double de celui de la boule.

Exercice 28 Courbes orthogonales ★★★★★

corrigé p. 47

Deux courbes sont *orthogonales* en un point commun si leurs tangentes en ce point sont perpendiculaires.

1. Soit $c > 0$, $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_c$ la courbe de $x \mapsto \frac{c}{x}$ et $\mathcal{H}'_k$ celle de $x \mapsto \sqrt{x^2 - k}$ ($x > 0$). Montrer qu'en tout point commun, $\mathcal{H}_c$ et $\mathcal{H}'_k$ sont orthogonales.
2. *Paraboles homofocales.* Pour $a \neq 0$, $\mathcal{P}_a$ est la courbe de $f_a(x) = 2\sqrt{a(x+a)}$ (moitié supérieure de la parabole $y^2 = 4a(x+a)$). Soit $a > 0 > b$. a) Montrer que $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ ont un seul point commun M , d'abscisse $-(a+b)$, avec $y_M^2 = -4ab$. b) Montrer que $f'_a = \frac{2a}{f_a}$; en déduire que $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ sont orthogonales en M .

Exercice 29 Le réseau le plus court ★★★★★

corrigé p. 48

On veut relier quatre villes $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$ (unité : 100 km) par un réseau de routes le plus court possible.

1. Longueur du réseau formé des deux diagonales ? de trois côtés ? 2. Pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, soit $P\left(x, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(1-x, \frac{1}{2}\right)$ et le réseau $[AP] \cup [DP] \cup [PQ] \cup [QB] \cup [QC]$: montrer que sa longueur est $L(x) = 4\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + 1 - 2x$.
3. Montrer que le minimum de L vaut $1 + \sqrt{3}$, atteint en $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$; comparer avec 1. 4. Montrer que les trois routes issues de P forment alors deux à deux des angles de 120° .

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 48

Pour $x \geq 0$: $\varphi_1(x) = x - \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $\varphi_3(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, $\varphi_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$.

1. Montrer que φ_1 est croissante sur $[0, +\infty[$; en déduire que $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$. 2. Avec φ'_2 , montrer que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ pour $x \geq 0$.
3. De même, montrer que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$: ainsi $\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$ pour $x \geq 0$. 4. Montrer que $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour $x \geq 0$.
5. Par parité, en déduire que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x . 6. Encadrer $\sin(0,1)$ et $\cos(0,2)$; valeur approchée de $\cos(0,2)$ à 10^{-4} près ?

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

20

Nombre dérivé et tangente

On **simplifie** le taux $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (factoriser par h , conjuguer, limites trigonométriques) **avant** de faire tendre h vers 0. Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; approximation affine : $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Exercice 31 Nombre dérivé par la définition ★

corrigé p. 49

Montrer **par la définition** que f est dérivable en a , calculer $f'(a)$ et donner une équation de la tangente (T_a) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ; pour a) et b), étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T_a).

- a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $a = 3$; c) $f(x) = \frac{3}{x+2}$, $a = 1$; d) $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$, $a = 3$;
b) $f(x) = x^3 - 5x$, $a = -1$; e) $f(x) = \cos 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 32 Approximations affines ★

corrigé p. 49

- Soit $f(x) = x^3$. Écrire l'approximation affine de $f(2 + h)$, montrer que l'erreur vaut exactement $f(2 + h) - (8 + 12h) = h^2(6 + h)$, et en déduire une valeur approchée, puis la valeur exacte, de $(2,01)^3$.
- Soit $g(x) = \frac{1}{x}$. Montrer que, pour tout $h \geq 0$, $0 \leq g(4 + h) - \left(\frac{1}{4} - \frac{h}{16}\right) \leq \frac{h^2}{64}$. En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{4,02}$, avec une majoration de l'erreur.
- Sans calculatrice ($\pi \approx 3,1416$, $\sqrt{3} \approx 1,7321$, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad), donner une valeur approchée de $\sin 31^\circ$, de $\tan 46^\circ$ et de $\frac{1}{(0,97)^2}$ (utiliser $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ près de 1).

Exercice 33 Des limites qui sont des nombres dérivés ★★

corrigé p. 50

1. En reconnaissant un nombre dérivé, calculer ($n \in \mathbb{N}^*$ et le réel a sont fixés) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 - 1} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \sin a - a \sin x}{x - a} \end{array}$$

2. Soit f dérivable en a . Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-h)}{h} = 4f'(a)$ (faire apparaître deux taux de variation), puis calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3h} - \sqrt{4-h}}{h}$.

Exercice 34 Où la tangente coupe-t-elle l'axe des abscisses ? ★★

corrigé p. 50

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ et $f(x) = x^n$ (pour $x \neq 0$ si $n < 0$). Soit $a \neq 0$, $M(a, a^n)$ et $H(a, 0)$.

1. Montrer que (T_a) coupe (Ox) au point d'abscisse $(1 - \frac{1}{n})a$, et (Oy) au point d'ordonnée $(1 - n)a^n$.
2. En déduire une construction à la règle de la tangente en M pour $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x^2}$; tracer la tangente à $y = x^2$ en $M(2, 4)$.
3. Pour quels n ce point de (Ox) est-il strictement entre O et H ?
4. Reprendre la question 1 avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $a > 0$; que constate-t-on ? Tracer la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $M(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$.

Exercice 35 Tangentes perpendiculaires à une parabole ★★★

corrigé p. 51

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole $y = \frac{x^2}{4}$, F le point $(0, 1)$ et Δ la droite $y = -1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, (T_t) est la tangente à $\mathcal{P}$ en $M_t(t, \frac{t^2}{4})$.

1. Montrer que (T_t) a pour équation $y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$.
2. Soit $A(\alpha, \beta)$. Montrer que $A \in (T_t) \iff t^2 - 2\alpha t + 4\beta = 0$; en déduire, selon la position de A par rapport à $\mathcal{P}$, le nombre de tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A .
3. Soient $t \neq s$. Montrer que $(T_t) \perp (T_s) \iff ts = -4$, et que (T_t) et (T_s) se coupent en $(\frac{t+s}{2}, \frac{ts}{4})$.
4. En déduire l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à $\mathcal{P}$ perpendiculaires.
5. Montrer que, si $(T_t) \perp (T_s)$, la droite $(M_t M_s)$ passe par F . Illustrer avec $A(\frac{3}{2}, -1)$.

Exercice 36 Tangentes qui recourent la courbe ★★★

corrigé p. 51

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $a \in \mathbb{R}$ et M_a le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a (repère orthonormé).

1. Écrire une équation de la tangente (T_a) et montrer que $f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)] = (x-a)^2(x-3+2a)$.
2. En déduire que, si $a \neq 1$, (T_a) recoupe $\mathcal{C}_f$ en un seul autre point N_a , d'abscisse $3 - 2a$, et étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T_a) . Que se passe-t-il pour $a = 1$?
3. Soit $a_0 = 2$ et $a_{k+1} = 3 - 2a_k$ (la tangente en M_{a_k} recoupe $\mathcal{C}_f$ en $M_{a_{k+1}}$). Montrer que $a_k = 1 + (-2)^k$.
4. Soit $a \neq 1$. Montrer que $f'(3 - 2a) + 1 = 4[f'(a) + 1]$. Les tangentes en M_a et en N_a peuvent-elles être parallèles ? perpendiculaires ?

21

Calculer des dérivées

On reconnaît la **forme** (somme, uv , $\frac{u}{v}$, u^n , $\sqrt{u}$, $x \mapsto f(ax + b)$) et l'ensemble où les formules s'appliquent ($u > 0$ pour $\sqrt{u}$); puis on **factorise** $f'(x)$: c'est cette forme qui donne son signe.

Exercice 37 Dériver sans se tromper ★

corrigé p. 52

Pour chaque fonction, donner un ensemble (intervalle ou réunion d'intervalles) où elle est dérivable, puis calculer $f'(x)$ sous forme simplifiée.

a) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{x}{5} - 7$

d) $f_4(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}$

g) $f_7(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f_2(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$

e) $f_5(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

h) $f_8(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f_3(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$

f) $f_6(x) = (3x - 2)^5$

i) $f_9(x) = \cos^2 x - \sin x$

j) $f_{10}(x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$

Exercice 38 Dériver puis factoriser ★

corrigé p. 52

Préciser l'ensemble de dérivabilité, calculer $f'(x)$, l'écrire sous forme **factorisée**, puis résoudre $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = (x + 1)^4(x - 3)^3$

c) $f(x) = (x + 3)\sqrt{1 - x}$

e) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$

d) $f(x) = \left(\frac{3 - x}{x + 2}\right)^3$

f) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

Exercice 39 Dérivées successives ★★

corrigé p. 53

On utilise les formules du cours $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et $(u(ax + b))^{(n)} = a^n u^{(n)}(ax + b)$.

- Soit $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$. a) En développant $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$, montrer que $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.
b) En déduire $f^{(n)}(x)$ pour $n \geq 1$, puis $f^{(2027)}\left(\frac{\pi}{8}\right)$, et montrer que $f^{(4)} = 256f - 192$.
- Soit $g(x) = \sin 3x \cos x$. a) Montrer que $g(x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$.
b) Exprimer $g^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis calculer $g^{(4)}(x)$ et $g^{(5)}(0)$.

Exercice 40 Simplifier avant ou après avoir dérivé ★★

corrigé p. 53

- Montrer que la dérivée de $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ est $f' : x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
- Soit $S(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.
a) Montrer que la dérivée de $x \mapsto \cos^2(x + c)$ est $x \mapsto -\sin(2x + 2c)$ (c réel fixé).
b) Montrer que $\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ pour tout réel θ . c) En déduire que $S = \frac{3}{2}$.
- Sur $I =]0, \pi[$, soit $g(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ et $h(x) = \tan \frac{x}{2}$. a) Montrer que $g'(x) = h'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ sur I .
b) En déduire que $g = h$ sur I (une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** y est constante).

Exercice 41 Les dérivées successives de la fonction tangente ★★★

corrigé p. 54

Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; on note $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et $0! = 1$.

- Montrer que $(\tan^k)' = k \tan^{k-1} (1 + \tan^2)$ ($k \geq 1$), puis que, si P est un polynôme, la dérivée de $x \mapsto P(\tan x)$ est $x \mapsto (1 + \tan^2 x) P'(\tan x)$.
- Soit $P_0(X) = X$ et $P_{n+1}(X) = (1 + X^2) P_n'(X)$. Montrer que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4 .
- Montrer que P_n est de degré $n + 1$, de coefficient dominant $n!$, à coefficients entiers positifs, et que $P_n(-X) = (-1)^{n+1} P_n(X)$.

4. En déduire : a) $\tan^{(n)}(0) = 0$ pour n pair, et $\tan^{(n)}(0)$ pour $n = 1, 3, 5$; b) $\tan''' \left(\frac{\pi}{4} \right)$; c) $\tan^{(n)} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Exercice 42 Polynômes et dérivées successives ★★★

corrigé p. 54

1. Soit $Q(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n$. Montrer que $Q^{(k)}(0) = k! c_k$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Soient P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{R}$. En appliquant 1 à $Q(t) = P(a + t)$, montrer que $P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$.
3. Écrire $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ selon les puissances de $x - 2$.
4. Avec $P(x) = (1 + x)^n$ et $a = 0$, montrer que $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k$, et calculer $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
5. En déduire qu'un polynôme de degré au plus n est déterminé par $P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)$. Trouver le polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 2, P'(1) = -1, P''(1) = 4$ et $P'''(1) = 12$.

22

Dérivabilité et demi-tangentes

En un point délicat a (raccord, zéro sous une racine ou dans une valeur absolue), on étudie **séparément** les limites à droite et à gauche du taux $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$: finies et égales, f est dérivable ; finies et différentes, point anguleux ; infinie, demi-tangente verticale.

Exercice 43 Dérivable, à droite, à gauche ? ★

corrigé p. 55

Étudier la dérivabilité en a (à droite, à gauche) et interpréter : tangente, demi-tangentes, point anguleux.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $f_1(x) = x^2 - 3x $, $a = 3$; | c) $f_3(x) = (x + 1)\sqrt{2 - x}$ sur $]-\infty, 2]$, $a = 2$; |
| | d) $f_4(x) = \sin 2x $, $a = 0$; |
| b) $f_2(x) = (x + x)^2$, $a = 0$; | e) $f_5(x) = \sqrt{1 + x}$ ($x \geq 0$), $\frac{4+x}{4-x}$ ($x < 0$), $a = 0$. |

Exercice 44 Raccorder deux morceaux ★

corrigé p. 55

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx$ si $x \leq 1$, $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ si $x > 1$.

1. Calculer $f(1)$ et montrer que f est dérivable à gauche en 1, avec $f'_g(1) = 2a + b$.
2. a) Montrer que, si $a + b \neq 2$, f n'est pas dérivable à droite en 1. b) Si $a + b = 2$, calculer $f'_d(1)$.
3. Pour quels a, b la fonction f est-elle dérivable en 1 ? Donner alors la tangente en ce point.
4. Si $a = b = 1$, montrer que $\mathcal{C}_f$ a un point anguleux A ; demi-tangentes et tracé près de A.

Exercice 45 Le maximum de deux fonctions ★★

corrigé p. 56

Sur $[0, +\infty[$, on pose $f(x) = \max(\sqrt{x}, x^2)$ et $g(x) = \min(\sqrt{x}, x^2)$.

1. Étudier le signe de $\sqrt{x} - x^2$ et écrire $f(x)$ et $g(x)$ sans max ni min.
2. Étudier la dérivabilité de f et g en 0 (à droite) et en 1 ; nature de O et de A(1, 1) ; demi-tangentes en A.

- Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$. Que remarque-t-on en A ?
- Cas général.* Si u, v sont dérivables en a , avec $u(a) = v(a)$ et $u'(a) < v'(a)$, montrer que $v - u$ a le signe de $x - a$ près de a , puis que $\max(u, v)$ a en a un point anguleux (pentes $u'(a)$ à gauche, $v'(a)$ à droite).

Exercice 46 Des escaliers adoucis ★★

corrigé p. 56

- Soit $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ (E : partie entière) et $n \in \mathbb{Z}$. a) Exprimer $f(x)$ sur $[n, n+1[$ et sur $[n-1, n[$; calculer $f(n)$.
b) Montrer que $f'_d(n) = 0$ et $f'_g(n) = 2$. Interpréter graphiquement.
- Soit $\varphi(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t$ (α, β, γ réels), avec $\varphi(1) = 1$, et $g(x) = E(x) + \varphi(x - E(x))$.
a) Montrer que $g(n) = n$, $g'_d(n) = \varphi'(0)$ et $g'_g(n) = \varphi'(1)$ ($n \in \mathbb{Z}$). b) Trouver φ pour que g soit dérivable en tout entier, à tangente horizontale.
c) Montrer qu'alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$, exprimer $g'(x)$ avec $t = x - E(x)$, et montrer que g est croissante.

Exercice 47 Arrondir le coin de $|x|$ ★★★

corrigé p. 57

- Arc de cercle.* On remplace le coin de $y = |x|$ par un arc : $f(x) = 2 - \sqrt{2 - x^2}$ si $|x| < 1$, $f(x) = |x|$ si $|x| \geq 1$.
a) Montrer que, pour $|x| < 1$, le point $(x, f(x))$ est sur le cercle de centre $\Omega(0, 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
b) Montrer que f est dérivable en 1 et en -1 ; interpréter avec les droites $y = \pm x$.
c) Montrer que $f \geq |x|$, que $f(x) - |x|$ est maximal en 0, et que f' n'est pas dérivable en 1.
- Arc de parabole.* Trouver α, β pour que g ($\alpha x^2 + \beta$ sur $]-1, 1[$, $|x|$ ailleurs) soit dérivable ; $g(0)$? g' est-elle dérivable en 1 ?
- Arc deux fois dérivable.* Trouver $P(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ avec $P(1) = P'(1) = 1$ et $P''(1) = 0$; $h = P$ sur $]-1, 1[$, $h = |x|$ ailleurs.
a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que h' est dérivable en 1 et en -1 .
b) Vérifier que $P(x) - x = -\frac{1}{8}(x-1)^3(x+3)$; en déduire $h \geq |x|$, et comparer $f(0), g(0), h(0)$.

Exercice 48 Dérivable n fois, mais pas $n+1$ ★★★

corrigé p. 57

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n |x|$ (ainsi $f_0(x) = |x|$) ; $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$.

- Montrer que, pour $n \geq 1$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_n = (n+1)f_{n-1}$ (traiter $x > 0$, $x < 0$, puis $x = 0$).
- En déduire que f_n est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f_n^{(n)}(x) = (n+1)! |x|$, mais pas $n+1$ fois en 0.
- Soit $P(x) = a_m x^m + \dots + a_d x^d$ ($a_m \neq 0$). Montrer que $P(x)|x|$ est m fois dérivable sur $\mathbb{R}$, pas $m+1$ fois en 0.
- a) Calculer $Q''(x)$ pour $Q(x) = (x^3 - 2x^2)|x|$; combien de fois Q est-elle dérivable en 0 ?
b) Montrer que $s : x \mapsto |x| \sin x$ est dérivable en 0 ; est-elle deux fois dérivable en 0 ?

23 Variations et extremums

Dériver, factoriser $f'(x)$, étudier son signe, dresser le tableau (limites aux bornes ouvertes, valeurs aux extremums). Si $f'(a) = 0$, il n'y a extremum local que si f' **change de signe** en a .

Exercice 49 Trois tableaux de variations ★

corrigé p. 58

Pour chaque fonction : dérivée, signe de la dérivée, tableau de variations, extremums.

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$. Quel est le minimum de f , et en quels points est-il atteint ?
2. $g(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$ sur $]3, +\infty[$. En déduire que $x^2 + 7 \geq 14(x - 3)$ pour $x > 3$, et le contrôler à l'aide d'un carré.
3. $h(x) = x^2\sqrt{5-x}$ sur $]-\infty, 5]$ (dérivable sur $]-\infty, 5[$). Maximum de h sur $[-2, 5]$? Limite en 5^- du taux de variation de h en 5 ? Interpréter.

Exercice 50 Deux fonctions trigonométriques ★

corrigé p. 59

1. Soit $f(x) = x + \sin 2x$ sur $[0, \pi]$. Montrer que $f'(x) = 1 + 2 \cos 2x$, résoudre $f'(x) = 0$ dans $[0, \pi]$ et dresser le tableau de variations de f . En déduire que $0 \leq x + \sin 2x \leq \pi$ sur $[0, \pi]$.
2. Soit $g(x) = 3 \sin x - \sin^3 x$ ($x \in \mathbb{R}$). Montrer que $g'(x) = 3 \cos^3 x$, dresser le tableau de variations de g sur $[0, 2\pi]$ et en déduire que $|3 \sin x - \sin^3 x| \leq 2$ sur $\mathbb{R}$. Retrouver $g(x) \leq 2$ en factorisant $2 - 3s + s^3$ ($s = \sin x$).

Exercice 51 Retrouver une fonction ★★

corrigé p. 59

1. Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c réels), qui admet un maximum local égal à 8 en -2 et un extremum local en $\frac{2}{3}$. a) Montrer que $a = 2, b = -4, c = 0$. b) Réciproquement, vérifier que f convient ; nature et valeur de l'extremum en $\frac{2}{3}$? c) Vérifier que $f(x) - 8 = (x + 2)^2(x - 2)$ et $f(x) + \frac{40}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{10}{3}\right)$; en déduire le maximum et le minimum de f sur $\left[-\frac{10}{3}, 2\right]$ et les points où ils sont atteints.
2. Déterminer a et b pour que $g(x) = a \sin x + b \cos x$ admette en $\frac{\pi}{3}$ un maximum égal à 2 (condition nécessaire, puis réciproque), puis dresser le tableau de variations de g sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 52 Un paramètre dans une fraction ★★

corrigé p. 60

Pour m réel, on pose $f_m(x) = \frac{x+m}{x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Calculer $f'_m(x)$; montrer que f'_m s'annule en deux réels $x_1 < 0 < x_2$ tels que $x_1 x_2 = -1$, et dresser le tableau de variations de f_m (limites en $\pm\infty$ comprises).
2. Montrer que $f_m(x_1) = \frac{1}{2x_1}$ et $f_m(x_2) = \frac{1}{2x_2}$. En déduire que $\frac{m-\sqrt{m^2+1}}{2} \leq f_m(x) \leq \frac{m+\sqrt{m^2+1}}{2}$ pour tout réel x , et que le produit du maximum et du minimum de f_m ne dépend pas de m .
3. Déterminer m pour que le maximum de f_m soit égal à 1. Pour cette valeur, écrire $1 - f_m(x)$ et $f_m(x) - \min f_m$ à l'aide de carrés, et retrouver ainsi l'encadrement de la question 2.

Exercice 53 Un sinus sous une racine ★★★

corrigé p. 60

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π -périodique, et qu'il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{(2\cos x - 1)(2 - \cos x)}{(5 - 4\cos x)\sqrt{5 - 4\cos x}}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$; en déduire que $|f| \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ (égalité ?).
4. Contrôle : montrer que $\frac{1}{4} - f(x)^2 = \frac{(2\cos x - 1)^2}{4(5 - 4\cos x)}$.
5. Soit $OB = 2$, A sur le cercle de centre O et de rayon 1, et $x = \widehat{AOB} \in]0, \pi[$. Montrer que $AB = \sqrt{5 - 4\cos x}$ et (aire de OAB) que $\sin \widehat{ABO} = f(x)$. Quand $\widehat{ABO}$ est-il maximal ? Que dire alors de (AB) ?

Exercice 54 Un ou trois extremums selon m ★★★

corrigé p. 61

Pour m réel, on pose $f_m(x) = \frac{x^2 + m}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que f_m est paire et que $f_m(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{m-1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; en déduire les limites de f_m en $\pm\infty$.
2. Montrer que $f'_m(x) = \frac{x(x^2 + 2 - m)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
3. On suppose $m \leq 2$. Dresser le tableau de variations de f_m et donner son minimum.
4. On suppose $m > 2$. Tableau de variations de f_m : trois extremums locaux, minimum $2\sqrt{m-1}$.
5. a) Montrer que $\frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 4$ pour tout réel x (cas d'égalité ?). b) Déterminer les réels m tels que $f_m(x) \geq 2$ pour tout réel x .

24

Inégalités et optimisation

Prouver $f \geq g$: montrer que $\min(f - g) \geq 0$. Optimiser : une variable, son intervalle, une fonction.

Exercice 55 Trois inégalités, trois fonctions ★

corrigé p. 62

Démontrer chaque inégalité en étudiant une fonction, et préciser le cas d'égalité.

1. Pour tout $x > -1$: $\frac{x^2 + 1}{x + 1} \geq 2\sqrt{2} - 2$.
2. Pour tout $x \in]0, 1[$: $\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} \geq 9$.
3. Pour tout $x \geq 0$: $\sin x + \cos x \leq 1 + x$ (traiter d'abord $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis écrire $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$).

Exercice 56 Le mobile qui fait demi-tour ★

corrigé p. 62

Un mobile se déplace sur un axe ; sa position (en m) à l'instant t (en s) est $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$, $t \in [0, 5]$. Sa vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$, son accélération $a(t) = v'(t)$.

1. Calculer et factoriser $v(t)$. Quand le mobile avance-t-il, recule-t-il, s'arrête-t-il ?
2. Dresser le tableau de variations de x sur $[0, 5]$. Quelle est la position la plus éloignée de l'origine ? Quelle distance totale le mobile parcourt-il entre $t = 0$ et $t = 5$?
3. Calculer $a(t)$ et étudier les variations de v . À quel instant le mobile recule-t-il le plus vite ? Quelle est la plus grande valeur de $|v(t)|$?

Exercice 57 La vitesse la plus économique ★★

corrigé p. 63

Une camionnette parcourt 400 km à vitesse constante v (en km/h), $0 < v \leq 130$. Les frais fixes (chauffeur, assurance) coûtent 128 DH par heure, le carburant $\frac{v^3}{8000}$ DH par heure.

1. Montrer que le coût d'un kilomètre, en DH, est $C(v) = \frac{128}{v} + \frac{v^2}{8000}$.
2. Étudier les variations de C sur $]0, 130]$. Vitesse la plus économique ? Coût et durée du trajet ?
3. Sur une route limitée à 60 km/h, quelle vitesse choisir ? Quel est alors le coût du trajet ?
4. À 100 km/h : quel gain de temps et quel surcoût par rapport à la question 2 ?

Exercice 58 L'entonnoir de volume maximal ★★

corrigé p. 63

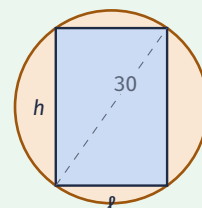
Dans un disque de carton de rayon 10 cm, on découpe un secteur que l'on enroule en un entonnoir conique de génératrice 10 cm, de hauteur h et de rayon de base r ($0 < h < 10$).

1. Montrer que $r^2 = 100 - h^2$, puis que le volume est $V(h) = \frac{\pi}{3}(100 - h^2)h$.
2. Étudier V sur $]0, 10[$; hauteur, rayon et volume (en cm³) de l'entonnoir le plus grand ?
3. L'arc du secteur a pour longueur le périmètre de la base : angle du secteur (au degré près) ?
4. En posant $h = 10 \sin x$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, déduire de 2 que $\sin x \cos^2 x \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ sur $\mathbb{R}$ (égalité ?).

Exercice 59 La poutre taillée dans un tronc ★★★

corrigé p. 63

Dans un tronc cylindrique de diamètre 30 cm, on taille une poutre de section rectangulaire, de largeur ℓ et de hauteur h (en cm), le rectangle étant inscrit dans le cercle de diamètre 30 (figure). La résistance de la poutre à la flexion est proportionnelle à $R = \ell h^2$, et sa rigidité à $K = \ell h^3$.



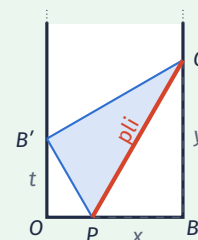
1. Montrer que $\ell^2 + h^2 = 900$ et $R = \ell(900 - \ell^2)$ ($0 < \ell < 30$). Dimensions de la poutre la plus résistante ? Rapport $\frac{h}{\ell}$?
2. Montrer que $K = \ell(900 - \ell^2)\sqrt{900 - \ell^2}$ et $K'(\ell) = (900 - 4\ell^2)\sqrt{900 - \ell^2}$. Dimensions de la poutre la plus rigide ? Rapport $\frac{h}{\ell}$?
3. Quelle part du disque ces deux poutres utilisent-elles ? Comparer avec la plus grosse poutre.
4. Sur un diamètre $[AC]$, on place M tel que $AM = 10$; la perpendiculaire à (AC) en M coupe le cercle en B . Montrer que AB et BC sont les dimensions de la poutre la plus résistante.

Exercice 60 Le pli d'une bande de papier ★★★

corrigé p. 64

Une bande de papier de largeur 12 cm, très longue, est posée dans un repère orthonormé (unité : le cm) : bord inférieur $[OB]$, $O(0, 0)$, $B(12, 0)$, bords latéraux sur les droites $x = 0$ et $x = 12$. On rabat le coin B sur le bord gauche, en $B'(0, t)$ avec $t > 0$: le pli est le segment $[PQ]$, avec P sur $[OB]$ et $Q(12, y)$ sur le bord droit. On pose $x = PB$.

1. Le pliage est la symétrie d'axe (PQ) : justifier que $PB' = PB$ et $QB' = QB$.
2. Montrer que $t^2 = 24(x - 6)$, que $6 < x \leq 12$ et que $y = \frac{12x}{t}$.
3. Montrer que $PQ^2 = \frac{x^3}{x-6}$.
4. Étudier $\varphi(x) = \frac{x^3}{x-6}$ sur $]6, 12]$; pli le plus court : x , PQ , t , y ?



25

Défis de concours

Se ramener à une variable, étudier une fonction, raisonner par condition nécessaire.

Exercice 61 Une inégalité olympique ★★★

corrigé p. 64

Soit $a, b, c \geq 0$ tels que $a + b + c = 3$, et $E = ab + bc + ca - \frac{2}{3}abc$. On veut prouver que $0 \leq E \leq \frac{7}{3}$.

1. On suppose $c = \min(a, b, c)$. Montrer que $c \leq 1$ et que $E = ab\left(1 - \frac{2c}{3}\right) + c(3 - c)$; en déduire que $E \geq 0$, et préciser quand $E = 0$.
2. Montrer que $ab \leq \frac{(3-c)^2}{4}$, puis que $E \leq \varphi(c)$, où $\varphi(c) = \frac{(3-c)^2}{4}\left(1 - \frac{2c}{3}\right) + c(3 - c)$.
3. Montrer que $\varphi(c) = \frac{9}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{6}$, étudier φ sur $[0, 1]$ et conclure. Cas d'égalité ?
4. En déduire que si $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$, alors $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ (OIM 1984).

Exercice 62 Le maximum de $a^2b + b^2c + c^2a$ ★★★

corrigé p. 65

Soit $a, b, c \geq 0$ tels que $a + b + c = 3$, et $E(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a$.

1. Vérifier que $E(a, b, c) = E(b, c, a) = E(c, a, b)$; en déduire qu'on peut supposer $(a - b)(b - c) \geq 0$.
2. Montrer que $b(a + c)^2 - (E(a, b, c) + abc) = c(a - b)(b - c)$, puis que $E(a, b, c) \leq b(3 - b)^2$.
3. Étudier $\psi(b) = b(3 - b)^2$ sur $[0, 3]$ et conclure que $E \leq 4$.
4. Déterminer les cas d'égalité. Que vaut $E(1, 1, 1)$? Commenter.
5. En déduire que si $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$, alors $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$.

Exercice 63 L'inégalité des moyennes ★★★

corrigé p. 65

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, (P_n) est la propriété : « pour tous réels $a_1, \dots, a_n > 0$, $a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n$, avec égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$ ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A > 0$ et $\varphi(x) = \left(\frac{nA+x}{n+1}\right)^{n+1} - A^n x$ ($x > 0$). Montrer que $\varphi'(x) = \left(\frac{nA+x}{n+1}\right)^n - A^n$, puis que $\varphi(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = A$.
2. Démontrer (P_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence (poser $A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$).
3. a) Montrer que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 2$. b) Si $x, y, z > 0$ et $x+y+z = 12$, appliquer (P_6) à $x, \frac{y}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{3}, \frac{z}{3}, \frac{z}{3}$ pour trouver le maximum de xy^2z^3 . c) Trouver de même le maximum de $x^2(1-x)^3$ sur $[0, 1]$, puis le retrouver par une étude de fonction.

Exercice 64 Un polynôme qui a une racine réelle ★★★

corrigé p. 66

Pour a, b réels, $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2ax + 4$. On cherche la plus petite valeur de $a^2 + b^2$ lorsque P a au moins une racine réelle.

1. Montrer que $P(0) \neq 0$ et que, pour $x \neq 0$, $P(x) = x^2(t^2 + at + b - 4)$ avec $t = x + \frac{2}{x}$.
2. Étudier $u(x) = x + \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et en déduire que $|t| \geq 2\sqrt{2}$; montrer que tout réel t tel que $|t| \geq 2\sqrt{2}$ s'écrit $x + \frac{2}{x}$.
3. Montrer que $(at + b)^2 \leq (a^2 + b^2)(t^2 + 1)$ pour tous réels a, b, t .

4. Si P a une racine réelle x_0 et $t_0 = x_0 + \frac{2}{x_0}$, montrer que $a^2 + b^2 \geq h(t_0^2)$ avec $h(u) = \frac{(u-4)^2}{u+1}$. Étudier h sur $[8, +\infty[$ et conclure que $a^2 + b^2 \geq \frac{16}{9}$.
5. Montrer que $\frac{16}{9}$ est atteint : trouver a et b , et vérifier que $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ est racine de P .

Exercice 65 Des inégalités qui imposent la dérivée ★★★★★

corrigé p. 66

1. Soit φ définie sur $[a, b]$, dérivable à droite en a , telle que $\varphi(x) \geq \varphi(a)$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que $\varphi'_d(a) \geq 0$. Rappeler le résultat du cours lorsque a est intérieur à un intervalle ouvert où φ est dérivable.
2. a) Déterminer les réels k tels que $\frac{1}{1+x} \geq 1 + kx$ pour tout $x > -1$. b) Existe-t-il un réel k tel que $k \sin x \leq \tan x$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$? c) Déterminer les réels k tels que $\sin x \leq kx$ pour tout $x \geq 0$.
3. On cherche les réels a tels que $\cos x \geq 1 - ax^2$ pour tout réel x . a) Pourquoi la méthode de 2 ne donne-t-elle rien ici ? b) À l'aide de la limite de $\frac{1-\cos x}{x^2}$ en 0, montrer qu'il faut $a \geq \frac{1}{2}$. c) Montrer que tout $a \geq \frac{1}{2}$ convient (étudier $\cos x - 1 + ax^2$ sur $[0, +\infty[$).

Exercice 66 La meilleure droite pour approcher $\sqrt{x}$ ★★★★★

corrigé p. 67

$D : y = mx + p$ approche $\sqrt{x}$ à ε près si $|\sqrt{x} - (mx + p)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 1]$; on cherche le plus petit ε .

1. Soit $O(0, 0)$ et $U(1, 1)$, extrémités de l'arc Γ de la courbe $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$). Trouver le point de Γ où la tangente est parallèle à (OU) , et l'équation de cette tangente.
2. Étudier $d(x) = \sqrt{x} - x$ sur $[0, 1]$; en déduire que $x \leq \sqrt{x} \leq x + \frac{1}{4}$ sur $[0, 1]$ et interpréter.
3. Montrer que $D_0 : y = x + \frac{1}{8}$ convient avec $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (écart atteint en trois points, signes alternés).
4. Pour une droite D quelconque, soit $e(x) = \sqrt{x} - (mx + p)$. Vérifier que $3e(0) - 4e(\frac{1}{4}) + e(1) = -1$; en déduire que si D approche $\sqrt{x}$ à ε près, alors $\varepsilon \geq \frac{1}{8}$.
5. Montrer que D_0 est la seule droite qui approche $\sqrt{x}$ à $\frac{1}{8}$ près.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

26

Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

Méthode : on simplifie le taux par h , puis on fait tendre h vers 0.

a) $f(-2+h) - f(-2) = (h-2)^2 + 3(h-2) + 2 = h^2 - h$, donc $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = h - 1 \rightarrow -1$: $\boxed{f'(-2) = -1}$.

b) $\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{8}{2+h} - 4 \right) = \frac{-4h}{h(2+h)} = \frac{-4}{2+h} \rightarrow -2$: $\boxed{g'(2) = -2}$.

c) $\frac{k(2+h)-k(2)}{h} = \frac{\sqrt{4+3h}-2}{h} = \frac{(4+3h)-4}{h(\sqrt{4+3h}+2)} = \frac{3}{\sqrt{4+3h}+2} \rightarrow \frac{3}{4}$: $\boxed{k'(2) = \frac{3}{4}}$.

d) $m(1+h) - m(1) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 - 2h + 1 = h + 3h^2 + h^3$: taux $1 + 3h + h^2 \rightarrow 1$: $\boxed{m'(1) = 1}$.

e) $\frac{\sin(\frac{\pi}{3}+h)-\sin \frac{\pi}{3}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin h}{h}$. Or $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ et $\frac{\cos h - 1}{h} = -h \cdot \frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$ (chapitre 10) : $\boxed{\sin' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}}$.

f) Pour $x \neq 1$ ($x \neq 0$) : $\frac{u(x)-u(1)}{x-1} = \frac{1-x^2}{x^2(x-1)} = -\frac{1+x}{x^2} \rightarrow -2$: $\boxed{u'(1) = -2}$.

■ Corrigé de l'exercice 2

1. (T_a) : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. a) $f(-2) = -2$: $y = -(x+2) - 2$, $\boxed{y = -x - 4}$; b) $g(2) = 4$: $\boxed{y = -2x + 8}$;

c) $k(2) = 2$: $y = \frac{3}{4}(x-2) + 2$, $\boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$; d) $m(1) = -1$: $\boxed{y = x - 2}$; e) $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

f) $u(1) = 1$: $\boxed{y = -2x + 3}$. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur : seules les tangentes b) et f) (pente -2) le sont.

2. $\sqrt{4,06} = k(2,02) \approx k(2) + 0,02 \times \frac{3}{4} = \boxed{2,015}$ (calculatrice : 2,01494...) ; $\frac{8}{1,996} = g(2 - 0,004) \approx$

$4 + (-0,004)(-2) = \boxed{4,008}$ (4,00802...) ; $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0,02\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,02 \times \frac{1}{2} \approx \boxed{0,8760}$ (0,87585...).
L'erreur est petite devant h .

■ Corrigé de l'exercice 3

a) Polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $\boxed{10x^4 - 12x^2 + 1}$. b) Sur $\mathbb{R}$: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. c) Sur

$\mathbb{R}^*$ (x^{-1} et x^{-2}) : $-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \boxed{\frac{4-3x}{x^3}}$. d) Sur $\mathbb{R}^*$: $(x^{-5})' = -5x^{-6} = \boxed{-\frac{5}{x^6}}$. e) Définie sur $[0, +\infty[$, dérivable

sur $]0, +\infty[$ ($\sqrt{\quad}$ n'est pas dérivable en 0) : $\boxed{\frac{2}{\sqrt{x}} - 3}$. f) Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{2 \cos x + 3 \sin x}$. g) $\boxed{5(1 + \tan^2 x) + 2x}$.

h) Sur $]0, +\infty[$ (π^2 est une constante) : $\boxed{2x - \frac{3}{\sqrt{x}}}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- a) $(uv)' = u'v + uv' : 2x(3x-2) + 3(x^2+1) = 9x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$. b) Sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\} : \frac{2(x+3)-(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$.
 c) $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, x^2+4 > 0 : -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$ sur $\mathbb{R}$. d) $(u^3)' = 3u^2u' : 3(x^2-2x)^2(2x-2) = 6(x-1)(x^2-2x)^2$. e)
 $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 > 0$, et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} : \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ sur $\mathbb{R}$. f) Sur $]0, +\infty[: 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$. g) $(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b) : -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. h) $\cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos 2x$
 (contrôle : $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$). i) $\sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$. j) Sur $\mathbb{R} : \frac{2x(x^2+2)-2x(x^2-4)}{(x^2+2)^2} = \frac{12x}{(x^2+2)^2}$.

■ Corrigé de l'exercice 5

1. $f'(x) = 6x^5 - 12x^2 + 1$, $f''(x) = 30x^4 - 24x$, $f^{(3)}(x) = 120x^3 - 24$, $f^{(4)}(x) = 360x^2$, $f^{(5)}(x) = 720x$,
 $f^{(6)}(x) = 720$, et $f^{(n)} = 0$ pour $n \geq 7$ (dérivée d'une constante).
 2. a) $v(t) = -6 \sin 2t + 8 \cos 2t$, $a(t) = -12 \cos 2t - 16 \sin 2t$, $v(0) = 8 \text{ cm/s}$. b) $a(t) = -4(3 \cos 2t + 4 \sin 2t) = -4x(t)$. **Récurrence.** Initialisation : $x^{(0)} = x = (-4)^0 x$. Hérédité : si $x^{(2n)} = (-4)^n x$, alors
 $x^{(2n+2)} = (x^{(2n)})'' = (-4)^n x'' = (-4)^n (-4)x = (-4)^{n+1} x$. Conclusion : $x^{(2n)} = (-4)^n x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ Corrigé de l'exercice 6

Méthode : dérivée, signe de la dérivée sur chaque intervalle, puis théorème du cours.

- a) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$: f croît sur $]-\infty, -2]$, décroît sur $[-2, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$; $f(-2) = 20$, $f(1) = -7$. b) Sur $\mathbb{R} \setminus \{3\} : g'(x) = \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2} < 0$: g est strictement décroissante sur $]-\infty, 3[$
 et sur $]3, +\infty[$ (pas sur leur réunion : $g(2) = -3 < g(4) = 5$). c) Pour $x > 0$, $h'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2(x\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$,
 du signe de $x\sqrt{x} - 1$: < 0 sur $]0, 1[$, > 0 sur $]1, +\infty[$ ($x \mapsto x\sqrt{x}$ est strictement croissante). Donc
 $h(x) \geq h(1) = -3$, soit $x^2 + 3 \geq 4\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ (égalité en 1). d) $k'(x) = 3 - 2 \cos 2x \geq 3 - 2 = 1 > 0$:
 k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			20		-7		$+\infty$
	$-\infty$						

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$-$
g	1	$-\infty$	$+\infty$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h	0	$\searrow$ -3 $\nearrow$	$+\infty$

■ Corrigé de l'exercice 7

1. $g'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-1)(x-3)$. $5x^2 \geq 0$: g' a le signe de $(x-1)(x-3)$, sauf en 0 où il s'annule **sans changer de signe**. Maximum local $g(1) = 1$, minimum local $g(3) = -27$. En 0, $g' > 0$ de part et d'autre : g est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, donc $g(x) < g(0) < g(y)$ pour $x < 0 < y \leq 1$: **pas d'extremum** en 0 (tangente horizontale qui traverse la courbe).
 2. **Condition nécessaire.** $f'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2(ax+b)}{x^3} = \frac{-ax-2b}{x^3}$. 2 est intérieur à $]0, +\infty[$: il faut $f'(2) = 0$ et $f(2) = 1$, soit $-2a-2b = 0$ et $\frac{2a+b}{4} = 1$, d'où $a = 4$, $b = -4$. **Vérification.** $f(x) = \frac{4(x-1)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$:
 $f' > 0$ sur $]0, 2[$, $f' < 0$ sur $]2, +\infty[$: **maximum local**. Enfin, pour $x \neq 0$, $1-f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2} = \frac{(x-2)^2}{x^2} \geq 0$:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g		$-\infty$	0	1	-27	$+\infty$		

$$f \leq 1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.$$

■ Corrigé de l'exercice 8

On étudie les limites du taux $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand $x \rightarrow a^+$ et $x \rightarrow a^-$.

a) $f(3) = 0$. Pour $x > 3$: $\frac{f(x)}{x-3} = x+1 \rightarrow 4$; pour $x < 3$: $\frac{f(x)}{x-3} = -(x+1) \rightarrow -4$. $f'_d(3) = 4 \neq f'_g(3) = -4$: f n'est pas dérivable en 3 ; $A(3, 0)$ est un **point anguleux**, de demi-tangentes $y = 4x - 12$ ($x \geq 3$) et $y = -4x + 12$ ($x \leq 3$).

b) $g(5) = 0$. Pour $x < 5$: $\frac{g(x)}{x-5} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-x}}{-(5-x)} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-x}} \rightarrow -\infty$: g n'est pas dérivable à gauche en 5 ; demi-tangente **verticale** en $B(5, 0)$, dirigée vers le haut ($g \geq 0$).

c) $h(0) = 0$. Pour $x < 0$: $\frac{h(x)}{x} = x+1 \rightarrow 1$; pour $x > 0$: $\frac{h(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. $h'_g(0) = h'_d(0) = 1$: h est dérivable en 0, $h'(0) = 1$, tangente $y = x$ (pas de point anguleux).

27

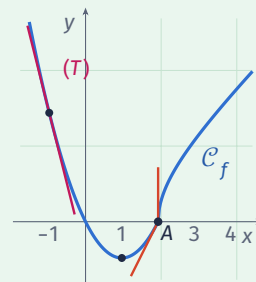
Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

1. $f(2) = 0$. À gauche : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x \rightarrow 2$: $f'_g(2) = 2$.

À droite : $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{(\sqrt{x-2})^2} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty$: f n'est pas dérivable à droite, donc **pas dérivable en 2**. En $A(2, 0)$: demi-tangente à gauche $y = 2x - 4$ ($x \leq 2$) et demi-tangente à droite **verticale** (vers le haut).

2. Sur $]-\infty, 2[$: $f'(x) = 2x - 2$; sur $]2, +\infty[$ ($x^2 - 4 > 0$) : $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$. f décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$. Limites : $x^2 - 2x \rightarrow +\infty$ en $-\infty$, $\sqrt{x^2 - 4} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Minimum $f(1) = -1$.



x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
f	$+\infty$	-1	0	$+\infty$

3. $f(-1) = 3$, $f'(-1) = -4$: (T) : $y = -4x - 1$. $f(x) = 3$: si $x \leq 2$, $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$ et seul $-1 \leq 2$ convient ; si $x > 2$, $x^2 - 4 = 9$, $x = \sqrt{13} > 2$. $S = \{-1, \sqrt{13}\}$. 4. Figure ci-dessus (demi-tangentes en rouge).

■ Corrigé de l'exercice 10

1. a) $u'(x) = 12(3x+1)^3(x-2) + (3x+1)^4 = (3x+1)^3(12x-24+3x+1) = (3x+1)^3(15x-23)$. b)

$v'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$. c) $w = s^2$ avec $s(x) = \sin 3x$, $s'(x) = 3 \cos 3x$: $w'(x) = 2 \sin 3x \times 3 \cos 3x =$

$3 \sin 6x$. d) $z(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$: $z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+3}{2x\sqrt{x}}$.

2. a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x = 2x(2x^2 - 3x - 2) = 2x(2x+1)(x-2)$ (racines du trinôme : 2 et $-\frac{1}{2}$) ; tableau ci-dessous ($f \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$: terme x^4). b) Minimum local $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{16}$, maximum local $f(0) = 0$, minimum local $f(2) = -8$. Développement : $(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 2x + 2) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8$ ✓. Comme $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$, $f(x) + 8 \geq 0$: le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-8 = f(2)$. c) $f(1) = -3$, $f'(1) = -6$: $y = -6x + 3$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$			
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{16}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

■ Corrigé de l'exercice 11

1. $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -1^+$: **non dérivable** à droite en -1 (demi-tangente verticale).

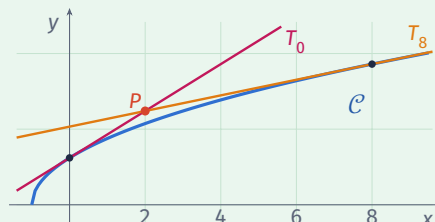
Pour $x > -1$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

2. $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$: T_0 : $y = \frac{x}{2} + 1$.

3. D : $y = \frac{x+1}{6}$ a pour pente $\frac{1}{6}$: $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} = \frac{1}{6} \iff \sqrt{a+1} = 3 \iff a = 8$; $f(8) = 3$: T_8 : $y = \frac{x-8}{6} + 3$, $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{3}$.

4. Avec $a = t^2 - 1$: T_a : $y = \frac{x-a}{2t} + t = \frac{x+1+t^2}{2t}$. $P \in T_a \iff 4t = 3+t^2 \iff t^2 - 4t + 3 = 0 \iff t \in \{1, 3\} \iff a \in \{0, 8\}$: les tangentes passant par P sont T_0 et T_8 .

5. Comme en 4., $P \in T_a \iff t^2 - 2\beta t + (\alpha + 1) = 0$, d'inconnue $t = \sqrt{a+1} > 0$; à chaque $t > 0$ correspond une seule tangente (pente $\frac{1}{2t}$). Produit des racines : $\alpha + 1 > 0$; somme : 2β ; discriminant réduit : $\beta^2 - (\alpha + 1)$. Si $\beta > f(\alpha) = \sqrt{\alpha + 1}$: deux racines distinctes, de produit et de somme positifs, donc positives : **deux tangentes**. Si $\beta = f(\alpha)$: une racine double $t = \beta > 0$: **une tangente** (celle en P , qui est sur $\mathcal{C}$). Si $\beta < f(\alpha)$: soit $\beta^2 < \alpha + 1$ (pas de racine), soit $\beta \leq -\sqrt{\alpha + 1} < 0$ (racines de somme négative et de produit positif, donc négatives) : **aucune**.



■ Corrigé de l'exercice 12

1. $\varphi'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) \leq 0$ sur $[0, 4]$, ≥ 0 sur $[4, 6]$: φ décroît sur $[0, 4]$, croît sur $[4, 6]$, donc $\varphi(x) \geq \varphi(4) = 64 - 96 + 32 = 0$. $\varphi(4) = \varphi'(4) = 0$: 4 est racine double, et $\varphi(x) = (x - 4)^2(x + 2)$ (développer pour vérifier).

x	0	4	6		
$\varphi'(x)$	0	-	0	+	
φ	32		0		32

2. a) Dans une coupe par un plan contenant l'axe : au niveau du disque supérieur du cylindre (hauteur h), le cône a pour rayon r ; par Thalès dans le triangle (sommet, centre de la base, bord de la base) : $\frac{r}{6} = \frac{9-h}{9}$, d'où $h = 9 - \frac{3}{2}r$ et $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{3}{2}(6 - r) = \frac{3\pi}{2}r^2(6 - r)$. b) $r^2(6 - r) = 6r^2 - r^3 = 32 - \varphi(r) \leq 32$: $V(r) \leq 48\pi$, avec égalité si et seulement si $r = 4$. Le cylindre de volume maximal a pour rayon 4 cm et pour hauteur 3 cm ; le cône a pour volume $\frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 9 = 108\pi$: fraction $\frac{48}{108} = \frac{4}{9}$. c) Aire latérale : $A(r) = 2\pi r h = 3\pi(6r - r^2)$, $A'(r) = 3\pi(6 - 2r)$: maximum pour $r = 3$ ($h = 4,5$, $A = 27\pi$) : **ce n'est pas le même cylindre**.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. $f'(x) = \cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x + \cos x)$.
2. Sur $[0, 2\pi]$: $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$; $1 + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x + \frac{\pi}{4} \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[\iff x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. D'où le signe de f' (produit) et le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	1	$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$	-1	$\frac{1}{2} - \sqrt{2}$	-1	1

f est 2π -périodique : sur $\mathbb{R}$, **maximum** $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ (en $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$) et **minimum** -1 (en $\pi + 2k\pi$ et $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$).

3. $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$, donc $f(x) = t + \frac{t^2-1}{2} = \frac{(t+1)^2}{2} - 1$, avec $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Minimum -1 pour $t = -1$, maximum pour $t = \sqrt{2}$: $\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2} - 1 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. $f'(x) = (x+1)(x-3)$: $f' > 0$ sur $[-2, -1[$ et $]3, 4]$, $f' < 0$ sur $] -1, 3[$. f croît sur $[-2, -1]$, décroît sur $[-1, 3]$, croît sur $[3, 4]$: maximum local en -1 , minimum local en 3 (changements de signe de f').

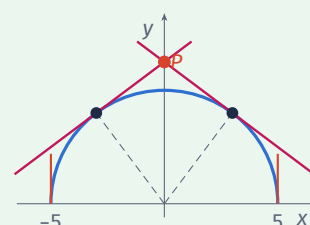
x	-2	-1	3	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		$\frac{11}{3}$			$-\frac{14}{3}$

$\frac{4}{3}$ $\nearrow$ $\searrow$ -7 $\nearrow$

2. $f'(0) = -3$, $f'(1) = -4$. Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}$. Parallèle à $y = -3x$: $x^2 - 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$. Comme $f'(x) = (x-1)^2 - 4 \geq -4$, le plus petit coefficient directeur est -4 (en $x = 1$, sommet de la parabole).
3. $f_1'(x) = x^2 - 2x - 3 = f'(x)$ et $f_1(0) = 2$ ✓ ; $f_2' = 2f' \neq f'$ ($f_2'(0) = -6$) ; $f_3' = f'$ mais $f_3(0) = 5 \neq 2$. **Seule f_1 convient.** C'est la seule : $(f - f_1)' = 0$ sur l'intervalle $[-2, 4]$, donc $f - f_1$ est constante (croissante et décroissante), nulle en 0 : $f = f_1$ (valeurs du tableau ci-dessus).

■ Corrigé de l'exercice 15

1. Pour $-5 < x < 5$: $\frac{f(x)}{x-5} = -\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}} \rightarrow -\infty$ en 5^- et $\frac{f(x)}{x+5} = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}} \rightarrow +\infty$ en -5^+ : non dérivable ; **demi-tangentes verticales** en $(5, 0)$ et $(-5, 0)$. $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.
2. $b = \sqrt{25 - a^2} > 0$, $f'(a) = -\frac{a}{b}$: $y = -\frac{a}{b}(x - a) + b \Leftrightarrow by = -ax + a^2 + b^2 \Leftrightarrow ax + by = 25$. Un vecteur directeur est $\vec{u}(b, -a)$ et $\vec{u} \cdot \vec{OM} = ba - ab = 0$: la tangente est **perpendiculaire au rayon (OM)**.
3. $P \in T \Leftrightarrow \frac{25}{4}b = 25 \Leftrightarrow b = 4 \Leftrightarrow a = \pm 3$: $3x + 4y = 25$ et $-3x + 4y = 25$. Pente $-\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = -b$, puis $2b^2 = 25$: $b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $a = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$: $y = x + 5\sqrt{2}$.



■ Corrigé de l'exercice 16

- a) **Faux** : $f(x) = x$ est dérivable en 0, $|f| = |x|$ ne l'est pas. b) **Faux** : $f = |x|$, $g = -|x|$, $f + g = 0$. c) **Vrai**, par l'absurde : si $f + g$ était dérivable en a , $g = (f + g) - f$ le serait. d) **Faux** : $f = g = |x|$ en 0, et $fg = x^2$ est dérivable. e) **Vrai** : $h = g - f \geq 0$ et $h(a) = 0$: h admet un minimum en a (intérieur à $\mathbb{R}$) et est dérivable, donc $h'(a) = 0$, soit $f'(a) = g'(a)$ (les courbes sont tangentes). f) **Faux** : avec $f(x) = |x|$ et $a = 0$, le quotient vaut $\frac{|h|-|h|}{2h} = 0$, qui tend vers 0, mais f n'est pas dérivable en 0 (la réciproque est vraie : si f est dérivable, la limite vaut $f'(a)$). g) **Vrai** : $\psi(x) = x - f(x)$ vérifie

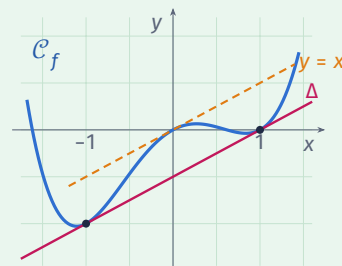
$\psi' = 1 - f' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$: ψ croît, $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$. h) **Faux** : $x^3 + x$ a pour dérivée $3x^2 + 1 > 0$: strictement croissante, sans extremum.

28

Corrigés du niveau 3

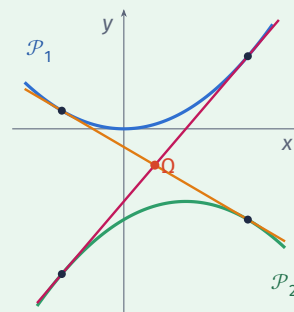
■ Corrigé de l'exercice 17

- $f'(x) = 4x^3 - 4x + 1$. $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$: $y = x - 1$. $f(-1) = -2$, $f'(-1) = 1$: $y = (x + 1) - 2 = x - 1$. **C'est la même droite Δ** , tangente en deux points : une *bitangente*.
- $f(x) - (x - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de Δ , qu'elle touche seulement en $(-1, -2)$ et $(1, 0)$.
- Analyse.** Si $y = mx + p$ est tangente en a et b ($a \neq b$), $g(x) = f(x) - mx - p = x^4 - 2x^2 + (1 - m)x - p$ s'écrit $(x - a)^2 Q(x)$, Q de degré 2 et de coefficient dominant 1. $g(b) = 0$ et $g'(b) = 2(b - a)Q(b) + (b - a)^2 Q'(b) = 0$ donnent $Q(b) = Q'(b) = 0$, d'où $Q = (x - b)^2$ et $g = [x^2 - (a + b)x + ab]^2$. Coefficient de x^3 : $-2(a + b) = 0$; de x^2 : $(a + b)^2 + 2ab = -2$. Donc $b = -a$, $a^2 = 1$: $\{a, b\} = \{-1, 1\}$, et la droite est Δ . **Unicité** ✓.
- $f'(x) = 1 \iff 4x(x^2 - 1) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$: en ± 1 , la tangente est Δ ; en 0 , $f(0) = 0$: tangente $\boxed{y = x}$.



■ Corrigé de l'exercice 18

- $x^2 = -x^2 + 2x - 5 \iff 2x^2 - 2x + 5 = 0$, de discriminant $4 - 40 < 0$: **aucun point commun**.
- $\mathcal{P}_1$ en a : $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. $\mathcal{P}_2$ en b : pente $2 - 2b$, $y = (2 - 2b)(x - b) - b^2 + 2b - 5 = (2 - 2b)x + b^2 - 5$.
- Deux droites sont égales si et seulement si elles ont même pente et même ordonnée à l'origine** : $2a = 2 - 2b$ et $-a^2 = b^2 - 5$. Avec $b = 1 - a$: $-a^2 = a^2 - 2a - 4$, soit $a^2 - a - 2 = 0$: $a = 2$ ou $a = -1$. $a = 2$, $b = -1$: $\boxed{y = 4x - 4}$, contacts $(2, 4)$ et $(-1, -8)$; $a = -1$, $b = 2$: $\boxed{y = -2x - 1}$, contacts $(-1, 1)$ et $(2, -5)$.
- $4x - 4 = -2x - 1 \iff x = \frac{1}{2}$, $y = -2$: $\Omega(\frac{1}{2}, -2)$. La symétrie de centre Ω est $s(x, y) = (1 - x, -4 - y)$. Si $y = x^2$, le point image (X, Y) vérifie $Y = -4 - (1 - X)^2 = -X^2 + 2X - 5$: $s(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{P}_2$, et de même $s(\mathcal{P}_2) \subset \mathcal{P}_1$ ($s \circ s = \text{Id}$). Les points de contact se correspondent : $s(2, 4) = (-1, -8)$, $s(-1, 1) = (2, -5)$.



■ Corrigé de l'exercice 19

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x^3}$ (on écrit $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$).
- Récurrence.** Initialisation : $n = 1$ ci-dessus. Hérédité : si $f^{(n)} = a_n \frac{\sqrt{x}}{x^n}$, alors, par la règle du quotient, $f^{(n+1)}(x) = a_n \left(\frac{1}{2\sqrt{x}x^n} - \frac{n\sqrt{x}}{x^{n+1}} \right) = a_n \left(\frac{1}{2} - n \right) \frac{\sqrt{x}}{x^{n+1}}$, car $\frac{1}{\sqrt{x}x^n} = \frac{\sqrt{x}}{x^{n+1}}$. Conclusion : $f^{(n)} = a_n \frac{\sqrt{x}}{x^n}$ pour tout $n \geq 1$.
- $a_n = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k \right) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{2k-1}{2} \right) = \boxed{(-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n}}$; $f^{(5)}(1) = a_5 = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2^5} = \boxed{\frac{105}{32}}$.

4. $g(x) = f(2x+1) : g'(x) = 2f'(2x+1)$, et par récurrence $g^{(n)}(x) = 2^n f^{(n)}(2x+1)$, d'où $g^{(n)}(0) = 2^n a_n$;
 $a_4 = -\frac{15}{16}$, donc $g^{(4)}(0) = 16 \times \left(-\frac{15}{16}\right) = \boxed{-15}$.

■ Corrigé de l'exercice 20

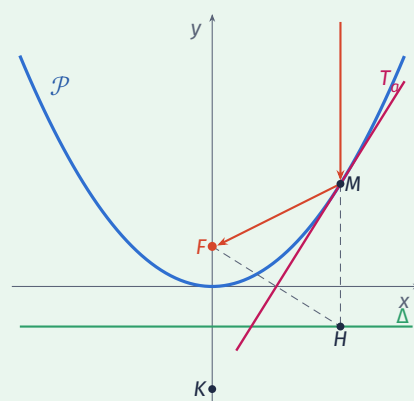
1. On fixe b et on étudie une fonction de la seule variable x . $\varphi'(x) = \frac{n}{2} [x^{n-1} - m^{n-1}]$, avec $m = \frac{x+b}{2} \geq 0$. Comme $t \mapsto t^{n-1}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $\varphi'(x)$ a le signe de $x - m = \frac{x-b}{2}$: φ décroît sur $[0, b]$, croît sur $[b, +\infty[$, et $\varphi(x) \geq \varphi(b) = b^n - b^n = 0$. Avec $x = a$: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, égalité si et seulement si $a = b$ (stricte monotonie de part et d'autre de b). Si $a + b = 2 : 1 \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, soit $\boxed{a^n + b^n \geq 2}$; et $(a+b)^n = 2^n \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq 2^{n-1} (a^n + b^n)$.
2. a) $\psi(x) = F(x, y) = x^3 - 3yx + y^3$, $\psi'(x) = 3(x^2 - y) = 3(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$: ψ décroît sur $[0, \sqrt{y}]$, croît ensuite : $F(x, y) \geq \psi(\sqrt{y}) = y\sqrt{y} - 3y\sqrt{y} + y^3 = \boxed{y^3 - 2y\sqrt{y}}$. b) $(y\sqrt{y})' = \frac{3}{2}\sqrt{y}$, donc $G'(y) = 3y^2 - 3\sqrt{y} = 3\sqrt{y}(y\sqrt{y} - 1)$ ($y > 0$) : G décroît sur $[0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, $G(y) \geq G(1) = -1$. Si $y = 0$, $F(x, 0) = x^3 \geq 0$. Donc $\boxed{F(x, y) \geq -1}$, avec égalité si et seulement si $y = 1$ et $x = \sqrt{y} = 1$. c) $F(x, 0) = x^3 \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$: **non minorée** sur $\mathbb{R}^2$.

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $\sin x \left(1 - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2 \tan x$ ✓.
2. $(\sin x \tan x)' = \cos x \tan x + \sin x (1 + \tan^2 x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, donc, avec 1., $\varphi'(x) = 2 \tan x + \sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)^2 - 2x \geq 2(\tan x - x) \geq 0$ ($\sin x \geq 0$ sur I). φ est croissante sur I et $\varphi(0) = 0$: $\boxed{\sin x \tan x \geq x^2}$ sur I .
3. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2} : \frac{\sin^2 x}{\cos x} \geq x^2$, et $\cos x > 0$, $x^2 > 0$: $\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \geq \cos x}$. Avec $x = \frac{\pi}{6} : \left(\frac{1/2}{\pi/6}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\pi^2 \leq \frac{18}{\sqrt{3}} = \boxed{6\sqrt{3}}$ ($\approx 10,39$; $\pi^2 \approx 9,87$).

■ Corrigé de l'exercice 22

1. $MF^2 = a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = a^4 + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{16} = \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2$, donc $MF = a^2 + \frac{1}{4} = MH$. (F est le foyer, Δ la directrice.)
2. $T_a : y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$; $K(0, -a^2)$ et $FK = \frac{1}{4} + a^2 = FM$.
3. Le milieu $I\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ de $[FH]$ est sur T_a ($2a \cdot \frac{a}{2} - a^2 = 0$), et $\vec{FH}\left(a, -\frac{1}{2}\right)$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}(1, 2a)$ de T_a ($a - a = 0$) : T_a est la **médiatrice** de $[FH]$.
4. La symétrie d'axe T_a fixe M et échange F et H : elle échange les droites (MF) et (MH) , donc T_a est une bissectrice de $\widehat{FMH}$. Un rayon vertical arrive le long de (HM) ; la loi de la réflexion (rayon réfléchi symétrique du rayon incident par rapport à la tangente) le renvoie le long de (MF) : **il passe par F** . Tous les rayons parallèles à l'axe convergent au foyer : on y place le récepteur (antenne) ou la marmite (four solaire) ; inversement, une lampe en F donne un faisceau parallèle (phares).



■ Corrigé de l'exercice 23

1. a) $d = \sqrt{1+h^2}$ (Pythagore) et $\sin \theta = \frac{h}{d} : E = \frac{kh}{d^3} = \frac{kh}{(1+h^2)\sqrt{1+h^2}}$. b) Avec $w(h) = (1+h^2)\sqrt{1+h^2} : w'(h) = 2h\sqrt{1+h^2} + \frac{h(1+h^2)}{\sqrt{1+h^2}} = 3h\sqrt{1+h^2}$, donc $E'(h) = k \frac{w-hw'}{w^2} = \frac{k(1-2h^2)\sqrt{1+h^2}}{w(h)^2}$, du signe de $1-2h^2$. Maximum pour $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \text{ m} : E_{\max} = \frac{k\sqrt{2}/2}{\frac{3}{2}\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}k$.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
E	0	$\frac{2\sqrt{3}}{9}k$	0

R	0	2	$+\infty$
$P'(R)$	+	0	-
P	0	18	0

2. $P(R) = \frac{144R}{(R+2)^2}$, $P'(R) = 144 \frac{(R+2)^2 - 2R(R+2)}{(R+2)^4} = \frac{144(2-R)}{(R+2)^3}$: maximum $P(2) = 18 \text{ W}$ pour $R = 2 \Omega$. En général, $P'(R) = \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}$: maximum $\frac{E^2}{4r}$ pour $R = r$ (« adaptation » de la charge au générateur).

29

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. ($\Rightarrow$) Si $P = (x-a)^3 Q : P' = 3(x-a)^2 Q + (x-a)^3 Q'$ et $P'' = 6(x-a)Q + 6(x-a)^2 Q' + (x-a)^3 Q''$ s'annulent en a . ($\Leftarrow$) Si $P(a) = P'(a) = 0$, le cours donne $P = (x-a)^2 Q_2$; alors $P'' = 2Q_2 + 4(x-a)Q_2' + (x-a)^2 Q_2''$, et $P''(a) = 2Q_2(a) = 0 : a$ est racine de Q_2 , donc $Q_2 = (x-a)Q_3$ et $P = (x-a)^3 Q_3$.
2. Avec $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c : P''(2) = 48 + 2a = 0$, $P'(2) = 32 + 4a + b = 0$, $P(2) = 16 + 4a + 2b + c = 0 : a = -24, b = 64, c = -48$, et $x^4 - 24x^2 + 64x - 48 = (x-2)^3(x+6)$ (développer).
3. a) $P \geq 0 = P(a) : P$ admet un minimum en a , intérieur à $\mathbb{R}$, et est dérivable : $P'(a) = 0$ (a est racine double). b) Il faut $P(2) = 2a + b = 0$ et $P'(2) = 32 - 24 + a = 0 : a = -8, b = 16$. Réciproquement, $x^4 - 2x^3 - 8x + 16 = (x-2)^2(x^2 + 2x + 4)$ et $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0 : P \geq 0$ ✓. $a = -8, b = 16$.
4. Avec $(x^k)''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ (nul si $k \leq 2$) et $N = 2n+1 : Q_n(1) = 1 - N + N - 1 = 0$, $Q_n'(1) = N - N(n+1) + Nn = 0$, $Q_n''(1) = N[2n - n(n+1) + n(n-1)] = 0$ et $Q_n'''(1) = Nn[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)] = Nn(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1} \neq 0$. Par 1., $(x-1)^3$ divise Q_n ; si $(x-1)^4$ le divisait, on aurait de même $Q_n'''(1) = 0 : 1$ est racine exactement triple.

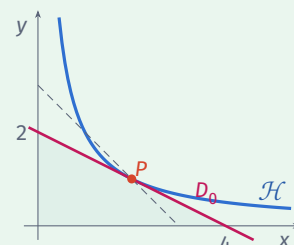
■ Corrigé de l'exercice 25

1. $(uv)' = u'v + uv'$, puis $(uv)'' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv''$.
2. **Récurrence** ($v''' = 0$). *Initialisation* : $n = 2$, c'est 1. *Hérédité* : en dérivant la formule au rang n , $(uv)^{(n+1)} = v'u^{(n)} + vu^{(n+1)} + nv''u^{(n-1)} + nv'u^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2}v''u^{(n-1)} = vu^{(n+1)} + (n+1)v'u^{(n)} + \frac{(n+1)n}{2}v''u^{(n-1)}$, car $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. *Conclusion* : vraie pour tout $n \geq 2$.
3. $v = x^2, u = \sin : v(0) = v'(0) = 0, v'' = 2$, donc $f^{(n)}(0) = n(n-1)\sin^{(n-2)}(0) = \frac{n(n-1)\sin \frac{(n-2)\pi}{2}}{1}$ ($n \geq 2 ; f(0) = f'(0) = 0$). $\sin(1012\pi) = 0 : f^{(2026)}(0) = 0$; $\sin \frac{2025\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1012\pi\right) = 1 : f^{(2027)}(0) = 2027 \times 2026 = 4\,106\,702$.
4. a) $1 - x - x^2 > 0$ sur I (racines $-\varphi$ et $\frac{1}{\varphi}$). Avec $v = 1 - x - x^2, v' = -1 - 2x, v'' = -2$ et 2. : $vg^{(n)} + n(-1-2x)g^{(n-1)} - n(n-1)g^{(n-2)} = 0$; en 0 : $g^{(n)}(0) = ng^{(n-1)}(0) + n(n-1)g^{(n-2)}(0)$. b) En

divisant par $n!$: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, avec $u_0 = g(0) = 1$ et $u_1 = g'(0) = 1$ ($g'(x) = \frac{1+2x}{(1-x-x^2)^2}$). Donc $u_n = F_{n+1}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 (Fibonacci). $g^{(10)}(0) = 10! \times 89 = \boxed{322\,963\,200}$.

■ Corrigé de l'exercice 26

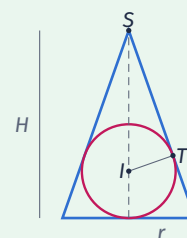
- (AB) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ passe par P : $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$, donc $\frac{1}{b} = \frac{a-2}{a} > 0$, $a > 2$ et $b = \frac{a}{a-2}$. Aire : $S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2(a-2)}$.
- $S'(a) = \frac{2a \cdot 2(a-2) - 2a^2}{4(a-2)^2} = \frac{a(a-4)}{2(a-2)^2}$: S décroît sur $]2, 4]$, croît sur $[4, +\infty[$; minimum $S(4) = 4$, pour $a = 4$, $b = 2$: D_0 : $y = -\frac{x}{2} + 2$. Le milieu de $[AB]$ est $(2, 1) = P$ ✓.
- $\frac{2}{2} = 1$: $P \in \mathcal{H}$; pente en 2 : $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$: tangente $y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1 = -\frac{x}{2} + 2$: c'est D_0 . En M : $y = -\frac{2}{m^2}(x - m) + \frac{2}{m} = -\frac{2x}{m^2} + \frac{4}{m}$, qui coupe les axes en $(2m, 0)$ et $(0, \frac{4}{m})$: aire $\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{4}{m} = 4$, milieu $(m, \frac{2}{m}) = M$.
- Même calcul : $b = \frac{qa}{a-p}$, $S(a) = \frac{qa^2}{2(a-p)}$, $S'(a) = \frac{qa(a-2p)}{2(a-p)^2}$: minimum en $a = 2p$ ($b = 2q$), $S_{\min} = \boxed{2pq}$; D_0 est la tangente en P à $y = \frac{pq}{x}$.



a	2	4	$+\infty$
$S'(x)$		- 0 +	
S	$+\infty$	4	$+\infty$

■ Corrigé de l'exercice 27

- Coupe axiale : le centre I de la sphère est sur l'axe, à la distance $|H - R|$ du centre de la base ; un point du cercle de base est à la distance R de I (Pythagore) : $r^2 = R^2 - (H - R)^2 = \boxed{H(2R - H)}$, avec $0 < H < 2R$. Puis $V(H) = \frac{\pi}{3}r^2H = \frac{\pi}{3}H^2(2R - H)$, $V'(H) = \frac{\pi}{3}H(4R - 3H)$: V croît sur $]0, \frac{4R}{3}]$, décroît sur $[\frac{4R}{3}, 2R[$. $V_{\max} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16R^2}{9} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{32\pi R^3}{81}$, et $\frac{32/81}{4/3} = \boxed{\frac{8}{27}}$.
- a) Soit S le sommet, α le demi-angle au sommet, I le centre de la boule ($SI = H - 1$) et T le point de contact avec une génératrice ($IT = 1$, $(IT) \perp (ST)$). Dans le triangle SIT : $\sin \alpha = \frac{1}{H-1}$; dans le triangle formé par le sommet, le centre et le bord de la base : $\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + H^2}}$. D'où $r^2(H - 1)^2 = r^2 + H^2$, $r^2H(H - 2) = H^2$ et $\boxed{r^2 = \frac{H}{H-2}}$ ($H > 2$). b) $V(H) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H^2}{H-2}$, $V'(H) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2H(H-2)-H^2}{(H-2)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H(H-4)}{(H-2)^2}$: minimum pour $H = 4$ ($r = \sqrt{2}$) : $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16}{2} = \frac{8\pi}{3} = \boxed{2 \times \frac{4\pi}{3}}$, le double du volume de la boule.



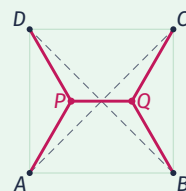
■ Corrigé de l'exercice 28

- Soit $M(x_0, y_0)$ commun ($x_0, y_0 > 0$) : $x_0 y_0 = c$ et $y_0 = \sqrt{x_0^2 - k}$. Pente de $\mathcal{H}_c$: $-\frac{c}{x_0^2} = -\frac{y_0}{x_0}$; pente de $\mathcal{H}'_k$: $\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - k}} = \frac{x_0}{y_0}$. Produit : $\boxed{-1}$: tangentes perpendiculaires.
- a) f_a est définie pour $x \geq -a$, f_b pour $x \leq -b$. $f_a(x) = f_b(x) \iff a(x+a) = b(x+b) \iff (a-b)x = -(a-b)(a+b) \iff x = -(a+b)$, qui vérifie $-a < x < -b$; alors $y_M^2 = 4a(-b) = \boxed{-4ab} > 0$. b) $f_a(x) = 2\sqrt{ax + a^2}$: $f'_a(x) = \frac{2a}{2\sqrt{ax+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a(x+a)}} = \frac{2a}{f_a(x)}$ (là où $a(x+a) > 0$). En M : pentes $\frac{2a}{y_M}$ et $\frac{2b}{y_M}$, de

produit $\frac{4ab}{y_M^2} = \frac{4ab}{-4ab} = \boxed{-1}$: $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ sont orthogonales. Remarque : $OM^2 = x^2 + 4a(x+a) = (x+2a)^2$: OM est la distance de M à la droite $x = -2a$; toutes ces paraboles ont pour foyer O .

■ Corrigé de l'exercice 29

- Deux diagonales : $2\sqrt{2} \approx 2,83$; trois côtés : 3 (soit 283 km et 300 km).
- $AP = DP = QB = QC = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$ (Pythagore) et $PQ = 1 - 2x$:
 $L(x) = 4\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + 1 - 2x$.
- $L'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} - 2 = \frac{2(2x - \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}})}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}}$. Pour $x \geq 0$: $2x \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \iff 4x^2 \geq x^2 + \frac{1}{4} \iff x \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. L décroît puis croît : minimum
 $L\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 4\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \boxed{1 + \sqrt{3}} \approx 2,73 < 2\sqrt{2} < 3$
 (on gagne près de 10 km sur les diagonales).
- $\vec{PA}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{PD}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{PQ}$ dirigé par $(1, 0)$, et $PA = PD = \frac{1}{\sqrt{3}}$:
 $\cos \hat{APD} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$ et $\cos \hat{APQ} = \cos \hat{DPQ} = \frac{-\sqrt{3}/6}{1/\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$: trois angles de $\boxed{120^\circ}$.



x	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$
$L'(x)$	-	0	+
L	3	$1 + \sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$

■ Corrigé de l'exercice 30

Méthode : une cascade d'études de fonctions ; chaque dérivée est la fonction précédente.

- $\varphi_1'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ (nul seulement en des points isolés $2k\pi$) : φ_1 est croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\varphi_1(x) \geq \varphi_1(0) = 0$: $\boxed{\sin x \leq x}$ pour $x \geq 0$.
- $\varphi_2'(x) = -\sin x + x = \varphi_1(x) \geq 0$: φ_2 croît, $\varphi_2(x) \geq \varphi_2(0) = 0$: $\boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x}$.
- $\varphi_3'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \varphi_2(x) \geq 0$: $\varphi_3(x) \geq \varphi_3(0) = 0$: $\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x}$.
- $\varphi_4'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = \varphi_3(x) \geq 0$: $\varphi_4(x) \geq \varphi_4(0) = 0$: $\boxed{\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$.
- Les trois membres de l'encadrement de $\cos x$ sont des fonctions paires : l'encadrement, vrai pour $-x \geq 0$, l'est pour $x \leq 0$. De même, $\sin x + x$ a pour dérivée $\cos x + 1 \geq 0$: $\sin x \geq -x$ pour $x \geq 0$; donc $|\sin x| \leq x = |x|$ pour $x \geq 0$, puis pour tout réel par imparité de $\sin$.
- Avec $x = 0,1$: $0,1 - \frac{0,001}{6} \leq \sin(0,1) \leq 0,1$, soit $\boxed{0,099833 \leq \sin(0,1) \leq 0,1}$. Avec $x = 0,2$: $1 - 0,02 = 0,98$ et $\frac{0,0016}{24} \approx 0,0000667$: $\boxed{0,98 \leq \cos(0,2) \leq 0,9800667}$. L'encadrement est d'amplitude $6,7 \times 10^{-5} < 10^{-4}$: $\cos(0,2) \approx \boxed{0,9800}$ à 10^{-4} près (calculatrice : 0,980067).

30 Corrigés : nombre dérivé, tangente

■ Corrigé de l'exercice 31

On simplifie le taux $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ($h \neq 0$), puis on fait tendre h vers 0.

a) $f(3) = 4$, $f(3+h) = 2(9+6h+h^2) - 5(3+h) + 1 = 4 + 7h + 2h^2$: $\tau(h) = 7 + 2h \rightarrow 7$. $f'(3) = 7$, $(T_3) : y = 7(x-3) + 4$, soit $y = 7x - 17$. Et $f(x) - (7x - 17) = 2(x-3)^2 \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (T_3) (contact en $(3, 4)$).

b) $f(-1) = 4$, $f(-1+h) = (-1+3h-3h^2+h^3) + 5 - 5h = 4 - 2h - 3h^2 + h^3$: $\tau(h) = -2 - 3h + h^2 \rightarrow -2$. $f'(-1) = -2$, $(T_{-1}) : y = -2x + 2$. Et $f(x) - (-2x+2) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (T_{-1}) sur $]-\infty, 2]$, **au-dessus** sur $[2, +\infty[$; la tangente recoupe $\mathcal{C}_f$ en $(2, -2)$.

c) $f(1) = 1$, $f(1+h) - f(1) = \frac{3}{3+h} - 1 = \frac{-h}{3+h}$: $\tau(h) = -\frac{1}{3+h} \rightarrow -\frac{1}{3}$. $f'(1) = -\frac{1}{3}$, $(T_1) : y = -\frac{1}{3}(x-1) + 1$, soit $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

d) $f(3) = 1$. Quantité conjuguée ($h < \frac{1}{3}$) : $\tau(h) = \frac{\sqrt{1-3h}-1}{h} = \frac{(1-3h)-1}{h(\sqrt{1-3h}+1)} = \frac{-3}{\sqrt{1-3h}+1} \rightarrow -\frac{3}{2}$. $f'(3) = -\frac{3}{2}$, $(T_3) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

e) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = -\sin 2h$: $\tau(h) = -2 \times \frac{\sin 2h}{2h} \rightarrow -2$ (car $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$). $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$, $y = -2x + \frac{\pi}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. $f'(2) = 3 \times 2^2 = 12$, $f(2) = 8$: $(2+h)^3 \approx 8 + 12h$. Or $(2+h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$: l'erreur vaut exactement $h^2(6+h)$. Avec $h = 0,01$: $(2,01)^3 \approx 8,12$, erreur $0,0001 \times 6,01 = 0,000601$, d'où $(2,01)^3 = 8,120601$.

2. $g'(4) = -\frac{1}{16}$: $\frac{1}{4+h} \approx \frac{1}{4} - \frac{h}{16}$. Au même dénominateur : $\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} + \frac{h}{16} = \frac{16-4(4+h)+h(4+h)}{16(4+h)} = \frac{h^2}{16(4+h)}$, qui, pour $h \geq 0$, est positif et au plus égal à $\frac{h^2}{64}$ (car $4+h \geq 4$). Avec $h = 0,02$: $\frac{1}{4,02} \approx 0,25 - 0,00125 = 0,24875$, par défaut, à $\frac{0,0004}{64} = 6,25 \times 10^{-6}$ près.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h$, $h = \frac{\pi}{180}$: $\sin 31^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360} \approx 0,5151$ (calculatrice : 0,51504). $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$: $\tan 46^\circ \approx 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1,0349$ (1,0355). $u(x) = \frac{1}{x^2}$, $u'(1) = -2$: $\frac{1}{(1+h)^2} \approx 1 - 2h$, $h = -0,03$: $\frac{1}{(0,97)^2} \approx 1,06$ (1,0628).

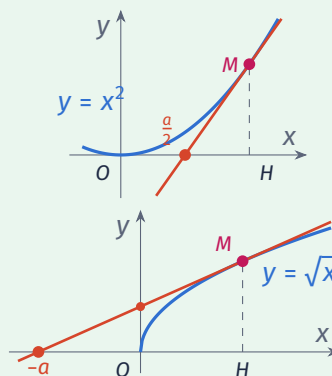
■ Corrigé de l'exercice 33

Si φ est dérivable en a , $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \rightarrow \varphi'(a)$ quand $x \rightarrow a$: on fait apparaître un tel quotient.

1. a) $\varphi(x) = x^6$, $\varphi(2) = 64$: la limite vaut $\varphi'(2) = 6 \times 2^5 = \boxed{192}$. b) $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$: la limite vaut $\tan' \frac{\pi}{3} = 1 + 3 = \boxed{4}$.
- c) $\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{1+8}}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{9}} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$ (nombre dérivé en 1 de $x \mapsto \sqrt{x+8}$).
- d) $\varphi(x) = \sin 3x$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \pi = 0$, $\varphi'(x) = 3 \cos 3x$: la limite vaut $3 \cos \pi = \boxed{-3}$.
- e) $\varphi(x) = x + x^2 + \dots + x^n$, $\varphi(1) = n$: la limite vaut $\varphi'(1) = 1 + 2 + \dots + n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- f) $\varphi(x) = x \sin a - a \sin x$ (a fixé), $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(x) = \sin a - a \cos x$: la limite vaut $\boxed{\sin a - a \cos a}$.
2. Pour $h \neq 0$: $\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{h} = 3 \times \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} + \frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$. Quand $h \rightarrow 0$, $3h \rightarrow 0$ et $-h \rightarrow 0$: la somme tend vers $3f'(a) + f'(a) = \boxed{4f'(a)}$. Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$ ($f'(4) = \frac{1}{4}$) : la limite vaut $4 \times \frac{1}{4} = \boxed{1}$.

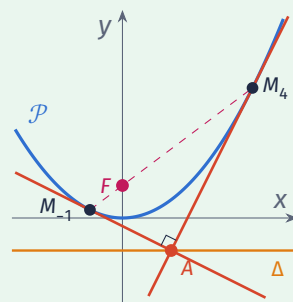
■ Corrigé de l'exercice 34

1. $(T_a) : y = na^{n-1}(x-a) + a^n$. $y = 0 \iff x-a = -\frac{a}{n}$ (on divise par $na^{n-1} \neq 0$) : $x = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a$. $x = 0$: $y = -na^n + a^n = \boxed{(1-n)a^n}$.
2. On joint M au point de (Ox) d'abscisse $\left(1 - \frac{1}{n}\right)a : \frac{a}{2}$ (milieu de $[OH]$) pour $y = x^2$, $\frac{2a}{3}$ pour $y = x^3$, $\frac{3a}{2}$ pour $y = \frac{1}{x^2}$. Pour $M(2, 4)$: la tangente passe par $(1, 0)$, c'est $y = 4x - 4$ (en haut).
3. Il faut $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$, soit $0 < \frac{1}{n} < 1$: $\boxed{n \geq 2}$ (pour $n \leq -1$, le point est au-delà de H).
4. $(T_a) : y = \frac{x-a}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$: elle coupe (Ox) en $\boxed{(-a, 0)}$ et (Oy) en $\boxed{\left(0, \frac{\sqrt{a}}{2}\right)}$ (question 1 avec $n = \frac{1}{2}$) : elle passe par le **symétrique de H par rapport à O** . En $M\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right) : y = \frac{x}{3} + \frac{3}{4}$, par $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ (en bas).



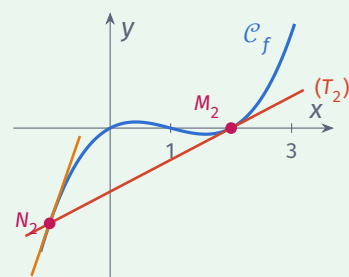
■ Corrigé de l'exercice 35

- $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $f'(t) = \frac{t}{2}$: $(T_t) : y = \frac{t}{2}(x - t) + \frac{t^2}{4} = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$.
- $A \in (T_t) \iff \beta = \frac{t}{2}\alpha - \frac{t^2}{4} \iff t^2 - 2\alpha t + 4\beta = 0$. Deux valeurs distinctes de t donnent deux tangentes distinctes (pentes $\frac{t}{2}$ différentes) ; $\Delta' = \alpha^2 - 4\beta$: si $\beta < \frac{\alpha^2}{4}$ (A au-dessous de $\mathcal{P}$), **deux** tangentes ; si $A \in \mathcal{P}$, **une** ; si A est au-dessus, **aucune**.
- Repère orthonormé : $(T_t) \perp (T_s) \iff \frac{t}{2} \times \frac{s}{2} = -1 \iff ts = -4$. Pour $t \neq s$: $\frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} = \frac{s}{2}x - \frac{s^2}{4} \iff \frac{t-s}{2}x = \frac{(t-s)(t+s)}{4} \iff x = \frac{t+s}{2}$, puis $y = \frac{t(t+s)}{4} - \frac{t^2}{4} = \frac{ts}{4}$: point commun $\left(\frac{t+s}{2}, \frac{ts}{4}\right)$.
- Double inclusion.** Si deux tangentes perpendiculaires (T_t) , (T_s) passent par A, A est leur point commun, d'ordonnée $\frac{ts}{4} = -1$: $A \in \Delta$. Réciproquement, si $A(\alpha, -1)$, l'équation $t^2 - 2\alpha t - 4 = 0$ (discriminant $4\alpha^2 + 16 > 0$) a deux racines de produit -4 : deux tangentes perpendiculaires passent par A. L'ensemble est la droite Δ .
- $(M_t M_s)$ a pour pente $\frac{s^2 - t^2}{4(s-t)} = \frac{s+t}{4}$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{t^2}{4} - \frac{s+t}{4}t = -\frac{ts}{4} = 1$ si $ts = -4$: $(M_t M_s)$ passe par F. Avec $A\left(\frac{3}{2}, -1\right)$: $t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1)$; $(T_4) : y = 2x - 4$, $(T_{-1}) : y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$, corde $y = \frac{3}{4}x + 1$.



■ Corrigé de l'exercice 36

- $f'(a) = 3a^2 - 6a + 2$: $(T_a) : y = (3a^2 - 6a + 2)x - 2a^3 + 3a^2$ (on développe $f'(a)(x - a) + f(a)$, avec $f(a) = a^3 - 3a^2 + 2a$). La différence $d(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$ est de degré 3, de coefficient dominant 1, avec $d(a) = 0$ et $d'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$: a est racine double, $d(x) = (x - a)^2(x - r)$; le coefficient de x^2 donne $-2a - r = -3$: $d(x) = (x - a)^2(x - 3 + 2a)$.
- Les points communs ont pour abscisses a et $3 - 2a$, distinctes si et seulement si $a \neq 1$: (T_a) recoupe $\mathcal{C}_f$ au seul point N_a d'abscisse $3 - 2a$. $d(x)$ a le signe de $x - 3 + 2a$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (T_a) pour $x < 3 - 2a$, au-dessus pour $x > 3 - 2a$. Si $a = 1$, $d(x) = (x - 1)^3$: la tangente $y = -x + 1$ **traverse** $\mathcal{C}_f$ en $(1, 0)$ sans la recouper.
- Réurrence.** $a_0 = 2 = 1 + (-2)^0$; si $a_k = 1 + (-2)^k$, alors $a_{k+1} = 3 - 2 - 2(-2)^k = 1 + (-2)^{k+1}$. $a_k = 1 + (-2)^k$ (2, -1, 5, -7, ..., jamais 1).
- $f'(x) + 1 = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$, donc $f'(a) + 1 = 3(a - 1)^2$ et $f'(3 - 2a) + 1 = 3(2 - 2a)^2 = 12(a - 1)^2$: $f'(3 - 2a) + 1 = 4[f'(a) + 1]$. Avec $s = 3(a - 1)^2 > 0$, les pentes sont $s - 1$ et $4s - 1$. **Parallèles** : $4s - 1 = s - 1 \iff s = 0$, exclu : **jamais**. **Perpendiculaires** (repère orthonormé) : $(s - 1)(4s - 1) =$



(T_2) recoupe $\mathcal{C}_f$ en $N_2 = M_{-1}$; en orange, la tangente en N_2 (pente 11).

$-1 \iff 4s^2 - 5s + 2 = 0$, de discriminant $25 - 32 < 0$: jamais.

31

Corrigés : calcul des dérivées

■ Corrigé de l'exercice 37

a) Polynôme, sur $\mathbb{R}$: $f'_1(x) = 12x^3 - 6x^2 + \frac{1}{5}$.
 $6x^2 - 2x + 6$.

c) Quotient ($x^2 + 1 > 0$), sur $\mathbb{R}$: $f'_3(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}$.

d) Sur $\mathbb{R}^*$: $f'_4(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 3}{x^4}$.
 $\frac{3-x}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$.

f) $(u^5)' = 5u'u^4$, $u = 3x - 2$, sur $\mathbb{R}$: $f'_6(x) = 15(3x - 2)^4$.
 $\mathbb{R} : f'_7(x) = \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x+1}} = \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

g) $3x^2 - 2x + 1 > 0$ (discriminant -8), sur $\mathbb{R}$: $f'_8(x) = 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.
 i) Sur $\mathbb{R}$: $f'_9(x) = 2 \cos x (-\sin x) - \cos x = -\cos x (2 \sin x + 1)$.

j) Sur chaque $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$: $f'_{10}(x) = (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \tan^2 x) = (1 + \tan^2 x)^2$.

■ Corrigé de l'exercice 38

a) Sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 4(x+1)^3(x-3)^3 + 3(x+1)^4(x-3)^2 = (x+1)^3(x-3)^2[4(x-3) + 3(x+1)] = (x+1)^3(x-3)^2(7x-9)$; zéros $-1, \frac{9}{7}, 3$.

b) Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f'(x) = \frac{2x(x-1)^2-2x^2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x[(x-1)-x]}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$; zéro 0.

c) Sur $] -\infty, 1[$: $f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x+3}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-(x+3)}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{3x+1}{2\sqrt{1-x}}$; zéro $-\frac{1}{3}$.

d) Sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $u(x) = \frac{3-x}{x+2}$, $u'(x) = \frac{-(x+2)-(3-x)}{(x+2)^2} = \frac{-5}{(x+2)^2}$: $f' = 3u'u^2$, $f'(x) = -\frac{15(3-x)^2}{(x+2)^4}$; zéro 3.

e) $x^2 + x + 1 > 0$, sur $\mathbb{R}$: $(u^{-2})' = -2u'u^{-3}$, $f'(x) = -\frac{2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$; zéro $-\frac{1}{2}$.

f) $2 + \cos x \geq 1$, sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$; $f'(x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

■ Corrigé de l'exercice 39

1. a) $1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = f(x) + 2 \cos^2 x \sin^2 x$, donc $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

- b) Pour $n \geq 1$, la constante disparaît et $(\cos 4x)^{(n)} = 4^n \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f^{(n)}(x) = 4^{n-1} \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

En $\frac{\pi}{8}$: $f^{(2027)}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4^{2026} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2027\pi}{2}\right) = 4^{2026} \cos(1014\pi) = 4^{2026}$. $f^{(4)}(x) = 4^3 \cos(4x + 2\pi) = 64 \cos 4x = 256\left(f(x) - \frac{3}{4}\right)$: $f^{(4)} = 256f - 192$.

2. a) $\sin p \cos q = \frac{1}{2} [\sin(p+q) + \sin(p-q)]$, $p = 3x$, $q = x$: $g(x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$.

b) $(\sin(ax))^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$, donc $g^{(n)}(x) = 2^{2n-1} \sin\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2^{n-1} \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Pour $n = 4$: $g^{(4)}(x) = 128 \sin 4x + 8 \sin 2x$; pour $n = 5$, $\sin \frac{5\pi}{2} = 1$: $g^{(5)}(0) = 2^9 + 2^4 = 528$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $u(x) = x - 1$, $v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$: $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - x)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

2. a) $u(x) = \cos(x+c)$, $u'(x) = -\sin(x+c)$: $(u^2)' = 2u'u = -2 \sin(x+c) \cos(x+c) = -\sin(2x+2c)$.

b) $\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$, $\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$: la somme vaut $\sin \theta - \sin \theta + 0 = 0$ ✓.

c) $S'(x) = -\left[\sin 2x + \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{8\pi}{3}\right)\right]$ et $\sin\left(2x + \frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$: par b) ($\theta = 2x$), $S' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc S est constante : $S(x) = S(0) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

3. a) Sur I , $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 1$: $g'(x) = \frac{\sin^2 x - (1 - \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{1 + \cos x}$. $\frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $h'(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + \cos x}$.

b) $(g - h)' = 0$ sur l'intervalle I : $g - h$ est constante, égale à $g\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} \text{ sur } I.$$

■ Corrigé de l'exercice 41

1. $\tan' = 1 + \tan^2$ et $(u^k)' = ku' u^{k-1}$: $(\tan^k)' = k \tan^{k-1} (1 + \tan^2)$. Si $P(X) = \sum a_k X^k$, alors $P(\tan x) = \sum a_k \tan^k x$ a pour dérivée $\sum k a_k \tan^{k-1} x (1 + \tan^2 x) = (1 + \tan^2 x) P'(\tan x)$.
2. *Récurrence.* $\tan = P_0(\tan)$; si $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$, alors par 1, $\tan^{(n+1)} = (1 + \tan^2) P'_n(\tan) = P_{n+1}(\tan)$.
 $P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = (1 + X^2) 2X = 2X + 2X^3$, $P_3 = (1 + X^2)(2 + 6X^2) = 2 + 8X^2 + 6X^4$, $P_4 = (1 + X^2)(16X + 24X^3) = 16X + 40X^3 + 24X^5$.
3. *Récurrence.* Vrai pour $P_0 = X$. Si $P_n = n! X^{n+1} + (\text{termes de degré} \leq n)$ à coefficients entiers positifs, alors $P'_n = (n+1)! X^n + \dots$ aussi, et $P_{n+1} = (1 + X^2) P'_n$ est de degré $n+2$, de coefficient dominant $(n+1)!$, à coefficients entiers positifs. Parité : si $P_n(-X) = (-1)^{n+1} P_n(X)$, en dérivant, $-P'_n(-X) = (-1)^{n+1} P'_n(X)$, donc $P_{n+1}(-X) = (1 + X^2) P'_n(-X) = (-1)^{n+2} P_{n+1}(X)$.
4. a) n pair : $P_n(-X) = -P_n(X)$, donc $P_n(0) = 0$ et $\tan^{(n)}(0) = 0$. Puis $\tan'(0) = P_1(0) = 1$, $\tan'''(0) = P_3(0) = 2$, et $P_5 = (1 + X^2)(16 + 120X^2 + 120X^4)$ donne $\tan^{(5)}(0) = 16$.
 b) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$: $\tan'''(\frac{\pi}{4}) = P_3(1) = 2 + 8 + 6 = 16$. c) Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\tan x \geq 0$ et P_n est à coefficients positifs : $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.

■ Corrigé de l'exercice 42

1. $(t^j)^{(k)} = j(j-1)\dots(j-k+1)t^{j-k}$ si $j \geq k$, et 0 si $j < k$. En $t = 0$, seul le terme $j = k$ reste : $Q^{(k)}(0) = k! c_k$.
2. En développant les $(a+t)^j$, $Q(t) = P(a+t)$ est un polynôme de degré n en t : $Q(t) = \sum c_k t^k$. Par la règle $(u(t+a))' = u'(t+a)$ appliquée k fois, $Q^{(k)}(t) = P^{(k)}(a+t)$; par 1, $c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$. On conclut avec $P(x) = Q(x-a)$.
3. $P(2) = -9$; $P'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2$, $P'(2) = -2$; $P''(x) = 12x^2 - 18x$, $P''(2) = 12$; $P'''(x) = 24x - 18$, $P'''(2) = 30$; $P^{(4)} = 24$:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = -9 - 2(x-2) + 6(x-2)^2 + 5(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

4. Par récurrence, $P^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$, donc $\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$: d'où la formule ; avec

$$x = 1 : \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n.$$

5. Pour un polynôme de degré $p \leq n$, la formule de 2 (au rang p) donne P à partir de $P(a), \dots, P^{(p)}(a)$, et $P^{(k)}(a) = 0$ pour $p < k \leq n$: deux polynômes de degré $\leq n$ ayant les mêmes $P^{(k)}(a)$ ($0 \leq k \leq n$) sont égaux. Ici $P(x) = 2 - (x-1) + \frac{4}{2}(x-1)^2 + \frac{12}{6}(x-1)^3 = 2 - (x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3$, soit $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 3$ (contrôle : $P(1) = 2$, $P'(1) = 6 - 8 + 1 = -1$).

32 Corrigés : demi-tangentes

■ Corrigé de l'exercice 43

On étudie le taux $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ à droite et à gauche de a .

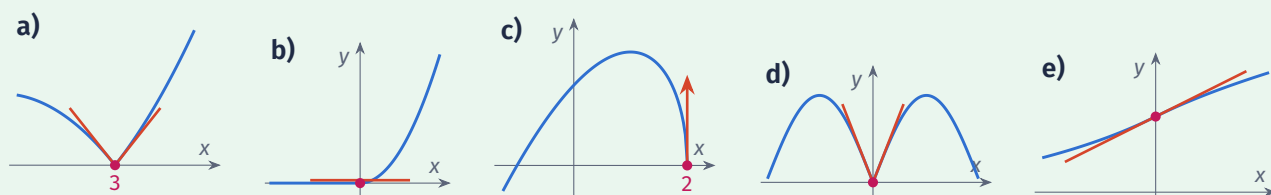
a) $x^2 - 3x = x(x-3)$, $f_1(3) = 0$; près de 3, $x > 0$, donc $\tau(x) = x \frac{x-3}{x-3}$, de limite 3 à droite, -3 à gauche : $f'_d(3) = 3$, $f'_g(3) = -3$: **point anguleux** (3, 0), demi-tangentes $y = 3x - 9$ ($x \geq 3$) et $y = -3x + 9$ ($x \leq 3$).

b) $f_2(x) = 4x^2$ si $x \geq 0$, 0 si $x \leq 0$: $\tau(x) = 4x \rightarrow 0$ à droite, $\tau(x) = 0$ à gauche : $f'_2(0) = 0$: f_2 est dérivable en 0 (bien que définie par deux formules), de tangente $y = 0$.

c) $f_3(2) = 0$; pour $x < 2$, $\tau(x) = \frac{(x+1)\sqrt{2-x}}{-(2-x)} = -\frac{x+1}{\sqrt{2-x}} \rightarrow -\infty$: f_3 n'est pas dérivable à gauche en 2 ; **demi-tangente verticale** en (2, 0), dirigée vers le haut ($f_3 > 0$ sur $] -1, 2[$).

d) $f_4(0) = 0$; pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\tau(x) = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow 2$; pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\tau(x) = -2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow -2$: $f'_d(0) = 2$, $f'_g(0) = -2$: **point anguleux** 0, demi-tangentes $y = 2x$ ($x \geq 0$), $y = -2x$ ($x \leq 0$).

e) $f_5(0) = 1$; à droite, $\tau(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \rightarrow \frac{1}{2}$; à gauche, $\tau(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{4+x}{4-x} - 1 \right) = \frac{2}{4-x} \rightarrow \frac{1}{2}$: $f'_5(0) = \frac{1}{2}$: dérivable, de tangente $y = 1 + \frac{x}{2}$ (même valeur et même pente des deux morceaux).



■ Corrigé de l'exercice 44

1. $f(1) = a + b$. Pour $x < 1$:

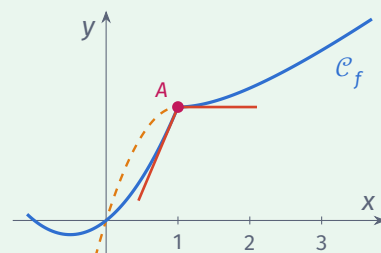
$$\tau(x) = \frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1} = a(x+1) + b \rightarrow 2a + b : f'_g(1) = 2a + b.$$

2. a) Pour $x > 1$, $\tau(x) = \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^2+3}{x+1} - (a+b) \right)$: la parenthèse tend vers $2 - (a+b) \neq 0$ et $x-1 \rightarrow 0^+$, donc $\tau(x) \rightarrow \pm\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 1 (la courbe « saute » de $a+b$ à 2).

b) $\frac{x^2+3}{x+1} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, donc $\tau(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow 0$: $f'_d(1) = 0$.

3. Dérivable en 1 $\iff a + b = 2$ et $2a + b = 0 \iff a = -2, b = 4$; tangente horizontale $y = 2$.

4. $a + b = 2$, $f'_d(1) = 0 \neq f'_g(1) = 3$: **point anguleux** A(1, 2), demi-tangentes $y = 3x - 1$ ($x \leq 1$) et $y = 2$ ($x \geq 1$).



En bleu : $a = b = 1$; en pointillés : $(a, b) = (-2, 4)$.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $\sqrt{x} - x^2 = \sqrt{x}(1 - x\sqrt{x})$ et $x\sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1$: sur $[0, 1]$,
 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$; sur $[1, +\infty[$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

2. En 0 : $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$: $\mathcal{C}_f$ a une **demi-tangente verticale** en O ; $\frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0$: $g'_d(0) = 0$, **demi-tangente horizontale**.

En 1 : à gauche, f coïncide avec $x \mapsto \sqrt{x}$, à droite avec

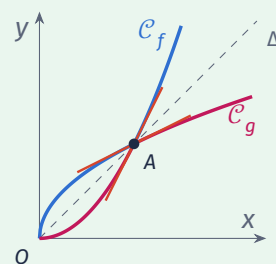
$$x \mapsto x^2 : f'_g(1) = \frac{1}{2}, f'_d(1) = 2 ; \text{ de même}$$

$$g'_g(1) = 2, g'_d(1) = \frac{1}{2}. A \text{ est un point anguleux des deux}$$

courbes ; demi-tangentes portées par $y = \frac{x+1}{2}$ et $y = 2x - 1$ (pour $\mathcal{C}_f$: la première à gauche, la seconde à droite ; l'inverse pour $\mathcal{C}_g$).

3. Soit $M(x, y) \in \mathcal{C}_f$ et $M'(y, x)$ son symétrique par rapport à Δ . Si $x \leq 1$: $y = \sqrt{x} \leq 1$ et $g(y) = y^2 = x$; si $x \geq 1$: $y = x^2 \geq 1$ et $g(y) = \sqrt{y} = x$: $M' \in \mathcal{C}_g$; de même dans l'autre sens.
 $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ ; en A, les demi-tangentes s'échangent : $y = 2x - 1$ et $x = 2y - 1$ (pentes inverses 2 et $\frac{1}{2}$).

4. $\frac{v(x)-u(x)}{x-a} = \frac{v(x)-v(a)}{x-a} - \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \rightarrow \ell = v'(a) - u'(a) > 0$: par définition de la limite (écart $\frac{\ell}{2}$), il existe $\eta > 0$ tel que ce quotient soit $> \frac{\ell}{2} > 0$ pour $0 < |x - a| < \eta$: $v - u$ a le signe de $x - a$. Donc $\max(u, v) = v$ sur $[a, a + \eta[$ et $= u$ sur $]a - \eta, a]$: ses taux à droite et à gauche tendent vers $v'(a) \neq u'(a)$: **point anguleux** (ici $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x^2$, $a = 1$).



■ Corrigé de l'exercice 46

1. a) Sur $[n, n+1[$: $f(x) = n + (x-n)^2$; sur $[n-1, n[$:
 $f(x) = n-1 + (x-n+1)^2$; $f(n) = n$.

b) À droite : $\tau(x) = \frac{(x-n)^2}{x-n} = x-n \rightarrow 0$. À gauche :

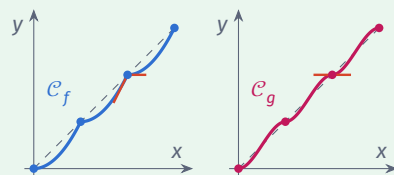
$$\tau(x) = \frac{(x-n+1)^2-1}{x-n} = x-n+2 \rightarrow 2. \quad f'_d(n) = 0, f'_g(n) = 2 :$$

chaque (n, n) est un **point anguleux** (demi-tangente horizontale à droite, de pente 2 à gauche).

2. a) $g(n) = n + \varphi(0) = n$. À droite ($t = x - n \rightarrow 0^+$) :
 $\tau = \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \rightarrow \varphi'(0)$. À gauche, $g(x) = n-1 + \varphi(s)$ avec
 $s = x - n + 1 \rightarrow 1^-$ et $\tau = \frac{\varphi(s)-\varphi(1)}{s-1} \rightarrow \varphi'(1)$.

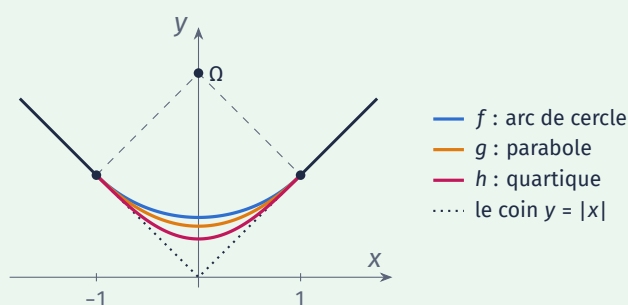
b) $\varphi'(t) = 3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$; on veut $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$: $\gamma = 0$, $\alpha + \beta = 1$, $3\alpha + 2\beta = 0$: $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3$.

c) Sur $]n, n+1[$, $g(x) = n + \varphi(x-n)$ est dérivable, de dérivée $\varphi'(t) = 6t(1-t)$ ($t = x-n = x-E(x)$), formule qui donne aussi $g'(n) = 0$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = 6t(1-t) \geq 0$ ($0 \leq t < 1$) : g est **croissante**, en « marches adoucies ».



■ Corrigé de l'exercice 47

1. a) Pour $|x| < 1$, si $y = f(x)$, alors $2 - y = \sqrt{2 - x^2}$, d'où $x^2 + (y - 2)^2 = 2 : (x, f(x))$ est sur le cercle $\mathcal{C}(\Omega, \sqrt{2})$ (arc inférieur).
- b) Les deux formules donnent $f(1) = 1$. Sur $] -1, 1[$, f coïncide avec $r(x) = 2 - \sqrt{2 - x^2}$, dérivable, $r'(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} : f'_g(1) = r'(1) = 1$; sur $]1, +\infty[$, $f(x) = x : f'_d(1) = 1$. $f'(1) = 1$ et, par parité, $f'(-1) = -1$: les droites $y = \pm x$ sont **tangentes au cercle** en $(\pm 1, 1)$ (perpendiculaires aux rayons, de directions $(\pm 1, -1)$).
- c) Pour $|x| < 1 : 2 - |x| > 0$ et $(2 - |x|)^2 - (2 - x^2) = 2(|x| - 1)^2 \geq 0$, donc $2 - |x| \geq \sqrt{2 - x^2} : f(x) \geq |x|$ (égalité pour $|x| \geq 1$). Sur $[0, 1]$, $d(x) = 2 - x - \sqrt{2 - x^2}$ a pour dérivée $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - 1 < 0$ ($x^2 < 2 - x^2$) : d décroît, l'écart est maximal en 0 : $f(0) = 2 - \sqrt{2}$. $f' = r'$ sur $] -1, 1[$, de dérivée $\frac{2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$, égale à 2 en 1, et $f' = 1$ sur $]1, +\infty[$: le taux de f' en 1 tend vers 2 à gauche, 0 à droite : **f' n'est pas dérivable en 1.**
2. Il faut $\alpha + \beta = 1$ (sinon le taux à gauche en 1 est infini) et $2\alpha = 1$ (même pente) : $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $g(0) = \frac{1}{2}$. $g'(x) = x$ sur $] -1, 1[$, $g' = 1$ sur $]1, +\infty[$: le taux de g' en 1 tend vers 1 à gauche, 0 à droite : **g' n'est pas dérivable en 1.**
3. $A + B + C = 1, 4A + 2B = 1, 12A + 2B = 0 : P(x) = \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{8}$. a) $h(1) = P(1) = 1, h'_g(1) = P'(1) = 1 = h'_d(1)$: h est dérivable en 1 (en -1 par parité). $h' = P'$ sur $] -1, 1[$ et $h' = 1$ sur $]1, +\infty[$: le taux de h' en 1 tend vers $P''(1) = 0$ à gauche et vers 0 à droite : **h' est dérivable en 1** (et en -1, h' étant impaire).
- b) $(x - 1)^3(x + 3) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$, donc $-\frac{1}{8}(x - 1)^3(x + 3) = P(x) - x$ ✓ ; sur $[0, 1]$, $(x - 1)^3 \leq 0 : P(x) \geq x$; par parité, $h \geq |x|$. $f(0) = 2 - \sqrt{2} > g(0) = \frac{1}{2} > h(0) = \frac{3}{8}$: plus le raccord est doux, plus il serre le coin.



■ Corrigé de l'exercice 48

1. Pour $x > 0$, $f_n(x) = x^{n+1}$, $f'_n(x) = (n+1)x^n = (n+1)x^{n-1}|x|$; pour $x < 0$, $f_n(x) = -x^{n+1}$, $f'_n(x) = -(n+1)x^n = (n+1)x^{n-1}|x|$; en 0, $\frac{f_n(x)}{x} = x^{n-1}|x| \rightarrow 0 = (n+1)f_{n-1}(0)$ ($n \geq 1$). $f'_n = (n+1)f_{n-1}$.
2. Récurrence sur $j \leq n$: f_n est j fois dérivable et $f_n^{(j)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)!} f_{n-j}$; si c'est vrai pour $j < n$, f_{n-j} est dérivable ($n-j \geq 1$) et $f_n^{(j+1)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)!} (n+1-j) f_{n-j-1} = \frac{(n+1)!}{(n-j)!} f_{n-j-1}$. Pour $j = n$: $f_n^{(n)}(x) = (n+1)! |x|$, dont le taux en 0 tend vers $\pm(n+1)!$ à droite et à gauche : **f_n n'est pas $n+1$ fois dérivable en 0.**

3. $P(x)|x| = \sum_{k=m}^d a_k f_k(x)$: chaque f_k ($k \geq m$) est m fois dérivable, et $(P|x|)^{(m)} = a_m(m+1)!|x| + \sum_{k>m} a_k \frac{(k+1)!}{(k+1-m)!} f_{k-m}$. Par l'absurde : si cette fonction était dérivable en 0, comme la somme (où $k-m \geq 1$) l'est, $a_m(m+1)!|x|$ le serait aussi : faux, car $a_m \neq 0$. $P|x|$ est dérivable m fois, pas $m+1$ en 0.
4. a) $Q = f_3 - 2f_2$ ($m=2$) : $Q' = 4f_2 - 6f_1$, $Q''(x) = 12x|x| - 12|x| = 12(x-1)|x|$: Q est **deux fois** dérivable en 0, pas trois (taux de Q'' : -12 à droite, 12 à gauche).
- b) $\frac{s(x)}{x} = |x| \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$: $s'(0) = 0$. Pour $x > 0$, $s'(x) = \sin x + x \cos x$; pour $x < 0$, $s'(x) = -\sin x - x \cos x$. Le taux $\frac{s'(x)}{x}$ tend vers $1+1=2$ à droite et vers -2 à gauche : s **n'est pas deux fois dérivable en 0** (comme $x|x|$: près de 0, $\sin x$ « ressemble » à x).

33 Corrigés : variations et extremums

■ Corrigé de l'exercice 49

1. $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$: produit de trois facteurs affines, d'où les signes du tableau (a). En $\pm\infty$, $f(x) = x^4 \left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{7}{x^4}\right) \rightarrow +\infty$; $f(\pm 2) = 16 - 32 + 7 = -9$ et $f(0) = 7$ (maximum local). D'après le tableau, $f(x) \geq -9$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$: $\min_{\mathbb{R}} f = -9$, atteint en -2 et en 2 seulement (contrôle : $f(x) + 9 = (x^2 - 4)^2$).
2. $g'(x) = \frac{2x(x-3)-(x^2+7)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)^2}$; sur $]3, +\infty[$, $x+1 > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $x-7$ (tableau (b)). En 3^+ , le numérateur tend vers $16 > 0$ et $x-3 \rightarrow 0^+$: $g \rightarrow +\infty$; en $+\infty$, $g(x) = \frac{x+7/x}{1-3/x} \rightarrow +\infty$. Ainsi $\min g = g(7) = 14$: $\frac{x^2+7}{x-3} \geq 14$, et, en multipliant par $x-3 > 0$, $x^2+7 \geq 14(x-3)$. Contrôle : $x^2+7-14(x-3) = (x-7)^2 \geq 0$ ✓.
3. Sur $]-\infty, 5[$: $h'(x) = 2x\sqrt{5-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{4x(5-x)-x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{5x(4-x)}{2\sqrt{5-x}}$, du signe de $x(4-x)$ (tableau (c)) ; $h(0) = h(5) = 0$, $h(4) = 16$, $h \rightarrow +\infty$ en $-\infty$. Sur $[-2, 5]$, le maximum est le plus grand des nombres $h(-2) = 4\sqrt{7} \approx 10,6$ et $h(4) = 16$: $\max_{[-2,5]} h = 16$, atteint en 4. Enfin, en 5^- , $\frac{h(x)-h(5)}{x-5} = \frac{x^2\sqrt{5-x}}{x-5} = -\frac{x^2}{\sqrt{5-x}} \rightarrow -\infty$: h n'est pas dérivable à gauche en 5 (double barre dans la ligne de h') et $\mathcal{C}_f$ admet au point $(5, 0)$ une **demi-tangente verticale**.

(a)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
f	$+\infty$			7			-9		$+\infty$

(b)

x	3	7	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	
g		$+\infty$			$+\infty$
			14		

(c)

x	$-\infty$	0	4	5		
$h'(x)$		-	0	+	0	-
h	$+\infty$			16		0

■ Corrigé de l'exercice 50

1. $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$, donc $f'(x) = 1 + 2 \cos 2x$. Pour $x \in [0, \pi]$, $2x \in [0, 2\pi]$, et $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ donne $2x = \frac{2\pi}{3}$ ou $2x = \frac{4\pi}{3}$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$. Sur le cercle trigonométrique, $\cos 2x > -\frac{1}{2}$ pour $2x \in [0, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$, d'où le tableau (a), avec $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,91$ et $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,23$. Sur $[0, \pi]$, le minimum est le plus petit des nombres $f(0) = 0$ et $f(\frac{2\pi}{3}) > 0$, le maximum le plus grand des nombres $f(\frac{\pi}{3})$ et $f(\pi) = \pi$: $0 \leq x + \sin 2x \leq \pi$.
2. $(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x \cos x$ (formule de u^3), donc $g'(x) = 3 \cos x - 3 \sin^2 x \cos x = 3 \cos x (1 - \sin^2 x) = 3 \cos^3 x$, du signe de $\cos x$ (tableau (b)), avec $g(\frac{\pi}{2}) = 3 - 1 = 2$ et $g(\frac{3\pi}{2}) = -2$. Comme g est 2π -périodique, elle prend sur $\mathbb{R}$ les mêmes valeurs que sur $[0, 2\pi]$: $|3 \sin x - \sin^3 x| \leq 2$.
Contrôle : $2 - 3s + s^3 = (s - 1)^2(s + 2) \geq 0$ car $s + 2 \geq 1$, avec égalité si et seulement si $\sin x = 1$.

(a)

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	0	$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	π	

(b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	0	2	-2	0	

■ Corrigé de l'exercice 51

1. a) *Condition nécessaire.* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un extremum local aux points intérieurs -2 et $\frac{2}{3}$: donc $f'(-2) = 0$ et $f'(\frac{2}{3}) = 0$, avec $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$: $12 - 4a + b = 0$ et $\frac{4}{3} + \frac{4a}{3} + b = 0$. Par différence, $\frac{32}{3} - \frac{16a}{3} = 0$, donc $a = 2$, puis $b = 4a - 12 = -4$; enfin $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 8 + c = 8$ donne $c = 0$: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$.
- b) *Réciproque.* $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (x+2)(3x-2)$ (tableau (a)) : f' change de signe en -2 (de + à -), d'où un **maximum local** $f(-2) = 8$ ✓, et en $\frac{2}{3}$ (de - à +) : **minimum local** $f(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{40}{27}$.
- c) En développant, $(x+2)^2(x-2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ et $(x - \frac{2}{3})^2(x + \frac{10}{3}) = x^3 + 2x^2 - 4x + \frac{40}{27}$ ✓. Sur $[-\frac{10}{3}, 2]$, $x - 2 \leq 0$ et $x + \frac{10}{3} \geq 0$, donc $f(x) - 8 \leq 0$ et $f(x) + \frac{40}{27} \geq 0$: $\max f = 8$, atteint en -2 et en 2 , et $\min f = -\frac{40}{27}$, atteint en $\frac{2}{3}$ et en $-\frac{10}{3}$.
2. *Condition nécessaire :* $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} = 0$ et $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} = 2$; la première donne $a = b\sqrt{3}$, puis la seconde $2b = 2$: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$. *Réciproque :* $g(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) \leq 2 = g(\frac{\pi}{3})$: c'est bien un maximum. Enfin $g'(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos(x + \frac{\pi}{6})$ s'annule sur $[0, 2\pi]$ en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$, avec $g(0) = g(2\pi) = 1$ et $g(\frac{4\pi}{3}) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} = -2$ (tableau (b)).

(a)

x	$-\infty$	-2	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f			8		$+\infty$	
	$-\infty$			$-\frac{40}{27}$		

(b)

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π		
$g'(x)$		+	0	-	0	+
g		1	2	-2	1	

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $f'_m(x) = \frac{(x^2+1)-2x(x+m)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2mx-1}{(x^2+1)^2}$. Le trinôme

$x^2 + 2mx - 1$ a pour discriminant réduit $m^2 + 1 > 0$: deux racines $x_1 = -m - \sqrt{m^2 + 1}$ et $x_2 = -m + \sqrt{m^2 + 1}$, de produit $\frac{c}{a} = -1 < 0$, donc de signes contraires : $x_1 < 0 < x_2$. Il est négatif entre ses racines, d'où le signe de f'_m . En $\pm\infty$, $f'_m(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+m/x}{1+1/x^2} \rightarrow 0$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'_m(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f_m		0	μ	M	0

2. Si x_i est une racine, $x_i^2 + 2mx_i = 1$, donc $2x_i(x_i + m) = x_i^2 + (x_i^2 + 2mx_i) = x_i^2 + 1$: $x_i + m = \frac{x_i^2+1}{2x_i}$ et

$f_m(x_i) = \frac{1}{2x_i}$. Avec la quantité conjuguée $((\sqrt{m^2+1} - m)(\sqrt{m^2+1} + m) = 1)$:

$$M = f_m(x_2) = \frac{1}{2(\sqrt{m^2+1} - m)} = \frac{m + \sqrt{m^2+1}}{2}, \quad \mu = f_m(x_1) = \frac{-1}{2(m + \sqrt{m^2+1})} = \frac{m - \sqrt{m^2+1}}{2}.$$

D'après le tableau, $\mu \leq f_m < 0$ sur $]-\infty, x_1]$, $\mu \leq f_m \leq M$ sur $[x_1, x_2]$ et $0 < f_m \leq M$ sur $[x_2, +\infty[$: l'encadrement est vrai sur $\mathbb{R}$; M est le maximum et μ le minimum de f_m . Enfin

$$M\mu = \frac{m^2 - (m^2 + 1)}{4} = -\frac{1}{4} \quad \text{quel que soit } m.$$

3. $M = 1 \iff \sqrt{m^2+1} = 2 - m \iff (m \leq 2 \text{ et } m^2 + 1 = 4 - 4m + m^2) \iff m = \frac{3}{4}$. Alors $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -2$, $\mu = -\frac{1}{4}$ et $f_m(x) = \frac{4x+3}{4(x^2+1)}$: $1 - f_m(x) = \frac{(2x-1)^2}{4(x^2+1)} \geq 0$ et $f_m(x) + \frac{1}{4} = \frac{(x+2)^2}{4(x^2+1)} \geq 0$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 53

1. $5 - 4 \cos x \geq 5 - 4 = 1 > 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$, f est impaire ; elle est 2π -périodique. Connaissant f sur $[0, \pi]$, on l'obtient sur $[-\pi, 0]$ par imparité, donc sur $[-\pi, \pi]$, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

2. Avec $u = 5 - 4 \cos x$, $u' = 4 \sin x$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2 \sin x}{\sqrt{u}}$:

$$f'(x) = \frac{\cos x \sqrt{u} - \sin x \cdot \frac{2 \sin x}{\sqrt{u}}}{u} = \frac{u \cos x - 2 \sin^2 x}{u \sqrt{u}},$$

et $u \cos x - 2 \sin^2 x = 5 \cos x - 4 \cos^2 x - 2 + 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x + 5 \cos x - 2 = (2 \cos x - 1)(2 - \cos x)$:

$$f'(x) = \frac{(2 \cos x - 1)(2 - \cos x)}{u \sqrt{u}}.$$

3. Sur $[0, \pi]$, $2 - \cos x > 0$ et $u\sqrt{u} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2 \cos x - 1$, positif si et seulement si $x < \frac{\pi}{3}$. Avec $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$: $0 \leq f \leq \frac{1}{2}$ sur $[0, \pi]$, donc $-\frac{1}{2} \leq f \leq 0$ sur $[-\pi, 0]$ et, par périodicité, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si $x \equiv \pm \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{2}$	0

4. Avec $c = \cos x$: $\frac{1}{4} - f(x)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1-c^2}{5-4c} = \frac{5-4c-4+4c^2}{4(5-4c)} = \frac{(2c-1)^2}{4(5-4c)} \geq 0$ ✓ : on retrouve $f^2 \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $\cos x = \frac{1}{2}$.
5. Formule d'Al-Kashi : $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cos x = 5 - 4 \cos x$. L'aire de OAB vaut $\frac{1}{2} OA \cdot OB \sin x = \sin x$, et aussi $\frac{1}{2} BA \cdot BO \sin \hat{A}BO = AB \sin \hat{A}BO$: d'où $\sin \hat{A}BO = \frac{\sin x}{AB} = f(x)$. Comme $OA < OB$, l'angle $\hat{A}BO$ (opposé à $[OA]$) est plus petit que $\hat{O}AB$, donc aigu ; $\sin$ étant croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\hat{A}BO$ est maximal quand $f(x)$ l'est : pour $x = \frac{\pi}{3}$, avec $\hat{A}BO = \frac{\pi}{6}$. Alors $\hat{O}AB = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$: $(AB) \perp (OA)$, la droite (AB) est **tangente au cercle** en A.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f_m(-x) = f_m(x)$: f_m est paire. Puis $x^2 + m = (x^2 + 1) + (m - 1)$ donne la décomposition ; en $\pm\infty$, $\sqrt{x^2 + 1} \rightarrow +\infty$ et $\frac{m-1}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow 0$, donc $f_m \rightarrow +\infty$.
2. $(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)' = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, d'où $f'_m(x) = \frac{x(x^2 + 1) - (m-1)x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x(x^2 + 2 - m)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
3. Si $m \leq 2$, $x^2 + 2 - m \geq x^2 > 0$ pour $x \neq 0$: $f'_m(x)$ a le signe de x (tableau de gauche) et $\min f_m = f_m(0) = m$.
4. Si $m > 2$, $x^2 + 2 - m = (x-r)(x+r)$ avec $r = \sqrt{m-2} > 0$, et $x(x-r)(x+r)$ a les signes -, +, -, + (tableau de droite) : **trois extremums locaux**, le maximum local $f_m(0) = m$ et les minimums $f_m(\pm r) = \frac{2m-2}{\sqrt{m-1}} = 2\sqrt{m-1}$. Avec les limites infinies : $\min f_m = 2\sqrt{m-1}$ (et $m - 2\sqrt{m-1} = (\sqrt{m-1} - 1)^2 > 0$ ✓).

$m \leq 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
f_m	$+\infty$	m	$+\infty$

$m > 2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{m-2}$	0	$\sqrt{m-2}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+	0	-
f_m	$+\infty$	$2\sqrt{m-1}$	m	$2\sqrt{m-1}$	$+\infty$

5. a) $m = 5 > 2$: le minimum vaut $2\sqrt{4} = 4$, atteint en $\pm\sqrt{3}$: $\frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 4$, avec égalité si et seulement si $x = \pm\sqrt{3}$ (contrôle : avec $w = \sqrt{x^2 + 1}$, $w + \frac{4}{w} - 4 = \frac{(w-2)^2}{w} \geq 0$).
- b) Le minimum de f_m vaut m si $m \leq 2$ et $2\sqrt{m-1}$ si $m > 2$. Or « $f_m \geq 2$ sur $\mathbb{R}$ » équivaut à « $\min f_m \geq 2$ » : pour $m \leq 2$, cela impose $m = 2$; pour $m > 2$, $m - 1 > 1$ donne $2\sqrt{m-1} > 2$: toujours vrai. $f_m \geq 2$ sur $\mathbb{R} \iff m \geq 2$.

34

Corrigés : inégalités et optimum

■ Corrigé de l'exercice 55

1. Soit $\varphi(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$: $\varphi'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Le trinôme $x^2 + 2x - 1$ a pour racines $-1 \pm \sqrt{2}$, et seule $\sqrt{2} - 1$ est dans l'intervalle ; il est négatif entre ses racines. Donc φ est strictement décroissante sur $]-1, \sqrt{2} - 1]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{2} - 1, +\infty[$: son minimum est

$$\varphi(\sqrt{2} - 1) = \frac{(3 - 2\sqrt{2}) + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Ainsi $\frac{x^2+1}{x+1} \geq 2\sqrt{2} - 2$ pour $x > -1$, avec égalité si et seulement si $x = \sqrt{2} - 1$ (contrôle : la différence vaut $\frac{(x-\sqrt{2}+1)^2}{x+1}$).

2. Soit $\psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$ sur $]0, 1[$: $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-x)^2} = \frac{4x^2-(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{(3x-1)(x+1)}{x^2(1-x)^2}$, du signe de $3x - 1$. ψ décroît sur $]0, \frac{1}{3}]$, croît sur $[\frac{1}{3}, 1[$: son minimum est $\psi(\frac{1}{3}) = 3 + 6 = 9$. $\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} \geq 9$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{3}$ (contrôle : $\psi(x) - 9 = \frac{(3x-1)^2}{x(1-x)}$).

3. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, soit $d(x) = 1 + x - \sin x - \cos x$: $d'(x) = (1 - \cos x) + \sin x > 0$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ ($1 - \cos x \geq 0$ et $\sin x > 0$). d est strictement croissante et $d(0) = 0$: $d(x) > 0$ pour $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Pour $x \geq \frac{\pi}{2}$: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2} < 1 + \frac{\pi}{2} \leq 1 + x$. Donc $\sin x + \cos x \leq 1 + x$ pour tout $x \geq 0$, avec égalité seulement en 0.

■ Corrigé de l'exercice 56

1. $v(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t-2)(t-4)$.
Le mobile **avance** ($v > 0$) sur $[0, 2[$ et sur $]4, 5]$,
recule ($v < 0$) sur $]2, 4[$, et s'arrête aux instants $t = 2$ et $t = 4$.

2. Avec $x(2) = 20$, $x(4) = 16$, $x(5) = 20$ (tableau) : $0 \leq x(t) \leq 20$, la position la plus éloignée est à 20 m de l'origine ($t = 2$ et $t = 5$). Distance parcourue : 20 (aller) + 4 (recul de 20 à 16) + 4 (de 16 à 20) : **28 m**.

t	0	2	4	5	
$v(t)$	+	0	-	0	+
x	0	20	16	20	

3. $a(t) = 6t - 18 = 6(t - 3)$: v décroît sur $[0, 3]$ et croît sur $[3, 5]$, avec $v(0) = 24$, $v(3) = -3$, $v(5) = 9$. Le mobile recule le plus vite à l'instant **$t = 3$ s** (vitesse -3 m/s, minimum de v). Comme $-3 \leq v(t) \leq 24$, **$\max |v| = 24$ m/s**, au départ.

■ Corrigé de l'exercice 57

- Un kilomètre est parcouru en $\frac{1}{v}$ heure ; il coûte donc $\left(128 + \frac{v^3}{8000}\right) \times \frac{1}{v} = \frac{128}{v} + \frac{v^2}{8000}$ DH.
- $C'(v) = -\frac{128}{v^2} + \frac{v}{4000} = \frac{v^3 - 512000}{4000v^2} = \frac{v^3 - 80^3}{4000v^2}$, du signe de $v - 80$ (la fonction cube est strictement croissante). C décroît sur $]0, 80]$ (avec $C \rightarrow +\infty$ en 0^+) et croît sur $[80, 130]$: la vitesse la plus économique est $\boxed{80 \text{ km/h}}$, avec $C(80) = 1,6 + 0,8 = 2,4$ DH/km : le trajet coûte $400 \times 2,4 = \boxed{960 \text{ DH}}$ et dure $\frac{400}{80} = 5$ h.
- Sur $]0, 60] \subset]0, 80]$, C est décroissante : il faut rouler à **60 km/h**, la vitesse maximale autorisée ; $C(60) = \frac{32}{15} + \frac{9}{20} = \frac{31}{12}$, et le trajet coûte $400 \times \frac{31}{12} = \boxed{\frac{3100}{3} \approx 1033,33 \text{ DH}}$.
- $C(100) = 1,28 + 1,25 = 2,53$: le trajet coûte 1012 DH et dure 4 h. Il **gagne 1 h** pour **52 DH** de plus.

■ Corrigé de l'exercice 58

- La génératrice est le rayon du disque : le triangle formé par la hauteur, un rayon de la base et une génératrice est rectangle, donc $r^2 + h^2 = 10^2$. Le volume d'un cône étant $\frac{1}{3}\pi r^2 h$:
$$V(h) = \frac{\pi}{3} (100 - h^2) h.$$
- $V(h) = \frac{\pi}{3} (100h - h^3)$, donc $V'(h) = \frac{\pi}{3} (100 - 3h^2)$, positif si et seulement si $h < \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = h_0 \approx 5,77$: V croît sur $]0, h_0]$ et décroît sur $[h_0, 10]$. Le maximum est

$$V(h_0) = \frac{\pi}{3} \times \frac{200}{3} \times \frac{10\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{2000\sqrt{3}\pi}{27} \approx 403 \text{ cm}^3}, \quad r_0 = \sqrt{100 - \frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8,16 \text{ cm}.$$

- L'arc du secteur d'angle α (en radians) mesure 10α ; il doit être égal à $2\pi r_0$: $\alpha = \frac{2\pi r_0}{10} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 5,13$ rad, soit $\boxed{\alpha \approx 294^\circ}$ (on retire un secteur d'environ 66°).
- Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $h = 10 \sin x \in]0, 10[$ et $100 - h^2 = 100 \cos^2 x$: $V(h) = \frac{1000\pi}{3} \sin x \cos^2 x \leq \frac{2000\sqrt{3}\pi}{27}$, d'où $\sin x \cos^2 x \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Si $\sin x \leq 0$ ou $\cos x = 0$, le premier membre est ≤ 0 ; si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on applique le résultat à $\pi - x$ (même sinus, même $\cos^2$) ; la 2π -périodicité conclut :

$$\boxed{\sin x \cos^2 x \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}} \text{ pour tout réel } x, \text{ avec égalité si et seulement si } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (} h = h_0 \text{)}.$$

■ Corrigé de l'exercice 59

- Un rectangle inscrit dans un cercle a pour diagonale un diamètre : par Pythagore, $\ell^2 + h^2 = 30^2 = 900$, donc $R = \ell h^2 = \ell (900 - \ell^2) = 900\ell - \ell^3$. Puis $R'(\ell) = 900 - 3\ell^2$, positif si et seulement si $\ell < 10\sqrt{3}$: R croît sur $]0, 10\sqrt{3}]$ et décroît sur $[10\sqrt{3}, 30]$. La poutre la plus résistante a pour dimensions $\boxed{\ell = 10\sqrt{3} \approx 17,3 \text{ cm}, h = \sqrt{900 - 300} = 10\sqrt{6} \approx 24,5 \text{ cm}}$, et $\boxed{\frac{h}{\ell} = \sqrt{2}}$ ($R_{\max} = 6000\sqrt{3}$).

2. Avec $u = 900 - \ell^2$: $h^3 = u\sqrt{u}$ et $K = \ell u\sqrt{u}$. Comme $(u\sqrt{u})' = u'\sqrt{u} + u \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3}{2}u'\sqrt{u} = -3\ell\sqrt{u}$:
 $K'(\ell) = u\sqrt{u} - 3\ell^2\sqrt{u} = \sqrt{u}(u - 3\ell^2) = (900 - 4\ell^2)\sqrt{900 - \ell^2}$, positif si et seulement si $\ell < 15$. La poutre la plus rigide : $\ell = 15 \text{ cm}$, $h = \sqrt{675} = 15\sqrt{3} \approx 26 \text{ cm}$, $\frac{h}{\ell} = \sqrt{3}$.
3. Le disque a pour aire $225\pi \approx 706,9 \text{ cm}^2$. Poutre la plus résistante : $\ell h = 300\sqrt{2} \approx 424,3 \text{ cm}^2$, soit $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \approx \boxed{60\%}$; la plus rigide : $225\sqrt{3} \approx 389,7 \text{ cm}^2$, soit $\frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx \boxed{55\%}$. La section maximale vérifie $\ell h \leq \frac{\ell^2 + h^2}{2} = 450$ (égalité pour le carré de côté $15\sqrt{2}$) : $\frac{2}{\pi} \approx \boxed{64\%}$. La poutre la plus résistante n'est donc pas la plus grosse !
4. B est sur le cercle de diamètre $[AC]$: le triangle ABC est rectangle en B , et M est le pied de sa hauteur issue de B . Dans les triangles rectangles ABC et AMB , $\cos \hat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AB}$, d'où $AB^2 = AM \cdot AC = 300$ et $AB = 10\sqrt{3} = \ell$; de même $BC^2 = CM \cdot CA = 20 \times 30 = 600$ et $BC = 10\sqrt{6} = h$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. Une symétrie conserve les distances ; elle envoie B sur B' et laisse fixes P et Q , points de l'axe : $PB' = PB$ et $QB' = QB$ (l'axe (PQ) est la médiatrice de $[BB']$).
2. $P(12 - x, 0)$ et $B'(0, t)$: $PB'^2 = PB^2$ s'écrit $(12 - x)^2 + t^2 = x^2$, d'où $t^2 = 24x - 144 = 24(x - 6)$. Comme $t > 0$, $x > 6$; comme $P \in [OB]$, $12 - x \geq 0$: $6 < x \leq 12$. Puis $QB'^2 = QB^2$: $12^2 + (y - t)^2 = y^2$, soit $144 + t^2 = 2ty$, et $y = \frac{144 + 24x - 144}{2t} = \frac{12x}{t}$.
3. Le triangle PBQ est rectangle en B : $PQ^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{144x^2}{24(x-6)} = x^2 \left(1 + \frac{6}{x-6}\right) = \frac{x^3}{x-6}$.
4. $\varphi'(x) = \frac{3x^2(x-6)-x^3}{(x-6)^2} = \frac{2x^2(x-9)}{(x-6)^2}$, du signe de $x - 9$: φ décroît sur $]6, 9]$ et croît sur $[9, 12]$, avec $\varphi \rightarrow +\infty$ en 6^+ , $\varphi(9) = \frac{729}{3} = 243$ et $\varphi(12) = 288$. Le pli le plus court est obtenu pour $x = 9 \text{ cm}$: $PQ = \sqrt{243} = 9\sqrt{3} \approx 15,6 \text{ cm}$, avec $t = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8,5 \text{ cm}$ et $y = \frac{108}{6\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} \approx 12,7 \text{ cm}$.

x	6	9	12	
$\varphi'(x)$		-	0	+
φ		$+\infty$	243	288

35

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Comme c est le plus petit, $3c \leq a + b + c = 3$: $c \leq 1$. Avec $a + b = 3 - c$: $E = ab + c(a + b) - \frac{2}{3}abc = ab \left(1 - \frac{2c}{3}\right) + c(3 - c)$. Or $1 - \frac{2c}{3} \geq \frac{1}{3} > 0$, $ab \geq 0$ et $c(3 - c) \geq 0$: $E \geq 0$. L'égalité exige $c(3 - c) = 0$, soit $c = 0$, et $ab = 0$: deux des nombres sont nuls, le troisième vaut 3 (triplets $(3, 0, 0)$ et permutations).
2. $(a - b)^2 \geq 0$ donne $4ab \leq (a + b)^2 = (3 - c)^2$; comme $1 - \frac{2c}{3} > 0$, on obtient $E \leq \frac{(3-c)^2}{4} \left(1 - \frac{2c}{3}\right) + c(3 - c) = \varphi(c)$.

3. En développant, $\frac{(3-c)^2}{4} \left(1 - \frac{2c}{3}\right) = \frac{9-12c+5c^2-\frac{2}{3}c^3}{4}$, d'où $\varphi(c) = \frac{9}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{6}$. Puis $\varphi'(c) = \frac{c}{2} - \frac{c^2}{2} = \frac{c(1-c)}{2} \geq 0$ sur $[0, 1]$: φ est croissante et $\varphi(c) \leq \varphi(1) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{3}$. Donc $0 \leq E \leq \frac{7}{3}$ (contrôle : $\frac{7}{3} - \varphi(c) = \frac{(1-c)^2(2c+1)}{12}$). L'égalité $E = \frac{7}{3}$ exige $c = 1$ et $a = b$, soit $a = b = c = 1$.
4. Avec $a = 3x, b = 3y, c = 3z$: $a + b + c = 3$ et $E = 9(xy + yz + zx) - \frac{2}{3} \times 27xyz = 9(xy + yz + zx - 2xyz)$, d'où $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. $E(b, c, a) = b^2c + c^2a + a^2b = E(a, b, c)$, et de même pour $E(c, a, b)$. Parmi a, b, c , l'un est compris entre les deux autres : si c'est b , rien à faire ; si c'est c , on remplace (a, b, c) par (b, c, a) , où c est en deuxième position, sans changer E ; si c'est a , par (c, a, b) . On peut donc supposer $(a - b)(b - c) \geq 0$.
2. $b(a + c)^2 = a^2b + 2abc + bc^2$, donc $b(a + c)^2 - (E + abc) = abc + bc^2 - b^2c - c^2a = c(ab + bc - b^2 - ca) = c(a - b)(b - c)$. Comme $c \geq 0$ et $(a - b)(b - c) \geq 0$: $E + abc \leq b(a + c)^2 = b(3 - b)^2$, et $abc \geq 0$ donne $E \leq b(3 - b)^2$.
3. $\psi'(b) = (3 - b)^2 - 2b(3 - b) = 3(3 - b)(1 - b)$: ψ croît sur $[0, 1]$, décroît sur $[1, 3]$, et $\psi(1) = 4$. Donc $E \leq 4$ (contrôle : $4 - \psi(b) = (4 - b)(b - 1)^2 \geq 0$).
4. Dans la disposition de 1, l'égalité exige $b = 1, abc = 0$ et $c(a - b)(b - c) = 0$, avec $a + c = 2$. Si $c = 0$, alors $a = 2$: $E(2, 1, 0) = 4$ ✓. Si $a = 0$, alors $c = 2$ et $c(a - b)(b - c) = 2 \neq 0$: exclu. Les cas d'égalité sont donc $(2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 2, 1)$. Or $E(1, 1, 1) = 3 < 4$: pour une expression **cyclique** (non symétrique), le maximum n'est pas forcément atteint au point où les variables sont égales.
5. Avec $a = 3x, b = 3y, c = 3z$: $E = 27(x^2y + y^2z + z^2x) \leq 4$, d'où $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. Avec $u(x) = \frac{nA+x}{n+1}$, $u'(x) = \frac{1}{n+1}$ et $(u^{n+1})' = (n+1)u'u^n = u^n$: $\varphi'(x) = \left(\frac{nA+x}{n+1}\right)^n - A^n$. Comme $u(x) > 0$ et que $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$: $\varphi'(x) > 0 \iff u(x) > A \iff x > A$. Donc φ décroît strictement sur $]0, A]$, croît strictement sur $[A, +\infty[$, et son minimum est $\varphi(A) = A^{n+1} - A^{n+1} = 0$: $\varphi(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = A$.
2. **Récurrence. Initialisation** : pour $n = 1$, $a_1 \leq a_1$, avec égalité. **Hérédité** : supposons (P_n) et soit $a_1, \dots, a_{n+1} > 0, A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > 0$. Par (P_n) , $a_1 \dots a_n \leq A^n$, donc, en multipliant par $a_{n+1} > 0$ puis en appliquant 1 avec $x = a_{n+1}$:

$$a_1 \dots a_n a_{n+1} \leq A^n a_{n+1} \leq \left(\frac{nA + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}.$$

L'égalité exige les deux égalités : $a_1 = \dots = a_n (= A)$ et $a_{n+1} = A$; la réciproque est claire.
Conclusion : (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) (P_n) appliquée à $1, 2, \dots, n$, non tous égaux si $n \geq 2$: $n! < \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

b) Ces six nombres ont pour somme $x + y + z = 12$, donc pour moyenne $2 : x \left(\frac{y}{2}\right)^2 \left(\frac{z}{3}\right)^3 \leq 2^6$, soit $xy^2z^3 \leq 64 \times 4 \times 27 = 6912$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = 2 : \boxed{\max xy^2z^3 = 6912}$, atteint en (2, 4, 6).

c) Pour $x \in]0, 1[$, on applique (P_5) aux cinq nombres $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, \frac{1-x}{3}, \frac{1-x}{3}, \frac{1-x}{3}$, de somme 1 : $\frac{x^2}{4} \cdot \frac{(1-x)^3}{27} \leq \frac{1}{5^5}$, donc $\boxed{x^2(1-x)^3 \leq \frac{108}{3125}}$, avec égalité si et seulement si $\frac{x}{2} = \frac{1-x}{3}$, soit $x = \frac{2}{5}$ (en 0 et 1, le produit est nul). Contrôle : $w(x) = x^2(1-x)^3$ a pour dérivée $2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2 = x(1-x)^2(2-5x)$: w croît sur $\left[0, \frac{2}{5}\right]$, décroît sur $\left[\frac{2}{5}, 1\right]$, et $w\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25} \cdot \frac{27}{125} = \frac{108}{3125}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 64

- $P(0) = 4 \neq 0$. Pour $x \neq 0$, $t^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}$, donc $x^2(t^2 + at + b - 4) = x^4 + \frac{4x^2}{x^2} + ax^3 + 2ax + bx^2 = P(x)$ ✓.
- $u'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$: sur $]0, +\infty[$, u décroît sur $]0, \sqrt{2}]$ et croît sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, donc $u(x) \geq u(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$; u étant impaire, $u(x) \leq -2\sqrt{2}$ pour $x < 0$: $\boxed{|t| \geq 2\sqrt{2}}$. Réciproquement, $x + \frac{2}{x} = t \iff x^2 - tx + 2 = 0$ ($x \neq 0$), de discriminant $t^2 - 8 \geq 0$ si $|t| \geq 2\sqrt{2}$: il y a une racine réelle, non nulle (produit des racines 2).
- $(a^2 + b^2)(t^2 + 1) - (at + b)^2 = a^2 - 2abt + b^2t^2 = (a - bt)^2 \geq 0$.
- Comme $x_0 \neq 0$, $P(x_0) = 0$ donne $t_0^2 + at_0 + b - 4 = 0$, soit $at_0 + b = 4 - t_0^2$. Par 3 : $(t_0^2 - 4)^2 \leq (a^2 + b^2)(t_0^2 + 1)$, d'où $a^2 + b^2 \geq h(t_0^2)$, avec $t_0^2 \geq 8$ par 2. Or $h'(u) = \frac{2(u-4)(u+1)-(u-4)^2}{(u+1)^2} = \frac{(u-4)(u+6)}{(u+1)^2} > 0$ sur $[8, +\infty[$: h y est croissante et $h(u) \geq h(8) = \frac{16}{9}$. Donc $\boxed{a^2 + b^2 \geq \frac{16}{9}}$.
- L'égalité exige $t_0^2 = 8$ et $a = bt_0$ (égalité dans 3) ; avec $at_0 + b = -4$, $b(t_0^2 + 1) = -4$: $b = -\frac{4}{9}$ et $a = -\frac{4t_0}{9} = \mp \frac{8\sqrt{2}}{9}$ pour $t_0 = \pm 2\sqrt{2}$. Alors $a^2 + b^2 = \frac{128+16}{81} = \frac{16}{9}$; pour $a = -\frac{8\sqrt{2}}{9}$, $P(\sqrt{2}) = 4 - \frac{32}{9} - \frac{8}{9} - \frac{32}{9} + 4 = 0$ ✓ (et $-\sqrt{2}$ est racine pour $a = \frac{8\sqrt{2}}{9}$). La plus petite valeur de $a^2 + b^2$ est $\boxed{\frac{16}{9}}$.

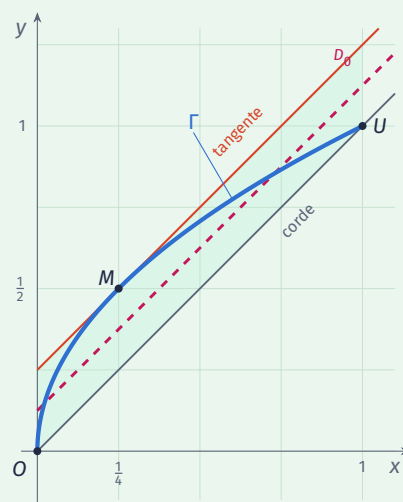
■ Corrigé de l'exercice 65

- Pour $x \in]a, b[$, $\varphi(x) - \varphi(a) \geq 0$ et $x - a > 0$, donc $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geq 0$; à la limite en a^+ (chapitre 10), $\boxed{\varphi'_d(a) \geq 0}$. Si a est intérieur à un intervalle ouvert où φ est dérivable et si φ y admet un minimum en a , alors $\varphi'(a) = 0$ (cours : $\varphi'_d(a) \geq 0$ et $\varphi'_g(a) \leq 0$).
- a) Condition nécessaire : si $\varphi(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - kx \geq 0 = \varphi(0)$ sur l'intervalle ouvert $]-1, +\infty[$, alors φ a un minimum en 0, donc $\varphi'(0) = -1 - k = 0$: $k = -1$. Réciproque : $\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ ✓. Un seul réel : $\boxed{k = -1}$.
b) De même, $\varphi(x) = \tan x - k \sin x \geq 0 = \varphi(0)$ imposerait $\varphi'(0) = 1 - k = 0$, donc $k = 1$. Mais $\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} < 0$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ (par exemple $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$) : $\boxed{\text{aucun réel } k}$; la condition nécessaire n'est pas suffisante.
c) Si $\sin x \leq kx$ pour $x \geq 0$, la fonction $\varphi(x) = kx - \sin x$ vérifie $\varphi \geq \varphi(0) = 0$ sur $[0, +\infty[$, donc, par 1, $\varphi'_d(0) = k - 1 \geq 0$. Réciproquement, si $k \geq 1$ et $x \geq 0$: $kx \geq x \geq \sin x$ ($x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geq 0$ et s'annule en 0). $\boxed{k \geq 1}$.

3. a) $\varphi(x) = \cos x - 1 + ax^2$ vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$ pour **tout** a : la condition $\varphi'(0) = 0$ ne donne aucune information.
- b) Si l'inégalité est vraie, alors $\frac{1-\cos x}{x^2} \leq a$ pour tout $x \neq 0$; or cette quantité tend vers $\frac{1}{2}$ en 0 (chapitre 10), donc $\frac{1}{2} \leq a$.
- c) Si $a \geq \frac{1}{2}$ et $x \geq 0$: $\varphi'(x) = -\sin x + 2ax \geq x - \sin x \geq 0$, donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$; φ étant paire, c'est vrai sur $\mathbb{R}$.
- $\cos x \geq 1 - ax^2 \text{ pour tout } x \iff a \geq \frac{1}{2}.$

■ Corrigé de l'exercice 66

- (OU) a pour coefficient directeur 1. La tangente en $x \in]0, 1]$ a pour pente $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \iff x = \frac{1}{4}$: point $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, tangente $y = \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$, soit $y = x + \frac{1}{4}$.
- $d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$: d croît sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, décroît sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, avec $d(0) = d(1) = 0$ et $d\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. Donc $0 \leq d(x) \leq \frac{1}{4}$: $x \leq \sqrt{x} \leq x + \frac{1}{4}$: l'arc Γ est compris entre la corde (OU) et la tangente en M, parallèles et distantes de $\frac{1}{4}$ verticalement (figure).
- $e_0(x) = \sqrt{x} - x - \frac{1}{8} = d(x) - \frac{1}{8} \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$: D_0 , à mi-chemin entre la corde et la tangente, approche $\sqrt{x}$ à $\frac{1}{8}$ près, avec $e_0(0) = -\frac{1}{8}$, $e_0\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$, $e_0(1) = -\frac{1}{8}$.
- $e(0) = -p$, $e\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{m}{4} - p$, $e(1) = 1 - m - p$, d'où $3e(0) - 4e\left(\frac{1}{4}\right) + e(1) = -3p - 2 + m + 4p + 1 - m - p = -1$.
Si $|e| \leq \varepsilon$ sur $[0, 1]$, l'inégalité triangulaire donne $1 \leq 3\varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon = 8\varepsilon$: $\varepsilon \geq \frac{1}{8}$. Aucune droite ne fait mieux que D_0 .
- Si D approche $\sqrt{x}$ à $\frac{1}{8}$ près : $1 = -3e(0) + 4e\left(\frac{1}{4}\right) - e(1) \leq \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = 1$, donc toutes ces inégalités sont des égalités : $e(0) = -\frac{1}{8}$ et $e(1) = -\frac{1}{8}$, soit $p = \frac{1}{8}$ puis $1 - m - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$, $m = 1$. Ainsi $D = D_0$: $y = x + \frac{1}{8}$: la meilleure droite est unique, et l'écart y est atteint trois fois avec des signes alternés.



Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Limites (chapitre 10)

- ① (a) $\frac{5}{3}$; (b) $-\frac{1}{2}$.
 $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)(x^2+1)$,
 $\frac{x^2+1}{x+3} \rightarrow \frac{10}{6}$; $\frac{3x^2}{-6x^2}$ (plus haut degré).
- ② (a) 6; (b) 5. Conjugué :
 $\sqrt{x+3} + 3 \rightarrow 6$;
 $\frac{10x}{x+\sqrt{x^2-10x}} = \frac{10}{1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}} \rightarrow 5$.
- ③ (a) $-\frac{2}{3}$; (b) $\frac{1}{4}$.
 $2 \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{x-3}$;
 $\frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{2+x} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.
- ④ (a) 4 et -4; (b) pas de limite. $-2 < x < 2$:
 $g(x) = 2 - x$; $x < -2$:
 $g(x) = x - 2$.

Bloc 2 · Droites et pentes

- ⑤ (a) $-\frac{3}{2}$; $y = -\frac{3}{2}x + 2$;
 (b) oui. $\frac{-1-5}{2+2}$; $5 = 3 + p$;
 $-\frac{3}{2} \times 4 + 2 = -4$.
- ⑥ (a) $y = \frac{1}{2}(x+2) + 3 = \frac{1}{2}x + 4$;
 (b) $(-1,8;3,1)$.
 $\frac{1}{2} \times (-1,8) + 4 = -0,9 + 4$.
- ⑦ (a) $\frac{3}{2}$; (b) $k = \frac{5}{2}$; $k = \frac{1}{3}$.
 $k - 1 = \frac{3}{2}$; $(k-1) \times \frac{3}{2} = -1$.
- ⑧ (a) $d : \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + 1$; $d' :$
 -2 , $y = -2x + 5$; (b) oui;
 $(\frac{8}{5}; \frac{9}{5})$. $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$;
 $\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 5 \iff x = \frac{8}{5}$.

Bloc 3 · Fonctions et variations

- ⑨ (b) f strictement croissante. $f(a) - f(b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3)$;
 $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$.
- ⑩ (a) max 4, min -2;
 (b) $f(-3) > f(-2)$,
 $f(3) > f(4)$. En 2 et en -1;
 f décroît strictement sur $[-4; -1]$ et sur $[2; 5]$.
- ⑪ (a) > 0 sur $]-\frac{1}{3}; 2[$, < 0 hors de $[-\frac{1}{3}; 2]$; (b) ≥ 0 , nul en 2. $\Delta = 49$; $3(x-2)^2$.
- ⑫ (a) $(x+3)^2 + 4 \geq 4$;
 (b) décroissante sur $]-\infty; -3]$, croissante sur $[-3; +\infty[$; min 2 en -3.
 $t \mapsto \sqrt{t}$ croît : f varie comme $x^2 + 6x + 13$.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 4 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 37**, p. 30. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 11), puis les pièges de la section 13. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes C et D, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 11 en lecture rapide), puis les sections 12 à 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes A et E, **exercices 33 à 36**, p. 29 et **57 à 60**, p. 36 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Limites (chapitre 10)

Relis : les sections 1, 3 et 4 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 23,
exercice 8, p. 24, **exercice 31**,
 p. 29 et **exercice 43**, p. 32.

Bloc 2 · Droites et pentes

Relis : les sections 2 et 11 du cours.
Fais : **exercice 2**, p. 23,
exercice 11, p. 24, **exercice 32**,
 p. 29 et **exercice 34**, p. 30.

Bloc 3 · Fonctions et variations

Relis : les sections 7 et 8 du cours.
Fais : **exercice 6**, p. 24,
exercice 7, p. 24, **exercice 49**,
 p. 34 et **exercice 50**, p. 34.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Nombre dérivé et tangente	31 à 36	/ 6	
Thème B · Calculer des dérivées	37 à 42	/ 6	
Thème C · Dérivabilité et demi-tangentes	43 à 48	/ 6	
Thème D · Variations et extremums	49 à 54	/ 6	
Thème E · Inégalités et optimisation	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Étude des fonctions

Maths Olympiad