HOMOTHETIE

I. Homothétie de rapport positif : définition

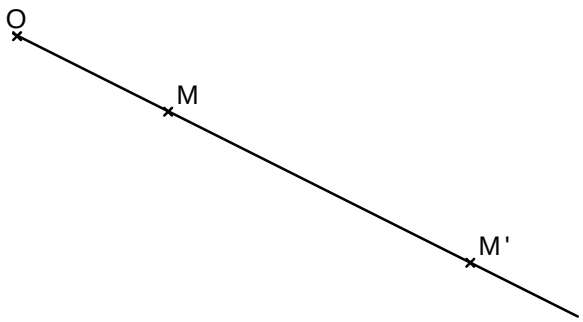
Soit un nombre k > 0 et un point O, l'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point M' tel que :

- M'est sur la demi-droite [OM),
- OM' = k ´ OM.

L'homothétie de centre O et de rapport k est notée H (O, k).

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k ou que M' est l'homothétique de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Exemple : M' = H (O, 3)



Remarques :

- O est invariant par l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Homothétie de centre O et de rapport k = 1.

  Pour tout point M distinct de O, d'image M' par l'homothétie de centre O et de rapport 1, M' ∈ [OM) et OM' = 1. On en déduit que M' est confondu avec M. Tout point du plan est invariant par l'homothétie de centre O et de rapport 1.

II. Construction de l'image d'une droite par une homothétie

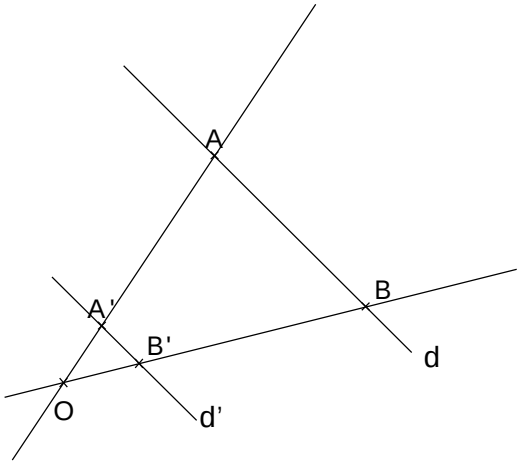
L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

Construction : on peut choisir deux points distincts A et B de la droite d et construire leurs images respectives A' et B' par H (O, k). La droite d' est alors (A'B').

On peut également choisir un point A de d, construire son image A' par H (O, k), puis tracer la parallèle d' à d qui passe par A'.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

Exemple : H (O, $\frac{1}{4}$)

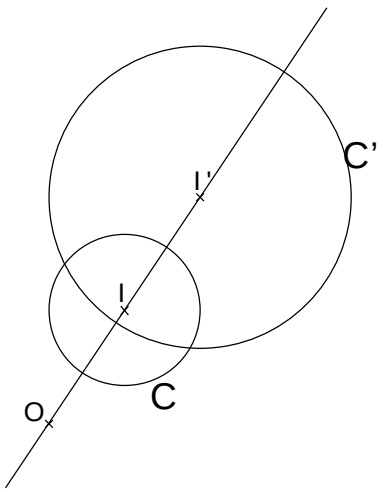


Les images par une homothétie H (O, k) de deux droites sécantes en un point I sont deux droites sécantes en un point I', image de I par H (O, k).

III. Cercles et homothétie

L'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r par une homothétie H (O, k) est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre I', image de I par H (O, k) et de rayon $r' = k \times r$.

Exemple : H (O, 2) ; on a $r' = 2r$ et $OI' = 2OI$.



Inversement, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles de rayons respectifs r et r' distincts et de centres respectifs O et O' quelconques, on peut dire que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie de rapport $\frac{r'}{r}$.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

IV. Propriétés des homothéties

- Etant donné un point O et un nombre réel strictement positif k différent de 1, O est le seul point invariant de H (O, k).

- Les homothéties de rapport $k > 0$ multiplient les distances par k.

  On démontre que si A' et B' sont les images respectives de A et B par une homothétie de rapport k, alors on a $A'B' = k.\ AB$.

  Une homothétie de rapport $k > 1$ agrandit une figure. Une homothétie de rapport $k < 1$ réduit une figure.

  Les homothéties de rapport $k \neq 1$ ne sont pas des isométries. Elles ne conservent donc pas les longueurs.

- L'homothétie conserve l'alignement.

- L'image du milieu d'un segment par homothétie est le milieu de l'image de ce segment : l'homothétie conserve le milieu.

- L'image d'un angle par homothétie est un angle de même mesure : l'homothétie conserve les angles.

- Les homothéties de rapport k multiplient les aires par k^2.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux