

Chapitre 10

Limites d'une fonction

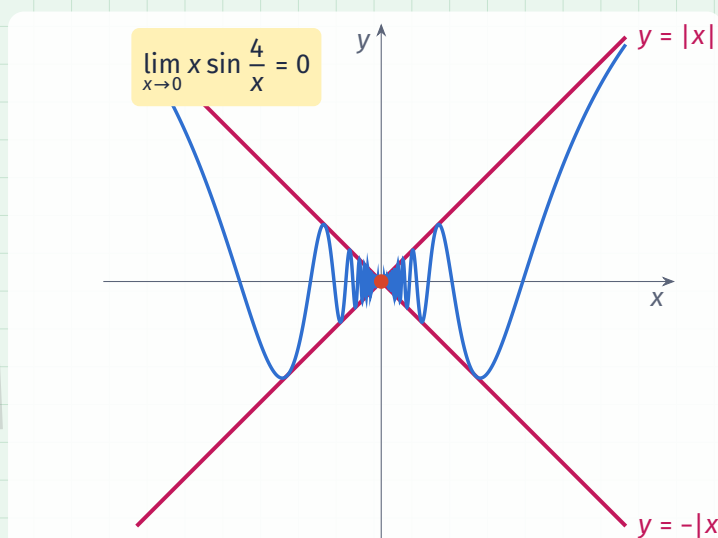
Du niveau de base au niveau concours

*À connaître par cœur*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Défi de concours

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} = ?$$

*Les gendarmes : coincée entre $-|x|$ et $|x|$, la courbe file vers 0*

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	18 Niveau 4 · Concours	26
1 Limite finie en un point	5	19 Limites en un point	28
2 Limite infinie en un point	6	20 Limites à l'infini	30
3 Limites à droite et à gauche	7	21 Formes indéterminées	32
4 Limites à l'infini	8	22 Limites trigonométriques	33
5 Opérations sur les limites	9	23 Comparaison et gendarmes	34
6 Polynômes, fractions rationnelles	10	24 Défis de concours	36
7 Lever une indétermination	12	25 Corrigés du niveau 1	39
8 Limites trigonométriques	13	26 Corrigés du niveau 2	41
9 Limites et ordre	15	27 Corrigés du niveau 3	44
10 Composer et changer de variable	15	28 Corrigés du niveau 4	46
11 Pour aller plus loin	16	29 Corrigés : limites en un point	49
12 Les pièges classiques	17	30 Corrigés : limites à l'infini	52
13 Les astuces des concours	18	31 Corrigés : formes indéterminées	55
14 L'essentiel du chapitre en une page	21	32 Corrigés : trigonométrie	58
15 Niveau 1 · Bases	22	33 Corrigés : comparaison, gendarmes	62
16 Niveau 2 · Bac	23	34 Corrigés : défis de concours	65
17 Niveau 3 · Approfondissement	25	Corrigé du test d'entrée	69

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Limites en un point, Limites à l'infini, Formes indéterminées, Limites trigonométriques, Comparaison et gendarmes, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|--|
| ☐ écrire et utiliser la définition avec ε et α ; | ☐ reconnaître les quatre formes indéterminées ; |
| ☐ démontrer une limite infinie avec A et α ; | ☐ utiliser le terme de plus haut degré ; |
| ☐ calculer des limites à droite et à gauche ; | ☐ lever une F.I. (factoriser, conjugué, $ x $) ; |
| ☐ étudier un raccord (fonction par morceaux, E) ; | ☐ démontrer $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ par les aires ; |
| ☐ connaître les limites usuelles en 0 et en $\pm\infty$; | ☐ faire apparaître $\frac{\sin X}{X}$ et $\frac{1-\cos X}{X^2}$; |
| ☐ trouver une asymptote verticale ou horizontale ; | ☐ encadrer (gendarmes, sin, cos, E) ; |
| ☐ appliquer les opérations et la règle des signes ; | ☐ changer de variable ($X = x - a$, $X = \frac{1}{x}$). |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point : bloc 1, les calculs utiles au chapitre ; blocs 2 et 3, tes acquis des chapitres 4 et 7. Aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : page 69.

Bloc 1 · Calcul algébrique

___ / 4

① **Identités remarquables** Factoriser $x^3 - 27$, puis $x^4 - 81$ (le plus possible dans $\mathbb{R}$).

② **Racine évidente** $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$.
(a) Calculer $P(1)$. (b) Trouver b et c tels que $P(x) = (x - 1)(x^2 + bx + c)$.

③ **Conjugué** (a) Écrire $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ sans racine au dénominateur. (b) Pour $x \geq 0$, écrire $\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x}$ sous la forme $\frac{1}{D(x)}$.

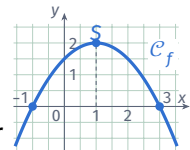
④ **Signe d'un trinôme** (a) Signe de $T(x) = -2x^2 + 5x - 2$ selon x ?
(b) Montrer que $x^2 + 4x + 7 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Bloc 2 · Fonctions (chapitre 4)

___ / 4

⑤ **Domaines** Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$, puis celui de $g(x) = \frac{\sqrt{8-2x}}{x}$.

⑥ **Lire une parabole**
Ci-contre : $\mathcal{C}_f$, de sommet $S(1, 2)$. (a) Lire $f(0)$, puis résoudre $f(x) > 0$. (b) Trouver a : $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$.



⑦ **Encadrer** (a) Montrer que $0 < \frac{3}{x^2+2} \leq \frac{3}{2}$ pour tout réel x ; $\frac{3}{2}$ est-il atteint ?
(b) Si $1 \leq x \leq 4$, encadrer $2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$.

⑧ **Partie entière** (a) Calculer $E(-2,4)$ et $E(\sqrt{60})$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $E(3x - 1) = 2$.

Bloc 3 · Trigonométrie (chapitre 7)

___ / 4

⑨ **Valeurs remarquables** (a) Calculer $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\sin \frac{3\pi}{4}$ et $\tan(-\frac{\pi}{3})$.
(b) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

⑩ **Duplication** (a) $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin a = \frac{1}{3}$: calculer $\cos a$, $\sin 2a$ et $\cos 2a$.
(b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $\sin 2x = \sin x$.

⑪ $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$ (a) Écrire $1 - \cos x$ à l'aide de $\sin \frac{x}{2}$.
(b) Simplifier $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

⑫ **Angles associés** (a) Écrire $\cos(\frac{\pi}{2} + h)$ et $\sin(\frac{3\pi}{2} + h)$ avec $\sin h$ ou $\cos h$.
(b) Encadrer $\sin x \cos x$, puis $\frac{1}{2 + \sin x \cos x}$.

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi page 69.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Limite finie en un point

Jusqu'ici, on calculait des images $f(a)$. Ce chapitre étudie le comportement de $f(x)$ **lorsque x s'approche de a** (même si f n'est pas définie en a) ou lorsque x devient très grand. C'est la porte d'entrée de l'analyse : les chapitres suivants reposent entièrement sur lui.

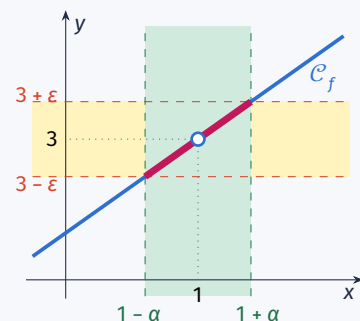
Exemple : approche numérique et graphique

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On ne peut pas calculer $f(1)$, mais on peut calculer $f(x)$ pour x **proche** de 1 :

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	✗	3,002	3,02	3,2

Les valeurs s'approchent de 3. En effet $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$, donc $f(x) = 2x + 1$ pour $x \neq 1$: $\mathcal{C}_f$ est la droite $y = 2x + 1$ **privée du point** $(1, 3)$, le « trou » marqué d'un petit cercle blanc.

Aussi près qu'on veut. $|f(x) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1|$: pour avoir $|f(x) - 3| < 10^{-3}$, il suffit que $0 < |x - 1| < 5 \cdot 10^{-4}$; pour un écart $\varepsilon > 0$ **quelconque**, il suffit que $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. On dit que $f(x)$ **tend vers** 3 quand x tend vers 1.



si $0 < |x - 1| < \alpha$, le point de $\mathcal{C}_f$ reste dans la bande jaune

Définition : limite finie en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle ouvert **pointé** $]a - r, a[\cup]a, a + r[$ ($r > 0$; f n'est pas forcément définie en a). On dit que f **admet pour limite ℓ en a** , ou que $f(x)$ **tend vers ℓ** quand x tend vers a , et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lecture. $0 < |x - a| < \alpha$ signifie $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$ et $x \neq a$; $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ signifie $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Quelle que soit la largeur 2ε de la bande horizontale, il existe une bande verticale autour de a où la courbe reste dans la bande horizontale. Le réel α **dépend de ε** (ci-dessus $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$) : l'ordre « $\forall \varepsilon, \exists \alpha$ » est essentiel (chapitre 1).

Méthode : Comment démontrer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec ε et α

1. Brouillon : transformer $|f(x) - \ell|$ et le **majorer** par une expression en $|x - a|$, du type $K|x - a|$ (si besoin pour $|x - a| < 1$). **2. Choisir** α en fonction de ε (par exemple $\alpha = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{K}\right)$). **3. Rédiger :** « Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \dots > 0$. Pour $x \in D_f$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$, on a $|f(x) - \ell| \leq \dots < \varepsilon$. » **4. Conclure** par une phrase. (Exemples plus difficiles : section 11.)

Unicité de la limite

Si f admet une limite en a , cette limite est **unique** ; on la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. De plus : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \ell$.

Démonstration (par l'absurde). Supposons que f tende vers ℓ et vers ℓ' , avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2} > 0$: il existe α_1 et α_2 tels que $0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$. Le réel $x = a + \frac{1}{2} \min(\alpha_1, \alpha_2, r)$ vérifie les deux, d'où $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'|$: contradiction. Les équivalences se lisent sur la définition (avec $x = a + h$). $\square$

Limites usuelles en 0 ($n \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

Démonstrations. Soit $\varepsilon > 0$. $|x|$: on prend $\alpha = \varepsilon$ (de même $|x - a| < \varepsilon$ pour $\lim_{x \rightarrow a} x = a$). x^n : si $|x| < 1$, alors $|x^n| = |x|^n \leq |x|$; avec $\alpha = \min(1, \varepsilon)$, $0 < |x| < \alpha \Rightarrow |x^n| \leq |x| < \varepsilon$. $\sqrt{x}$ (ici $x \in D_f$ impose $x > 0$, c'est une limite « à droite », section 3) : avec $\alpha = \varepsilon^2$, $0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon$. $\square$

À venir : pour un polynôme P , on verra (section 6) que $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$: on « remplace x par a ». Pour une fonction quelconque, c'est faux (section 3) : la limite ne dépend pas de la valeur en a .

Remarque. Un peu d'histoire. **Newton** (*Principia*, 1687) raisonne sur les « dernières raisons » de quantités qui s'évanouissent, **Leibniz** sur des infiniment petits. **D'Alembert** (*Encyclopédie*, 1765) propose de fonder le calcul sur la notion de limite. **Cauchy** (*Cours d'analyse*, 1821) en fait la base de l'analyse : une variable a pour limite un nombre fixe lorsque ses valeurs s'en approchent indéfiniment. Enfin **Weierstrass** (Berlin, vers 1860) donne la définition actuelle, avec ε et δ (notre α), sans aucune idée de « mouvement ».

2 Limite infinie en un point

Pour $x = 0,1$; $0,01$; $0,001$, $\frac{1}{x^2}$ vaut 100 ; 10^4 ; 10^6 : $\frac{1}{x^2}$ **dépasse n'importe quel réel A** , pourvu que x soit assez proche de 0.

Définition : limite infinie en un point (f définie sur $]a - r, a[\cup]a, a + r[$)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \alpha \implies f(x) > A.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \alpha \implies f(x) < -A. \quad (\text{Ainsi}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow a} (-f) = +\infty.)$$

Limites usuelles ($n \in \mathbb{N}^*$ pair)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Démonstrations. Soit $A > 0$. $\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$ convient. Si $n = 2p$ et $0 < |x| < 1$, alors $x^n = (x^2)^p \leq x^2$, donc $\frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{x^2}$: $\alpha = \min\left(1, \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$. $\frac{1}{|x|} > A \iff |x| < \frac{1}{A}$. Pour $x > 0$: $\frac{1}{\sqrt{x}} > A \iff x < \frac{1}{A^2}$: $\alpha = \frac{1}{A^2}$. $\square$

Définition : asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (ou seulement à droite, ou à gauche de a : section 3), la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$: la courbe « longe » cette droite en montant (ou en descendant) indéfiniment.

Exemple : deux preuves par la définition

1. $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit $A > 0$:

$$f(x) > A \iff (x+1)^2 < \frac{3}{A} \iff |x+1| < \sqrt{\frac{3}{A}}.$$

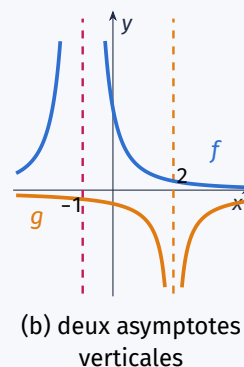
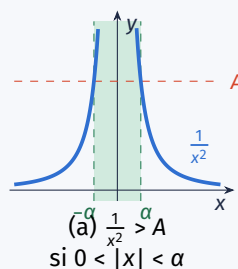
Avec $\alpha = \sqrt{\frac{3}{A}}$: $0 < |x+1| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$. Donc

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$: la droite $x = -1$ est asymptote verticale. Par exemple $f(x) > 10^6$ dès que

$0 < |x+1| < \sqrt{3} \cdot 10^{-3} \approx 0,0017$.

2. $g(x) = -\frac{1}{|x-2|}$: $g(x) < -A \iff |x-2| < \frac{1}{A}$;

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$, asymptote verticale $x = 2$.



3

Limites à droite et à gauche**Définition : limite à droite, limite à gauche**

Soit f définie sur $]a, a+r[$. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ (on écrit aussi $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$) $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in$

$D_f, a < x < a + \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

À gauche (f définie sur $]a-r, a[$), on remplace $a < x < a + \alpha$ par $a - \alpha < x < a$: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$.

Pour une limite $\pm\infty$, on remplace $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ par $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$).

Limites usuelles en 0 ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; si n est **impair**, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$; si n est **pair**, $+\infty$ des deux côtés.

Démonstration. Pour $x > 0$: $\frac{1}{x} > A \iff x < \frac{1}{A}$; pour $x < 0$: $\frac{1}{x} < -A \iff -\frac{1}{A} < x$. Si n est impair, x^n a le signe de x et, pour $0 < |x| < 1$, $\left|\frac{1}{x^n}\right| \geq \frac{1}{|x|}$. $\square$

Théorème (existence de la limite)

1. Soit f définie sur $]a - r, a[\cup]a, a + r[$ et ℓ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

2. Si de plus f est **définie en a** (fonction définie par morceaux), on exige aussi l'inégalité pour $x = a$ (on écrit $|x - a| < \alpha$) : elle donne $|f(a) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\ell = f(a)$. Ainsi f admet une limite en $a \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Démonstration de 1. ($\Rightarrow$) Le même α convient à droite et à gauche. ($\Leftarrow$) Si α_1 convient à gauche et α_2 à droite, $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ convient pour $0 < |x - a| < \alpha$. $\square$

Conséquence : $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 ($-\infty \neq +\infty$), mais la droite $x = 0$ est asymptote verticale à l'hyperbole.

Méthode : Comment étudier une limite en un point de raccord

1. Limite à droite : on utilise l'expression valable pour $x > a$ (on enlève les valeurs absolues avec le signe de $x - a$). 2. Limite à gauche : celle valable pour $x < a$. 3. Comparer, et si f est définie en a , comparer aussi avec $f(a)$. 4. Conclure : « f admet (ou n'admet pas) de limite en a ».

Exemple : une valeur absolue, puis un raccord avec paramètre

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x - 2|}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et $x^2 - 2x = x(x - 2)$. Si $x > 2$, $|x - 2| = x - 2$ et $f(x) = x$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$. Si $x < 2$, $|x - 2| = 2 - x$ et $f(x) = -x$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$.

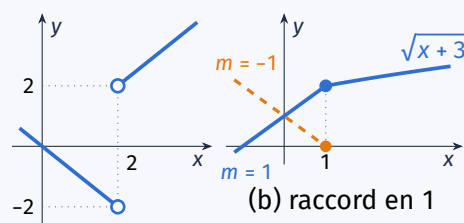
Comme $-2 \neq 2$, f n'a pas de limite en 2 (figure (a)).

2. $g(x) = mx + 1$ si $x \leq 1$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$ si $x > 1$ (m réel). À gauche : $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = m + 1 = g(1)$. À droite :

$$|\sqrt{x + 3} - 2| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x + 3} + 2} \leq \frac{|x - 1|}{2}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2. \text{ Ainsi}$$

$$g \text{ admet une limite en } 1 \iff m + 1 = 2 \iff m = 1.$$

Pour $m = -1$, la courbe « saute » de 0 à 2 (figure (b)).



(a) deux limites

(b) raccord en 1

La partie entière aux points entiers ($n \in \mathbb{Z}$)

Sur $[n-1, n[$, $E(x) = n-1$; sur $[n, n+1[$, $E(x) = n$. Donc $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n-1$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n = E(n)$:

E n'a pas de limite en un entier (la courbe en escalier « saute » de 1). En un réel $a \notin \mathbb{Z}$, E est constante près de a : $\lim_{x \rightarrow a} E(x) = E(a)$.

Deux exemples. $h(x) = (x - 2)E(x)$ en 2 : sur $[1, 2[$, $h(x) = x - 2$; sur $[2, 3[$, $h(x) = 2(x - 2)$; les deux limites latérales valent 0 = $h(2)$: $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$ (le facteur $x - 2$ « écrase » le saut). $k(x) = x - E(x)$

en 2 : $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$: pas de limite.

4

Limites à l'infini

Définition : limites en $+\infty$ (f définie sur un intervalle $]c, +\infty[$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, x > B \implies f(x) > A \quad (\text{pour } -\infty : f(x) < -A).$$

En $-\infty$ (f définie sur $]-\infty, c[$), on remplace « $x > B$ » par « $x < -B$ ». La limite, si elle existe, est encore **unique**.

Limites usuelles en $\pm\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Démonstrations. Si $x \geq 1$, alors $x^n \geq x$: avec $B = \max(1, A)$, $x > B \implies x^n \geq x > A$. $\sqrt{x} > A \iff x > A^2$: $B = A^2$. Si $|x| \geq 1$, alors $\left|\frac{1}{x^n}\right| \leq \frac{1}{|x|}$: avec $B = \max\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, $|x| > B \implies \left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$. $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon^2}$. En $-\infty$: $x^n = (-1)^n(-x)^n$ avec $-x \rightarrow +\infty$. $\square$

Définition : asymptote horizontale

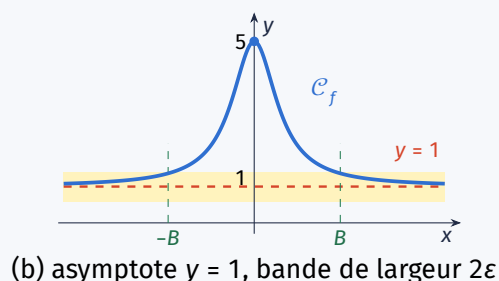
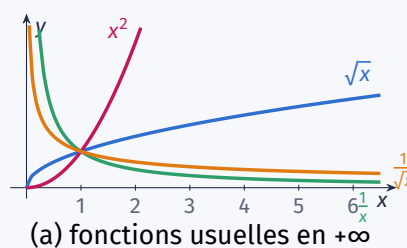
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (réel), la droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (de même en $-\infty$). La **position** de $\mathcal{C}_f$ par rapport à elle est donnée par le signe de $f(x) - \ell$.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

On écrit $f(x) = \frac{(x^2+1)+4}{x^2+1} = 1 + \frac{4}{x^2+1}$. Pour $x \neq 0$: $0 < f(x) - 1 = \frac{4}{x^2+1} < \frac{4}{x^2}$. Soit $\varepsilon > 0$: $\frac{4}{x^2} < \varepsilon \iff |x| > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$; avec $B = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$, $|x| > B \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** ($f(x) - 1 > 0$). Pour $\varepsilon = 0,01$: dès que $|x| > 20$, $f(x)$ est à moins de 0,01 de 1.

Une fonction sans limite en $+\infty$: sin prend les valeurs 1 et -1 au-delà de tout réel B (en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$) ; elle n'a pas de limite (même preuve qu'en section 11).



5

Opérations sur les limites

Les résultats sont écrits en a ; ils restent vrais en a^+ , en a^- , en $+\infty$ et en $-\infty$.

Théorème (limites finies)

Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$ (réels), alors $\lim(f + g) = \ell + \ell'$, $\lim(kf) = k\ell$ ($k \in \mathbb{R}$), $\lim(fg) = \ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\lim \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration (somme et produit, en a). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe α_1, α_2 tels que $0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$; pour $0 < |x - a| < \min(\alpha_1, \alpha_2)$: $|f(x) + g(x) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \varepsilon$. Produit: $f(x)g(x) - \ell\ell' = f(x)(g(x) - \ell') + \ell'(f(x) - \ell)$; près de a , $|f(x)| < |\ell| + 1$ (définition avec $\varepsilon = 1$), donc $|fg - \ell\ell'| \leq (|\ell| + 1)|g - \ell'| + |\ell'||f - \ell|$, rendu $< \varepsilon$ en rendant $|g - \ell'|$ et $|f - \ell|$ assez petits. Le quotient est admis. $\square$

Tableaux. ℓ, ℓ' sont réels et « ∞ » désigne $+\infty$ ou $-\infty$: on applique la règle des signes.

Somme					
$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f + g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit				
$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim g$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim(fg)$	$\ell\ell'$	∞	∞	F.I.

Quotient						
$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$ ou ∞	∞	0	∞
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	ℓ'	0	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	F.I.	F.I.

Les 4 formes indéterminées

$$\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

on ne conclut pas : on **trans-**
forme l'écriture (section 7).

Exemple : pourquoi « indéterminée » ? tout est possible

$\infty - \infty$ en $+\infty$: $(x + 1) - x \rightarrow 1$, $x^2 - x = x(x - 1) \rightarrow +\infty$, $x - x^2 \rightarrow -\infty$, $(x + \sin x) - x = \sin x$ n'a pas de limite. $\frac{0}{0}$ en 0^+ : $\frac{x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0$, $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. La forme ne suffit pas : il faut regarder **qui va le plus vite**.

Méthode : le signe d'un « 0 » au dénominateur

Si le numérateur tend vers $\ell \neq 0$ et le dénominateur vers 0, on étudie le **signe du dénominateur** de chaque côté (tableau de signes). **Exemple** : $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{x+2}{(x-1)(x-3)}$, et $x+2 \rightarrow 3$ en 1. Le trinôme est positif à l'extérieur de $[1, 3]$ et négatif entre 1 et 3 : en 1^+ il tend vers 0^+ , en 1^- vers 0^- . Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; de même $(x+2 \rightarrow 5)$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$: deux asymptotes verticales, $x = 1$ et $x = 3$.

Sans indétermination, on conclut directement :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sqrt{x}) = +\infty$ (forme $+\infty + \infty$) ; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right) = +\infty$ (forme $+\infty - 0$) ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)(x^3 + 1) = -\infty$ (forme $2 \times (-\infty)$) ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2 + 1} = 0$ (forme $\frac{3}{+\infty}$).

6

Polynômes, fractions rationnelles

En un point a

Pour tout polynôme P : $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$. Pour une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ avec $Q(a) \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$. (On combine $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, les constantes, les sommes, les produits et les quotients.)

Théorème (en $+\infty$ et en $-\infty$)

1. Un polynôme a la limite de son **terme de plus haut degré** : si $a_n \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

2. Une fraction rationnelle a la limite du **quotient de ses termes de plus haut degré** :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_p x^p + \dots + a_0}{b_q x^q + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} \quad (a_p \neq 0, b_q \neq 0).$$

Démonstration. Pour $x \neq 0$ et $n \geq 1$, on met le terme dominant en facteur :

$$P(x) = a_n x^n u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}.$$

Chaque $\frac{1}{x^k}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, donc $\lim u = 1$. Comme $a_n x^n$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et $u \rightarrow 1 > 0$, le produit a la même limite que $a_n x^n$ (tableau du produit). De même $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p x^p}{b_q x^q} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\frac{u}{v} \rightarrow 1$. $\square$

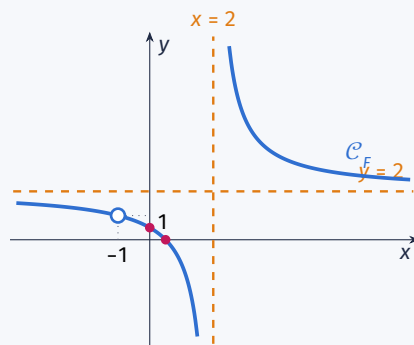
Exemple : une étude complète : $F(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2}$

Domaine et forme simple. $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, donc $D_F = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$; $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$, donc $F(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ pour $x \in D_F$.

En -1 (forme $\frac{0}{0}$) : $\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \frac{-3}{-3} = 1$: un **trou** en $(-1, 1)$, pas d'asymptote.

En 2 : $2x-1 \rightarrow 3$ et $x-2 \rightarrow 0^\pm$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = -\infty$: **asymptote verticale** $x = 2$.

En $\pm\infty$: $\lim F = \frac{2x^2}{x^2} = 2$: **asymptote horizontale** $y = 2$; $F(x) - 2 = \frac{3}{x-2}$: $\mathcal{C}_F$ est au-dessus pour $x > 2$, au-dessous pour $x < 2$.



trou en $(-1, 1)$, asymptotes $x = 2$ et $y = 2$

degrés	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P}{Q}$
$p < q$	0
$p = q$	$\frac{a_p}{b_q}$
$p > q$	limite de $\frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$: $\pm\infty$

Exemples. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - x + 4}{3 - 2x^2} = \frac{6}{-2} = -3 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2}{5x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 7}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0.$$

Attention, piège ! (le terme dominant ne sert qu'en $\pm\infty$)

En un point a , on « remplace ». Si l'on trouve $\frac{0}{0}$, alors a est **racine** du numérateur et du dénominateur : on factorise les deux par $x - a$ (identités remarquables, division euclidienne ou tableau de Horner), on simplifie, puis on remplace. **Exemple** : en -1 , $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ et $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$.

7

Lever une indétermination**Méthode : Comment lever une forme indéterminée**

1. Identifier la forme en « remplaçant » mentalement (on n'écrit jamais « $\frac{0}{0} = \dots$ »). **2. Choisir l'outil** selon ce qu'on voit (tableau). **3. Transformer** l'expression (factoriser, simplifier, multiplier par le conjugué...) jusqu'à ce que les tableaux de la section 5 s'appliquent **sans** forme indéterminée. **4. Conclure** par une phrase.

Je vois...	J'utilise...
un polynôme ou une fraction rationnelle en $\pm\infty$	le terme de plus haut degré (section 6)
$\frac{0}{0}$ en a avec des polynômes	factoriser par $x - a$ et simplifier (outil 1)
une différence avec une racine carrée	la quantité conjuguée (outil 2)
des puissances ou $\sqrt{x^2 + \dots}$ en $\pm\infty$	le terme dominant en facteur, $\sqrt{x^2} = x $ (outil 3)
$\infty - \infty$ entre deux fractions en a	la mise au même dénominateur (outil 4)
sin, cos, tan	les limites trigonométriques (section 8)

Outil 1 : factoriser et simplifier. En $\frac{3}{2}$, forme $\frac{0}{0}$: $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$ et $2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x + 3}{x + 1} = \frac{6}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{12}{5}}.$$

Outil 2 : la quantité conjuguée.

Méthode : Comment utiliser le conjugué

1. Repérer la différence gênante $\sqrt{A} - B$ (ou $\sqrt{A} - \sqrt{B}$). **2.** Multiplier en haut et en bas par le **conjugué** $\sqrt{A} + B$: $\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$ (et $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$) : la racine disparaît du numérateur. **3.** Simplifier par $x - a$, ou mettre le terme dominant en facteur. **4.** Vérifier que le conjugué ne tend pas vers 0, puis conclure.

Exemple : trois formes : $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, et $0 \times \infty$ en $-\infty$

1. En 2, forme $\frac{0}{0}$: $\frac{\sqrt{3x+3} - 3}{x^2 - 4} = \frac{(3x+3) - 9}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x+3} + 3)} = \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{3x+3} + 3)} = \frac{3}{(x+2)(\sqrt{3x+3} + 3)}$, donc la limite vaut $\frac{3}{4 \times 6} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

2. En $+\infty$, forme $\infty \times 0$: $\sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) = \frac{\sqrt{x}((x+3) - (x-1))}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$

$$\frac{4}{1+1} = \boxed{2}.$$

3. En $-\infty$, forme $(-\infty) \times 0$: comme $(\sqrt{x^2+9}+x)(\sqrt{x^2+9}-x) = 9$, $\sqrt{x^2+9}+x = \frac{9}{\sqrt{x^2+9}-x}$. Pour

$x < 0$, $\sqrt{x^2+9} = |x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}$, donc

$$x(\sqrt{x^2+9}+x) = \frac{9x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x} = \frac{-9}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \boxed{-\frac{9}{2}}.$$

Outil 3 : le terme dominant en facteur. $x-3\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)$: $(+\infty) \times (+\infty)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3\sqrt{x}) = +\infty$.

$\frac{2x-\sqrt{x}+1}{3x+\sqrt{x}} = \frac{2-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{2}{3}}$. En $-\infty$, **attention au signe** : pour $x \leq -2$, $\sqrt{x^2+2x} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}} =$

$-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}$, donc $\frac{\sqrt{x^2+2x}}{3x-1} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(3-\frac{1}{x})} = \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{3-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \boxed{-\frac{1}{3}}$.

Outil 4 : le même dénominateur. En -3 , $\frac{1}{x+3} - \frac{6}{9-x^2}$ est de la forme $\infty - \infty$. Comme $9-x^2 = (3-x)(3+x)$:

$$\frac{1}{x+3} - \frac{6}{9-x^2} = \frac{(3-x)-6}{(3-x)(3+x)} = \frac{-(x+3)}{(3-x)(x+3)} = \frac{-1}{3-x} \xrightarrow{x \rightarrow -3} \boxed{-\frac{1}{6}}.$$

8

Limites trigonométriques

Les angles sont mesurés en **radians**. Voici les limites de référence et la méthode pour s'en servir ; leur démonstration (plus bas) repose sur une comparaison d'aires dans le cercle trigonométrique.

Théorème (les limites trigonométriques de référence)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

De plus, pour tout réel a : $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$, $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$, et $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$ si $\cos a \neq 0$.

Avec un coefficient ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

En effet $\frac{\sin(ax)}{x} = a \cdot \frac{\sin(ax)}{ax}$, où $X = ax \rightarrow 0$ (de même pour les deux autres).

Méthode : Comment faire apparaître $\frac{\sin x}{x}$

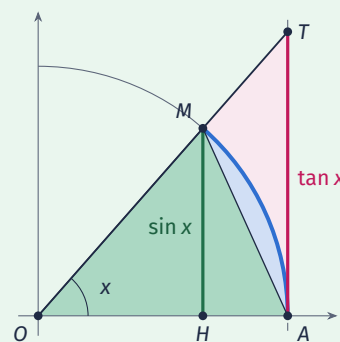
1. Repérer l'argument x du sinus (ou de la tangente) et vérifier que $x \rightarrow 0$; avec $1 - \cos x$, viser x^2 . 2. Multiplier et diviser par x (ou par x^2) : **le même x en haut et en bas**. 3. Regrouper ce qui reste (les puissances de x se simplifient, les constantes sortent). 4. Conclure avec les limites de référence et les opérations. Si $x \rightarrow a \neq 0$, on pose d'abord $X = x - a$ (section 10).

Lemme (comparaison des aires)

Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\sin x < x < \tan x$.

Pour tout réel t : $|\sin t| \leq |t|$ et $0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$.

Démonstration. Soit $A(1, 0)$, $M(\cos x, \sin x)$ et $T(1, \tan x)$, point où la droite (OM) coupe la tangente au cercle en A . Le triangle OAM est contenu dans le secteur angulaire OAM , lui-même contenu dans le triangle OAT . Leurs aires sont $\frac{1}{2} \sin x$, $\frac{x}{2}$ (l'aire d'un secteur est proportionnelle à son angle : π pour 2π) et $\frac{1}{2} \tan x$: d'où $\sin x < x < \tan x$. Ensuite, si $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $|\sin t| < t$; si $t \geq \frac{\pi}{2} > 1$, $|\sin t| \leq 1 < t$; le cas $t < 0$ s'en déduit par imparité. Enfin $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \leq 2 \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{2}$. $\square$



aire $OAM <$ aire du secteur $<$ aire OAT

Démonstration du théorème. 1. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on divise $\sin x < x < \tan x$ par $\sin x > 0$: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, donc $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$; c'est encore vrai pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (les trois membres sont pairs). Avec le lemme : $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \min\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2\varepsilon}\right)$: si $0 < |x| < \alpha$, alors $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{x^2}{2} < \varepsilon$. 2. $|1 - \cos x| \leq \frac{x^2}{2}$ donne $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, puis $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \times 1$. 3. $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \times 1^2$ (avec $X = \frac{x}{2} \rightarrow 0$, section 10), et $\frac{1 - \cos x}{x} = x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2}$. 4. Par les formules de transformation (chapitre 7) : $|\sin x - \sin a| = 2 \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} = |x-a|$ et de même $|\cos x - \cos a| = 2 \left|\sin \frac{x+a}{2}\right| \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq |x-a|$; pour $\tan$, on fait le quotient. $\square$

Exemple : quatre limites en 0, puis une en 1

$$\bullet \frac{\sin 7x}{2x} = \frac{7}{2} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \rightarrow \frac{7}{2} ; \quad \frac{\sin x \tan 3x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 3 \rightarrow 1 \times 1 \times 3 = 3 ;$$

$$\frac{1 - \cos 4x}{x \sin x} = \frac{1 - \cos 4x}{(4x)^2} \cdot 16 \cdot \frac{x}{\sin x} \rightarrow \frac{1}{2} \times 16 \times 1 = 8.$$

• **Conjugué et cosinus** : près de 0, $\cos x > 0$ et $\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{4}$ (limite de $\sqrt{u}$, section 10).

• **En 1 (forme $\frac{0}{0}$)** : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}$. On pose $X = x - 1 \rightarrow 0$: $1 - x^2 = 1 - (1 + X)^2 = -X(2 + X)$ et $\sin(\pi x) = \sin(\pi + \pi X) = -\sin(\pi X)$ (angles associés, chapitre 7), donc

$$\frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)} = \frac{X(2 + X)}{\sin(\pi X)} = \frac{2 + X}{\pi} \cdot \frac{\pi X}{\sin(\pi X)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{2}{\pi}.$$

9

Limites et ordre

« Au voisinage de a » signifie : sur un intervalle ouvert pointé $]a - r, a[\cup]a, a + r[$ (sur $]a, a + r[$ en a^+ , sur $]B, +\infty[$ en $+\infty$, etc.).

Théorèmes de comparaison (en a , en $a^\pm$ ou en $\pm\infty$)

- 1. Minoration** : si $f \geq g$ au voisinage de a et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$.
- 2. Majoration** : si $f \leq g$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim f = -\infty$.
- 3. Gendarmes** : si $u \leq f \leq v$ au voisinage de a et $\lim u = \lim v = \ell$ (réel), alors $\lim f = \ell$.
- 4. Écart** : si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim g = 0$, alors $\lim f = \ell$. En particulier, **une fonction bornée fois une fonction qui tend vers 0 tend vers 0**.
- 5. Passage à la limite** : si $f \leq g$ au voisinage de a , $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$ (même si $f < g$: l'inégalité devient **large**).

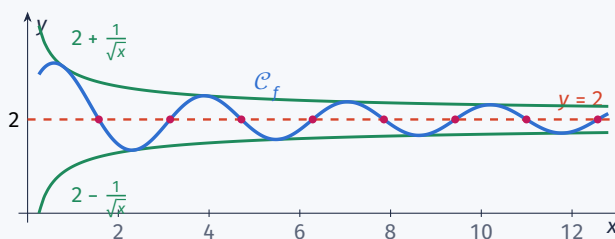
Démonstrations (en $+\infty$; en a , on remplace « $x > B$ » par « $0 < |x - a| < \alpha$ »). L'inégalité est vraie pour $x > B_0$. **1.** Soit $A > 0$: il existe B_1 tel que $x > B_1 \Rightarrow g(x) > A$; pour $x > \max(B_0, B_1)$, $f(x) \geq g(x) > A$. **3.** Soit $\varepsilon > 0$: il existe B_1, B_2 tels que $x > B_1 \Rightarrow u(x) > \ell - \varepsilon$ et $x > B_2 \Rightarrow v(x) < \ell + \varepsilon$; pour $x > \max(B_0, B_1, B_2)$: $\ell - \varepsilon < u(x) \leq f(x) \leq v(x) < \ell + \varepsilon$. **4.** C'est 3 avec $u = \ell - g$ et $v = \ell + g$; si $|h| \leq M$ et $g \rightarrow 0$, alors $|hg| \leq M|g|$. **5.** Par l'absurde : si $\ell > \ell'$, avec $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$, on aurait pour x assez grand $g(x) < \ell' + \varepsilon = \ell - \varepsilon < f(x)$. $\square$

Exemple : avec cos, sin et la partie entière

- Minoration.** Pour $x > 0$, $\sqrt{x} \cos x \geq -\sqrt{x}$, donc $2x + \sqrt{x} \cos x \geq 2x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)$, qui tend vers $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{x} \cos x) = +\infty$.
- Écart.** Pour $x > 0$: $\left| \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{x}{x^2 + 1} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} = 0$.
- Partie entière.** $x - 1 < E(x) \leq x$, donc pour $x > 0$: $\frac{2x - 1}{2x + 1} < \frac{x + E(x)}{2x + 1} \leq \frac{2x}{2x + 1}$. Les deux bornes tendent vers 1 (section 6) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + E(x)}{2x + 1} = 1$.

Exemple : une courbe qui coupe son asymptote une infinité de fois

$f(x) = 2 + \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$. Comme $|\sin 2x| \leq 1$: $|f(x) - 2| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; la droite $y = 2$ est asymptote horizontale. La courbe est coincée entre les « gendarmes » $y = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $y = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$, et elle **coupe** son asymptote en chaque $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{N}^*$), où $\sin 2x = 0$.



10 Composer et changer de variable

Théorème (limite de $\sqrt{u}$)

Soit u une fonction positive au voisinage de a (a réel, $a^\pm$ ou $\pm\infty$). Si $\lim u = \ell \geq 0$, alors $\lim \sqrt{u} = \sqrt{\ell}$; si $\lim u = +\infty$, alors $\lim \sqrt{u} = +\infty$.

Démonstration (en a). Si $\ell > 0$: $\left| \sqrt{u(x)} - \sqrt{\ell} \right| = \frac{|u(x) - \ell|}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{|u(x) - \ell|}{\sqrt{\ell}}$, rendu $< \varepsilon$ en prenant $|u(x) - \ell| < \varepsilon \sqrt{\ell}$.

Si $\ell = 0$: $\sqrt{u(x)} < \varepsilon \iff u(x) < \varepsilon^2$. Si $u \rightarrow +\infty$: $\sqrt{u(x)} > A \iff u(x) > A^2$. $\square$

En particulier $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ pour tout $a > 0$ (et $\sqrt{x} \rightarrow 0$ en 0^+).

Théorème (limite de $x \mapsto f(ax + b)$, avec $a \neq 0$)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 = ax_0 + b$. Si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$ (ℓ réel ou $\pm\infty$), alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(ax + b) = \ell$.

Démonstration (ℓ réel). Soit $\varepsilon > 0$ et α' associé à f en X_0 . Si $0 < |x - x_0| < \frac{\alpha'}{|a|}$, alors $X = ax + b$ vérifie $0 < |X - X_0| = |a| |x - x_0| < \alpha'$, donc $|f(ax + b) - \ell| < \varepsilon$: $\alpha = \frac{\alpha'}{|a|}$ convient. $\square$

Changements de variable simples

$X = x - a$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} f(a + X)$ (et $x \rightarrow a^+ \iff X \rightarrow 0^+$). $X = -x$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X)$.

$X = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{X}\right)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{X}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{X}\right)$.

Il suffit de traduire les définitions : par exemple, pour $x > 0$, $x > B \iff 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{B}$.

Méthode : Comment changer de variable

1. Choisir X : ce qui doit tendre vers 0 (souvent $X = x - a$ ou $X = \frac{1}{x}$), ou l'expression « intérieure ». 2. Trouver la limite de X . 3. Écrire **toute** l'expression en fonction de X (exprimer x en fonction de X). 4. Calculer la limite en X . 5. Conclure par une phrase sur la limite demandée.

Exemple : quatre changements de variable

- $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x^3 + 27}{x + 3}}$: pour $x \neq -3$, $\frac{x^3 + 27}{x + 3} = x^2 - 3x + 9 \rightarrow 27 \geq 0$, donc la limite vaut $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (limite de $\sqrt{u}$).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{3}{x}$: avec $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, $x \tan \frac{3}{x} = \frac{\tan 3X}{X} \rightarrow 3$.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}$: avec $X = x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 0$, $\sin 3x = \sin(\pi + 3X) = -\sin 3X$, donc $\frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sin 3X}{X} \rightarrow -3$.
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sin(2x + 1)}{4x + 2}$: avec $X = 2x + 1 \rightarrow 0$, c'est $\frac{\sin X}{2X} \rightarrow \frac{1}{2}$ (théorème sur $f(ax + b)$).

11 Pour aller plus loin

1. Démontrer une limite avec ε et α (ou avec B).

- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x) = -2$. Brouillon : $|x^2 + 3x + 2| = |x + 2| |x + 1|$; si $|x + 2| < 1$, alors $-3 < x < -1$, donc $|x + 1| < 2$. Rédaction : soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$; si $0 < |x + 2| < \alpha$, alors $|x^2 + 3x - (-2)| < 2|x + 2| < 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+2}{x+3} = 5$. Pour $x > 0$: $\left| \frac{5x+2}{x+3} - 5 \right| = \frac{13}{x+3} < \frac{13}{x}$; avec $B = \frac{13}{\varepsilon}$, $x > B \Rightarrow \left| \frac{5x+2}{x+3} - 5 \right| < \varepsilon$.

2. Une fonction sans limite : $\sin \frac{1}{x}$ en 0. Supposons $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \ell$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left| \sin \frac{1}{x} - \ell \right| < 1$. Or, pour un entier k assez grand, $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ et $y_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ sont dans $]0, \alpha[$, avec $\sin \frac{1}{x_k} = 1$ et $\sin \frac{1}{y_k} = -1$: $2 = |1 - (-1)| \leq |1 - \ell| + |\ell + 1| < 1 + 1$, contradiction. Mais $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$, donc (écart) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$: le facteur x « écrase » les oscillations. **Les voisines** (en $+\infty$, on pose $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$):

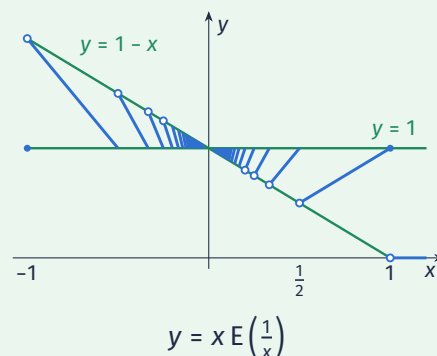
	$\sin \frac{1}{x}$	$x \sin \frac{1}{x}$	$x \sin \frac{1}{x^2}$	$\frac{\sin x}{x}$
en 0	pas de limite	0 (écart $ x $)	0 (écart $ x $)	1
en $+\infty$	0 ($\sin X \rightarrow 0$)	1 ($\frac{\sin X}{X}$)	0 ($X \cdot \frac{\sin X^2}{X^2}$)	0 (écart $\frac{1}{x}$)

3. La partie entière, par encadrement. On part de $x - 1 < E(x) \leq x$.

- Pour $x > 0$: $1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$; pour $x < 0$ (on divise par $x < 0$: l'ordre change), $1 \leq \frac{E(x)}{x} < 1 - \frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

- Avec $\frac{1}{x}$ à la place de x : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, donc $1 - x < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ si $x > 0$, et $1 \leq x E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$ si $x < 0$.

Gendarmes à droite et à gauche : $\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Sur $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$, $E\left(\frac{1}{x}\right) = n$: la courbe est faite de segments $y = nx$ coïncés entre $y = 1 - x$ et $y = 1$.



4. Le conjugué « généralisé » : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

- En 1, forme $\frac{0}{0}$: avec $a = \sqrt{x}$ et $b = 1$, $x\sqrt{x} - 1 = a^3 - b^3 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$ et $x^2 - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$.
- En $+\infty$, une différence de deux « cubes » de racines : avec $a = \sqrt{x+1}$ et $b = \sqrt{x}$, $a - b = \frac{1}{a+b}$, donc $a^3 - b^3 = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} = \frac{2x+1+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, et

$$\frac{(x+1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2x+1+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{2+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2+0+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

12 Les pièges classiques

X Faux	✓ Vrai
« $\infty - \infty = 0$ »	c'est une forme indéterminée : en $+\infty$, $(x+1) - x \rightarrow 1$ mais $x^2 - x \rightarrow +\infty$
« $\frac{1}{0} = \infty$ », sans se soucier du signe	il faut le signe du dénominateur : $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$ en 1^+ et $-\infty$ en 1^-
« $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ »	$\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 : $+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche
« $\lim_{x \rightarrow 2} E(x) = E(2) = 2$ »	à gauche 1, à droite 2 : pas de limite. Toujours étudier les deux côtés d'un point de raccord
« $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ »	la limite 1 est en 0 ; en $+\infty$, $\left \frac{\sin x}{x} \right \leq \frac{1}{x}$ donne 0
« en 1, $\frac{x^2+5x-6}{x-1}$ vaut $\frac{0}{0} = 1$ », ou « je barre les x »	$\frac{0}{0}$ est indéterminée : on factorise d'abord par $x-1$ (1 est racine) : $\frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = x+6 \rightarrow 7$
« $\sqrt{x^2} = x$ »	$\sqrt{x^2} = x $: $\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = \frac{ x }{x} \sqrt{1+\frac{3}{x}} \rightarrow -1$ en $-\infty$
« en 0, $\frac{x^3+2x}{x^2-x}$ a la limite de $\frac{x^3}{x^2} = x$, donc 0 »	le terme de plus haut degré ne sert qu'en $\pm\infty$: $\frac{x^3+2x}{x^2-x} = \frac{x^2+2}{x-1} \rightarrow -2$ en 0
« $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} = 1$ »	le même X en haut et en bas : $\frac{\sin 6x}{x} = 6 \cdot \frac{\sin 6x}{6x} \rightarrow 6$
« $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}$ »	c'est $\frac{1-\cos x}{x^2}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$; $\frac{1-\cos x}{x} \rightarrow 0$
« $f < g$, donc $\lim f < \lim g$ »	seulement $\leq$: $-x^2 < x^2$ pour $x \neq 0$, et les deux tendent vers 0 en 0
« $\cos x$ tend vers 1 (ou vers 0) en $+\infty$ »	$\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$: on l'encadre, $-1 \leq \cos x \leq 1$
« une courbe ne coupe jamais son asymptote »	$2 + \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ coupe $y = 2$ une infinité de fois (section 9)
« $\sqrt{x^2+7} - x$ en $-\infty$: forme indéterminée, j'utilise le conjugué »	il n'y a pas d'indétermination : $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
« $f+g$ a une limite, donc f et g en ont une »	$\sin \frac{1}{x} + \left(-\sin \frac{1}{x}\right) = 0$ en 0, alors que $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite

13 Les astuces des concours

★ **Astuce de concours : le terme dominant sous la racine** : $\sqrt{x^2+ax+b} - x \rightarrow \frac{a}{2}$

En $+\infty$ (forme $\infty - \infty$), le conjugué donne $\sqrt{x^2+ax+b} - x = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x} = \frac{a + \frac{b}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} + 1}$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+ax+b} - x) = \frac{a}{2}$. À retenir : $\sqrt{x^2+6x-1} - x \rightarrow 3$, et plus généralement

$\sqrt{x^2 + ax + b} - (x+c) \rightarrow \frac{a}{2} - c$. En $-\infty$, on pose $t = -x \rightarrow +\infty$: $\sqrt{x^2 + ax + b} + x = \sqrt{t^2 - at + b} - t \rightarrow -\frac{a}{2}$, sans aucun risque d'erreur de signe sur $|x|$.

★ **Astuce de concours : le conjugué d'une somme de deux racines**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$: posons $S = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$; alors $S^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$, et

$$S - 2 = \frac{S^2 - 4}{S + 2} = \frac{2(\sqrt{1-x^2} - 1)}{S + 2} = \frac{-2x^2}{(\sqrt{1-x^2} + 1)(S + 2)}, \quad \text{donc} \quad \frac{S - 2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-2}{2 \times 4} = \boxed{-\frac{1}{4}}.$$

On a « conjugué deux fois » : d'abord la somme S (avec $S + 2$), puis $\sqrt{1-x^2} - 1$.

★ **Astuce de concours : faire apparaître $\frac{\sin X}{X}$ avec $X = x^2$, ou après une formule du chapitre 7**

$$\begin{aligned} \frac{\sin(3x^2)}{1 - \cos x} &= \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \cdot 3 \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \rightarrow 1 \times 3 \times 2 = \boxed{6} \quad (X = 3x^2 \rightarrow 0). \quad \text{Avec } \cos 3x = \\ \cos(2x + x) &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x : \cos 3x - \cos^3 x = 3 \cos^3 x - 3 \cos x = -3 \cos x \sin^2 x, \text{ donc} \\ \frac{\cos 3x - \cos^3 x}{x^2} &= -3 \cos x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \rightarrow \boxed{-3}. \end{aligned}$$

★ **Astuce de concours : encadrer avec la partie entière : $kx - 1 < E(kx) \leq kx$**

Pour $k > 0$ et $x > 0$: $k - \frac{1}{x} < \frac{E(kx)}{x} \leq k$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(kx)}{x} = k$: « $E(kx)$ se comporte comme kx ». De même, $x^2 - 1 < E(x^2) \leq x^2$ donne $\frac{E(x^2)}{x^2} \rightarrow 1$; on combine avec $\frac{E(x)}{x} \rightarrow 1$ (section 11) :

$$\frac{E(x^2)}{x E(x)} = \frac{E(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x}{E(x)} \rightarrow 1 \times 1 = \boxed{1} \text{ en } +\infty.$$

★ **Astuce de concours : ramener en 0 : décaler, puis changer d'échelle**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2}$: avec $X = x - 1$, $\cos(\pi x) = \cos(\pi + \pi X) = -\cos(\pi X)$, donc l'expression vaut

$$\frac{1 - \cos(\pi X)}{X^2} \rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{2}} \quad (\text{formule avec un coefficient, } a = \pi). \quad \text{Réflexe : en un point } a \neq 0, \text{ toujours}$$

poser $X = x - a$ et utiliser les formules d'angles associés.

★ **Astuce de concours : la parité donne une limite latérale gratuitement**

Si f est **paire**, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; si f est **impaire**, ces limites sont **opposées** (poser $X = -x$). C'est pourquoi, en section 8, on a pu ne traiter que $x > 0$

($\frac{\sin x}{x}$ est paire). **Exemple** : $g(x) = \frac{x^3 + 2x}{\sqrt{x^6 + 5}}$ est impaire, et en $+\infty$, $g(x) = \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^6}}} \rightarrow 1$; donc

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \boxed{-1}$, sans calcul (et sans erreur de signe sur $\sqrt{x^6} = |x|^3$).

★ *Astuce de concours : diviser par le terme dominant, même avec des sin et des E*

En $+\infty$, $\frac{x^2 + 3x \sin x + E(x)}{2x^2 - \sqrt{x}} = \frac{1 + 3 \frac{\sin x}{x} + \frac{E(x)}{x^2}}{2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}} : \left| 3 \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{3}{x}$ et, pour $x \geq 1$, $0 \leq \frac{E(x)}{x^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$: ces

deux termes tendent vers 0 (écart), donc la limite vaut $\boxed{\frac{1}{2}}$. Les fonctions bornées (sin, cos) et $E(x)$ (qui « se comporte comme » x) ne gênent pas : on les **encadre**.

★ *Astuce de concours : entrer un facteur sous la racine, avec son signe*

Si $u > 0$, $u = \sqrt{u^2}$; si $u < 0$, $u = -\sqrt{u^2}$. En 5^+ : $\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}} = \sqrt{\frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)}} = \sqrt{\frac{x-5}{x+5}} \rightarrow \boxed{0}$. En 5^- , $x+5 < 0$: $\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+5} = -\sqrt{\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)^2}} = -\sqrt{\frac{x-5}{x+5}} \rightarrow \boxed{-\infty}$, car $\frac{x-5}{x+5} \rightarrow \frac{-10}{0^-} = +\infty$. Oublier le signe donne $+\infty$: faux !

★ *Astuce de concours : le calcul numérique conjecture, il ne démontre pas*

Pour $x = 10^{-8}$, une calculatrice (ou un ordinateur) affiche $\cos x = 1$, donc $\frac{1-\cos x}{x^2} = 0$, alors que la limite vaut $\frac{1}{2}$! Le vrai écart $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} = 5 \cdot 10^{-17}$ est perdu dans les arrondis. La forme $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ donne, elle, 0,5. **Morale** : un tableau de valeurs aide à **deviner**, seule une démonstration (opérations, conjugué, encadrement, $\frac{\sin X}{X}$...) **prouve**.

14

L'essentiel du chapitre en une page

Définitions (f définie près de a)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

$\alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \dots \Rightarrow f(x) > A.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell :$

$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

La limite est **unique** ;

$\lim_{x \rightarrow a} f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell$ (et $\ell = f(a)$ si f est définie en a).

Limites usuelles ($n \in \mathbb{N}^*$)

En $0 : x^n, |x|, \sqrt{x} \rightarrow 0 ; \frac{1}{x^2}, \frac{1}{|x|} \rightarrow +\infty ; \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$
en $0^+ ; \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ en $0^+, -\infty$ en 0^- .

En $+\infty : x^n, \sqrt{x} \rightarrow +\infty ; \frac{1}{x^n}, \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0.$ En $-\infty :$

$x^n \rightarrow +\infty$ (n pair), $-\infty$ (n impair).

E en $n \in \mathbb{Z} : n - 1$ à gauche, n à droite (pas de limite).

Asymptotes

$\lim f = \pm\infty$ en a (ou $a^\pm$) : **verticale** $x = a$.

$\lim f = \ell$ en $\pm\infty$: **horizontale** $y = \ell$; position : signe de $f(x) - \ell$.

Opérations

Sommes, produits, quotients : tableaux + règle des signes ; $\frac{\ell \neq 0}{0^\pm} \rightarrow \pm\infty$ (signe du dénominateur !).

Formes indéterminées : $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}.$

Polynômes, fractions rationnelles

En $a : \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) ; \frac{P}{Q} \rightarrow \frac{P(a)}{Q(a)}$ si $Q(a) \neq 0$.

En $\pm\infty$: **terme de plus haut degré** ; $\frac{P}{Q}$: quotient des termes dominants (0 si $p < q$, $\frac{a_p}{b_q}$ si $p = q$, $\pm\infty$ si $p > q$).

Lever une F.I.

$\frac{0}{0}$ en a : factoriser par $x - a$, simplifier.

Conjugué : $\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B} ;$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

Terme dominant en facteur ; $\sqrt{x^2} = |x|$ ($= -x$ en $-\infty$) ; même dénominateur.

Trigonométrie (radians)

$0 < x < \frac{\pi}{2} : \sin x < x < \tan x ; |\sin x| \leq |x| ;$

$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$

$\frac{\sin(ax)}{x} \rightarrow a, \frac{\tan(ax)}{bx} \rightarrow \frac{a}{b}, \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \rightarrow \frac{a^2}{2}$ (le même X en haut et en bas) ; en $a \neq 0 : X = x - a$.

Limites et ordre

$f \geq g$ et $g \rightarrow +\infty \Rightarrow f \rightarrow +\infty ; f \leq g$ et $g \rightarrow -\infty \Rightarrow f \rightarrow -\infty.$

Gendarmes : $u \leq f \leq v, u, v \rightarrow \ell \Rightarrow f \rightarrow \ell.$

$|f - \ell| \leq g$ et $g \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow \ell$; (bornée) $\times$ (tend vers 0) $\rightarrow 0$.

$f \leq g \Rightarrow \lim f \leq \lim g$ (inégalité large).

Composer, changer de variable

$u \geq 0, u \rightarrow \ell \geq 0 \Rightarrow \sqrt{u} \rightarrow \sqrt{\ell} ;$

$u \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{u} \rightarrow +\infty.$

$\lim_{x \rightarrow ax_0 + b} f(X) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(ax + b) = \ell.$

$X = x - a ; X = \frac{1}{x} (x \rightarrow +\infty \iff X \rightarrow 0^+); X = -x.$

Partie entière

$x - 1 < E(x) \leq x ; \frac{E(x)}{x} \rightarrow 1$ en $\pm\infty ; x E\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$ en 0 .

À retenir pour les concours

$\sqrt{x^2 + ax + b} - x \rightarrow \frac{a}{2}$ en $+\infty ; x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ en 0 ,
 $\sin \frac{1}{x}$ sans limite ; parité : une limite latérale suffit.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours : $x \rightarrow a^+$ ($x > a$), $x \rightarrow a^-$ ($x < a$) ; **F.I.** forme indéterminée ; $E(x)$ partie entière ; en 0 : $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

15

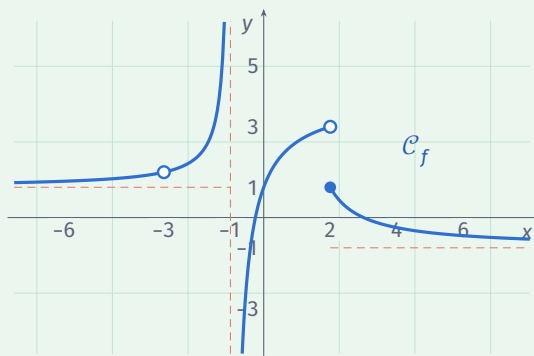
Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Lire des limites sur un graphique ★

corrigé p. 39

Ci-contre, la courbe $\mathcal{C}_f$ est formée de trois morceaux et ses asymptotes sont en pointillés. Les petits cercles blancs sont des points exclus de $\mathcal{C}_f$; le point plein (2, 1) est sur $\mathcal{C}_f$.

1. Lire D_f , $f(0)$ et $f(2)$.
2. Lire les limites de f en $-\infty$, en -3 , en -1 à gauche et à droite, en 2 à gauche et à droite, et en $+\infty$.
3. f admet-elle une limite en -3 ? en -1 ? en 0 ? en 2 ? Justifier.
4. Donner les équations des asymptotes de $\mathcal{C}_f$.



Exercice 2 Limites usuelles et opérations ★

corrigé p. 39

1. Calculer, à l'aide des limites usuelles et des opérations (il n'y a aucune forme indéterminée) :
a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x} + x^2 \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{x} + x^2 \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - x^3 - \sqrt{x})$;
f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^4 - \frac{1}{x} \right)$; g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right) \left(\frac{1}{x} - 2 \right)$; h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+x}$; i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$; j) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.
2. Aussi près qu'on veut. Trouver $A > 0$ tel que $0 < \frac{1}{x^2} < 10^{-6}$ pour tout $x > A$, puis $\alpha > 0$ tel que $|x^3| < 10^{-6}$ dès que $0 < |x| < \alpha$.

Exercice 3 Limites à droite et à gauche, asymptotes verticales ★

corrigé p. 39

Limites à gauche et à droite aux points indiqués (signe du dénominateur) ; asymptotes verticales des courbes ?

- a) $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ en -1 ; b) $g(x) = \frac{x^2+1}{(x-2)^2}$ en 2 ; c) $h(x) = \frac{2x-5}{x^2-x-6}$ en 3 et en -2 ; d) $k(x) = \frac{x}{x^2-2x}$ en 0 et en 2.

Exercice 4 Polynômes et fractions rationnelles à l'infini ★

corrigé p. 40

1. Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - 7x^3 + x - 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 3x^3 + 100x^2)$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3-x+1}{2x^3+5x^2}$;
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-4x}{1-x^2}$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{x^2+x+1}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x)^3}{x^3+1}$.

2. Soit $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x^2+1}$. Asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$? Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette droite ; la courbe coupe-t-elle son asymptote ?

Exercice 5 La forme $\frac{0}{0}$: factoriser par $x - a$ ★

corrigé p. 40

- Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{x^2+3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-2x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-1}{x^3+1}$;
e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$; f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$.

Exercice 6 Reconnaître une forme indéterminée ★

corrigé p. 40

Forme indéterminée ou non (laquelle) ? Calculer ensuite chaque limite.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x\sqrt{x})$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+\frac{1}{x}}{x^2}$; g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (quantité conjuguée).

Exercice 7 Fonctions définies par morceaux ★

corrigé p. 40

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ si $x < 1$, $f(1) = 1$, $f(x) = x^2 + 2$ si $x > 1$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. f admet-elle une limite en 1 ? Quelle valeur faudrait-il donner à $f(1)$ pour qu'elle en ait une ?
2. Limites à gauche et à droite de $g(x) = \frac{|x-2|}{x^2-4}$ en 2 et en -2 (écrire $g(x)$ sans valeur absolue) ; de $k(x) = \frac{E(x)}{x}$ en 0 et en 1.

Exercice 8 Premières limites trigonométriques ★

corrigé p. 41

- Calculer, en faisant apparaître les limites de référence : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$;
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x}{1-\cos x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{2x}$.

16

Niveau 2 · Bac

Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : rationnelles et irrationnelles ★★

corrigé p. 41

1. Soit $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x^2-4}$. a) Déterminer D_f et factoriser le numérateur. b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. c) Asymptote(s) verticale(s) de $\mathcal{C}_f$? La droite $x = -2$ en est-elle une ?
2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$. Déterminer D_g , puis $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
3. Soit $h(x) = \sqrt{x^2+7x} - \sqrt{x^2+3}$. Déterminer D_h , puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$; interpréter graphiquement.
4. Soit $k(x) = \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4}$. Déterminer D_k , puis $\lim_{x \rightarrow 4} k(x)$ (poser $t = \sqrt{x}$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : limites trigonométriques ★★

corrigé p. 41

1. Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 6x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\sin 5x}{x-\tan 2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x + \sin^2 x}{x^2}$.
2. Soit $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$. D_f ? Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \cos x$ sur $]0, \pi[$ et $f(x) = -\sqrt{2} \cos x$ sur $]-\pi, 0[$; en déduire les limites de f en 0^+ et en 0^- , et tracer $\mathcal{C}_f$ sur $]-\pi, \pi[$.

3. En posant $X = x - a$, calculer : a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x$.

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : un paramètre pour une limite ★★

corrigé p. 42

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$ si $x < 2$ et $f(x) = \frac{\sin(m(x-2))}{x^2-4}$ si $x > 2$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ en fonction de m (distinguer $m = 0$), puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (encadrer).
- Déterminer m pour que f admette une limite en 2. On pose alors $f(2) = 1$: la nouvelle fonction a-t-elle une limite en 2 ? Quelle valeur de $f(2)$ conviendrait ?
- Asymptotes de $\mathcal{C}_f$?

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : asymptotes et gendarmes ★★

corrigé p. 42

A. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. Limites de f en 1^- , 1^+ , $-\infty$ et $+\infty$; asymptotes de $\mathcal{C}_f$. **B.** Soit $g(x) = 1 + \frac{2+\sin x}{x}$ ($x \neq 0$).

- Montrer que $1 + \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 1 + \frac{3}{x}$ pour tout $x > 0$; en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
- Encadrer de même $g(x)$ pour $x < 0$; en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.
- Donner les asymptotes de $\mathcal{C}_g$ et la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à son asymptote horizontale.
- Tracer $\mathcal{C}_g$ et les courbes des deux fonctions de l'encadrement.

Exercice 13 Revenir à la définition : ε , α et A ★★

corrigé p. 43

- Traduire avec des quantificateurs : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$; $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- Démontrer à l'aide des définitions : a) $\lim_{x \rightarrow -2} (3x+4) = -2$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 1$.
- On suppose $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$ (utiliser $||u| - |v|| \leq |u - v|$). La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14 Trouver les paramètres ★★

corrigé p. 43

- Déterminer les réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$, puis ceux ($b \geq 0$) tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$.
- Soit $f(x) = \frac{ax^2+bx-4}{x^2-4}$. Déterminer a et b pour que $\mathcal{C}_f$ admette la droite $y = 3$ pour asymptote et que f ait une limite finie en 2 ; calculer cette limite et préciser les asymptotes verticales.

Exercice 15 Changer de variable ★★

corrigé p. 43

Calculer, en posant $X = \frac{1}{x}$, $X = x - a$, $X = \sqrt{x}$, $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ou $X = x^2 - 4$ selon le cas :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \tan \frac{2}{\sqrt{x}}$; c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{4x - \pi}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x^2-x}{x^2+4}}$; g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{x^2-9}{(x-3)^2}}$.

Exercice 16 Comparer, encadrer ★★

corrigé p. 44

Calculer (minorer, majorer ou encadrer) : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 \sin x)$;

- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\sin 3x}{x+\cos 2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+\sin x}{x+2}$, après avoir montré que $\left| \frac{3x+\sin x}{x+2} - 3 \right| \leq \frac{7}{x+2}$ ($x > -2$) ;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{E(x)}}{\sqrt{x+1}}$.

17

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Racines carrées : conjuguer, découper ★★★

corrigé p. 44

Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x^2 + x + 3} + 4x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 6x} - \sqrt{4x^2 - x} - x)$ (écrire $x = 3x - 2x$).

Exercice 18 Les formules de trigonométrie au service des limites ★★★

corrigé p. 44

Calculer, à l'aide des formules du chapitre 7 : a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{6x - \pi}$ (écrire le numérateur $2 \cos(x + \frac{\pi}{3})$) ;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{(1 + \tan x)(4x - \pi)}$.

Exercice 19 Paramètres et formes indéterminées ★★★

corrigé p. 44

- Déterminer les réels a et b pour que $\frac{a+b \cos x + \cos 2x}{x^4}$ ait une limite finie en 0 (écrire le numérateur comme un polynôme en $c = \cos x$) ; calculer alors cette limite.
- Déterminer les réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1 - bx}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 20 Partie entière : côtés et encadrements ★★★

corrigé p. 45

- Soit $d(x) = |x - E(x + \frac{1}{2})|$ (distance de x à l'entier le plus proche). a) Montrer que $d(x) = |x - n|$ si $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; tracer $\mathcal{C}_d$ sur $[-2, 2]$. b) Montrer que d a une limite en tout entier n et en tout réel $n + \frac{1}{2}$ (où $x \mapsto E(x + \frac{1}{2})$ n'en a pas). c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} x d(\frac{1}{x})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d(x)}{x}$.
- Calculer (encadrer $E(\frac{1}{x})$) : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) E(\frac{1}{x})$ (à droite et à gauche) ; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E(\frac{1}{x})}{E(\frac{1}{2x})}$.

Exercice 21 Vrai ou faux ? ★★★

corrigé p. 45

Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple (f, g définies sur $\mathbb{R}$, sauf mention contraire). a) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$. b) La réciproque de a). c) Si $f + g$ et f ont des limites finies en a , alors g aussi. d) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. e) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$. f) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est croissante sur un intervalle $[A, +\infty[$. g) Si f est définie sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{x}) = \ell$. h) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell > 0$, alors $f(x) > 0$ pour $x \neq a$ assez proche de a .

Exercice 22 Avec ε et α : démontrer et réfuter ★★★

corrigé p. 45

- Démontrer avec ε et α : a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = 6$ (pour $|x - 2| < 1$, majorer $|x + 3|$) ; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.
- On suppose $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et g bornée au voisinage de a ($|g(x)| \leq M, M > 0$). Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. Application : $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) \sin \frac{1}{x-1}$.
- Soit $g(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ($x > 0$). Montrer que tout intervalle $]0, \alpha[$ contient des réels u, w, z tels que $g(u) > \frac{1}{\alpha}$, $g(w) = 0$ et $g(z) < -\frac{1}{\alpha}$; en déduire que g n'a ni limite finie, ni limite infinie en 0^+ .

Exercice 23 Une famille de fonctions rationnelles ★★★

corrigé p. 46

Pour tout réel a , on pose $f_a(x) = \frac{x^2+ax+2}{x^2+x-2}$ et on note $\mathcal{C}_a$ la courbe de f_a .

1. Déterminer le domaine de f_a et montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_a$ ont la même asymptote horizontale.
2. Selon a , étudier les limites de f_a à gauche et à droite en 1 et en -2. Pour quels a la courbe $\mathcal{C}_a$ n'a-t-elle qu'une asymptote verticale ?
3. Pour quels a la courbe $\mathcal{C}_a$ coupe-t-elle son asymptote horizontale ? 4. Tracer $\mathcal{C}_{-3}$.

18

Niveau 4 · Concours**Exercice 24 Racines n -ièmes et conjugué généralisé ★★★★★**

corrigé p. 46

Soit $n \geq 2$ un entier. On admet que, pour tout réel $s \geq 0$, il existe un unique réel $u \geq 0$ tel que $u^n = s$, noté $\sqrt[n]{s}$.

1. a) Vérifier que $u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$. b) En déduire que $|w-1| \leq |w^n - 1|$ pour tout $w \geq 0$, puis que, si $\varphi(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\varphi(x)} = 1$.
2. Soit $P(x) = x^n + ax^{n-1} + Q(x)$, où $a \in \mathbb{R}$ et Q est un polynôme de degré au plus $n-2$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{P(x)} - x) = \frac{a}{n}$.
3. Applications : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x})$.

Exercice 25 Partie entière et sommes ★★★★★

corrigé p. 47

On rappelle que $1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ ($N \in \mathbb{N}^*$).

1. Pour $0 < x \leq 1$, on pose $N = E\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $1 - x < xN \leq 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(1 + 2 + \dots + N)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3(1^2 + 2^2 + \dots + N^2)$.
2. Pour $x \geq 1$, soit $\varphi(x) = \frac{x - E(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$. a) Montrer que $0 \leq \varphi(x) < 3$; en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}$. b) Calculer $\varphi(n^2)$, montrer que $\varphi(n^2 + n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et en déduire que φ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 26 Deux fois plus près de 0 ★★★★★

corrigé p. 47

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 1$. On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

1. Vérifier que $f(x) = x + x^2$ convient. Pourquoi $f(x) = x + 1$, qui vérifie la seconde hypothèse, ne contredit-il pas le résultat ?
2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$ tel que $|f(2t) - f(t) - t| \leq \varepsilon|t|$ si $0 < |t| < \alpha$. Pour $0 < |x| < \alpha$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) - x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right| \leq \varepsilon|x|$ (somme télescopique).
3. Soit $0 < |x| < \alpha$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq \varepsilon|x|$ et $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$; en déduire $|f(x) - x| \leq 3\varepsilon|x|$ et conclure. 4. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \ell$ (et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$), montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 27 Une fonction définie par une équation ★★★★★

corrigé p. 47

Pour tout réel $x \geq 0$, on admet que l'équation $y^3 + xy = 1$ a une solution $y > 0$, notée $f(x)$ (on ne la calcule pas).

1. Montrer que cette solution est unique, que $f(0) = 1$, $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $0 < f(x) \leq 1$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$ si $x > 0$, et que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{1}{x} - f(x) \right)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-f(x)}{x}$ (factoriser $1 - f(x)^3$).

Exercice 28 Rationnels et irrationnels ★★★★★

corrigé p. 48

On admet que tout intervalle $]u, v[$ ($u < v$) contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x-1)$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $|f(x)| \leq |x(x-1)|$; en déduire que f a une limite en 0 et en 1.
2. Soit $a \notin \{0, 1\}$ et $c = |a(a-1)|$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Avec $\varepsilon = \frac{c}{3}$, montrer que $|\ell| < \frac{c}{3}$ (irrationnels proches de a), puis aboutir à une contradiction (rationnels proches de a). Conclure.
3. P et Q étant deux polynômes, soit $g = P$ sur $\mathbb{Q}$ et $g = Q$ ailleurs. Montrer que g a une limite en a si et seulement si $P(a) = Q(a)$. Exemple : x^3 sur $\mathbb{Q}$, x ailleurs.

Exercice 29 Comportement en $+\infty$ ★★★★★

corrigé p. 48

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de période $T > 0$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante, égale à ℓ . En déduire que $\cos x$, $x - E(x)$ et $\sin x + \frac{1}{x}$ n'ont pas de limite en $+\infty$.
2. Soit f définie sur $[0, +\infty[$, bornée sur tout intervalle $[a, a+1]$, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell \in \mathbb{R}$.
a) Soit $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$ tel que $|f(t+1) - f(t) - \ell| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$. Pour $x \geq A+1$, soit $n = E(x - A)$ et $y = x - n$: montrer que $|f(x) - f(y) - n\ell| \leq n\varepsilon$. b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$. c) Application :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{E(x)} \right).$$

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 48

1. a) Vérifier que $1 - ab = (1 - a) + a(1 - b)$ pour tous réels a, b . b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$.
2. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels et $P_n(x) = \cos(a_1 x) \dots \cos(a_n x)$. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - P_n(x)}{x^2} = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{2}$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \dots \cos nx}{x^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$, puis le plus petit entier n pour lequel cette limite dépasse 100.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x \cos 5x \dots \cos(2n-1)x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \dots \cos nx}{1 - \cos x}$.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Limites en un point

On remplace x par a ; « $\frac{k}{0}$ » ($k \neq 0$) donne une limite infinie, de signe lu sur un **tableau de signes**. f a une limite en a si et seulement si ses limites latérales sont égales (et égales à $f(a)$ si f est définie en a).

Exercice 31 Remplacer, puis lire le signe ★

corrigé p. 49

- Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 5}{x + 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + |2x - 1|}{x - 1}$.
- Calculer les limites à droite et à gauche : d) de $\frac{2x-1}{x-3}$ en 3 ; e) de $\frac{x+5}{x^2-4}$ en -2 et en 2 ; f) de $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ en 1 ; g) de $\frac{\sqrt{x}-4}{x^2}$ en 0 (à droite seulement).
- En déduire les asymptotes verticales des courbes des fonctions d) à g).

Exercice 32 À droite, à gauche ★

corrigé p. 49

- Soit $u(x) = \frac{x+|x|}{x^2}$ ($x \neq 0$). Simplifier $u(x)$ pour $x > 0$, puis pour $x < 0$. Calculer les limites de u à droite et à gauche en 0. La courbe de u a-t-elle une asymptote verticale ?
- Soit $v(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2}}{x}$. Déterminer D_v et montrer que $v(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{x+4}$. Calculer les limites de v à droite et à gauche en 0 et à droite en -4. v a-t-elle une limite en 0 ?
- Soit $g(x) = E(x)(x - E(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - Exprimer $g(x)$ sans partie entière sur $[1, 2[$, sur $[2, 3[$, puis sur $[n, n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
 - Calculer les limites de g à droite et à gauche en 2, puis en 0.
 - Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que g admet une limite en n si et seulement si $n = 1$, et préciser $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Exercice 33 Une fonction, deux écritures ★★

corrigé p. 50

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x|x-3|}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Déterminer D_f . Montrer que $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x > 3$, et que $f(x) = -1 + \frac{1}{x}$ si $x < 3$ et $x \neq 0$.
- Calculer les limites de f à droite et à gauche en 3. f a-t-elle une limite en 3 ?
- Calculer les limites de f à droite et à gauche en 0, puis en $\pm\infty$. Interpréter graphiquement.

4. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $g(x) = f(x) + k \frac{x-3}{|x-3|}$ ($x \in D_f$). Déterminer k pour que g ait une limite en 3 ; la préciser.

Exercice 34 Racines et limites infinies ★★

corrigé p. 50

1. Soit $f(x) = \frac{x+1}{2-\sqrt{x+6}}$. Déterminer D_f , puis calculer la limite de f à droite en -6 , et ses limites à droite et à gauche en -2 .
2. Soit $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}-4}$. Déterminer D_g , montrer que g est impaire, calculer ses limites latérales en 3 et en déduire celles en -3 . Asymptotes verticales ?
3. Soit a un réel et $h_a(x) = \frac{\sqrt{10-x}-a}{(x-1)^2}$ pour $x \leq 10$, $x \neq 1$. Étudier, selon a , la limite de h_a en 1 : montrer qu'elle existe (infinie) pour $a \neq 3$, mais que h_3 n'a pas de limite en 1.

Exercice 35 Discuter selon un paramètre ★★★

corrigé p. 51

Pour tout réel m , on pose $f_m(x) = \frac{x+m}{x^3+3x^2-4}$ et l'on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe.

1. Montrer que $x^3+3x^2-4 = (x+2)^2(x-1)$ et en déduire le domaine de f_m .
2. Étudier, selon m , la limite de f_m en -2 (limites latérales si nécessaire), puis ses limites latérales en 1.
3. En déduire, selon m , le nombre d'asymptotes verticales de $\mathcal{C}_m$. Pour quel m la courbe $\mathcal{C}_m$ est-elle celle de $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ privée d'un point ? Lequel ?
4. Calculer les limites de f_m en $\pm\infty$.

Exercice 36 Composer avec les côtés ★★★

corrigé p. 51

1. Calculer les limites à droite et à gauche en 0, puis dire si la fonction a une limite en 0 :

$$\text{a) } x \mapsto E(1-x^2) \quad \text{b) } x \mapsto E(x^2-x) \quad \text{c) } x \mapsto E(1+x^3) \quad \text{d) } x \mapsto E(x)E(-x).$$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$, de limite 2 à droite en 0 et -3 à gauche en 0. Calculer les limites à droite et à gauche : a) de $f(1-x)$ en 1 ; b) de $f(x^2-4)$ en 2 et en -2 ; c) de $f((x+1)^2)$ en -1 ; d) de $f(x^3-x)$ en 0. Lesquelles de ces fonctions ont une limite au point considéré ?
3. Soit $g(x) = E(x)E\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$). Calculer $g(x)$ selon que $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$. Montrer que g a des limites latérales égales en 1, mais pas de limite en 1.

20

Limites à l'infini

En $\pm\infty$, un polynôme se comporte comme son **terme de plus haut degré**, une fraction rationnelle comme le quotient de ces termes. Sous une racine, on met la plus grande puissance de x en facteur : $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ en $-\infty$!

Exercice 37 Le terme qui l'emporte ★

corrigé p. 52

1. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

$$\text{a) } f_1(x) = 1 - x^2 + 6x^4 \quad \text{b) } f_2(x) = (x^2 + 1)(3 - x)^3 \quad \text{c) } f_3(x) = \frac{5 - 2x + 6x^2}{3x^2 + 7x} \quad \text{d) } f_4(x) = \frac{x^4 - 1}{2x^3 + x}$$

$$\text{e) } f_5(x) = \frac{x^2 - 9}{x^4 + x^2 + 1} \quad \text{f) } f_6(x) = \frac{(3x + 1)^2(1 - x)}{2x^3 - 5} \quad \text{g) } f_7(x) = \frac{\sqrt{4x^4 + x}}{1 - 3x^2}$$

2. Quelles courbes ont une asymptote horizontale ? Donner son équation.

Exercice 38 Asymptotes d'une fraction rationnelle ★

corrigé p. 52

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Déterminer D_f et calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- À l'aide d'un tableau de signes, calculer les limites de f à droite et à gauche en -1 et en 3 . En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que $f(x) - 1 = \frac{4x + 3}{(x + 1)(x - 3)}$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale. En quel point la coupe-t-elle ?

Exercice 39 Racines carrées à l'infini ★★

corrigé p. 53

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3}}{\sqrt{x+2}}$.
- Soit $g(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x^3-1}}$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe.
 - Montrer que $D_g =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$.
 - Calculer les limites de g en $+\infty$, en $-\infty$ et à droite en 1 . En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_g$.
- Montrer que $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ pour tout réel x , et que $x - \sqrt{x^2 + 1}$ tend vers 0 en $+\infty$. En déduire la limite de $\frac{\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$ en $+\infty$.

Exercice 40 Deux asymptotes horizontales ★★

corrigé p. 53

Pour tout réel a , on pose $f_a(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 5} + ax}{x + 1}$ pour $x \neq -1$, et l'on note $\mathcal{C}_a$ sa courbe.

- Calculer, selon a , les limites de f_a en $\pm\infty$; montrer que $\mathcal{C}_a$ a deux asymptotes horizontales distinctes.
- Déterminer a pour que l'axe des abscisses soit asymptote à $\mathcal{C}_a$ en $+\infty$; même question en $-\infty$.

3. Montrer que la droite $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_a$ si et seulement si $a \neq 3$.
4. On prend $a = 3$. Montrer que $f_3(x) = \frac{5(1-x)}{\sqrt{4x^2+5}-3x}$ pour $x < 0$, $x \neq -1$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow -1} f_3(x)$.

Exercice 41 Construire une fonction ★★★

corrigé p. 54

On cherche une fonction f , définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, qui vérifie les conditions :

$$(C_1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 ; \quad (C_2) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty ; \quad (C_3) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty ; \quad (C_4) f(0) = 0.$$

1. Soit N un polynôme tel que $N(1) \neq 0$ et $N(-1) \neq 0$. Expliquer pourquoi $x \mapsto \frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2}$ ne vérifie ni (C_2) ni (C_3) .
2. On pose $D(x) = (x-1)^2(x+1)$ et $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, avec $N(x) = 2x^3 + px^2 + qx + r$ (p, q, r réels).
- a) Montrer que (C_1) est vraie quels que soient p, q et r .
- b) Montrer que $(C_2), (C_3), (C_4)$ équivalent à $r = 0, N(1) > 0, N(-1) < 0$; vérifier que $p = q = 0$ convient.
3. On impose de plus $(C_5) : f(2) = 2$ et $(C_6) : \lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x) - 2) = -2$. Montrer qu'une seule fonction de la question 2 vérifie les conditions (C_1) à (C_6) , et la déterminer.

Exercice 42 Puissances et entier n ★★★

corrigé p. 55

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel, $n \geq 2$.

1. Montrer que, pour tous réels a et b : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^n - x^n}{x^{n-1}} = n$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^n - x^n)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{(x+2)^n - (x-2)^n}$.
4. Montrer que, pour $x > 0$, $\frac{(x+1)^n - x^n - nx^{n-1}}{x^{n-2}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x+1)^k - x^k}{x^{k-1}}$. En déduire que cette expression tend vers $\frac{n(n-1)}{2}$ en $+\infty$, et vérifier ce résultat pour $n = 3$.

21

Formes indéterminées

Une forme indéterminée ($\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$) n'est pas un résultat : on **transforme l'écriture** (factoriser par $x - a$ et simplifier, expression conjuguée, terme dominant en facteur, même dénominateur).

Exercice 43 Factoriser par $x - a$ ★

corrigé p. 55

Calculer les limites suivantes, après avoir reconnu la forme indéterminée.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 - 4} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + |x| - 2}{x + 1} \end{array}$$

Exercice 44 La quantité conjuguée ★

corrigé p. 56

Calculer les limites suivantes à l'aide d'une expression conjuguée.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{3x+1} - 2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x - 3} \end{array}$$

Exercice 45 Formes indéterminées à l'infini ★★

corrigé p. 56

Pour chaque limite, préciser la forme indéterminée, puis la lever.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 3x}{\sqrt{4x^2+x} + x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 3x + 1}{2x\sqrt{x} + x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3+1} - x) \end{array}$$

Exercice 46 Choisir le paramètre ★★

corrigé p. 57

- Soit $P(x) = x^3 + ax + b$. Déterminer a et b pour que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{P(x)}{(x+2)^2}$ soit finie ; la calculer.
- Pour tout réel m , on pose $f_m(x) = \frac{x^2 - (m+1)x + m}{x^2 - 4x + 3}$.
 - Montrer que f_m a une limite finie en 1 pour tout m .
 - Pour quels m a-t-elle une limite finie en 3 ?
- Calculer, selon le réel a , la limite en $+\infty$ de $g_a(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 1} + ax^2}$.

Exercice 47 Découper, regrouper, conjuguer ★★★

corrigé p. 57

Calculer (a) : découper en trois quotients ; d) : limites à droite et à gauche, puis conclure).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+15} - 9}{x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2} + x-3}{x^2-9} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \right) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x^3} - |x|}{x^2} \end{array}$$

Exercice 48 Systèmes de paramètres ★★★

corrigé p. 58

- Déterminer a et b ($b \neq 0$) tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - \sqrt{1+bx}}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+bx} - 1} = 3$.
- Déterminer les réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^2+4x-5} \right) = -\frac{1}{3}$.
- Déterminer les réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+a}{x+b}} - 1 \right) = 4$.

22 Limites trigonométriques

Tout se ramène aux limites de référence en 0 ($\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$, $\frac{\tan X}{X} \rightarrow 1$, $\frac{1-\cos X}{X^2} \rightarrow \frac{1}{2}$) par un changement de variable ($X = ax$, $X = x - a$, $X = \frac{1}{x}$, $X = u(x)$) et les formules du chapitre 7.

Exercice 49 Trop ou pas assez de x ★

corrigé p. 58

- Limites en 0 (séparer 0^+ et 0^- si besoin) : a) $\frac{\sin 3x}{x^2}$ b) $\frac{\tan 2x}{\sqrt{x}}$ (en 0^+) c) $\frac{x^2}{1-\cos 3x}$ d) $\frac{\sin 4x}{|x|}$ e) $\frac{1-\cos x}{x|x|}$ f) $\frac{1-\cos x}{x^4}$. Quelles courbes ont pour asymptote la droite $x = 0$?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, selon n , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^n}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^n}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^n}$.

Exercice 50 Se ramener en 0 ★

corrigé p. 59

- Avec $X = x - a$, calculer : a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{(2x+\pi)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{3x - \pi}$.
- Avec $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ou $X = \frac{1}{x}$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, puis les limites de $h(x) = \sqrt{x^2+x} \sin \frac{2}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (attention : $\sqrt{x^2} = |x|$). Interpréter graphiquement.

Exercice 51 Les formules de transformation ★★

corrigé p. 59

- Avec les formules de $\sin p - \sin q$ et $\cos p - \cos q$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+x^2) - \sin x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+x^2) - \cos x}{x^3}$.
- Soit a réel. Montrer que $\sin(a+x) + \sin(a-x) = 2 \sin a \cos x$; calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2 \sin a}{x^2}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2 \cos a}{x^2}$.

3. a) Montrer que $\tan 2x - 2 \tan x = \frac{2 \tan^3 x}{1 - \tan^2 x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 2 \tan x}{x^3}$.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (factoriser par $\tan x$), puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 2 \tan x}{\tan x - \sin x}$.

Exercice 52 Vraie ou fausse asymptote ? ★★

corrigé p. 60

Soit $f(x) = \frac{1 + \cos x}{x \sin x}$.

- Déterminer D_f , montrer que f est paire et que $f(x) = \frac{1}{x \tan \frac{x}{2}}$ pour tout $x \in D_f$.
- Calculer la limite de f en 0, sa limite en π et $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)}{x - \pi}$.
- Calculer les limites de f à droite et à gauche en 2π . Pour $k \in \mathbb{Z}$, la droite $x = k\pi$ est-elle asymptote à $\mathcal{C}_f$ (k pair, k impair) ?
- Calculer $f\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$, ni finie, ni infinie.

Exercice 53 Des fonctions composées ★★★

corrigé p. 60

- En posant $X = u(x)$ (où $u(x) \rightarrow 0$ et $u(x) \neq 0$ pour $x \neq a$ voisin de a), calculer : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x)}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{1+x})}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^2)}{\sin(\pi x)}$.
- Soit $m \geq 1$ et $\varphi_m(x) = \frac{\sqrt{m + \cos x} - 1}{(x - \pi)^2}$. Justifier que φ_m est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$, puis déterminer, selon m , la limite de φ_m en π .

Exercice 54 Itérer le sinus et le cosinus ★★★

corrigé p. 61

On pose $s_1 = \sin$, $s_{n+1} = \sin \circ s_n$, $c_1 = \cos$ et $c_{n+1} = \cos \circ c_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Montrer par récurrence que $0 < |s_n(x)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x tel que $0 < |x| < \pi$.
 b) Montrer par récurrence que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s_n(x)}{x} = 1$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(s_n(x))}{x^2}$.
- a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x) - \cos 1}{x^2} = \frac{\sin 1}{2}$.
 b) Soit $\ell_n = c_n(0)$ (donc $\ell_1 = 1$, $\ell_{n+1} = \cos \ell_n$). Montrer par récurrence que, pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, $c_n(x)$ et ℓ_n sont dans $[0, 1]$ et distincts, puis que $\frac{c_n(x) - \ell_n}{x^2}$ a une limite finie L_n en 0, avec $L_1 = -\frac{1}{2}$ et $L_{n+1} = -L_n \sin \ell_n$. Calculer L_2 et L_3 .

23

Comparaison et gendarmes

On encadre f , on majore $|f(x) - \ell|$ par une fonction de limite nulle, ou l'on compare f à une fonction de limite infinie. Outils : $|\sin u| \leq |u|$, $\sin u < u < \tan u$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $X - 1 < E(X) \leq X$.

Exercice 55 Comparer pour conclure ★

corrigé p. 62

Calculer, en citant le théorème utilisé (comparaison ou gendarmes) : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ (encadrer pour $x > 1$); b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(2 + \sin x) - x^2)$; c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 + \sin x}{x^2 + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(3 + 2 \cos x)$. La fonction du a) est-elle paire ? Préciser les asymptotes horizontales obtenues en a) et c).

Exercice 56 Partie entière : encadrer et composer ★

corrigé p. 62

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(5x)}{2x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{E(5x)}{2x+1}$ (attention au signe de $2x+1$).
2. Justifier que $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$ pour $0 < |x| < \pi$ et que $\frac{\tan x}{x} > 1$ pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} E\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} E\left(\frac{\tan x}{x}\right)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} E\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$. Que retenir ?
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x E\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x E\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 57 Démontrer avec ε et α ★★

corrigé p. 63

1. Montrer avec la définition que $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x) = -3$ (factoriser $x^3 + 2x + 3$ par $x + 1$ et majorer l'autre facteur pour $|x + 1| < 1$).
2. Même question pour $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{2x-1} = \frac{4}{3}$ (on pourra imposer $|x - 2| < \frac{1}{2}$).
3. a) Soit f telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que $|f(x)| \leq M$ pour $0 < |x - a| < \alpha$ (prendre $\varepsilon = 1$).
b) En déduire que $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ n'a pas de limite finie en 0. A-t-elle une limite infinie en 0 ?

Exercice 58 Coincée entre deux courbes ★★

corrigé p. 63

Soit $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

1. a) À l'aide de $\sin u < u < \tan u$ ($0 < u < \frac{\pi}{2}$) et de $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, montrer que $\frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2} < g(x) < \frac{1}{2}$ pour $0 < |x| < \pi$.
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Représenter sur $[-\pi, \pi]$ la fonction g et ses deux « gendarmes ».
2. Montrer que $\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{x^2}{8}$ pour $0 < |x| < \pi$ et trouver $\alpha > 0$ tel que $0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left|g(x) - \frac{1}{2}\right| < 10^{-2}$.

Exercice 59 $\infty - \infty$: encadrer la différence ★★★

corrigé p. 63

1. Montrer que $0 < x - \sin x < \tan x - \sin x = \tan x (1 - \cos x)$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$ (parité), puis $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.
2. Montrer de même que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) = 0$.
3. Avec $X = \frac{\pi}{2} - x$, calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)$. Interpréter graphiquement.
4. Montrer que $0 < \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} < \frac{1}{2}$ pour $0 < |x| < \pi$ (encadrer $\sin \frac{x}{2}$ comme dans l'exercice 58), puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{1 - \cos x} - 2\right)$.

Exercice 60 Limite ou pas de limite ? ★★★

corrigé p. 64

1. Soit $f(x) = \frac{x}{2+\sin x}$. Montrer avec la définition que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (pour $A > 0$ donné, exhiber B). Quelle est la limite de f en $-\infty$?
2. Soit $g(x) = x(1 + \sin x)$. a) Montrer que $0 \leq g(x) \leq 2x$ pour $x \geq 0$; représenter g et ses deux « gendarmes » sur $[0, 6\pi]$.
b) Calculer $g\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et montrer par l'absurde que g n'a pas de limite en $+\infty$, ni finie, ni infinie. Pourquoi l'encadrement du a) ne permet-il pas de conclure ?
3. Montrer que $h(x) = x^2(1 + \sin x) + x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors que $x^2(1 + \sin x)$ n'a pas de limite (comme au 2).
4. Soit $k(x) = x(x - E(x))$. Calculer $k(n)$ et $k\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ($n \in \mathbb{N}$), montrer que k n'a pas de limite en $+\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x^2}$.

24 Défis de concours

Chaque problème combine plusieurs outils du chapitre et des chapitres précédents ; aucune dérivée n'est nécessaire.

Exercice 61 Points entiers dans un disque ★★★

corrigé p. 65

Pour $x > 0$, $N(x)$ est le nombre de couples $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $a^2 + b^2 \leq x$; $\mathcal{Q}_r = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 \leq r^2\}$ est un quart de disque d'aire $\frac{\pi r^2}{4}$. On admet les propriétés intuitives des aires (inclusion, réunion de carrés d'intérieurs disjoints).

1. Calculer $N(25)$. À chaque couple (a, b) compté par $N(x)$, on associe le carré $C_{a,b} = [a-1, a] \times [b-1, b]$. Montrer que $C_{a,b} \subset \mathcal{Q}_{\sqrt{x}}$ et en déduire que $N(x) \leq \frac{\pi x}{4}$.
2. Soit $x \geq 2$, $\rho = \sqrt{x} - \sqrt{2}$, $(u, v) \in \mathcal{Q}_\rho$, $a = E(u) + 1$ et $b = E(v) + 1$. Montrer que $(u, v) \in C_{a,b}$ et que $a^2 + b^2 \leq x$ (vérifier d'abord que $u + v \leq \sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}$). En déduire que $\frac{\pi}{4}(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 \leq N(x)$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{N(x)}{x}$, puis montrer que $\left|N(x) - \frac{\pi x}{4}\right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{x}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x} \left(N(x) - \frac{\pi x}{4}\right)$.
4. Soit $M(x)$ le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a^2 + b^2 \leq x$. Montrer que $M(x) = 4N(x) + 4E(\sqrt{x}) + 1$; calculer $M(25)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{x}$.

Exercice 62 Une somme de racines ★★★

corrigé p. 65

Pour $x \geq 1$, on pose $S(x) = \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{E(x)}}$.

1. Montrer que $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$ pour tout entier $k \geq 1$, puis que, pour tout entier $n \geq 1$: $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.
2. Montrer que $-2 < S(x) - 2\sqrt{x} \leq -1$ pour tout réel $x \geq 1$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{S(4x)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.
4. Montrer que le plus petit entier n tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 100$ est compris entre 2551 et 2601.

Exercice 63 Une fonction qui hésite ★★★★★

corrigé p. 66

Pour $x \geq 1$, on pose $g(x) = x \sin \frac{\pi E(x)}{x}$ et $t = x - E(x)$, de sorte que $0 \leq t < 1$.

1. Montrer que $g(x) = x \sin \frac{\pi t}{x}$. Calculer $g(n)$ et $g\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. a) Montrer que $u \cos u \leq \sin u \leq u$, puis $0 \leq u - \sin u \leq \frac{u^3}{2}$, pour $0 \leq u < \frac{\pi}{2}$.
b) En déduire que $0 \leq \pi t - g(x) \leq \frac{\pi^3}{2x^2}$ pour $x \geq 2$, puis que $0 \leq g(x) < \pi$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \pi(x - E(x))) = 0$.
3. Montrer par l'absurde que g n'a pas de limite en $+\infty$ (entiers et demi-entiers).
4. En revanche, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{\pi E(x^2)}{x^2} = 0$.

Exercice 64 La fonction de Thomae ★★★★★

corrigé p. 66

Pour un rationnel $r = \frac{p}{q}$ écrit sous forme irréductible ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$), on pose $T(r) = \frac{1}{q}$; et $T(x) = 0$ si x est irrationnel. Ainsi $T(0) = T(1) = 1$ et $T\left(\frac{6}{8}\right) = \frac{1}{4}$.

1. Calculer $T\left(-\frac{10}{4}\right)$, $T(0,15)$, $T(1 + \sqrt{2})$; montrer que $T(x+1) = T(-x) = T(x)$ pour tout réel x .
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in]0, 1[$ et $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Montrer que les rationnels de $[a-1, a+1]$ de dénominateur (irréductible) $q \leq N$ forment un ensemble fini F , de cardinal au plus $\sum_{q=1}^N (2q+1)$.
3. a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel qu'aucun élément de F autre que a n'appartienne à $]a-\alpha, a+\alpha[$.
b) En déduire que $0 \leq T(x) < \varepsilon$ pour $0 < |x-a| < \alpha$, puis que $\lim_{x \rightarrow a^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} T(x) = 0$ pour **tout** réel a .
c) En quels réels a la fonction T admet-elle une limite ?
4. Montrer que T et $x \mapsto \frac{T(x)}{x}$ n'ont pas de limite en $+\infty$ et en 0^+ respectivement.

Exercice 65 Le triangle qui s'aplatit ★★★★★

corrigé p. 67

Dans un repère orthonormé d'origine O , soit $A(1, 0)$ et $M(\cos x, \sin x)$ avec $0 < x < \pi$; Ω et R sont le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAM , et H son orthocentre.

1. Montrer que $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2}\right)$ et $R = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2}}$.
2. On rappelle (chapitre 6) que $\vec{\Omega H} = \vec{\Omega O} + \vec{\Omega A} + \vec{\Omega M}$. En déduire $H\left(\cos x, \cos x \tan \frac{x}{2}\right)$; vérifier que $\vec{AH} \cdot \vec{OM} = 0$.
3. Quand x tend vers 0. Déterminer les limites de R et des coordonnées de Ω et de H , puis montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{AH}{AM} = \frac{1}{2}$.
4. Quand x tend vers π . Montrer que $y_{\Omega} \rightarrow +\infty$ et $y_H \rightarrow -\infty$ (ordonnées de Ω et H); calculer $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x)R$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x)y_H$.
5. Montrer que $\Omega H = R |2 \cos x - 1|$; en déduire $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\Omega H}{R}$ et le réel x tel que $H = \Omega$ (interpréter).

Exercice 66 Une équation de duplication ★★★★★

corrigé p. 67

On cherche les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (E) : $f(2x) = 2f(x) \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$), et telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = c \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que $x \mapsto c \sin x$ convient pour tout réel c , et que toute f vérifiant (E) s'annule en 0.
2. Si f vérifie (E), montrer que $f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, récurrence).
3. Soit f une solution et $g(x) = f(x) - c \sin x$. a) Montrer que g vérifie (E) et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$.
b) Soit $x \neq 0$ et $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que $|g(t)| \leq \varepsilon |t|$ si $0 < |t| < \alpha$, et d'un entier n tel que $\frac{|x|}{2^n} < \alpha$ ($2^n \geq n + 1$). En déduire $|g(x)| \leq \varepsilon |x|$, puis $g(x) = 0$. Conclure.
4. Déterminer f vérifiant (E) et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan 3x} = 2$.
5. Par la même méthode, déterminer les f telles que $f(2x) = 4f(x) \cos^2 x$ pour tout réel x et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$. La fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ convient-elle ?

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

1. On lit les abscisses des points de la courbe. Il n'y a pas de point d'abscisse -3 (cercle blanc) ni d'abscisse -1 (asymptote) : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$. $f(0) = 1$ et $f(2) = 1$ (point plein).
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{3}{2}$ (des deux côtés, la courbe file vers le trou); $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.
3. Critère : limite à gauche = limite à droite (= $f(a)$ si f est définie en a). En -3 : oui, la limite vaut $\frac{3}{2}$ (f n'est pas définie en -3 , cela n'empêche pas la limite). En -1 : non ($+\infty \neq -\infty$). En 0 : oui, la limite vaut $f(0) = 1$ (aucun saut). En 2 : non, car $3 \neq 1$.
4. Asymptote verticale $x = -1$; asymptotes horizontales $y = 1$ en $-\infty$ et $y = -1$ en $+\infty$ (les deux limites à l'infini peuvent être différentes).

■ Corrigé de l'exercice 2

1. a) $\frac{3}{x} \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0$: $+\infty$. b) $\frac{3}{x} \rightarrow -\infty$: $-\infty$. c) $\frac{2}{x^2} \rightarrow +\infty$: $-\infty$. d) $x - 1 \rightarrow -1$ et $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$: « $\frac{-1}{0^+}$ », $-\infty$. e) $-x^3 \rightarrow -\infty$ et $-\sqrt{x} \rightarrow -\infty$: $-\infty$. f) $x^4 \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$: $+\infty$. g) $4 + \frac{1}{x^3} \rightarrow 4$ et $\frac{1}{x} - 2 \rightarrow -2$: produit -8 . h) $1 + \sqrt{x} \rightarrow 1$ et $x^2 + x \rightarrow 0^+$ ($x > 0$) : $+\infty$. i) Avec $X = x - 2 \rightarrow 0$, $X^2 \rightarrow 0^+$: $+\infty$. j) $\sqrt{x+1} \rightarrow 0^+$: $+\infty$.
2. Pour $x > 0$: $\frac{1}{x^2} < 10^{-6} \iff x^2 > 10^6 \iff x > 10^3$: $A = 1000$ convient. $|x^3| < 10^{-6} \iff |x|^3 < (10^{-2})^3 \iff |x| < 10^{-2}$: $\alpha = 0,01$ convient. C'est l'idée de la définition : $f(x)$ est aussi près qu'on veut de sa limite dès que x est assez grand (ou assez proche de a).

■ Corrigé de l'exercice 3

Le numérateur a une limite non nulle, le dénominateur tend vers 0 : on étudie le signe du dénominateur.

- a) $3x - 1 \rightarrow -4$, et $x + 1 \rightarrow 0^-$ si $x < -1$, 0^+ si $x > -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$. Asymptote $x = -1$.
- b) $x^2 + 1 \rightarrow 2$ et $(x - 2)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés : $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$. Asymptote $x = 2$.
- c) $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ est positif hors de $[-2, 3]$, négatif dans $]-2, 3[$. En 3 , $2x - 5 \rightarrow 1$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = +\infty$. En -2 , $2x - 5 \rightarrow -9$: $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = -\infty$ (dénominateur $\rightarrow 0^+$), $\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = +\infty$. Asymptotes $x = 3$ et $x = -2$.

d) $D_k = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ et $k(x) = \frac{x}{x(x-2)} = \frac{1}{x-2}$ sur D_k . En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \boxed{-\frac{1}{2}}$ (même limite des deux côtés) : **pas d'asymptote** en 0, la courbe a un trou en $(0, -\frac{1}{2})$. En 2 : $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = \boxed{-\infty}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = \boxed{+\infty}$: seule asymptote verticale, $x = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- En $\pm\infty$, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré, une fraction rationnelle comme le quotient de ces termes. a) $2x^5 \rightarrow -\infty : \boxed{-\infty}$. b) $-x^4 \rightarrow -\infty : \boxed{-\infty}$. c) $\frac{6x^3}{2x^3} = 3 : \boxed{3}$. d) $\frac{x^3}{-x^2} = -x \rightarrow +\infty : \boxed{+\infty}$. e) $\frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x} \rightarrow 0 : \boxed{0}$. f) $(1-2x)^3 = x^3 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3$, donc $\frac{(1-2x)^3}{x^3+1} = \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)^3}{1+\frac{1}{x^3}} \rightarrow (-2)^3 = \boxed{-8}$.
- $\frac{2x^2}{x^2} = 2 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, la droite $y = 2$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$. **Position : signe de $f(x) - 2$.**
 $f(x) - 2 = \frac{2x^2+3x-2x^2-2}{x^2+1} = \frac{3x-2}{x^2+1}$, du signe de $3x - 2 : \mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de l'asymptote sur $]-\infty, \frac{2}{3}[$, **au-dessus** sur $\frac{2}{3}, +\infty[$. Elle la **coupe** au point $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$: une courbe peut couper son asymptote.

■ Corrigé de l'exercice 5

Numérateur et dénominateur s'annulent en a : on les factorise par $x - a$, on simplifie, puis on remplace.

- a) $\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} = \frac{x-2}{x} \rightarrow \frac{-5}{-3} = \boxed{\frac{5}{3}}$. b) 1 est racine du numérateur, et $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)$ (division) ; $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$: le quotient vaut $x+3 \rightarrow \boxed{4}$. c) $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{x-1} \rightarrow \boxed{12}$. d) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ et $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) : \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-x+1} \rightarrow \frac{-2 \times 2}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}}$. e) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x+1)} = \frac{x+1}{2x+1} \rightarrow \boxed{\frac{4}{7}}$. f) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2} : x+2 \rightarrow 4$ et $x-2 \rightarrow 0^\mp : \boxed{-\infty}$ en 2^- , $\boxed{+\infty}$ en 2^+ (une forme $\frac{0}{0}$ peut donner une limite infinie).

■ Corrigé de l'exercice 6

- a) **F.I.** « $\infty - \infty$ » : $x^2 - 5x\sqrt{x} = x^2 \left(1 - \frac{5}{\sqrt{x}}\right) \rightarrow \boxed{+\infty}$. b) **F.I.** « $\infty - \infty$ » : $\frac{x-1}{x^2}$, avec $x-1 \rightarrow -1$ et $x^2 \rightarrow 0^+ : \boxed{-\infty}$. c) **F.I.** « $0 \times \infty$ » : $x + \frac{1}{x} \rightarrow \boxed{+\infty}$. d) **F.I.** « $\frac{\infty}{\infty}$ » : $\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow \boxed{0}$. e) **F.I.** « $\frac{\infty}{\infty}$ » : $1 + \frac{1}{x^2} \rightarrow \boxed{1}$. f) **Pas de forme indéterminée** : $\frac{2+\frac{1}{x}}{x^2} = \left(2 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}$, produit de $-\infty$ par $+\infty : \boxed{-\infty}$. g) **F.I.** « $\frac{0}{0}$ » : $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 7

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2+1 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1+2 = 3$. f étant définie en 1, elle y a une limite si et seulement si les deux limites latérales sont égales à $f(1)$. Or $f(1) = 1 \neq 3 : f$ n'a pas de limite en 1. Avec $\boxed{f(1) = 3}$, elle aurait la limite 3.
- Pour $x > 2 : g(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$; pour $x < 2, x \neq -2 : g(x) = \frac{-1}{x+2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \boxed{\frac{1}{4}}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \boxed{-\frac{1}{4}}$ (pas de limite en 2) ; $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \boxed{+\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \boxed{-\infty}$.
On remplace $E(x)$ par sa valeur près du point. Sur $]0, 1[$, $E(x) = 0$, donc $k(x) = 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \boxed{0}$. Sur $[-1, 0[$, $k(x) = -\frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = \boxed{+\infty}$. Sur $[1, 2[$, $k(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \boxed{1}$. k n'a de limite ni en 0, ni en 1.

■ Corrigé de l'exercice 8

On fait apparaître $\frac{\sin X}{X}$, $\frac{\tan X}{X}$ ou $\frac{1-\cos X}{X^2}$ avec $X = ax \rightarrow 0$.

a) $\frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow \boxed{\frac{5}{3}}$. b) $\frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \rightarrow \boxed{\frac{3}{2}}$. c) $\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 4 \cdot \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \rightarrow 4 \times \frac{1}{2} = \boxed{2}$.
d) $\frac{x}{\tan \frac{x}{2}} = 2 \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} \rightarrow \boxed{2}$. e) $\frac{\sin x \sin 2x}{1-\cos x} = 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} \rightarrow 2 \times 1 \times 1 \times 2 = \boxed{4}$. f) $\frac{\sin 5x + \sin x}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{3}$.

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- a) $x^2 - 4 \neq 0 \iff x \neq \pm 2$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$, donc $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-2}$ sur D_f .

b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{(-2)(-3)}{-4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$. En 2 : $x(x-1) \rightarrow 2 > 0$ et $x-2 \rightarrow 0^+$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{-\infty}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \boxed{+\infty}$.
En $\pm\infty$: $\frac{x^3}{x^2} = x$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$.

c) Une seule asymptote verticale : $x = \boxed{2}$. La droite $x = -2$ n'en est pas une : la limite en -2 est finie, $\mathcal{C}_f$ a seulement un trou en $(-2, -\frac{3}{2})$.
- 5x + 1 ≥ 0 et x ≠ 3 : $D_g = [-\frac{1}{5}, 3[\cup]3, +\infty[$. Quantité conjuguée : $g(x) = \frac{(5x+1)-16}{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)} = \frac{5}{\sqrt{5x+1}+4}$.
Donc $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{5}{8}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (le dénominateur tend vers $+\infty$) : $\boxed{\frac{5}{8}}$ et 0.
- $x^2 + 3 > 0$ et $x^2 + 7x = x(x+7) \geq 0 \iff x \leq -7$ ou $x \geq 0$: $D_h =]-\infty, -7] \cup [0, +\infty[$. F.I. « $\infty - \infty$ » ;
conjugué : $h(x) = \frac{7x-3}{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2+3}}$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$: $h(x) = \frac{7-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{7}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \rightarrow \boxed{\frac{7}{2}}$. Pour $x < 0$,
 $\sqrt{x^2} = |x| = -x$: $h(x) = -\frac{7-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{7}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \rightarrow \boxed{-\frac{7}{2}}$. Deux asymptotes horizontales : $y = \frac{7}{2}$ en $+\infty$, $y = -\frac{7}{2}$ en $-\infty$.
- $D_k = [0, 4[\cup]4, +\infty[$. Avec $t = \sqrt{x}$: $x - \sqrt{x} - 2 = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$ et $x-4 = (t-2)(t+2)$, donc
 $k(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \rightarrow \boxed{\frac{3}{4}}$ en 4. En $+\infty$: $k(x) = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}} \rightarrow \boxed{1}$.

■ Corrigé de l'exercice 10

- a) $\frac{\sin 4x}{\tan 6x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{6x}{\tan 6x} \rightarrow \boxed{\frac{2}{3}}$. b) $\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \cdot \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 \rightarrow \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{9}}$. c) On divise par
 x : $\frac{1+\frac{\sin 5x}{x}}{1-\frac{\tan 2x}{x}} \rightarrow \frac{1+5}{1-2} = \boxed{-6}$. d) On sépare : $\frac{1-\cos x}{x^2} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$.

2. $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ s'annule si et seulement si $\sin x = 0$:

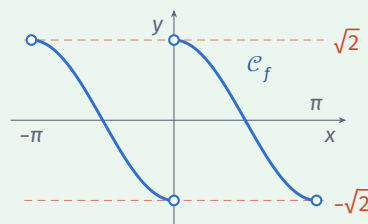
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Comme $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} |\sin x|$ et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:

$$f(x) = \sqrt{2} \cos x \times \frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

Sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$: $f(x) = \sqrt{2} \cos x$; sur $]-\pi, 0[$, $\sin x < 0$:

$f(x) = -\sqrt{2} \cos x$. Comme $\cos x \rightarrow 1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{2}$ et

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\sqrt{2}$: pas de limite en 0 (deux arcs, un saut en 0).



3. a) $X = x - \pi$: $\sin x = -\sin X$ et $x^2 - \pi^2 = X(X + 2\pi)$, donc $\frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = -\frac{\sin X}{X} \cdot \frac{1}{X + 2\pi} \rightarrow -\frac{1}{2\pi}$. b) $X = x - \frac{\pi}{2}$: $\pi - 2x = -2X$ et $\tan x = \frac{\cos X}{-\sin X}$, donc $(\pi - 2x) \tan x = 2 \cos X \cdot \frac{X}{\sin X} \rightarrow 2$.

■ Corrigé de l'exercice 11

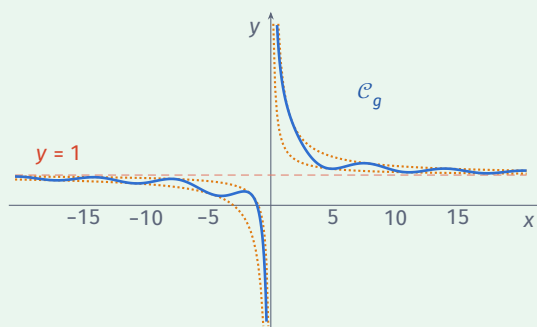
- Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2 + 12} = |x| \sqrt{1 + \frac{12}{x^2}} = -x \sqrt{1 + \frac{12}{x^2}}$, donc $f(x) = \frac{-\sqrt{1 + \frac{12}{x^2}} - \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow -1$ en $-\infty$. En 2^- , **F.I.** « $\frac{0}{0}$ » ; conjugué : $f(x) = \frac{x^2 + 12 - 16}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
- Avec $X = x - 2 \rightarrow 0^+$: si $m \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin(mX)}{X(X+4)} = m \cdot \frac{\sin(mX)}{mX} \cdot \frac{1}{X+4} \rightarrow \frac{m}{4}$; si $m = 0$, $f(x) = 0 \rightarrow 0 = \frac{m}{4}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{m}{4}$. En $+\infty$: $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2 - 4} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- f n'est pas définie en 2 : elle y a une limite $\iff \frac{m}{4} = \frac{1}{2} \iff m = 2$ (limite $\frac{1}{2}$). Si l'on pose $f(2) = 1$, la limite devrait valoir $f(2)$; or les limites latérales valent $\frac{1}{2} \neq 1$: **pas de limite**. La valeur $f(2) = \frac{1}{2}$ conviendrait.
- Asymptotes horizontales $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 0$ en $+\infty$; aucune asymptote verticale (limites finies en 2, et f est définie ailleurs).

■ Corrigé de l'exercice 12

A. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En 1 : $\sqrt{x^2 + 1} \rightarrow \sqrt{2} > 0$ et $x - 1 \rightarrow 0^+$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. En $\pm\infty$: $f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}}$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Asymptotes : $x = 1$, $y = 1$ (en $+\infty$), $y = -1$ (en $-\infty$).

B.

- $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$; on divise par $x > 0$ et on ajoute 1 : $1 + \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 1 + \frac{3}{x}$. **Gendarmes** : les deux bornes tendent vers 1 en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. **Comparaison** : $g(x) \geq 1 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ en 0^+ , donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.
- Pour $x < 0$, diviser par x **renverse** les inégalités : $1 + \frac{3}{x} \leq g(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$. D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ (gendarmes) et, comme $g(x) \leq 1 + \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ en 0^- , $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$.



3. Asymptotes : $\boxed{x=0}$ et $\boxed{y=1}$ (en $\pm\infty$). $g(x) - 1 = \frac{2+\sin x}{x}$ est du signe de x ($2 + \sin x \geq 1$) : $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $y = 1$ pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$, et ne la coupe jamais. 4. Figure ci-dessus : $\mathcal{C}_g$ ondule entre les deux hyperboles (en pointillés), touchant $y = 1 + \frac{3}{x}$ quand $\sin x = 1$ et $y = 1 + \frac{1}{x}$ quand $\sin x = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty : \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow f(x) > A$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty : \forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > B \Rightarrow f(x) < -A$.
2. a) Soit $\varepsilon > 0$. $|(3x + 4) - (-2)| = 3|x + 2|$; avec $\boxed{\alpha = \frac{\varepsilon}{3}}$, $0 < |x + 2| < \alpha$ donne $|3x + 4 + 2| < 3\alpha = \varepsilon$.
b) Soit $A > 0$ et $\boxed{\alpha = \frac{1}{A}}$: si $1 < x < 1 + \alpha$, alors $0 < x - 1 < \frac{1}{A}$, donc $\frac{1}{x-1} > A$. c) Soit $\varepsilon > 0$.
 $\left|1 + \frac{2}{x^2} - 1\right| = \frac{2}{x^2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$; avec $\boxed{B = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}}$, $x < B$ donne $x^2 > B^2 = \frac{2}{\varepsilon}$, donc $\left|1 + \frac{2}{x^2} - 1\right| < \varepsilon$.
3. Soit $\varepsilon > 0$ et α associé à ε pour f : si $0 < |x - a| < \alpha$, alors $||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon : \boxed{\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|}$. **Réciproque fautive** : $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$) vérifie $|f(x)| = 1 \rightarrow 1$, mais f n'a pas de limite en 0 (-1 à gauche, 1 à droite). (Elle est vraie si $\ell = 0$.)

■ Corrigé de l'exercice 14

1. **Le dénominateur tend vers 0 : pour une limite finie, le numérateur doit tendre vers 0** (sinon la limite est infinie). Donc $4 + 2a + b = 0$, $b = -4 - 2a$ et $x^2 + ax + b = (x^2 - 4) + a(x - 2) = (x - 2)(x + 2 + a)$: le quotient vaut $x + 2 + a \rightarrow 4 + a$. Ainsi $4 + a = 5 : \boxed{a = 1, b = -6}$.
De même, $\sqrt{ax + b} \rightarrow \sqrt{b}$ (limite de $\sqrt{u}$) doit valoir 2 : $b = 4$. Alors $\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x} = \frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)} = \frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} \rightarrow \frac{a}{4} = 1 : \boxed{a = 4, b = 4}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ (termes de plus haut degré) : $y = 3$ est asymptote $\iff a = 3$. Limite finie en 2 : il faut $12 + 2b - 4 = 0$, soit $b = -4$; alors $3x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(3x + 2)$ et $f(x) = \frac{3x+2}{x+2} \rightarrow \frac{8}{4} = \boxed{2}$ en 2 ($\boxed{a = 3, b = -4}$). En $-2 : 3x + 2 \rightarrow -4$ et $x + 2 \rightarrow 0^{\mp}$: limites $+\infty$ en -2^- et $-\infty$ en -2^+ ; seule asymptote verticale : $\boxed{x = -2}$.

■ Corrigé de l'exercice 15

On choisit X pour retrouver une limite connue en 0.

- a) $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ : x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) = \frac{1 - \cos 2X}{X^2} = 4 \cdot \frac{1 - \cos 2X}{(2X)^2} \rightarrow \boxed{2}$. b) $X = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0^+ : \sqrt{x} \tan \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\tan 2X}{X} \rightarrow \boxed{2}$.
- c) $X = x - \frac{\pi}{4} : \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + X\right) = \cos X + \sin X$, donc $\frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{4x - \pi} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin X}{X} - X \cdot \frac{1 - \cos X}{X^2}\right) \rightarrow \frac{1}{4}(1 - 0) = \boxed{\frac{1}{4}}$.
- d) $X = x^2 - 4 \rightarrow 0 : \frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{\sin X}{X} \cdot (x + 2) \rightarrow 1 \times 4 = \boxed{4}$. e) $X = \sqrt{x} \rightarrow 0^+ : \frac{1 - \cos X}{X^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$. f) $u(x) = \frac{9x^2 - x}{x^2 + 4} \rightarrow 9 \geq 0$, donc $\sqrt{u(x)} \rightarrow \boxed{3}$. g) Pour $x > 3$, $u(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3} \rightarrow +\infty$ (« $\frac{6}{0^+}$ »), donc $\sqrt{u(x)} \rightarrow \boxed{+\infty}$.

■ Corrigé de l'exercice 16

a) $\sin x \geq -1$, donc $\frac{x+\sin x}{\sqrt{x}} \geq \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$: par comparaison, $+\infty$. b) $x^2 \sin x \leq x^2$, donc $x^3 + x^2 \sin x \leq x^2(x+1) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$: $-\infty$. c) Pour $x > 1$: $2x-1 \leq 2x+\sin 3x \leq 2x+1$ et $0 < x-1 \leq x+\cos 2x \leq x+1$, donc $\frac{2x-1}{x+1} \leq \frac{2x+\sin 3x}{x+\cos 2x} \leq \frac{2x+1}{x-1}$; les deux bornes tendent vers 2 : gendarmes, 2. d) $\frac{3x+\sin x}{x+2} - 3 = \frac{\sin x-6}{x+2}$ et $|\sin x-6| \leq |\sin x|+6 \leq 7$: l'inégalité est prouvée pour $x > -2$, et $\frac{7}{x+2} \rightarrow 0$: la limite vaut 3. e) Près de 0 ($x \neq 0$, $\sin x \neq 0$) : $\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \times x \sin \frac{1}{x}$, avec $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ et $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \rightarrow 0$: 0. f) Pour $x \geq 1$: $0 < x-1 < E(x) \leq x$, donc $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{\sqrt{E(x)}}{\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{\frac{x}{x+1}}$; les deux bornes tendent vers $\sqrt{1} = 1$: 1.

27

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

a) **F.I.** « $\infty - \infty$ » en $-\infty$; conjugué : $\frac{x+3}{\sqrt{16x^2+x+3}-4x}$. **Attention**, $x < 0$: $\sqrt{16x^2+x+3} = -x\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$, donc l'expression vaut $\frac{x+3}{-x(\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+4)} = -\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+4} \rightarrow -\frac{1}{8}$.
b) Conjugué : $\frac{(x+2\sqrt{x})-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}})} \rightarrow \frac{3}{2}$. c) $x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \rightarrow 1$.
d) On découpe en deux formes connues, avec $x = 3x - 2x$: l'expression vaut $(\sqrt{9x^2+6x}-3x) - (\sqrt{4x^2-x}-2x)$. Or $\sqrt{9x^2+6x}-3x = \frac{6x}{\sqrt{9x^2+6x}+3x} = \frac{6}{\sqrt{9+\frac{6}{x}}+3} \rightarrow 1$ et $\sqrt{4x^2-x}-2x = \frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x} = \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} \rightarrow -\frac{1}{4}$: limite $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

■ Corrigé de l'exercice 18

a) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2(\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{3})$. Avec $X = x - \frac{\pi}{6}$: $2 \cos(X + \frac{\pi}{2}) = -2 \sin X$ et $6x - \pi = 6X$, donc le quotient vaut $-\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin X}{X} \rightarrow -\frac{1}{3}$. b) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, donc $\frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3} = -4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \rightarrow -4$. c) $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ et $\sqrt{1+x^2}-1 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$, donc le quotient vaut $2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 (\sqrt{1+x^2}+1) \rightarrow 2 \times 1 \times 2 = 4$. d) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; avec $X = x - \frac{\pi}{4}$, le quotient vaut $\frac{\tan(-X)}{4X} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\tan X}{X} \rightarrow -\frac{1}{4}$.

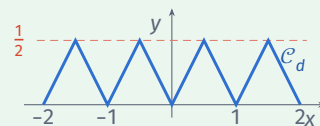
■ Corrigé de l'exercice 19

1. Soit $N(x) = a + b \cos x + \cos 2x \rightarrow a + b + 1$. **Condition nécessaire** : si $a + b + 1 \neq 0$, $\frac{N(x)}{x^4} \rightarrow \pm\infty$; donc $a = -1 - b$. Avec $c = \cos x$ et $\cos 2x = 2c^2 - 1$: $N = 2c^2 + bc - b - 2 = (c-1)(2c+2+b)$, et $\frac{N(x)}{x^4} = \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{2 \cos x + 2 + b}{x^2}$, avec $\frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$.
Si $b \neq -4$, $2 \cos x + 2 + b \rightarrow 4 + b \neq 0$ et le second facteur tend vers $\pm\infty$: limite infinie. Si $b = -4$, il vaut $-2 \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow -1$. Donc $a = 3$, $b = -4$ et la limite vaut $\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{2}$ (en effet $3 - 4 \cos x + \cos 2x = 2(1 - \cos x)^2$).

2. Conjugué : $\sqrt{1+ax} - (1+bx) = \frac{(1+ax)-(1+bx)^2}{D(x)} = \frac{(a-2b)x-b^2x^2}{D(x)}$, avec $D(x) = \sqrt{1+ax} + 1 + bx \rightarrow 2$. Le quotient vaut $\frac{1}{D(x)} \left(\frac{a-2b}{x} - b^2 \right)$. Si $a \neq 2b$, il tend vers $\pm\infty$ en 0^+ : impossible. Si $a = 2b$, il tend vers $-\frac{b^2}{2}$, et $-\frac{b^2}{2} = -\frac{1}{2} \iff b = \pm 1$: $(a, b) = (2, 1)$ ou $(-2, -1)$.

■ Corrigé de l'exercice 20

1. a) Si $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$, alors $n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$, donc $E\left(x + \frac{1}{2}\right) = n$ et $d(x) = |x - n|$ (figure : des « dents de scie »). b) En n : près de n , $d(x) = |x - n| \rightarrow 0 = d(n)$ des deux côtés : limite 0. En $n + \frac{1}{2}$: à gauche, $d(x) = x - n \rightarrow \frac{1}{2}$; à droite $(n + \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{3}{2})$, $d(x) = |x - (n + 1)| = n + 1 - x \rightarrow \frac{1}{2}$; et $d\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$: limite $\frac{1}{2}$. Pourtant $E\left(x + \frac{1}{2}\right)$ vaut n à gauche de $n + \frac{1}{2}$ et $n + 1$ à droite : la valeur absolue « recolle » les morceaux. c) D'après a), $0 \leq d(x) \leq \frac{1}{2}$. Donc $|x d\left(\frac{1}{x}\right)| \leq \frac{|x|}{2} \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x d\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; et $0 \leq \frac{d(x)}{x} \leq \frac{1}{2x}$ pour $x > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d(x)}{x} = 0$.
2. On encadre $E\left(\frac{1}{x}\right)$: $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$. a) Si $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\sin 3x > 0$: $\frac{\sin 3x}{x} - \sin 3x < \sin(3x) E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\sin 3x}{x}$. Si $-\frac{\pi}{3} < x < 0$, $\sin 3x < 0$ et les inégalités se renversent : $\frac{\sin 3x}{x} \leq \sin(3x) E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\sin 3x}{x} - \sin 3x$. Dans les deux cas, les bornes tendent vers $3 - 0 = 3$: limite 3 à droite et à gauche. b) Pour $0 < x < \frac{1}{2}$, $E\left(\frac{1}{2x}\right) \geq 1$ et $\frac{1}{2x} - 1 < E\left(\frac{1}{2x}\right) \leq \frac{1}{2x}$, donc



$$2 - 2x = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{2x}} < \frac{E\left(\frac{1}{x}\right)}{E\left(\frac{1}{2x}\right)} < \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x} - 1} = \frac{2}{1 - 2x} ; \text{gendarmes : limite } 2.$$

■ Corrigé de l'exercice 21

- a) **Vrai** : soit $M \in \mathbb{R}$; avec $A = |M| + 1$, il existe B tel que $f(x) > |M| + 1 > M$ pour $x > B$: M n'est pas un majorant. b) **Faux** : $f(x) = x \sin x$ n'est pas majorée ($f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$), mais $f(k\pi) = 0$ pour tout k : elle ne tend pas vers $+\infty$. c) **Vrai** : $g = (f + g) - f$ est la différence de deux fonctions ayant des limites finies. d) **Faux** : $f(x) = x + \sqrt{x}$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$, mais $f(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$. e) **Faux** : $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$: $f(x^2) = 1 \rightarrow 1$, mais f n'a pas de limite en 0. f) **Faux** : $f(x) = x + 2 \sin x \geq x - 2 \rightarrow +\infty$, mais avec $u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi < v = u + \pi$: $f(v) = u + \pi - 2 < u + 2 = f(u)$ (car $\pi < 4$), et ce pour tout k . g) **Vrai** (changement de variable $X = \frac{1}{x}$) : soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $0 < X < \alpha \implies |f(X) - \ell| < \varepsilon$; pour $x > \frac{1}{\alpha}$, $X = \frac{1}{x} \in]0, \alpha[$. h) **Vrai** : avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$ donne $|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$, d'où $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$.

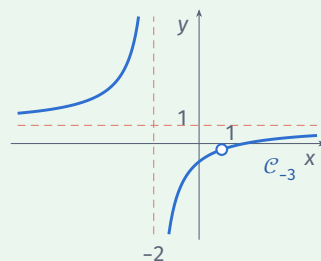
■ Corrigé de l'exercice 22

1. a) $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Si $|x - 2| < 1$, alors $1 < x < 3$ et $|x + 3| < 6$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$: si $0 < |x - 2| < \alpha$, alors $|x^2 + x - 6| < 6|x - 2| < 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$. b) $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2 - \sqrt{x}|}{2\sqrt{x}} = \frac{|4 - x|}{2\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})}$. Si $|x - 4| < 1$, alors $x > 3$, $\sqrt{x} > 1$ et $2\sqrt{x}(2 + \sqrt{x}) > 6$: le tout est $< \frac{|x - 4|}{6}$. Avec $\alpha = \min(1, 6\varepsilon)$, $0 < |x - 4| < \alpha$ donne $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\beta > 0$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour $0 < |x - a| < \beta$, et $\alpha' > 0$ tel que $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ pour $0 < |x - a| < \alpha'$. Avec $\alpha = \min(\beta, \alpha')$: $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)| < \varepsilon$. **Application** : $x^2 - x \rightarrow 0$ en 1 et $\left|\sin \frac{1}{x-1}\right| \leq 1$: limite 0 .

3. Soit $\alpha > 0$ et un entier $k > \frac{1}{\alpha}$. Les réels $u = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$, $w = \frac{1}{k\pi}$, $z = \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}$ sont dans $]0, \alpha[$ (leurs inverses sont tous $\geq k\pi > k > \frac{1}{\alpha}$), et $g(u) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\alpha}$, $g(w) = k\pi \sin k\pi = 0$, $g(z) = -(2k\pi - \frac{\pi}{2}) < -\frac{1}{\alpha}$. **Par l'absurde.** Si $g \rightarrow \ell$ (finie), avec $\varepsilon = 1$ il existe α , que l'on peut prendre $\leq \frac{1}{2}$, tel que $|g(x) - \ell| < 1$ sur $]0, \alpha[$; w donne $|\ell| < 1$ et u donne $g(u) < \ell + 1 < 2 \leq \frac{1}{\alpha}$: contradiction. Si $g \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$), on aurait $g(x) > 1$ (resp. < -1) sur un $]0, \alpha[$, contredit par $g(w) = 0$. $\boxed{g \text{ n'a pas de limite en } 0^+}$.

■ Corrigé de l'exercice 23

- $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$: domaine $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Termes de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = 1$; toutes les courbes ont l'asymptote $\boxed{y = 1}$.
- Soit $N(x) = x^2 + ax + 2$: $N(1) = a + 3$, $N(-2) = 2(3 - a)$. Près de 1, $x^2 + x - 2$ a le signe de $x - 1$; près de -2, le signe contraire de $x + 2$. **En 1** : si $a > -3$, limites $-\infty$ en 1^- et $+\infty$ en 1^+ ; si $a < -3$, l'inverse ; si $a = -3$, $N(x) = (x-1)(x-2)$ et $f_{-3}(x) = \frac{x-2}{x+2} \rightarrow -\frac{1}{3}$. **En -2** : si $a < 3$, limites $+\infty$ en -2^- et $-\infty$ en -2^+ ; si $a > 3$, l'inverse ; si $a = 3$, $N(x) = (x+1)(x+2)$ et $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{1}{3}$. Une seule asymptote verticale $\iff \boxed{a = -3 \text{ (} x = -2 \text{) ou } a = 3 \text{ (} x = 1 \text{)}}$.
- $f_a(x) - 1 = \frac{(a-1)x+4}{x^2+x-2}$. Si $a = 1$, jamais nul : pas de point commun. Si $a \neq 1$, il s'annule seulement pour $x_0 = \frac{4}{1-a}$, à condition que $x_0 \neq 1$ ($a \neq -3$) et $x_0 \neq -2$ ($a \neq 3$). $\mathcal{C}_a$ coupe $y = 1 \iff \boxed{a \notin \{1, -3, 3\}}$, au point $(\frac{4}{1-a}, 1)$.
- $f_{-3}(x) = \frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$ ($x \neq -2$) : hyperbole d'asymptotes $x = -2$ et $y = 1$, privée du point $(1, -\frac{1}{3})$ (figure).



28

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- a) En développant, $(u-v) \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-1-k} v^k = \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-k} v^k - \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-1-k} v^{k+1}$: tous les termes se simplifient (somme télescopique) sauf $u^n - v^n$. b) Avec $u = w \geq 0$, $v = 1$: $w^n - 1 = (w-1)S$, où $S = w^{n-1} + \dots + w + 1 \geq 1$, donc $\boxed{|w-1| \leq |w^n - 1|}$. Avec $w = \sqrt[n]{\varphi(x)}$: $|\sqrt[n]{\varphi(x)} - 1| \leq |\varphi(x) - 1| \rightarrow 0$, d'où $\sqrt[n]{\varphi(x)} \rightarrow 1$.
- $\frac{P(x)}{x^n} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{Q(x)}{x^n} \rightarrow 1$, donc $P(x) > 0$ pour x grand. Soit $u = \sqrt[n]{P(x)}$ et $S = \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-1-k} x^k > 0$. **Conjugué généralisé (1.a)** : $u - x = \frac{P(x) - x^n}{S} = \frac{ax^{n-1} + Q(x)}{S}$. On divise par x^{n-1} : d'une part $a + \frac{Q(x)}{x^{n-1}} \rightarrow a$ ($\deg Q \leq n-2$) ; d'autre part, avec $w = \frac{u}{x} = \sqrt[n]{\frac{P(x)}{x^n}} \rightarrow 1$ (1.b), $\frac{S}{x^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-1-k} \rightarrow n$. Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{P(x)} - x) = \frac{a}{n}}$.
- a) Par récurrence, $(x+1) \dots (x+n) = x^n + s_n x^{n-1} + Q_n(x)$, $s_n = 1 + \dots + n$, $\deg Q_n \leq n-2$ (multiplier par $x + n + 1$ ajoute $n+1$ au coefficient de x^n) : limite $\frac{s_n}{n} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$. b) $n = 3$: $\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 1} - x \rightarrow \frac{5}{3}$, $\sqrt[3]{x^3 - x^2 + x} - x \rightarrow -\frac{1}{3}$ ($Q(x) = x$) ; différence : $\boxed{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 25

1. $N \leq \frac{1}{x} < N+1$ donne $xN \leq 1 < xN+x$, soit $\boxed{1-x < xN \leq 1}$: par les gendarmes, $xN \rightarrow 1$ en 0^+ .

Alors $x^2(1+\dots+N) = \frac{(xN)(xN+x)}{2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$ et $x^3(1^2+\dots+N^2) = \frac{(xN)(xN+x)(2xN+x)}{6} \rightarrow \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

2. a) Soit $n = E(\sqrt{x}) \geq 1$: $n \leq \sqrt{x} < n+1$, donc $n^2 \leq x < (n+1)^2$ et $0 \leq x - n^2 < 2n+1 \leq 3n$, tandis que

$\sqrt{x} \geq n$: $\boxed{0 \leq \varphi(x) < 3}$. Puis $0 \leq \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} < \frac{3}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

b) $\varphi(n^2) = \frac{n^2 - n^2}{n} = \boxed{0}$. Comme $n^2 \leq n^2 + n < (n+1)^2$, $E(\sqrt{n^2 + n}) = n$ et $\varphi(n^2 + n) = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Par l'absurde, si $\varphi \rightarrow \ell$: avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe B tel que $|\varphi(x) - \ell| < \frac{1}{4}$ pour $x > B$; pour un entier $n > \max(B, 1)$, n^2 et $n^2 + n$ dépassent B , donc $|\ell| < \frac{1}{4}$ et $\varphi(n^2 + n) < \ell + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$: contradiction. (φ est bornée, elle ne tend pas non plus vers $\pm\infty$.)

■ Corrigé de l'exercice 26

1. $f(x) = x + x^2 \rightarrow 0$, $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = \frac{x+3x^2}{x} = 1+3x \rightarrow 1$ et $\frac{f(x)}{x} = 1+x \rightarrow 1$ ✓. Pour $f(x) = x+1$: $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = 1$, mais $f(x) \rightarrow 1 \neq 0$ (la première hypothèse est fausse) et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$: cette hypothèse est **indispensable**.

2. Pour $k = 1, \dots, n$, $t_k = \frac{x}{2^k}$ vérifie $0 < |t_k| < \alpha$, donc $|f(2t_k) - f(t_k) - t_k| \leq \varepsilon |t_k|$, avec $2t_k = \frac{x}{2^{k-1}}$. En sommant, $\sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right] = f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ (télescopage), $\sum_{k=1}^n t_k = x\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, et l'inégalité triangulaire donne $\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) - x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right| \leq \varepsilon |x| \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \varepsilon |x|$.

3. x étant fixé, $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$ donne $\beta > 0$ tel que $|f(t)| \leq \varepsilon |x|$ si $0 < |t| < \beta$. Comme $2^n \geq n+1$, un entier $n \geq \max\left(\frac{|x|}{\beta}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ vérifie $\frac{|x|}{2^n} < \beta$ et $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Alors $f(x) - x = \left[f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) - x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right] + f\left(\frac{x}{2^n}\right) - \frac{x}{2^n}$, d'où $|f(x) - x| \leq \varepsilon |x| + \varepsilon |x| + \varepsilon |x| = 3\varepsilon |x|$, soit $\left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| \leq 3\varepsilon$ pour $0 < |x| < \alpha$. ε étant arbitraire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

4. $g(x) = f(x) - (\ell - 1)x$ vérifie $g \rightarrow 0$ et $\frac{g(2x)-g(x)}{x} = \frac{f(2x)-f(x)}{x} - (\ell - 1) \rightarrow 1$; par 3., $\frac{g(x)}{x} \rightarrow 1$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} + \ell - 1 \rightarrow \boxed{\ell}$.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. $y \mapsto y^3 + xy$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ ($x \geq 0$) : l'équation a **au plus une** solution, d'où l'unicité. $1^3 + 0 = 1$: $f(0) = 1$; $\frac{1}{8} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1$: $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Si $y > 1$, $y^3 + xy > 1$: donc $\boxed{0 < f(x) \leq 1}$,

et pour $x > 0$, $xf(x) = 1 - f(x)^3 < 1$: $\boxed{f(x) \leq \frac{1}{x}}$. **Décroissance, par l'absurde** : si $0 \leq x < x'$ et $f(x') \geq f(x)$, alors $f(x')^3 + x'f(x') > f(x)^3 + xf(x)$, soit $1 > 1$: impossible. Donc $f(x') < f(x)$.

2. $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{0}$ (gendarmes). Puis $xf(x) = 1 - f(x)^3 \rightarrow \boxed{1}$. Enfin $\frac{1}{x} - f(x) = \frac{1 - xf(x)}{x} = \frac{f(x)^3}{x}$, donc $x^4 \left(\frac{1}{x} - f(x) \right) = (xf(x))^3 \rightarrow \boxed{1}$.

3. $1 - f^3 = xf$ s'écrit $(1 - f)(1 + f + f^2) = xf$: $1 - f(x) = \frac{xf(x)}{1 + f(x) + f(x)^2} \in [0, x]$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \boxed{1}$, puis

$$\frac{1-f(x)}{x} = \frac{f(x)}{1+f(x)+f(x)^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 28

- Si $x \in \mathbb{Q}$, $|f(x)| = |x(x-1)|$; sinon $|f(x)| = 0$. Comme $x(x-1) \rightarrow 0$ en 0 et en 1, $|f(x)-0| \leq |x(x-1)|$ donne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \boxed{0}$ ($= f(0) = f(1)$).
- Par l'absurde.** Il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $0 < |x - a| < \alpha$, et (polynôme) $\beta > 0$ tel que $|x(x-1) - a(a-1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $|x - a| < \beta$. Soit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$. Un irrationnel $s \in]a, a + \gamma[$ donne $|0 - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$. Un rationnel $r \in]a, a + \gamma[$ donne $|r(r-1) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|r(r-1) - a(a-1)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors $c = |a(a-1)| \leq |a(a-1) - r(r-1)| + |r(r-1) - \ell| + |\ell| < c$: contradiction. $\boxed{f \text{ a une limite en } a \iff a \in \{0, 1\}}$.
- Si $P(a) = Q(a) = L$: $|g(x) - L|$ vaut $|P(x) - L|$ ou $|Q(x) - L|$, donc $|g(x) - L| \leq |P(x) - L| + |Q(x) - L| \rightarrow 0$. Si $c = |P(a) - Q(a)| > 0$, on reprend 2. avec $\varepsilon = \frac{c}{4}$: un irrationnel puis un rationnel proches de a donnent $|Q(a) - \ell| < \frac{c}{2}$ et $|P(a) - \ell| < \frac{c}{2}$, d'où $c < c$. Exemple : $x^3 = x \iff x \in \{-1, 0, 1\}$: limite exactement en $\boxed{-1, 0 \text{ et } 1}$.

■ Corrigé de l'exercice 29

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$; il existe A tel que $|f(t) - \ell| < \varepsilon$ pour $t > A$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + nT > A$ (par exemple $n = E\left(\frac{|A-x|}{T}\right) + 1$) ; par périodicité, $|f(x) - \ell| = |f(x + nT) - \ell| < \varepsilon$. Ceci pour tout $\varepsilon > 0$: $\boxed{f(x) = \ell}$. $\cos$ et $x \mapsto x - E(x)$ sont périodiques, non constantes et bornées : pas de limite finie, ni infinie. Si $\sin x + \frac{1}{x} \rightarrow \ell$, alors $\sin x = \left(\sin x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \rightarrow \ell$: impossible.
- a) $n \leq x - A < n + 1$, donc $y = x - n \in [A, A + 1[$ et $n \geq 1$. Pour $k = 0, \dots, n - 1$, $y + k \geq A$, donc $|f(y + k + 1) - f(y + k) - \ell| \leq \varepsilon$; en sommant (télescopage) : $\boxed{|f(x) - f(y) - n\ell| \leq n\varepsilon}$. b) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[A, A + 1]$. Comme $\ell x = \ell y + n\ell$: $f(x) - \ell x = [f(x) - f(y) - n\ell] + f(y) - \ell y$, donc $|f(x) - \ell x| \leq n\varepsilon + M + |\ell|(A + 1) \leq x\varepsilon + K$, avec $K = M + |\ell|(A + 1)$ ($n \leq x$). Ainsi $\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq \varepsilon + \frac{K}{x} < 2\varepsilon$ dès que $x > \max\left(A + 1, \frac{K}{\varepsilon}\right)$: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell}$. c) $H(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{E(x)}$ ($x \geq 1$; $H = 0$ sur $[0, 1[$) prend au plus deux valeurs sur $[a, a + 1]$ et $H(x + 1) - H(x) = \frac{1}{E(x)+1} < \frac{1}{x} \rightarrow 0$: limite $\boxed{0}$.

■ Corrigé de l'exercice 30

- a) $(1 - a) + a(1 - b) = 1 - a + a - ab = 1 - ab$ ✓. b) Avec $a = \cos x$, $b = \cos 2x$: $\frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} + 1 \times 2 = \boxed{\frac{5}{2}}$. Puis, avec $a = \cos x \cos 2x \rightarrow 1$ et $b = \cos 3x$: $\frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} = \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} + \cos x \cos 2x \cdot \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{7}$. C'est la réponse au défi de la couverture.
- Récurrence** sur $\mathcal{P}(n)$: « $\frac{1 - P_n(x)}{x^2} \rightarrow \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{2}$ ». Initialisation : si $a_1 \neq 0$, $\frac{1 - \cos(a_1 x)}{x^2} = a_1^2 \cdot \frac{1 - \cos(a_1 x)}{(a_1 x)^2} \rightarrow \frac{a_1^2}{2}$ (évident si $a_1 = 0$). Hérédité : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, avec $P_{n+1} = P_n \cos(a_{n+1} x)$ et 1.a), $\frac{1 - P_{n+1}(x)}{x^2} = \frac{1 - P_n(x)}{x^2} + P_n(x) \cdot \frac{1 - \cos(a_{n+1} x)}{x^2} \rightarrow \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{2} + 1 \times \frac{a_{n+1}^2}{2}$, car $P_n(x) \rightarrow 1$. Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
- Avec $a_k = k$ et $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$: limite $\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}}$ (on retrouve 7 pour $n = 3$). Elle croît avec n ; pour $n = 7$ elle vaut $\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{12} = 70$, pour $n = 8$, $\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{12} = 102$: le plus petit entier est $\boxed{n = 8}$.
- Avec $a_k = 2k - 1$: $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \sum_{j=1}^{2n} j^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, d'où la limite $\boxed{\frac{n(4n^2 - 1)}{6}}$ ($\frac{35}{2}$ pour $n = 3$). Enfin $\frac{1 - \cos x \dots \cos nx}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos x \dots \cos nx}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \times 2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

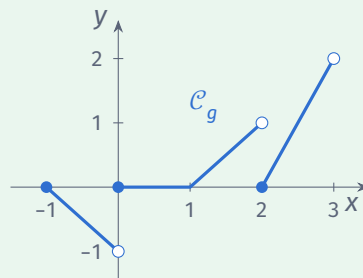
29 Corrigés : limites en un point

■ Corrigé de l'exercice 31

- On remplace x par la valeur indiquée : aucun dénominateur ne s'annule, il n'y a pas de forme indéterminée. a) $\frac{8-4+5}{2+2} = \frac{9}{4}$; b) $\frac{2 \times 2 - 1}{4 - 1} = 1$; c) $\frac{1+|-3|}{-1-1} = -2$.
- Le numérateur a une limite non nulle et le dénominateur tend vers 0 : la limite est infinie, son signe est celui du quotient.
 - $2x - 1 \rightarrow 5 > 0$ et $x - 3$ est du signe de $x - 3$: à droite de 3 : $+\infty$; à gauche : $-\infty$.
 - $x + 5 \rightarrow 3$ en -2 , $x + 5 \rightarrow 7$ en 2 ; $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ est négatif sur $] -2, 2[$ et positif à l'extérieur :
 en -2 : à droite $\frac{3}{0^-}$, $-\infty$; à gauche $\frac{3}{0^+}$, $+\infty$; en 2 : à droite $+\infty$; à gauche $-\infty$.
 - $x + 1 \rightarrow 2$ et $(x - 1)^2 \rightarrow 0^+$ **des deux côtés** : les limites latérales sont égales, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{(x - 1)^2} = +\infty$.
 - $\sqrt{x} - 4 \rightarrow -4$ et $x^2 \rightarrow 0^+$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 4}{x^2} = -\infty$.
- Une limite infinie en a (d'un côté au moins) donne l'asymptote verticale $x = a$: d) $x = 3$; e) $x = -2$, $x = 2$; f) $x = 1$; g) $x = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 32

- Si $x > 0$: $|x| = x$ et $u(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$; si $x < 0$: $|x| = -x$ et $u(x) = 0$. Donc à droite de 0 : $+\infty$; à gauche : 0 . La limite à droite est infinie : $x = 0$ **est asymptote verticale** (d'un seul côté).
- $x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4) \geq 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x \geq -4)$ et $x \neq 0$: $D_v = [-4, 0[\cup]0, +\infty[$. Sur D_v , $\sqrt{x^2(x + 4)} = \sqrt{x^2} \sqrt{x + 4} = |x| \sqrt{x + 4}$.
 Si $x > 0$, $v(x) = \sqrt{x + 4} \rightarrow 2$; si $-4 \leq x < 0$, $v(x) = -\sqrt{x + 4} \rightarrow -2$: **pas de limite en 0**. En -4^+ : $v(x) = -\sqrt{x + 4} \rightarrow 0$ ($= v(-4)$).
- Si $x \in [n, n + 1[$, alors $E(x) = n$ et $g(x) = n(x - n)$:
 sur $[1, 2[$, $g(x) = x - 1$; sur $[2, 3[$, $g(x) = 2x - 4$.
 - En 2 : à droite $g(x) = 2x - 4 \rightarrow 0$, à gauche ($x \in [1, 2[$) $g(x) = x - 1 \rightarrow 1$. En 0 : à droite ($x \in [0, 1[$) $g(x) = 0 \rightarrow 0$, à gauche ($x \in [-1, 0[$) $g(x) = -(x + 1) \rightarrow -1$.
 - À droite de n : $g(x) = n(x - n) \rightarrow 0$; à gauche ($x \in [n - 1, n[$) : $g(x) = (n - 1)(x - n + 1) \rightarrow n - 1$; et $g(n) = 0$. Donc g a une limite en n si et seulement si $n - 1 = 0$: $n = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$.

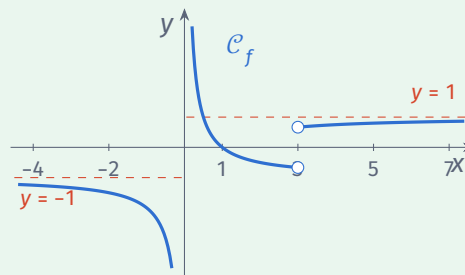


Sauts en 0 et en 2, pas de saut en 1.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. On factorise $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ et on enlève la valeur absolue : si $x > 3$, $|x - 3| = x - 3$ et $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$; si $x < 3$ ($x \neq 0$), $|x - 3| = -(x - 3)$ et $f(x) = -\frac{x-1}{x} = -1 + \frac{1}{x}$.
2. À droite de 3 : $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; à gauche : $-1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$. Elles sont différentes : f n'a pas de limite en 3.
3. Près de 0, $f(x) = -1 + \frac{1}{x}$: à droite $+\infty$, à gauche $-\infty$. En $+\infty$: $f(x) = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$; en $-\infty$: $f(x) = -1 + \frac{1}{x} \rightarrow -1$.

Interprétation : l'axe des ordonnées est asymptote verticale ; $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$, et $y = -1$ en $-\infty$.



Deux « trous » en $(3, \pm \frac{2}{3})$.

4. $\frac{x-3}{|x-3|}$ vaut 1 si $x > 3$ et -1 si $x < 3$: g tend vers $\frac{2}{3} + k$ à droite de 3 et vers $-\frac{2}{3} - k$ à gauche. Comme g n'est pas définie en 3, elle a une limite en 3 si et seulement si $\frac{2}{3} + k = -\frac{2}{3} - k$: $k = -\frac{2}{3}$, et alors $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. Il faut $x+6 \geq 0$ et $\sqrt{x+6} \neq 2$: $D_f = [-6, -2[\cup]-2, +\infty[$. En -6^+ : $\sqrt{x+6} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$. En -2 : $x+1 \rightarrow -1$; si $x > -2$, $x+6 > 4$, donc $2 - \sqrt{x+6} \rightarrow 0^-$; si $x < -2$, $2 - \sqrt{x+6} \rightarrow 0^+$. À droite : $+\infty$; à gauche : $-\infty$.
2. $\sqrt{x^2+7} = 4 \iff x^2 = 9$: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, symétrique, et $g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+7}-4} = -g(x)$: g est impaire. En 3 : le numérateur tend vers 3 ; le dénominateur est positif si $|x| > 3$ ($x^2 + 7 > 16$), négatif si $|x| < 3$: à droite $+\infty$, à gauche $-\infty$. En -3 : si $x \rightarrow -3^+$, $t = -x \rightarrow 3^-$ et $g(x) = -g(t) \rightarrow +\infty$; si $x \rightarrow -3^-$, $t \rightarrow 3^+$ et $g(x) \rightarrow -\infty$. Asymptotes verticales : $x = 3$ et $x = -3$.
3. Le dénominateur $(x-1)^2$ tend vers 0^+ des deux côtés ; le numérateur tend vers $3 - a$. Si $a < 3$: $\lim_{x \rightarrow 1} h_a = +\infty$; si $a > 3$: $\lim_{x \rightarrow 1} h_a = -\infty$.

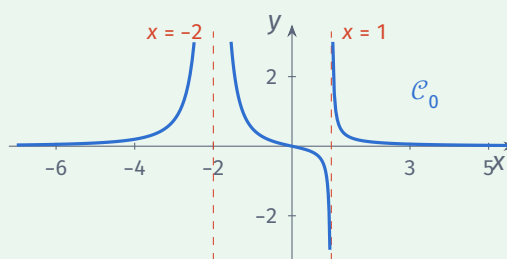
Si $a = 3$, forme $\frac{0}{0}$: on multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{10-x} + 3 > 0$:

$$h_3(x) = \frac{(10-x)-9}{(x-1)^2(\sqrt{10-x}+3)} = \frac{-1}{(x-1)(\sqrt{10-x}+3)} : \text{ à droite } -\infty, \text{ à gauche } +\infty.$$

Conclusion : h_a a une limite infinie en 1 pour tout $a \neq 3$, et h_3 n'a pas de limite en 1 : la simplification a fait apparaître le facteur $x - 1$, qui change de signe.

■ Corrigé de l'exercice 35

- 2 est racine ($-8 + 12 - 4 = 0$) ; la division par $x + 2$ donne $x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 2) = (x + 2)^2(x - 1)$, donc $D_{f_m} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
- En -2 : $(x+2)^2 \rightarrow 0^+$ et $x-1 \rightarrow -3$: le dénominateur tend vers 0^+ **des deux côtés** ; le numérateur tend vers $m - 2$. Si $m > 2$: $\frac{m-2}{0^+}$, $\lim_{x \rightarrow -2} f_m = -\infty$; si $m < 2$: $\lim_{x \rightarrow -2} f_m = +\infty$; si $m = 2$: $f_2(x) = \frac{x+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$, à droite $-\infty$, à gauche $+\infty$ (pas de limite).
En 1 : $(x+2)^2 \rightarrow 9$, $x-1 \rightarrow 0^+$ à droite et 0^- à gauche ; le numérateur tend vers $1 + m$. Si $m > -1$: à droite $+\infty$, à gauche $-\infty$; si $m < -1$: à droite $-\infty$, à gauche $+\infty$; si $m = -1$: $f_{-1}(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{1}{(x+2)^2}$ sur $D_{f_{-1}}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f_{-1} = \frac{1}{9}$.
- D'après 2, f_m a toujours une limite infinie en -2 (d'un côté au moins) : $x = -2$ **est toujours asymptote** ; d'après l'étude en 1, $x = 1$ est asymptote si et seulement si $m \neq -1$. Nombre d'asymptotes verticales : 2 si $m \neq -1$, 1 si $m = -1$.
Pour $m = -1$, $\mathcal{C}_{-1}$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ privée du point $(1, \frac{1}{9})$.
Ci-contre : $\mathcal{C}_0$ ($m = 0$) et ses deux asymptotes verticales.
- Numérateur de degré 1, dénominateur de degré 3 : en $\pm\infty$, $f_m(x)$ a la limite de $\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, soit 0 : l'axe des abscisses est asymptote horizontale.



■ Corrigé de l'exercice 36

- On encadre la quantité sous la partie entière pour x proche de 0, de chaque côté.
 - Si $0 < |x| < 1$, $0 < 1 - x^2 < 1$, donc $E(1 - x^2) = 0$: les deux limites latérales valent 0. Mais la fonction est définie en 0 et vaut $E(1) = 1 \neq 0$: **pas de limite en 0**.
 - Si $0 < x < 1$, $x^2 - x = x(x-1) \in [-\frac{1}{4}, 0[$: $E(x^2 - x) = -1$; si $-\frac{1}{2} < x < 0$, $0 < x^2 - x < \frac{3}{4}$: $E(x^2 - x) = 0$. À droite -1 , à gauche 0 : pas de limite.
 - Si $0 < x < 1$, $1 < 1 + x^3 < 2$; si $-1 < x < 0$, $0 < 1 + x^3 < 1$. À droite 1 , à gauche 0 : pas de limite.
 - Si $0 < x < 1$, $E(x) = 0$; si $-1 < x < 0$, $E(-x) = 0$. Le produit est nul de chaque côté et vaut 0 en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} E(x)E(-x) = 0$.
- Principe** (changement de variable $t = u(x)$) : si $u(x) \rightarrow 0$ en restant strictement positif (resp. négatif), alors $f(u(x)) \rightarrow 2$ (resp. -3). On étudie donc le **signe** de $u(x)$ de chaque côté.
 - $u(x) = 1 - x < 0$ à droite de 1, > 0 à gauche : à droite -3 , à gauche 2 .
 - $u(x) = (x-2)(x+2)$, positif si $|x| > 2$, négatif si $|x| < 2$: en 2, à droite 2 , à gauche -3 ; en -2, à droite -3 , à gauche 2 .
 - $u(x) = (x+1)^2 > 0$ pour $x \neq -1$: à droite et à gauche 2 .
 - $u(x) = x(x-1)(x+1)$: négatif si $0 < x < 1$, positif si $-1 < x < 0$: à droite -3 , à gauche 2 .

Seule c), non définie en -1 , a des limites latérales égales : $\lim_{x \rightarrow -1} f((x+1)^2) = 2$; les autres n'ont pas de limite.

3. Si $0 < x < 1$, $E(x) = 0$ et $g(x) = 0$; $g(1) = 1 \times 1 = 1$; si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $g(x) = 0$. Les limites à droite et à gauche en 1 valent 0 , mais g est définie en 1 et $g(1) = 1 \neq 0$: g n'a pas de limite en 1 .

30 Corrigés : limites à l'infini

■ Corrigé de l'exercice 37

1. On remplace chaque polynôme par son terme de plus haut degré (en $+\infty$ et en $-\infty$).

a) $f_1(x)$ a la limite de $6x^4$: $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. b) Terme dominant $x^2 \times (-x)^3 = -x^5$: $-\infty$ en $+\infty$, $+\infty$ en $-\infty$.

c) $\frac{6x^2}{3x^2} = 2$: 2 en $\pm\infty$. d) $\frac{x^4}{2x^3} = \frac{x}{2}$: $+\infty$ en $+\infty$, $-\infty$ en $-\infty$. e) $\frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$: 0 en $\pm\infty$.

f) Numérateur : $(3x)^2 \times (-x) = -9x^3$; dénominateur : $2x^3$: $-\frac{9}{2}$ en $\pm\infty$.

g) Pour $x \neq 0$, $\sqrt{4x^4 + x} = \sqrt{x^4} \sqrt{4 + \frac{1}{x^3}} = x^2 \sqrt{4 + \frac{1}{x^3}}$ (car $x^2 \geq 0$), donc $f_7(x) = \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2} - 3} \rightarrow \frac{2}{-3}$ en $\pm\infty$.

2. Une limite finie ℓ en $\pm\infty$ donne l'asymptote horizontale $y = \ell$: $y = 2$ pour f_3 , $y = 0$ pour f_5 , $y = -\frac{9}{2}$ pour f_6 , $y = -\frac{2}{3}$ pour f_7 (en $+\infty$ et en $-\infty$). Les courbes de f_1, f_2, f_4 n'en ont pas.

■ Corrigé de l'exercice 38

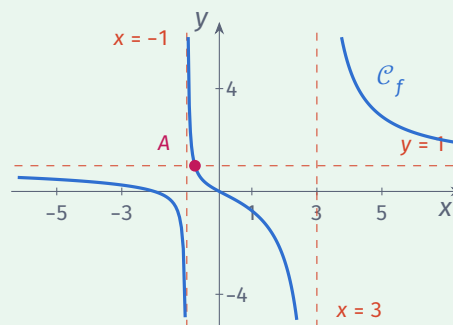
1. $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. En $\pm\infty$, $f(x)$ a la limite de $\frac{x^2}{x^2} = 1$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

2. Le numérateur $x(x+2)$ tend vers -1 en -1 et vers 15 en 3 . Le dénominateur $(x+1)(x-3)$ est positif sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$, négatif sur $] -1, 3[$. Donc :

en -1 : à droite $\frac{-1}{0^+} \rightarrow +\infty$, à gauche $\frac{-1}{0^-} \rightarrow -\infty$; en 3 : à droite $+\infty$, à gauche $-\infty$.

Asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 3$; asymptote horizontale (question 1) : $\Delta : y = 1$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. $f(x) - 1 = \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 2x - 3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{4x+3}{(x+1)(x-3)}$. Signes : $4x+3$ s'annule en $-\frac{3}{4}$; le quotient est négatif sur $]-\infty, -1[$, positif sur $]-1, -\frac{3}{4}[$, négatif sur $]-\frac{3}{4}, 3[$, positif sur $]3, +\infty[$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]-1, -\frac{3}{4}[$ et sur $]3, +\infty[$, au-dessous sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-\frac{3}{4}, 3[$; elle coupe Δ en $A\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$.



■ Corrigé de l'exercice 39

1. Pour $x \geq \frac{3}{4}$, on divise numérateur et dénominateur par $\sqrt{x}$: $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{4-\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \rightarrow \frac{1+2}{1} = \boxed{3}$.

2. a) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^2+x+1 > 0$
 $(\Delta < 0)$: pour $x \neq 1$, $\frac{x+2}{x^3-1}$ a le signe de $\frac{x+2}{x-1}$, positif ou nul si et seulement si $x \leq -2$ ou $x > 1$:

$$D_g =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[.$$

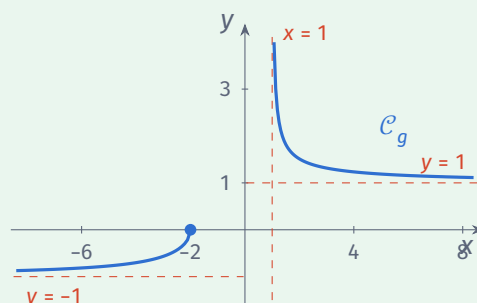
b) Pour $x \in D_g$ (donc $x \neq 0$) : $\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^3}}$, et

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}, \text{ d'où}$$

$$g(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^3}}}.$$

Donc $g \rightarrow \boxed{1}$ en $+\infty$ et $g \rightarrow \boxed{-1}$ en $-\infty$ (là, $\frac{x}{|x|} = -1$). En 1^+ : $\frac{x+2}{x^3-1} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$, donc la racine tend vers $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$. Asymptotes :

$\boxed{x=1}$, $\boxed{y=1}$ en $+\infty$, $\boxed{y=-1}$ en $-\infty$.



Aucun point de C_g entre -2 et 1 .

3. Pour tout réel x : $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, donc $\boxed{x - \sqrt{x^2+1} < 0}$. Avec l'expression conjuguée : $x - \sqrt{x^2+1} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} \rightarrow 0$ en $+\infty$. Le dénominateur tend donc vers 0^- et le numérateur vers $+\infty$:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x - \sqrt{x^2+1}} = -(\sqrt{x}+1)(x + \sqrt{x^2+1}) \rightarrow \boxed{-\infty}.$$

■ Corrigé de l'exercice 40

1. Pour $x \neq 0$, $\sqrt{4x^2+5} = |x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$, et $|x| = x$ si $x > 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$:

$$x > 0 : f_a(x) = \frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}} + a}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow \boxed{a+2}; \quad x < 0 : f_a(x) = \frac{-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}} + a}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow \boxed{a-2}.$$

$\mathcal{C}_a$ a donc les asymptotes horizontales $y = a+2$ (en $+\infty$) et $y = a-2$ (en $-\infty$), distinctes car $(a+2) - (a-2) = 4 \neq 0$.

2. L'axe des abscisses ($y=0$) est asymptote en $+\infty$ si et seulement si $a+2=0$: $\boxed{a=-2}$; en $-\infty$ si et seulement si $\boxed{a=2}$.

3. En -1 , le numérateur tend vers $\sqrt{9} - a = 3 - a$ et le dénominateur vers 0 (de signes opposés à droite et à gauche). Si $a \neq 3$: limites infinies à droite et à gauche, $x = -1$ est asymptote. Si $a = 3$: d'après la question 4, f_3 a une limite finie en -1 , donc $x = -1$ n'est pas asymptote. Ainsi $x = -1$ est asymptote $\Leftrightarrow \boxed{a \neq 3}$.

4.

Pour $x < 0$, $\sqrt{4x^2 + 5} - 3x > 0$; on multiplie par cette quantité conjuguée :

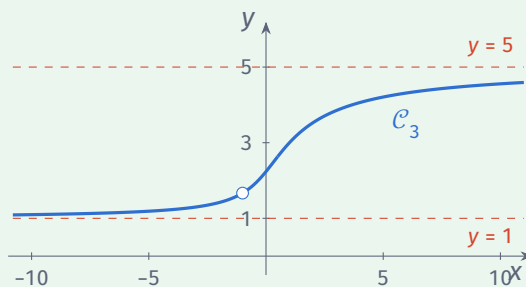
$$(\sqrt{4x^2 + 5} + 3x)(\sqrt{4x^2 + 5} - 3x) = 5 - 9x^2 =$$

$5(1 - x)(1 + x)$, d'où, pour $x < 0$, $x \neq -1$:

$$f_3(x) = \frac{5(1 - x)(1 + x)}{(x + 1)(\sqrt{4x^2 + 5} - 3x)} = \frac{5(1 - x)}{\sqrt{4x^2 + 5} - 3x},$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -1} f_3(x) = \frac{10}{3 + 3} = \frac{5}{3}.$$

Ci-contre : $\mathcal{C}_3$, ses asymptotes $y = 5$ (en $+\infty$) et $y = 1$ (en $-\infty$), et le « trou » $(-1, \frac{5}{3})$.



■ Corrigé de l'exercice 41

1. Près de 1, $(x + 1)^2 \rightarrow 4$ et $x - 1$ change de signe : les limites à droite et à gauche sont infinies et **de signes contraires**, ce qui contredit (C_2) . Près de -1 , $x - 1 \rightarrow -2$ et $(x + 1)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés : les deux limites latérales sont infinies **de même signe**, ce qui contredit (C_3) . Un facteur simple fait changer le signe, un facteur double ne le change pas.

2. a) N et D sont de degré 3, de coefficients dominants 2 et 1 : en $\pm\infty$, $f(x)$ a la limite de $\frac{2x^3}{x^3} = 2$: (C_1) est vraie.

b) (C_4) : $D(0) = 1$, donc $f(0) = r$: $(C_4) \iff \boxed{r = 0}$.

(C_2) : près de 1, $D(x) \rightarrow 0^+$ des deux côtés. Si $N(1) > 0$, $f \rightarrow +\infty$; si $N(1) < 0$, $f \rightarrow -\infty$; si $N(1) = 0$, $N(x) = (x - 1)M(x)$ et $f(x) = \frac{M(x)}{(x-1)(x+1)}$: limites infinies de signes contraires si $M(1) \neq 0$, limite finie si $M(1) = 0$. Donc $(C_2) \iff \boxed{N(1) > 0}$.

(C_3) : près de -1 , $(x - 1)^2 \rightarrow 4$ et $D(x)$ a le signe de $x + 1$. Si $N(-1) \neq 0$, la limite à gauche vaut $\frac{N(-1)}{0^-}$, égale à $+\infty$ si et seulement si $N(-1) < 0$, et alors la limite à droite $\frac{N(-1)}{0^+}$ vaut bien $-\infty$; si $N(-1) = 0$, $f(x) = \frac{N_1(x)}{(x-1)^2}$ a une limite finie. Donc $(C_3) \iff \boxed{N(-1) < 0}$.

Pour $p = q = r = 0$: $N(1) = 2 > 0$ et $N(-1) = -2 < 0$: $f(x) = \frac{2x^3}{(x-1)^2(x+1)}$ convient.

3. $D(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ et $D(2) = 3$. (C_5) : $N(2) = 6$, soit $16 + 4p + 2q = 6$, $2p + q = -5$.

(C_6) : $N(x) - 2D(x) = (p + 2)x^2 + (q + 2)x - 2$, donc $x(f(x) - 2) = \frac{(p + 2)x^3 + (q + 2)x^2 - 2x}{x^3 - x^2 - x + 1} \rightarrow p + 2$ (et $\rightarrow 0$ si $p + 2 = 0$). Ainsi $(C_6) \iff p + 2 = -2 \iff p = -4$, puis $q = -5 - 2p = 3$.

Vérification : $N(1) = 2 - 4 + 3 = 1 > 0$ et $N(-1) = -2 - 4 - 3 = -9 < 0$ ✓. La fonction cherchée est unique :

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x}{(x-1)^2(x+1)}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 42

1. On développe : $(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$; les termes se simplifient deux à deux (somme télescopique) et il reste $a^n - b^n$.
2. Avec $a = x + 1$ et $b = x$ ($a - b = 1$) : $(x + 1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} (x + 1)^k x^{n-1-k}$. Pour $x > 0$, on divise par x^{n-1} :

$$\frac{(x + 1)^n - x^n}{x^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^k \rightarrow \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} = \boxed{n}.$$

Puis $(x + 1)^n - x^n = x^{n-1} \times \frac{(x+1)^n - x^n}{x^{n-1}}$, produit d'un terme tendant vers $+\infty$ ($n - 1 \geq 1$) par un terme tendant vers $n > 0$: $\boxed{+\infty}$.

3. Avec $a = x + 1$, $b = x - 1$ ($a - b = 2$) : $\frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{x^{n-1}} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^k \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-1-k} \rightarrow 2n$. De même ($a - b = 4$) : $\frac{(x+2)^n - (x-2)^n}{x^{n-1}} \rightarrow 4n$. Le quotient tend vers $\frac{2n}{4n} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

4. Comme $nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k}$, on a $(x + 1)^n - x^n - nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} [(x + 1)^k - x^k] x^{n-1-k}$; le terme $k = 0$ est nul et $\frac{x^{n-1-k}}{x^{n-2}} = \frac{1}{x^{k-1}}$, d'où l'égalité demandée. Pour $k \geq 2$, la question 2 (avec k au lieu de n) donne $\frac{(x+1)^k - x^k}{x^{k-1}} \rightarrow k$; pour $k = 1$, ce terme vaut 1. La somme tend vers $1 + 2 + \dots + (n-1) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Vérification ($n = 3$) : $(x + 1)^3 - x^3 - 3x^2 = 3x + 1$ et $\frac{3x+1}{x} \rightarrow 3 = \frac{3 \times 2}{2}$ ✓.

31 Corrigés : formes indéterminées

■ Corrigé de l'exercice 43

Dans a) à d), numérateur et dénominateur s'annulent au point considéré : forme $\frac{0}{0}$; on factorise par $x - a$ puis on simplifie.

a) $\frac{(x - 4)(x + 1)}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{x + 1}{x + 4} \rightarrow \boxed{\frac{5}{8}}$.

b) Par regroupement : $x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 + 1)$, d'où $\frac{x^2 + 1}{x - 2} \rightarrow \frac{5}{-4} = \boxed{-\frac{5}{4}}$.

c) $2x^3 - x^2 - 1 = (x - 1)(2x^2 + x + 1)$ et $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, d'où $\frac{2x^2 + x + 1}{x - 2} \rightarrow \frac{4}{-1} = \boxed{-4}$.

d) $3x^2 + 5x + 2 = (3x + 2)(x + 1)$ et $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$, d'où $\frac{x + 1}{3x - 2} \rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{-4} = \boxed{-\frac{1}{12}}$.

e) Forme $\infty \times 0$; on réduit au même dénominateur : $\frac{1}{x} \cdot \frac{2 - (x + 2)}{2(x + 2)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-x}{2(x + 2)} = \frac{-1}{2(x + 2)} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{4}}$.

f) Forme $\frac{0}{0}$; près de -1 , $x < 0$, donc $|x| = -x$ et $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$: le quotient vaut $x - 2 \rightarrow \boxed{-3}$.

■ Corrigé de l'exercice 44

Forme $\frac{0}{0}$ à chaque fois ; on multiplie haut et bas par l'expression conjuguée (non nulle près du point).

$$\text{a) } \frac{(x+3)-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+3} \rightarrow \boxed{\frac{1}{6}}. \quad \text{b) } \frac{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}{(3x+1)-4} = \frac{\sqrt{3x+1}+2}{3} \rightarrow \boxed{\frac{4}{3}}.$$

$$\text{c) } \frac{(4+x)-(4-x)}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{d) Double conjugué : } \sqrt{x-1}-2 = \frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2} \text{ et } \sqrt{2x-1}-3 = \frac{2(x-5)}{\sqrt{2x-1}+3};$$

$$\text{le quotient vaut } \frac{\sqrt{2x-1}+3}{2(\sqrt{x-1}+2)}, \text{ de limite } \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

$$\text{e) Conjugué de } \sqrt{x+1}-(x-1): \frac{(x+1)-(x-1)^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+x-1)} = \frac{-x(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+x-1)} = \frac{-x}{\sqrt{x+1}+x-1} \rightarrow \boxed{-\frac{3}{4}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 45

$$\text{a) } \infty - \infty : \text{ même dénominateur, } \frac{x^2(x+1)-x^2(x-1)}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1} \rightarrow \boxed{2} \text{ (terme dominant).}$$

$$\text{b) } \infty \times 0 : \text{ conjugué, } x^2 \cdot \frac{1-(1-\frac{1}{x^2})}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{c) Le dénominateur est un } \infty - \infty. \text{ Pour } x < 0, \sqrt{x^2} = -x : \sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \text{ et } \sqrt{4x^2+x} = -x\sqrt{4+\frac{1}{x}},$$

d'où

$$\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-1\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}-1} \rightarrow \frac{1+3}{2-1} = \boxed{4}.$$

$$\text{d) } \frac{\infty}{\infty} : \text{ on divise par le terme dominant } x\sqrt{x} : \frac{1-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{\sqrt{x}}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{e) } \infty - \infty : \text{ on regroupe } (x-\sqrt{x^2+1})-2\sqrt{x}. \text{ Le premier terme vaut } \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} \rightarrow 0 \text{ et } -2\sqrt{x} \rightarrow -\infty : \boxed{-\infty}.$$

$$\text{f) } \infty - \infty : \text{ pour } x > 0, \sqrt{x^3+1}-x = x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}-1\right), \text{ produit de deux facteurs tendant vers } +\infty : \boxed{+\infty}.$$

■ Corrigé de l'exercice 46

1. Analyse. Si $P(-2) \neq 0$, le quotient tend vers l'infini (dénominateur $\rightarrow 0^+$) ; il faut donc $P(-2) = -8 - 2a + b = 0$, soit $b = 2a + 8$. Alors $P(x) = (x^3 + 8) + a(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 + a)$ et $\frac{P(x)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4 + a}{x + 2}$, sans limite finie si $12 + a \neq 0$ (numérateur $\rightarrow 12 + a$, dénominateur $\rightarrow 0$). Donc $a = -12$ et $b = -16$.

Synthèse. $\frac{x^3 - 12x - 16}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 4)}{x + 2} = x - 4 \rightarrow -6$. $\boxed{a = -12, b = -16}$, limite $\boxed{-6}$.

2. a) $x^2 - (m + 1)x + m = (x - 1)(x - m)$ et $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$: pour $x \notin \{1, 3\}$, $f_m(x) = \frac{x - m}{x - 3}$,

d'où $\lim_{x \rightarrow 1} f_m(x) = \frac{1 - m}{-2} = \frac{m - 1}{2}$ pour tout m .

- b) En 3, le numérateur $x - m$ tend vers $3 - m$. Si $m = 3$, $f_3(x) = 1$ sur son domaine : limite $\boxed{1}$. Si $m \neq 3$, les limites à droite et à gauche sont infinies, de signes contraires ($x = 3$ est asymptote verticale) : la limite est finie si et seulement si $\boxed{m = 3}$.

3. Si $a \neq -1$: on divise par x^2 : $g_a(x) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + a} \rightarrow \frac{1}{1 + a}$.

Si $a = -1$: le dénominateur est un $\infty - \infty$: $\sqrt{x^4 + 1} - x^2 = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2} \rightarrow 0^+$, donc $g_{-1}(x) = (x^2 + 1)(\sqrt{x^4 + 1} + x^2) \rightarrow \boxed{+\infty}$.

■ Corrigé de l'exercice 47

- a) On écrit $9 = 2 + 3 + 4$ et l'on découpe en trois quotients ; pour $c \in \{3, 8, 15\}$ et $k = \sqrt{1 + c}$ ($k = 2, 3, 4$) :

$$\frac{\sqrt{x + c} - k}{x - 1} = \frac{(x + c) - k^2}{(x - 1)(\sqrt{x + c} + k)} = \frac{1}{\sqrt{x + c} + k} \rightarrow \frac{1}{2k}, \quad \text{d'où la limite } \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{13}{24}}.$$

- b) On sépare : $\frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 2}}{x^2 - 9} + \frac{x - 3}{x^2 - 9}$. Le second quotient vaut $\frac{1}{x + 3} \rightarrow \frac{1}{6}$; pour le premier, conjugué :

$$\frac{(x + 1) - (2x - 2)}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 2})} = \frac{-1}{(x + 3)(\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 2})} \rightarrow -\frac{1}{6 \times 4} = -\frac{1}{24}.$$

Limite : $-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

- c) $\infty - \infty$: même dénominateur, puis conjugué :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1 + x}} = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x\sqrt{1 + x}} = \frac{x}{x\sqrt{1 + x}(\sqrt{1 + x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}(\sqrt{1 + x} + 1)} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

- d) Pour $x \geq -1$, $x \neq 0$: $\sqrt{x^2(1 + x)} = |x|\sqrt{1 + x}$, donc

$$\frac{\sqrt{x^2 + x^3} - |x|}{x^2} = \frac{|x|(\sqrt{1 + x} - 1)}{x^2} = \frac{|x|}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x} + 1} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}.$$

À droite : $\boxed{\frac{1}{2}}$; à gauche : $\boxed{-\frac{1}{2}}$: **pas de limite en 0** (le $|x|$ caché sous la racine change tout).

■ Corrigé de l'exercice 48

1. Analyse. Par l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+ax} - \sqrt{1+bx}}{x} = \frac{a-b}{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx}} \rightarrow \frac{a-b}{2}; \quad \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+bx} - 1} = \frac{ax}{\sqrt{1+ax} + 1} \cdot \frac{\sqrt{1+bx} + 1}{bx} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Les conditions s'écrivent $a - b = 2$ et $a = 3b$, d'où $2b = 2$: $\boxed{a = 3, b = 1}$, qui conviennent (synthèse : mêmes calculs).

2. $\frac{a}{x-1} - \frac{b}{(x-1)(x+5)} = \frac{a(x+5) - b}{(x-1)(x+5)}$. Si $6a - b \neq 0$, le numérateur tend vers $6a - b \neq 0$ et le dénominateur vers 0 : pas de limite finie. Donc $b = 6a$, et l'expression vaut $\frac{a(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{a}{x+5} \rightarrow \frac{a}{6}$. Ainsi $\frac{a}{6} = -\frac{1}{3}$: $\boxed{a = -2, b = -12}$.

3. La première limite vaut $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (remplacement) : $\frac{a}{b} = 9$. Pour la seconde (forme $\infty \times 0$), conjugué :

$$x \left(\sqrt{\frac{x+a}{x+b}} - 1 \right) = x \cdot \frac{\frac{x+a}{x+b} - 1}{\sqrt{\frac{x+a}{x+b}} + 1} = \frac{x}{x+b} \cdot \frac{a-b}{\sqrt{\frac{x+a}{x+b}} + 1} \rightarrow 1 \times \frac{a-b}{2}.$$

Donc $a - b = 8$ et $a = 9b$: $8b = 8$, $\boxed{a = 9, b = 1}$.

32 Corrigés : trigonométrie

■ Corrigé de l'exercice 49

1. On isole une limite de référence, puis on étudie le facteur restant.

a) $\frac{\sin 3x}{x^2} = \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{x}$: le premier facteur tend vers 1 ($X = 3x \rightarrow 0$) et $\frac{3}{x} \rightarrow \pm\infty$ en $0^\pm$: limites $\boxed{+\infty}$ en 0^+ et $\boxed{-\infty}$ en 0^- .

b) $\frac{\tan 2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \times \frac{\tan 2x}{2x}$ (car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$) $\rightarrow 0 \times 1 = \boxed{0}$.

c) $\frac{x^2}{1-\cos 3x} = \frac{1}{9} \times \frac{(3x)^2}{1-\cos 3x} \rightarrow \frac{1}{9} \times 2 = \boxed{\frac{2}{9}}$ (l'inverse de $\frac{1-\cos X}{X^2}$ tend vers 2).

d) $\frac{\sin 4x}{|x|} = 4 \times \frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{x}{|x|}$, avec $\frac{x}{|x|} = 1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$: $\boxed{4 \text{ en } 0^+, -4 \text{ en } 0^-}$: pas de limite en 0.

e) $\frac{1-\cos x}{x|x|} = \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{x}{|x|}$: $\boxed{\frac{1}{2} \text{ en } 0^+, -\frac{1}{2} \text{ en } 0^-}$. f) $\frac{1-\cos x}{x^4} = \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$.

La droite $x = 0$ est asymptote seulement en a) et f) (limites infinies) ; en d) et e), les limites latérales sont finies : la courbe fait un saut.

2. $\frac{1-\cos x}{x^n} = \frac{1-\cos x}{x^2} \times x^{2-n}$: pour $n = 1$, $x^{2-n} = x \rightarrow 0$; pour $n \geq 3$, $x^{2-n} = \frac{1}{x^{n-2}} \rightarrow +\infty$ en 0^+ .
 $\frac{\sin x}{x^n} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$, et pour $n \geq 2$, x^{n-1} tend vers 0 avec le signe de x si n est pair, positif si n est

impair :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^n} = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ \frac{1}{2} & (n = 2) \\ +\infty & (n \geq 3) \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^n} = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ +\infty & (n \geq 2) \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^n} = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ +\infty & (n \geq 3 \text{ impair}) \\ -\infty & (n \text{ pair}) \end{cases}$$

■ Corrigé de l'exercice 50

1. a) $X = x - \pi \rightarrow 0$: $\sin 4x = \sin(4\pi + 4X) = \sin 4X$ et $\sin 3x = \sin(3\pi + 3X) = -\sin 3X$, donc $\frac{\sin 4x}{\sin 3x} = -\frac{4}{3} \times \frac{\sin 4X}{4X} \times \frac{3X}{\sin 3X} \rightarrow \boxed{-\frac{4}{3}}$.

b) $X = x + \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$: $\sin x = \sin\left(X - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos X$ et $2x + \pi = 2X$: $\frac{1 + \sin x}{(2x + \pi)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos X}{X^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{8}}$.

c) $X = x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 0$ et $t = \tan X$: $\tan x = \frac{\sqrt{3} + t}{1 - \sqrt{3}t}$, donc $\tan x - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + t - \sqrt{3} + 3t}{1 - \sqrt{3}t} = \frac{4t}{1 - \sqrt{3}t}$, et $\frac{\tan x - \sqrt{3}}{3x - \pi} = \frac{4}{3} \times \frac{\tan X}{X} \times \frac{1}{1 - \sqrt{3} \tan X} \rightarrow \boxed{\frac{4}{3}}$.

2. Avec $X = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0^+$ (donc $x = \frac{1}{X^2}$) : $x \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1 - \cos X}{X^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$.

h est définie pour $x^2 + x \geq 0$, $x \neq 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$, et $\sqrt{x^2 + x} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

Avec $X = \frac{1}{x}$: en $+\infty$, $|x| = x$ et $h(x) = \sqrt{1 + X} \times \frac{\sin 2X}{X} \rightarrow 1 \times 2 = \boxed{2}$; en $-\infty$, $|x| = -x$ et $h(x) = -\sqrt{1 + X} \times \frac{\sin 2X}{X} \rightarrow \boxed{-2}$.

Interprétation : la droite $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la première courbe ; la courbe de h a deux asymptotes horizontales, $y = 2$ en $+\infty$ et $y = -2$ en $-\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ donne $\sin\left(x + x^2\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \sin \frac{x^2}{2}$, donc, avec $X = \frac{x^2}{2} \rightarrow 0$ ($X \neq 0$) :

$$\frac{\sin\left(x + x^2\right) - \sin x}{x^2} = \cos\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \times \frac{\sin X}{X} \rightarrow \cos 0 \times 1 = \boxed{1}.$$

De même $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$; avec $Y = x + \frac{x^2}{2} \rightarrow 0$ (et $Y \neq 0$ pour $0 < |x| < 2$) :

$$\frac{\cos\left(x + x^2\right) - \cos x}{x^3} = -2 \times \frac{\sin Y}{Y} \times \frac{Y}{X} \times \frac{\sin X}{X} \times \frac{X}{x^2} \rightarrow -2 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{-1} \quad \left(\frac{Y}{x} = 1 + \frac{x}{2}\right).$$

2. $\sin(a + x) + \sin(a - x) = (\sin a \cos x + \cos a \sin x) + (\sin a \cos x - \cos a \sin x) = 2 \sin a \cos x$. Donc $\frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2 \sin a}{x^2} = -2 \sin a \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \boxed{-\sin a}$. De même $\cos(a + x) + \cos(a - x) = 2 \cos a \cos x$, d'où la limite $\boxed{-\cos a}$.

3. a) Avec $t = \tan x$ ($|x| < \frac{\pi}{4}$) : $\tan 2x - 2t = \frac{2t}{1-t^2} - 2t = \frac{2t-2t+2t^3}{1-t^2} = \frac{2t^3}{1-t^2}$, donc $\frac{\tan 2x - 2 \tan x}{x^3} = \frac{2}{1-\tan^2 x} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 \rightarrow \boxed{2}$.

b) $\tan x - \sin x = \tan x - \tan x \cos x = \tan x (1 - \cos x)$, donc $\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$.

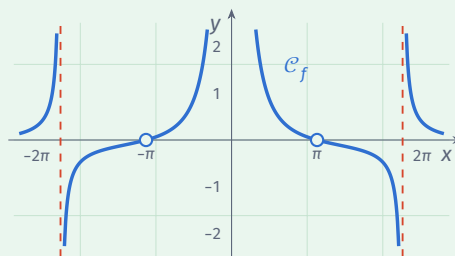
Ce dénominateur n'est pas nul pour $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$ et sa limite n'est pas nulle : par quotient, $\frac{\tan 2x - 2 \tan x}{\tan x - \sin x} \rightarrow \frac{2}{1/2} = \boxed{4}$.

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $x \sin x = 0 \iff x = 0$ ou $\sin x = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = \frac{1+\cos x}{(-x)(-\sin x)} = f(x)$: f est paire. Avec $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ et $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, où $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ sur D_f (sinon $\sin x = 0$) : $f(x) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{x \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{x \tan \frac{x}{2}}$.

2. En 0 : $x \tan \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \times \frac{\tan(x/2)}{x/2}$ est > 0 pour $0 < |x| < \pi$ et tend vers 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, la droite $x = 0$ est asymptote.

En π : $X = x - \pi \rightarrow 0$, $\tan \frac{x}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{X}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(X/2)}$, donc $f(x) = -\frac{\tan(X/2)}{\pi + X} \rightarrow 0$: **pas d'asymptote** en π (point « trou » $(\pi, 0)$), bien que $x \sin x$ s'annule. Et $\frac{f(x)}{x - \pi} = -\frac{1}{2(\pi + X)} \times \frac{\tan(X/2)}{X/2} \rightarrow -\frac{1}{2\pi}$.



3. $X = x - 2\pi$: $\tan \frac{x}{2} = \tan\left(\pi + \frac{X}{2}\right) = \tan \frac{X}{2}$, donc $f(x) = \frac{1}{(2\pi + X) \tan(X/2)}$; $\tan \frac{X}{2}$ tend vers 0 avec le signe de X : $\lim_{x \rightarrow 2\pi^+} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f = -\infty$. De même, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, en $2k\pi$: $f(x) = \frac{1}{(2k\pi + X) \tan(X/2)}$ a des limites latérales infinies ; en $(2k+1)\pi$: $f(x) = -\frac{\tan(X/2)}{(2k+1)\pi + X} \rightarrow 0$. Bilan : $x = k\pi$ **est asymptote si et seulement si k est pair** (y compris $k = 0$).

4. $\cos\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$: $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2k\pi + \pi/2} > 0$, $f\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2k\pi - \pi/2} < 0$.
Raisonnons par l'absurde. Si $f \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, il existe B tel que $f(x) > 0$ pour $x > B$; or, pour k assez grand, $2k\pi - \frac{\pi}{2} > B$ et $f\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) < 0$: contradiction. De même $f \rightarrow -\infty$ est exclu (valeurs > 0). Si $f \rightarrow \ell$ réel, il existe B tel que $f(x) < \ell + 1$ pour $x > B$; or, pour $2k\pi > B$, $\lim_{x \rightarrow 2k\pi^+} f(x) = +\infty$ fournit des $x > B$ avec $f(x) > \ell + 1$: contradiction. **f n'a pas de limite en $+\infty$ (ni en $-\infty$, par parité).**

■ Corrigé de l'exercice 53

1. Principe. Si $X = u(x) \rightarrow 0$ avec $X \neq 0$, la définition de $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$ donne, pour $\varepsilon > 0$, un $\eta > 0$ tel que $0 < |X| < \eta \Rightarrow \left|\frac{\sin X}{X} - 1\right| < \varepsilon$; puis un $\alpha > 0$ tel que $0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow 0 < |u(x)| < \eta$: donc $\frac{\sin u(x)}{u(x)} \rightarrow 1$; de même pour $\tan$ et $1 - \cos$.

a) $u = \sin x \rightarrow 0$, $u \neq 0$ pour $0 < |x| < \pi$: $\frac{\tan(\sin x)}{x} = \frac{\tan u}{u} \times \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

b) $u = 1 - \cos x \rightarrow 0$, $u \neq 0$ pour $0 < |x| < 2\pi$: $\frac{1 - \cos u}{x^4} = \frac{1 - \cos u}{u^2} \times \left(\frac{1 - \cos u}{x^2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

c) $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$. Avec $u = \pi(\sqrt{1+x} - 1) = \frac{\pi x}{\sqrt{1+x} + 1} \rightarrow 0$ ($u \neq 0$ si $x \neq 0$) : $\sin(\pi\sqrt{1+x}) = \sin(\pi + u) = -\sin u$, donc $\frac{\sin(\pi\sqrt{1+x})}{x} = -\frac{\sin u}{u} \times \frac{\pi}{\sqrt{1+x} + 1} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

d) Pour x voisin de 1, $x \neq 1$: $u = \pi(x^2 - 1)$ et $v = \pi(x - 1)$ tendent vers 0 sans s'annuler ; $\sin(\pi x^2) = \sin(\pi + u) = -\sin u$ et $\sin(\pi x) = \sin(\pi + v) = -\sin v$, d'où $\frac{\sin(\pi x^2)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin u}{u} \times \frac{v}{\sin v} \times \frac{u}{v}$ avec $\frac{u}{v} = x + 1 \rightarrow 2$: $\frac{1}{2}$.

2. $m + \cos x \geq m - 1 \geq 0$, donc $\sqrt{m + \cos x}$ existe pour tout x , et $(x - \pi)^2 \neq 0 \iff x \neq \pi$: φ_m est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. Quand $x \rightarrow \pi$, $\cos x \rightarrow -1$, le numérateur tend vers $\sqrt{m-1} - 1$ et le dénominateur vers 0^+ .

• Si $1 \leq m < 2$: $\sqrt{m-1} - 1 < 0$, donc $\boxed{\varphi_m \rightarrow -\infty}$. • Si $m > 2$: $\boxed{\varphi_m \rightarrow +\infty}$.

• Si $m = 2$ (forme $\frac{0}{0}$) : quantité conjuguée et $X = x - \pi$, $1 + \cos x = 1 - \cos X$: $\varphi_2(x) = \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2 (\sqrt{2 + \cos x} + 1)} = \frac{1 - \cos X}{X^2} \times \frac{1}{\sqrt{2 + \cos x} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. a) *Récurrence. Initialisation* : pour $0 < |x| < \pi$, $\sin x \neq 0$ et $|\sin x| \leq 1$. *Hérédité* : si $0 < |s_n(x)| \leq 1$, alors $s_n(x) \in]-\pi, \pi[$ et $s_n(x) \neq 0$, donc $s_{n+1}(x) = \sin(s_n(x)) \neq 0$, et $|s_{n+1}(x)| \leq 1$. *Conclusion* : $0 < |s_n(x)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.

b) *Initialisation* : $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. *Hérédité* : si $\frac{s_n(x)}{x} \rightarrow 1$, alors $s_n(x) = x \times \frac{s_n(x)}{x} \rightarrow 0$, avec $s_n(x) \neq 0$

(question a) ; avec $X = s_n(x)$: $\frac{s_{n+1}(x)}{x} = \frac{\sin X}{X} \times \frac{s_n(x)}{x} \longrightarrow 1$. *Conclusion* : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s_n(x)}{x} = 1}$ pour tout n .

Puis $\frac{1 - \cos(s_n(x))}{x^2} = \frac{1 - \cos X}{X^2} \times \left(\frac{s_n(x)}{x}\right)^2 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$.

2. a) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ donne $\cos(\cos x) - \cos 1 = 2 \sin \frac{1 + \cos x}{2} \sin u$, avec $u = \frac{1 - \cos x}{2} \rightarrow 0$, $u \neq 0$ pour $0 < |x| < 2\pi$. Comme $\frac{u}{x^2} \rightarrow \frac{1}{4}$ et $\sin \frac{1 + \cos x}{2} \rightarrow \sin 1$: $\frac{\cos(\cos x) - \cos 1}{x^2} = 2 \sin \frac{1 + \cos x}{2} \times \frac{\sin u}{u} \times \frac{u}{x^2} \longrightarrow 2 \sin 1 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\sin 1}{2}}$.

b) *Récurrence P(n)* : $c_n(x)$ et ℓ_n sont dans $[0, 1]$ et distincts. Pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, $c_1(x) = \cos x \in]0, 1[$ et $\ell_1 = 1$. Si $P(n)$ est vraie, $c_n(x)$ et ℓ_n sont deux réels distincts de $[0, 1] \subset [0, \pi]$, où $\cos$ est strictement décroissante, donc $c_{n+1}(x) = \cos c_n(x) \neq \cos \ell_n = \ell_{n+1}$, et ces deux réels sont dans $[\cos 1, 1] \subset [0, 1]$.

Récurrence Q(n) : $\frac{c_n(x) - \ell_n}{x^2} \rightarrow L_n$ réel. $Q(1)$: $\frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2} = L_1$. Si $Q(n)$ est vraie, posons $u = \frac{c_n(x) - \ell_n}{2}$: $u = \frac{x^2}{2} \times \frac{c_n(x) - \ell_n}{x^2} \rightarrow 0$, $u \neq 0$ (d'après $P(n)$) et $\frac{u}{x^2} \rightarrow \frac{L_n}{2}$. Alors

$$\frac{c_{n+1}(x) - \ell_{n+1}}{x^2} = \frac{\cos c_n(x) - \cos \ell_n}{x^2} = -2 \sin(\ell_n + u) \times \frac{\sin u}{u} \times \frac{u}{x^2} \longrightarrow -2 \sin \ell_n \times 1 \times \frac{L_n}{2} = \boxed{-L_n \sin \ell_n}.$$

D'où $\boxed{L_2 = \frac{1}{2} \sin 1 \approx 0,421}$ (on retrouve le a) car $\ell_1 = 1$), puis, avec $\ell_2 = \cos 1$:

$$\boxed{L_3 = -\frac{1}{2} \sin 1 \sin(\cos 1) \approx -0,216}.$$

33

Corrigés : comparaison, gendarmes

■ Corrigé de l'exercice 55

a) Pour $x > 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donne $x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$ et $0 < x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$, donc $\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \leq \frac{x+1}{x-1}$. Les deux bornes tendent vers 1 (terme dominant) : par les **gendarmes**,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 1.$$

b) Pour $x > 0$, $x(2 + \sin x) \leq 3x$, donc $x(2 + \sin x) - x^2 \leq 3x - x^2$, qui tend vers $-\infty$: par **comparaison**, $-\infty$.

c) $4 \leq 5 + \sin x \leq 6$, donc $0 < \frac{5+\sin x}{x^2+1} \leq \frac{6}{x^2+1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: par les **gendarmes**, 0 . d) $3 + 2 \cos x \geq 1$, donc $\sqrt{x}(3 + 2 \cos x) \geq \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: par **comparaison**, $+\infty$.

Parité : $x + \sin x = 0 \iff x = 0$ (car $|\sin x| < |x|$ pour $x \neq 0$), donc la fonction du a) est définie sur $\mathbb{R}^*$, symétrique, et $\frac{-x+\sin x}{-x-\sin x} = \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$: **elle est paire**, de limite 1 aussi en $-\infty$. Asymptotes horizontales : $y = 1$ en $\pm\infty$ (a) et $y = 0$ en $\pm\infty$ (c).

■ Corrigé de l'exercice 56

1. $5x - 1 < E(5x) \leq 5x$. Pour $x > 0$ ($2x + 1 > 0$) : $\frac{5x-1}{2x+1} < \frac{E(5x)}{2x+1} \leq \frac{5x}{2x+1}$; pour $x < -\frac{1}{2}$ ($2x + 1 < 0$), les inégalités changent de sens : $\frac{5x}{2x+1} \leq \frac{E(5x)}{2x+1} < \frac{5x-1}{2x+1}$. Les bornes tendent vers $\frac{5}{2}$ en $\pm\infty$: $\frac{5}{2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Pour $0 < x < \pi$, $0 < \sin x < x$, donc $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$, et $\frac{\sin x}{x}$ est paire : c'est vrai pour $0 < |x| < \pi$. Ainsi $E\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$ près de 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} E\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\tan x > x > 0$ et $\frac{\tan x}{x}$ est paire : $\frac{\tan x}{x} > 1$ pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$; comme $\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$, la définition avec $\varepsilon = 1$ fournit $\alpha > 0$ tel que $\frac{\tan x}{x} < 2$ pour $0 < |x| < \alpha$. Donc $E\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$ près de 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} E\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$. Pour $x > \frac{1}{\pi}$, $0 < \frac{1}{x} < \pi$, donc $0 < \sin \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ et $0 < x \sin \frac{1}{x} < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} E\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$.

À retenir : si $u(x) \rightarrow 1$, $E(u(x))$ tend vers 0 quand $u(x) < 1$ et vers 1 quand $1 \leq u(x) < 2$: tout dépend du **côté**, et l'encadrement de $u(x)$ décide.

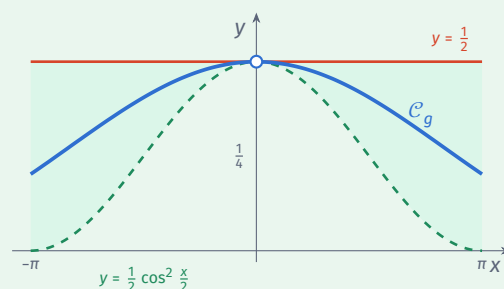
3. Pour $x \neq 0$: $\frac{1}{x^2} - 1 < E\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Si $x > 0$: $x E\left(\frac{1}{x^2}\right) > \frac{1}{x} - x \rightarrow +\infty$; si $x < 0$, on multiplie par $x < 0$: $x E\left(\frac{1}{x^2}\right) < \frac{1}{x} - x \rightarrow -\infty$: $+\infty$ en 0^+ , $-\infty$ en 0^- (comparaison). Enfin $\sqrt{x} E\left(\frac{1}{x}\right) > \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: $+\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. $(x+1)(x^2-x+3) = x^3 - x^2 + 3x + x^2 - x + 3 = x^3 + 2x + 3$. Si $|x+1| < 1$, alors $-2 < x < 0$, donc $x^2 < 4$, $|x| < 2$ et $|x^2 - x + 3| \leq x^2 + |x| + 3 < 9$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{9}\right)$: si $0 < |x+1| < \alpha$, alors $|x^3 + 2x - (-3)| = |x+1| |x^2 - x + 3| < 9\alpha \leq \varepsilon$. D'après la définition, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x) = -3$.
2. $\frac{x+2}{2x-1} - \frac{4}{3} = \frac{3x+6-8x+4}{3(2x-1)} = \frac{-5(x-2)}{3(2x-1)}$. Si $|x-2| < \frac{1}{2}$, alors $x > \frac{3}{2}$, $2x-1 > 2$ et $\left|\frac{x+2}{2x-1} - \frac{4}{3}\right| < \frac{5}{6}|x-2|$. Avec $\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{6\varepsilon}{5}\right)$, $0 < |x-2| < \alpha$ entraîne $\left|\frac{x+2}{2x-1} - \frac{4}{3}\right| < \frac{5}{6}\alpha \leq \varepsilon$: la limite vaut $\frac{4}{3}$.
3. a) Avec $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < 1$ pour $0 < |x-a| < \alpha$; alors $|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$: $M = 1 + |\ell|$ convient.
 b) Par l'absurde, si $\frac{\cos x}{x} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ en 0, le a) donne α, M avec $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq M$ pour $0 < |x| < \alpha$. Or $\cos x \geq \frac{1}{2}$ pour $|x| \leq \frac{\pi}{3}$, donc $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \geq \frac{1}{2|x|}$; pour $0 < x < \min\left(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2M}\right)$, on obtient $M \geq \frac{1}{2x} > M$: contradiction. Pas de limite infinie non plus : $\frac{\cos x}{x} \rightarrow +\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^- (car $\cos x \rightarrow 1$) ; **pas de limite en 0**, mais $x = 0$ est asymptote.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. a) Pour $0 < u < \frac{\pi}{2}$: $\sin u < u$ et $u < \frac{\sin u}{\cos u}$ donne $u \cos u < \sin u$; tout est positif, donc $u^2 \cos^2 u < \sin^2 u < u^2$. Avec $u = \frac{|x|}{2}$ ($0 < |x| < \pi$) : $\frac{x^2}{4} \cos^2 \frac{x}{2} < \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$. On multiplie par $\frac{2}{x^2}$ et l'on utilise $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$: $\frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2} < g(x) < \frac{1}{2}$.



- b) $\cos^2 \frac{x}{2} \rightarrow 1$, donc la borne inférieure tend vers $\frac{1}{2}$: par les gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$. Sur la figure, la courbe de g (trou en $(0, \frac{1}{2})$) est coincée dans la zone colorée.

2. D'après 1, $0 < \frac{1}{2} - g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{8}$ (car $|\sin v| < |v|$ pour $v \neq 0$) : $\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{x^2}{8}$. Il suffit que $\frac{x^2}{8} \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire $|x| \leq \sqrt{0,08} \approx 0,28$: $\alpha = \frac{1}{4}$ convient ($\frac{x^2}{8} < \frac{1}{128} < 10^{-2}$).

■ Corrigé de l'exercice 59

1. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x < x < \tan x$, d'où $0 < x - \sin x < \tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x)$ (car $\sin x = \tan x \cos x$). Donc $0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \tan x \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$: limite 0 en 0^+ par les gendarmes ; la fonction $\frac{x - \sin x}{x^2}$ est impaire, donc limite $-0 = 0$ en 0^- : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$. Puis $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x} \rightarrow 0 \times 1 = 0$: la forme $\infty - \infty$ est levée.
2. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $0 < \tan x - x < \tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x)$, donc $\frac{\tan x - x}{x^2} \rightarrow 0$ (gendarmes et imparité), et $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{\tan x - x}{x^2} \times \frac{x}{\tan x} \rightarrow 0$.

3. $X = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 0, X \neq 0 : \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = \frac{1}{\tan X}$, donc $\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} = -\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{\tan X}\right) \rightarrow 0$ (question 2). *Interprétation* : près de leur asymptote commune $x = \frac{\pi}{2}$, l'écart vertical entre la courbe de $\tan$ et l'hyperbole $y = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ tend vers 0 : les deux courbes se confondent.

4. $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2(1-\cos x)}$ (car $2(1 - \cos x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$). D'après l'exercice 58, $x^2 \cos^2 \frac{x}{2} < 4 \sin^2 \frac{x}{2} < x^2$, donc $0 < x^2 - 4 \sin^2 \frac{x}{2} < x^2 \sin^2 \frac{x}{2}$; en divisant par $x^2(1 - \cos x) = 2x^2 \sin^2 \frac{x}{2} > 0$, on obtient l'encadrement demandé. Enfin $\frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{1-\cos x} - 2 \right) = x \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$, dont la valeur absolue est $< \frac{|x|}{2}$: limite 0.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$. Pour $x > 0 : f(x) \geq \frac{x}{3}$. Soit $A > 0$ et $B = 3A$: si $x > B$, $f(x) \geq \frac{x}{3} > A$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Pour $x < 0 : \frac{1}{2+\sin x} \geq \frac{1}{3}$ et $x < 0$, donc $f(x) \leq \frac{x}{3} \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour $x \geq 0, 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$ donne $0 \leq g(x) \leq 2x$: $\mathcal{C}_g$ reste entre l'axe des abscisses et la droite $y = 2x$, qu'elle touche alternativement.

b) $g\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 4k\pi + \pi, g\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Par l'absurde : si $g \rightarrow +\infty$, il existe B tel que $g(x) > 1$ pour $x > B$, ce que contredit $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} > B$; $g \rightarrow -\infty$ est impossible car $g \geq 0$; si $g \rightarrow \ell$ réel, il existe B tel que $g(x) < \ell + 1$ pour $x > B$, ce que contredit $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ avec k assez grand ($4k\pi + \pi > \ell + 1$). g n'a pas de limite en $+\infty$.

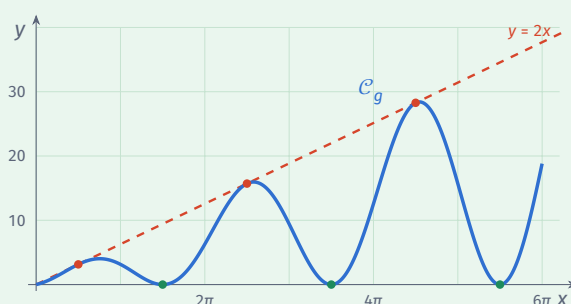
L'encadrement $0 \leq g(x) \leq 2x$ ne permet pas de conclure : les deux « gendarmes » n'ont pas la même limite (0 et $+\infty$).

3. $x^2(1 + \sin x) \geq 0$, donc $h(x) \geq x \rightarrow +\infty$: par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Pourtant $x^2(1 + \sin x)$

vaut 0 en $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $2\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2$ en $2k\pi + \frac{\pi}{2}$: comme au 2, elle n'a pas de limite. Le terme x , bien plus petit, suffit à imposer la limite.

4. $k(n) = 0, k\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$. Comme au 2 : $k \geq 0$ exclut $-\infty$, les zéros aux entiers excluent $+\infty$, et les valeurs $\frac{n}{2} + \frac{1}{4}$ (non majorées) excluent une limite finie : **pas de limite**. Mais $0 \leq \frac{k(x)}{x^2} = \frac{x-E(x)}{x} <$

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x^2} = 0.$$



34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Pour $a = 1, 2, 3, 4$, les $b \geq 1$ tels que $b^2 \leq 25 - a^2$ sont au nombre de 4, 4, 4, 3 (et aucun pour $a \geq 5$) : $N(25) = 15$. Si $(u, v) \in C_{a,b}$, alors $0 \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq b$, donc $u^2 + v^2 \leq a^2 + b^2 \leq x$: $C_{a,b} \subset \mathcal{Q}_{\sqrt{x}}$. Les $N(x)$ carrés, d'aire 1, ont des intérieurs disjoints et sont contenus dans $\mathcal{Q}_{\sqrt{x}}$:

$$N(x) \leq \frac{\pi x}{4}.$$

2. $a - 1 = E(u) \leq u < E(u) + 1 = a$, donc $u \in [a - 1, a]$; de même pour v : $(u, v) \in C_{a,b}$, avec $a, b \geq 1$. Comme $2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = (u - v)^2 \geq 0$, on a $u + v \leq \sqrt{2}r$ où $r = \sqrt{u^2 + v^2} \leq \rho$, donc

$$a^2 + b^2 \leq (u + 1)^2 + (v + 1)^2 = r^2 + 2(u + v) + 2 \leq (r + \sqrt{2})^2 \leq (\rho + \sqrt{2})^2 = x.$$

Ainsi (a, b) est compté par $N(x)$: le quart de disque $\mathcal{Q}_\rho$ est contenu dans la réunion des $N(x)$

carrés, d'où $\frac{\pi}{4}(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 \leq N(x)$.

3. En divisant par x : $\frac{\pi}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2 \leq \frac{N(x)}{x} \leq \frac{\pi}{4}$, et $\sqrt{\frac{2}{x}} \rightarrow 0$: par les gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{N(x)}{x} = \frac{\pi}{4}$.

De plus $0 \leq \frac{\pi x}{4} - N(x) \leq \frac{\pi}{4}\left(x - (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2\right) = \frac{\pi}{4}(2\sqrt{2}\sqrt{x} - 2) < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{x}$. Donc $\left|\frac{\sqrt{x}}{x}(N(x) - \frac{\pi x}{4})\right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{x}} \rightarrow 0$: limite 0 : l'écart entre $N(x)$ et $\frac{\pi x}{4}$ reste inférieur à un multiple de $\sqrt{x}$.

4. Les points entiers du disque sont : l'origine ; les points des axes $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$ avec $1 \leq a \leq E(\sqrt{x})$, au nombre de $4E(\sqrt{x})$; les autres, qui se répartissent par les symétries $(a, b) \mapsto (\pm a, \pm b)$ en quatre quadrants contenant chacun $N(x)$ points. D'où $M(x) = 4N(x) + 4E(\sqrt{x}) + 1$ et

$M(25) = 60 + 20 + 1 = 81$. Comme $0 \leq \frac{E(\sqrt{x})}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{x} = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$ (Gauss : compter les points entiers donne π).

■ Corrigé de l'exercice 62

1. $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ et $2\sqrt{k} < \sqrt{k+1} + \sqrt{k} < 2\sqrt{k+1}$, d'où l'encadrement. La majoration donne $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$; en sommant de $k = 1$ à n (somme télescopique) : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$. La minoration écrite au rang $k - 1$ ($k \geq 2$) donne $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$; en sommant de $k = 2$ à n : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + 2(\sqrt{n} - 1) = 2\sqrt{n} - 1$ (égalité si $n = 1$).

2. Soit $n = E(x) \geq 1$: $n \leq x < n + 1$. Donc $S(x) \leq 2\sqrt{n} - 1 \leq 2\sqrt{x} - 1$ et $S(x) > 2\sqrt{n+1} - 2 > 2\sqrt{x} - 2$: $-2 < S(x) - 2\sqrt{x} \leq -1$.

3. $S(x) > 2\sqrt{x} - 2$ donne $S(x) \rightarrow +\infty$. $\frac{S(x)}{\sqrt{x}} = 2 + \frac{S(x) - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ avec $\left|\frac{S(x) - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| < \frac{2}{\sqrt{x}}$: $\frac{S(x)}{\sqrt{x}} \rightarrow 2$, donc aussi

$\frac{S(4x)}{\sqrt{4x}} \rightarrow 2$ ($X = 4x$). Alors $\frac{S(x)}{S(4x)} = \frac{S(x)/\sqrt{x}}{S(4x)/\sqrt{4x}} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, et $S(x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \rightarrow 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

4. Si $n \leq 2550$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{2550} - 1 < 2 \times 50,5 - 1 = 100$ (car $50,5^2 = 2550,25$). Si $n = 2601$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{2602} - 2 > 2 \times 51 - 2 = 100$. Le plus petit entier cherché est donc **entre 2551 et 2601** (un calcul sur machine donne 2574).

■ Corrigé de l'exercice 63

1. $\frac{\pi E(x)}{x} = \frac{\pi(x-t)}{x} = \pi - \frac{\pi t}{x}$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$: $g(x) = x \sin \frac{\pi t}{x}$. Ensuite, comme $t = 0$ en n et $t = \frac{1}{2}$ en $n + \frac{1}{2}$: $g(n) = 0$ et $g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2n+1}$.
2. a) Pour $u = 0$, tout est nul. Pour $0 < u < \frac{\pi}{2}$: $\sin u < u < \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$, donc $u \cos u < \sin u < u$. Puis $0 \leq u - \sin u \leq u - u \cos u = u(1 - \cos u) \leq u \times \frac{u^2}{2} = \frac{u^3}{2}$.
b) Pour $x \geq 2$, $u = \frac{\pi t}{x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car $t < 1$). En multipliant par $x > 0$: $0 \leq x(u - \sin u) = \pi t - g(x) \leq \frac{xu^3}{2} = \frac{\pi^3 t^3}{2x^2} \leq \frac{\pi^3}{2x^2}$. Ainsi $g(x) \leq \pi t < \pi$, et $g(x) = x \sin u \geq 0$: $0 \leq g(x) < \pi$; enfin $|g(x) - \pi(x - E(x))| \leq \frac{\pi^3}{2x^2} \rightarrow 0$.
3. g est bornée : pas de limite infinie. Par l'absurde, si $g \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, il existe $B \geq 2$ tel que $|g(x) - \ell| < \frac{\pi}{8}$ pour $x > B$. Prenons un entier $n > \max(B, 2\pi)$, de sorte que $\frac{\pi^3}{2n^2} < \frac{\pi^3}{8\pi^2} = \frac{\pi}{8}$. En $x = n$: $|\ell| < \frac{\pi}{8}$. En $x = n + \frac{1}{2}$: $g(x) \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2x^2} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$, donc $\frac{3\pi}{8} < g(x) < \ell + \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$: contradiction. **g n'a pas de limite en $+\infty$** : elle « hésite » indéfiniment entre 0 (aux entiers) et presque $\frac{\pi}{2}$ (aux demi-entiers), comme $\pi(x - E(x))$.
4. Avec $t' = x^2 - E(x^2) \in [0, 1[$: $x \sin \frac{\pi E(x^2)}{x^2} = x \sin \frac{\pi t'}{x^2}$, et pour $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\pi t'}{x^2} < \pi$, donc $0 \leq x \sin \frac{\pi t'}{x^2} \leq x \times \frac{\pi t'}{x^2} < \frac{\pi}{x} \rightarrow 0$: **limite 0** (gendarmes).

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $-\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$, $0,15 = \frac{3}{20}$, $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $T\left(-\frac{10}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $T(0,15) = \frac{1}{20}$, $T(1 + \sqrt{2}) = 0$. Si x est irrationnel, $x + 1$ et $-x$ aussi, et tout vaut 0. Si $x = \frac{p}{q}$ est irréductible, $x + 1 = \frac{p+q}{q}$ et $-x = -\frac{p}{q}$ le sont aussi (un diviseur commun à $p+q$ et q divise p) : $T(x+1) = T(-x) = \frac{1}{q} = T(x)$.
2. Pour $q \in \{1, \dots, N\}$ fixé, $\frac{p}{q} \in [a-1, a+1] \iff p \in [q(a-1), q(a+1)]$, intervalle de longueur $2q$, qui contient au plus $2q + 1$ entiers. Donc F est fini et $\text{card}(F) \leq \sum_{q=1}^N (2q + 1) = N^2 + 2N$.
3. a) $F \setminus \{a\}$ est fini : s'il est vide, $a = 1$ convient ; sinon $\alpha = \min\left(1, \min_{r \in F \setminus \{a\}} |r - a|\right) > 0$ (plus petit d'un nombre fini de réels > 0) convient.
b) Soit $0 < |x - a| < \alpha \leq 1$: $x \in [a-1, a+1]$ et $x \notin F$. Si x est irrationnel, $T(x) = 0$. Si $x = \frac{p}{q}$ (irréductible), $x \notin F$ impose $q \geq N + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $T(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon$. Ainsi $0 \leq T(x) < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ (donc pour tout $\varepsilon > 0$) : par définition, $\lim_{x \rightarrow a^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} T(x) = 0$ pour tout réel a .
c) T est définie en a : elle admet une limite en a si et seulement si ses limites latérales sont égales à $T(a)$, soit $T(a) = 0$: **a irrationnel**. (En un rationnel, la courbe a un point isolé au-dessus de sa « limite » 0.)

4. $T(n) = 1$ et $T(n + \sqrt{2}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $T \rightarrow \ell$ en $+\infty$, pour $x > B$ on aurait $|T(x) - \ell| < \frac{1}{2}$; avec un entier $n > B$: $1 \leq |1 - \ell| + |\ell - 0| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, absurde ; et $0 \leq T \leq 1$ exclut une limite infinie. De même, $\frac{T(x)}{x}$ vaut 1 en $\frac{1}{n}$ et 0 en $\frac{\sqrt{2}}{n}$, points aussi proches de 0 qu'on veut : elle n'a pas de limite finie, ni $+\infty$ (valeurs nulles), ni $-\infty$ (valeurs ≥ 0).

■ Corrigé de l'exercice 65

1. Ω est sur la médiatrice de $[OA]$: $x_\Omega = \frac{1}{2}$. Puis $\Omega O^2 = \Omega M^2$ s'écrit $\frac{1}{4} + y^2 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + (\sin x - y)^2 = \frac{5}{4} - \cos x - 2y \sin x + y^2$, d'où $y = \frac{1 - \cos x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2}$. Et $R^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2}}$, avec $\cos \frac{x}{2} > 0$: $R = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2}}$.
2. $\vec{\Omega H} = \vec{\Omega O} + \vec{\Omega A} + \vec{\Omega M}$ donne $H = O + A + M - 2\Omega$ en coordonnées : $x_H = 1 + \cos x - 1 = \cos x$ et $y_H = \sin x - \tan \frac{x}{2} = \tan \frac{x}{2} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1\right) = \cos x \tan \frac{x}{2}$. Puis $\vec{AH} \cdot \vec{OM} = (\cos x - 1) \cos x + \cos x \tan \frac{x}{2} \sin x = \cos x (\cos x - 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}) = 0$ ✓.
3. Quand $x \rightarrow 0$: $\tan \frac{x}{2} \rightarrow 0$ et $\cos \frac{x}{2} \rightarrow 1$: $\Omega \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $R \rightarrow \frac{1}{2}$, $H \rightarrow (1, 0) = A$. $AM^2 = (1 - \cos x)^2 + \sin^2 x = 2(1 - \cos x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$, d'où $\frac{AH^2}{AM^2} = \frac{4 \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^2 x \tan^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\cos^2 x}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} \rightarrow \frac{1}{4}$, et (limite de $\sqrt{u}$) $\frac{AH}{AM} \rightarrow \frac{1}{2}$.
4. $X = \pi - x \rightarrow 0^+$: $\cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$ et $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\tan(X/2)} \rightarrow +\infty$; comme $\cos x \rightarrow -1$: $y_\Omega \rightarrow +\infty$, $y_H \rightarrow -\infty$. Puis $(\pi - x)R = \frac{X/2}{\sin(X/2)} \rightarrow 1$ et $(\pi - x)y_H = 2 \cos x \times \frac{X/2}{\tan(X/2)} \rightarrow -2$.
5. $\vec{\Omega H} \left(\cos x - \frac{1}{2}, \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \tan \frac{x}{2} \right)$, donc $\Omega H = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| \sqrt{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{\left| \cos x - \frac{1}{2} \right|}{\cos \frac{x}{2}} = R |2 \cos x - 1|$. Quand $x \rightarrow \pi$, $|2 \cos x - 1| \rightarrow 3$: $\frac{\Omega H}{R} \rightarrow 3$. Et $H = \Omega \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$: le triangle OAM est alors équilatéral ($OA = OM$, angle $\frac{\pi}{3}$), et ses centres sont confondus.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. $c \sin 2x = 2c \sin x \cos x$ et $\frac{c \sin x}{x} \rightarrow c$: $x \mapsto c \sin x$ convient. Avec $x = 0$ dans (E) : $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$.
2. Récurrence. Pour $n = 1$, c'est (E) appliquée à $\frac{x}{2}$. Si la formule vaut au rang n , (E) appliquée à $\frac{x}{2^{n+1}}$ donne $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos \frac{x}{2^{n+1}}$; en reportant, on obtient la formule au rang $n + 1$.
3. a) $g(2x) = 2f(x) \cos x - 2c \sin x \cos x = 2g(x) \cos x$, et $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - c \frac{\sin x}{x} \rightarrow c - c = 0$.
b) La définition de $\frac{g(t)}{t} \rightarrow 0$ fournit $\alpha > 0$ tel que $|g(t)| \leq \varepsilon |t|$ pour $0 < |t| < \alpha$. Par récurrence, $2^n \geq n + 1$ ($2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$) ; pour l'entier $n = E\left(\frac{|x|}{\alpha}\right) + 1 > \frac{|x|}{\alpha}$, on a $\frac{|x|}{2^n} \leq \frac{|x|}{n+1} < \alpha$. Avec $t = \frac{x}{2^n}$ et la question 2 appliquée à g (les cosinus sont de valeur absolue ≤ 1) :

$$|g(x)| \leq 2^n |g(t)| \leq 2^n \varepsilon \frac{|x|}{2^n} = \varepsilon |x|.$$

Ceci pour tout $\varepsilon > 0$: si $g(x) \neq 0$, $\varepsilon = \frac{|g(x)|}{2|x|}$ donnerait $|g(x)| \leq \frac{|g(x)|}{2}$, absurde. Donc $g(x) = 0$ (et $g(0) = 0$) : les solutions sont exactement les fonctions $x \mapsto c \sin x$.

4. $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{\tan 3x} \times \frac{\tan 3x}{x} \rightarrow 2 \times 3 = 6 : c = 6$, $f(x) = 6 \sin x$ (et $\frac{6 \sin x}{\tan 3x} \rightarrow 6 \times \frac{1}{3} = 2$ ✓).
5. $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{1 - \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$. Comme $\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x$, $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \sin^2 x$ vérifie $g(2x) = 4g(x) \cos^2 x$ et $\frac{g(x)}{x^2} \rightarrow 0$; la même méthode donne $g(x) = 4^n g\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod \cos^2 \frac{x}{2^k}$ et $|g(x)| \leq 4^n \varepsilon \frac{x^2}{4^n} = \varepsilon x^2$, donc $g = 0$: $f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ (et $\frac{f(x)}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{2} \rightarrow 1$ ✓). La fonction $1 - \cos x$ **ne convient pas** : en $x = \frac{\pi}{2}$, $1 - \cos \pi = 2$ alors que $4 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$.

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Calcul algébrique

- ① $(x-3)(x^2+3x+9)$;
 $(x-3)(x+3)(x^2+9)$.
 a^3-b^3 ; $(x^2-9)(x^2+9)$ et
 $x^2+9 > 0$.
- ② (a) 0; (b) $b = -3$, $c = -2$.
 $1-4+1+2=0$; on
développe et on identifie.
- ③ (a) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$;
(b) $D(x) = \sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x}$.
 $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=3$;
 $(4x+1)-4x=1$.
- ④ (a) $T > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 2[$, $T < 0$
hors de $[\frac{1}{2}, 2]$;
(b) $(x+2)^2+3 \geq 3$. $\Delta = 9$:
racines $\frac{1}{2}$ et 2.

Bloc 2 · Fonctions (chapitre 4)

- ⑤ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$;
 $D_g =]-\infty, 0[\cup]0, 4]$.
 $x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$;
 $8-2x \geq 0$, $x \neq 0$.
- ⑥ (a) $f(0) = \frac{3}{2}$;
 $f(x) > 0 \iff x \in]-1, 3[$;
(b) $a = -\frac{1}{2}$. $\mathcal{C}_f$ au-dessus
de l'axe entre -1 et 3 ;
 $f(3) = 4a+2=0$.
- ⑦ (a) oui, en 0 : maximum ;
(b) $1 \leq 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} \leq \frac{15}{4}$.
 $x^2+2 \geq 2$; $2 \leq 2\sqrt{x} \leq 4$,
 $-1 \leq -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$: on ajoute.
- ⑧ (a) -3 et 7; (b) $S = [1, \frac{4}{3}[$.
 $-3 \leq -2,4 < -2$;
 $49 \leq 60 < 64$;
 $2 \leq 3x-1 < 3$.

Bloc 3 · Trigonométrie (chapitre 7)

- ⑨ (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\sqrt{3}$;
(b) $S = \{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\}$. $\pi - \frac{\pi}{6}$,
 $\pi - \frac{\pi}{4}$; $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$.
- ⑩ (a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\frac{7}{9}$;
(b) $S = \{0; \frac{\pi}{3}; \pi\}$. $\cos a \geq 0$;
 $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$;
 $\sin x(2\cos x - 1) = 0$.
- ⑪ (a) $2\sin^2 \frac{x}{2}$; (b) $\tan^2 x$.
 $a = \frac{x}{2}$; $\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$ car
 $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$.
- ⑫ (a) $-\sinh$ et $-\cosh$;
(b) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, puis $[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}]$.
Formules d'addition ;
 $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;
l'inverse renverse l'ordre
(réels > 0).

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 5 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 22 ; puis **exercice 31**, p. 28 et **exercice 37**, p. 30. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 10), puis les pièges de la section 12. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 23 ; puis les thèmes C et D, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **49 à 54**, p. 33.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 10 en lecture rapide), puis les sections 11 à 13. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 25 ; les thèmes B et E, **exercices 37 à 42**, p. 30 et **55 à 60**, p. 34 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 26, et le thème F, **61 à 66**, p. 36.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Calcul algébrique

Relis : les sections 5, 6 et 7 du cours.
Fais : **exercice 3**, p. 22,
exercice 5, p. 23, **exercice 43**,
p. 32 et **exercice 44**, p. 32.

Bloc 2 · Fonctions (chapitre 4)

Relis : les sections 3, 4 et 9 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 22,
exercice 7, p. 23, **exercice 32**,
p. 28 et **exercice 56**, p. 35.

Bloc 3 · Trigonométrie (chapitre 7)

Relis : les sections 8 et 10 du cours.
Fais : **exercice 8**, p. 23,
exercice 10, p. 23, **exercice 49**,
p. 33 et **exercice 50**, p. 33.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Limites en un point	31 à 36	/ 6	
Thème B · Limites à l'infini	37 à 42	/ 6	
Thème C · Formes indéterminées	43 à 48	/ 6	
Thème D · Limites trigonométriques	49 à 54	/ 6	
Thème E · Comparaison et gendarmes	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : *La dérivation*

Maths Olympiad