

Chapitre 8 : Géométrie Plane

Classe : 11^{ème} Science

Durée :

1) Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

2) Compétence :

Composantes,

Manifestations

Séquence 3 : Projections ; Isométries et Similitudes

3) Contenus :

- *Propriétés géométriques ;*
- *Expression analytique ;*
- *Image de figures simples ;*
- *Utilisation de ces applications du plan pour résoudre de problèmes de construction ou de configuration.*

4) Ressources éducatives

* ressources humaines : Enseignant ; Apprenants....

* ressources matérielles : livres ; matériels géométriques ; craies ; Bic ; tableau ; etc.

* ressources financières.

5) Stratégies d'animation :

Méthodes, techniques, (Travail en groupe ; la recherche collective des idées)

6) Déroulement des activités

Pré évaluation :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on place les points A (4 ; 2), B (-2 ; 3), C (1 ; -1).

Construire le triangle ABC et son image :

- Par la symétrie de centre B ;
- Par la symétrie d'axe (BA) ;
- Par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$;
- Par la rotation de B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$;

ACTIVITES.

Activité1 : Projections

Consigne 1 : soient D et Δ deux droites non parallèles du plan P, soient E ; F et G trois points non situés sur aucune de ces deux droites.

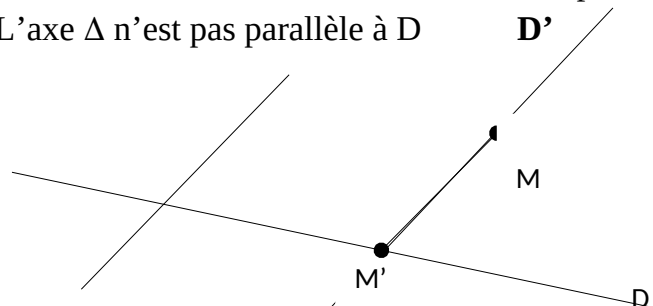
- Tracer les droites D et Δ puis placer les points E, F et G ;
- Soient E', F' et G' les projetés respectifs de E, F et G sur Δ parallèlement à la droite D, placer les points E', F' et G'

Consigne 2 : soit (d) une droite d'un plan P et A ; B ; C trois points distinctes du plan non situés sur (d). Placer les points A' ; B' ; C' sur la droite (d) tels que (AA') ; (BB') et (CC') soient perpendiculaires à la droite (d)

Synthèse partielle :

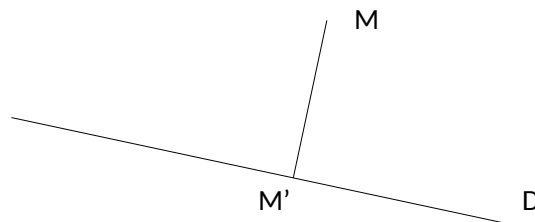
Définition 1: (La projection axiale)

On appelle projection d'axe Δ l'application du plan sur la droite D qui à tout point, M du plan associe le point M' de la droite D intersection de la parallèle à Δ passant par M et de la droite D. L'axe Δ n'est pas parallèle à D



Définition 2 : (Cas particulier : la projection orthogonale)

C'est l'application du plan sur la droite D qui à tout point M du plan associe M' de D intersection de D et de la perpendiculaire à D issue de M



La droite (D') est appelée projectante de M sur D du plan, si $\vec{u}$ est un vecteur

directeur de Δ , $p(M) = M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u} \\ M' \in (D) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Caractérisation : Une application affine p est une projection si et seulement si $pop = p$

NB : Une projection n'est pas une bijection

L'application linéaire φ associée à une projection est appelée projection vectorielle ; elle est caractérisée par : pour tout vecteur $\vec{u}$, $\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u})$

Expression analytique de la projection

$$\begin{aligned} \text{Soit } p(M) = M' &\iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u} \\ M' \in (D) \end{cases} & \lambda \in \mathbf{R} ; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ; M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x' - x = \lambda a \\ y' - y = \lambda b \\ a'x' + b'y' + c' = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x' = x + \lambda a \\ y' = y + \lambda b \\ a'x' + b'y' + c' = 0 \end{cases} & \text{expression analytique} \\ & & & \vec{v} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de la droite (D)} \end{aligned}$$

NB : écrire λ en fonction de x et y puis remplacer λ par sa valeur dans cl'expression analytique

Activité 2 : Isométries

Soit $A ; B$ deux points distinctes d'un plan et $A' ; B'$ les images respectives de A et B

Consigne 1 : soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque distincte du bipoint $(A ; B)$, construire $A' ; B'$ par la translation du vecteur $\vec{v}$ puis comparer AB et $A'B'$;

Consigne 2 : soit O un point distincte de A et B ; construire A' et B' par la symétrie de centre O puis comparer AB et $A'B'$;

Consigne 3 : soit Δ une droite quelconque, construire A' et B' les images respectives de A et B par la symétrie d'axe (Δ) puis comparer $d(A, B)$ et $d(A', B')$.

Consigne 4 : soit $r(O ; 50^\circ)$ une rotation de centre O un point quelconque distincte de A et B et d'angle géométrique 50 degré, construire l'image de A et B par la rotation $r(O, 50^\circ)$ puis comparer les deux longueurs AB et $A'B'$;

Consigne 5 : soit $h(O ; 2)$ une homothétie de centre O et de rapport $k = 2$, construire l'image de A et B par $h(O ; 2)$ puis comparer la longueur AB et son image ;

Synthèse partielle :

Définition 1:

La racine grecque tient lieu de définition « Iso » : même ; « métron » : mesure. C'est une bijection qui conserve les distances.

Définition 2 : Une application du plan P est une transformation de f de P telle que : pour tout M et N de P , $M'N' = MN$ où l'on note $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ (on dit qu'une isométrie du plan P est une transformation de P qui conserve les distances)

Exemples d'isométries :

- Les symétries ;
- La translation ;
- La rotation ;

Activité 3 : les angles géométriques et les angles orientés

Consigne : soit $[\widehat{EFG}]$ un secteur angulaire aigu quelconque de mesure géométrique α ; construire le secteur angulaire $[\widehat{E'F'G'}]$ et son image

- a) Par la symétrie de centre O un point quelconque choisi ;
- b) Par la symétrie d'axe (d) une droite ;
- c) Par la translation de vecteur $\vec{u}$;
- d) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
- e) Conclure ;

Synthèse partielle :

Propriété 1 :

Les isométries conservent les angles géométriques

NB : Une réflexion (symétrie d'axe ou axiale) change un angle orienté en un angle orienté de mesure opposée ;

Activité 4 : colinéarité, alignement.

Consigne 1 : soit A ; B et C trois points distinctes alignés d'un plan

Construire A ; B et C et leurs images respectives :

- a) Par la symétrie de centre O un point quelconque choisi ;
- b) Par la symétrie d'axe (d) une droite ;
- c) Par la translation de vecteur $\vec{u}$;
- d) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
- e) Conclure ;

Propriété 2 :

Les isométries **conservent les relations de colinéarité, l'alignement** et les rapports de longueurs ...

Activité 5 : droites, parallélisme et orthogonalité

Consigne : soient (d) et (d') deux droites parallèles et (g) et (g') deux droites orthogonales. Construire les images de droites parallèles et perpendiculaires dans chacun de cas suivants :

- a) Par la symétrie de centre O un point quelconque choisi ;
- b) Par la symétrie d'axe (Δ) une droite ;
- c) Par la translation de vecteur $\vec{u}$;
- d) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
- e) Conclure ;

Propriété 3 :

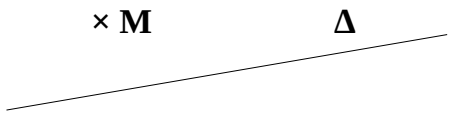
Par une transformation des isométries:

- l'image d'une droite est une droite.
- deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
- deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.

Les isométries conservent le parallélisme et l'orthogonalité.

Les isométries (symétries ; translation ; rotation) :

➤ **Symétrie orthogonale ou réflexion d'axe d :**

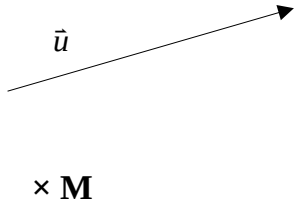
M a pour image M' signifie	• Si $M \in d$, alors $M' = M$; • si $M \notin d$, alors d est la médiatrice de $[MM']$. 
Notation	La réflexion d'axe Δ est notée S_{Δ} . M' est appelé le symétrique de M par rapport à Δ.

Points invariants	Les points de la droite Δ
Transformation réciproque	La transformation réciproque de S_Δ est S_Δ elle-même.

➤ **Symétrie centrale :**

M a pour image M' signifie	O est le milieu de [MM'] $\times M$ $\times O$
Notation	La symétrie de centre O est notée S_O . M' est appelé le symétrique de M par rapport à O .
Points invariants	Le centre O est le seul point invariant par S_O .
Relation vectorielle Caractéristique	Quels que soient les points M et N, on a : $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$
Transformation réciproque	La transformation réciproque de S_O est S_O elle-même.

Translation de vecteur $\vec{u}$:

M a pour image M' signifie	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ 
Notation	La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée $t_{\vec{u}}$
Points invariants	▪ Aucun, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ▪ Tous les points, si $\vec{u} = \vec{0}$
Relation vectorielle Caractéristique	Quels que soient les points M et N, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
Transformation réciproque	La transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$, notée $t_{-\vec{u}}$

ROTATION DU PLAN ORIENTE

Jusqu'à présent pour définir une rotation, il était nécessaire de définir un sens de rotation ; la notion d'angle orienté nous permet de donner une autre définition ...
 Dans tout le paragraphe, le plan est orienté.

Définition : Soit O un point du plan et α un réel.

La rotation de centre O et d'angle α , notée $r(O, \alpha)$, est la transformation du plan définie par :

- ❖ l'image de O est O ;
- ❖ l'image d'un point M distinct de O est le point M' tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$

Activité 6 : Expression analytique des isométries

Soit M (x ; y) un point quelconque du plan P et M'(x' ; y') son image

Consigne 1 : soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque du plan, placer le point M puis construire son image M' par la translation du vecteur $\vec{v}$. Ecrire les coordonnées de M' en fonctions de celles de M et $\vec{v}$.

Consigne 2 : soit O (a ; b) un point du plan P, construire M et son image M' par la symétrie de centre O puis écrire les coordonnées de M' en fonction de coordonnées de M et O.

Synthèse partielle :

Soi f une isométrie du plan P ; M'(x' ; y') et M(x ; y)

D'une manière générale, l'expression analytique des isométries dans le plan est :

$$f(M) = M' \implies \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Remarque:

- Si $\theta = 0$ et $a, b \neq 0$ alors $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ expression analytique de la translation
- Si $\theta = \pi$ alors $\begin{cases} x' = -x + a \\ y' = -y + b \end{cases}$ expression analytique de la symétrie centrale
- Si f admet une droite (D) comme ensemble de point invariants alors f est symétrie orthogonale d'axe (D)
- Si f admet un seul point invariant alors f est la rotation de centre O (point invariant) et d'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$

Activité 7 : Image de figures simples

Consigne : construire l'image de :

- Un segment $[AB]$;
- Un cercle de centre O et de rayon r ;
- La nature des triangles (isocèle, rectangle, équilatéral) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) ;
- Le milieu d'un segment et le centre de gravité d'un triangle ;
- Les points de contact ou d'intersection ;

par les isométries.

Synthèse partielle :

Soit f une transformation isométrique :

- Le segment $[AB]$ a pour image le segment $[f(A) f(B)]$;
- L'image d'un cercle de centre O et de rayon r est un cercle de centre $f(O)$ et de rayon r ;
- La nature des triangles (isocèle, rectangle, équilatéral) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée
- Le milieu d'un segment (conservation **du milieu**) et le centre de gravité d'un triangle sont conservés.
- Les points de contact ou d'intersection sont conservés.
- Les symétries, les translations et les rotations **conservent les aires** ;
- Les isométries conservent le produit scalaire ;

NB : on appelle isométrie directe ou déplacement toute isométrie de P pouvant se décomposer comme produit de deux symétries orthogonales. Ce sont les isométries qui conservent les angles orientés (translation ; rotation) ;

On appelle isométrie indirecte ou antidéplacement, toute isométrie de P , soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissée.

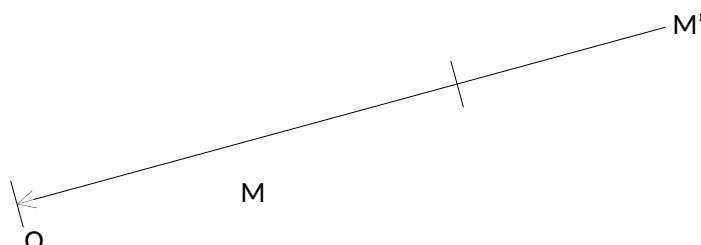
Activité 8 : similitudes

Consigne 1 : construire un segment $[AB]$ et son image $[A'B']$ par l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$

Consigne 2 : construire un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par les isométries puis construire les images de A' ; B' et C' par une homothétie de centre B' et de rapport $k = -3$; conclure.

Synthèse partielle :

Définition 1 : L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application du plan vers lui même qui à tout point M du plan associe M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$



- **Homothétie de centre O et de rapport k (k ≠ 0) :**

M a pour image M' signifie	$\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$ L'homothétie de centre O et de rapport - 1 est la symétrie centrale de centre O.
Notation	L'homothétie de centre O et de rapport k est notée $h_{O, k}$. M' est appelé l' homothétique de M .
Points invariants	• Si k = 1, tous les points sont invariants • Si k ≠ 1, le centre O est le seul point invariant
Relation vectorielle Caractéristique	Quels que soient les points M et N, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$
Transformation réciproque	La transformation réciproque de $h_{O, k}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$ notée $h_{O, \frac{1}{k}}$

Propriétés : Par une homothétie

- L'image d'une droite d est une droite d' parallèle à d.
- L'image d'un segment $[MN]$ est un segment $[M'N']$ tel que $M'N' = |k|MN$.
- L'image d'un triangle LMN est un triangle L'M'N' dont les côtés sont parallèles et proportionnels à ceux de LMN.

On a $\frac{L'M'}{LM} = \frac{L'N'}{LN} = \frac{M'N'}{MN} = |k|$. On dit que LMN et L'M'N' sont homothétiques

- L'image d'un cercle C de centre C et de rayon R est le cercle C' de centre C' = h(C) et de rayon $|k| \times R$

Propriété :

Si une homothétie de rapport k transforme une figure F en une figure F', alors :

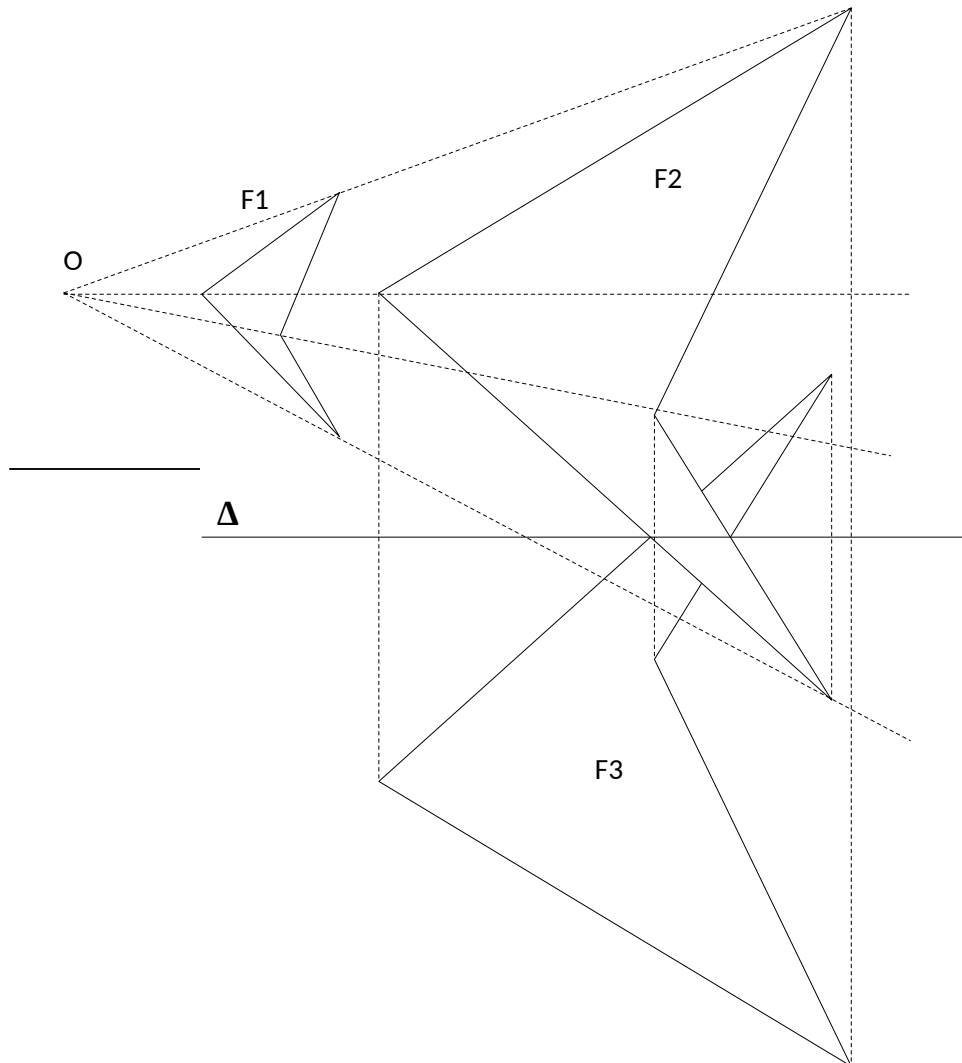
- Les dimensions de F' s'obtiennent en multipliant celles de F par |k|;
- L'aire de F' s'obtient en multipliant celle de F par k².

Définition 2 :

Une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, les figures F1 et F3 sont semblables

F1 se transforme en F2 par l'homothétie de centre O

F2 se transforme en F3 par la symétrie axiale d'axe Δ

Propriétés :

Une similitude conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et les angles.
 Une similitude conserve les rapports : il s'agit toujours d'une modélisation géométrique de la proportionnalité.

Activité 9 : expression analytique d'une similitude

Consigne : soient $O(1; 2)$; $M(x; y)$; $M'(x'; y')$ et $h_{(O;k)}$ une homothétie de centre O et de rapport $k = -\frac{2}{3}$. placer le O ; M et M' puis écrire les coordonnées de M' en fonction de coordonnées de M et de O .

Synthèse partielle :

Soit f une similitude du plan P telle que $f(M) = M'$

L'expression analytique d'une similitude peut être écrite sous la forme :

$$f(M) = M' \implies \begin{cases} x' = kx \cos\theta - ky \sin\theta + p \\ y' = kx \sin\theta + ky \cos\theta + q \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Remarque :

- Si $\theta=0$ alors f est une homothétie de centre $O\left(\frac{p}{1-k}; \frac{q}{1-k}\right)$ et

$$\text{rapport } k \in \mathbb{R} - \{1\} \implies \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

- Si $\theta=\pi$ alors f est une homothétie de $O\left(\frac{p}{1+k}; \frac{q}{1+k}\right)$ et

$$\text{rapport } k' = -k; k \in \mathbb{R} - \{-1\} \implies \begin{cases} x' = -kx + p \\ y' = -ky + q \end{cases}$$

Activité 10 : Utilisation de ces applications du plan pour résoudre de problèmes de construction ou de configuration.

Consigne 1 : ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.

- 1) Démontrer que : $S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = S_{(OB)} \circ S_{(OC)}$;
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$ et $S_{(OB)} \circ S_{(OC)}$

Consigne 2 : ABCD est un carré. Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de $[AB]$ et $[BC]$. Déterminer les images des points A , B , C et D par la transformation $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$. Quelle est la nature de cette transformation ?

Consigne 3 : ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C , de rapports respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$,

Démontrer que $h'oh$ est une homothétie et préciser son rapport.

Consigne 4 : ABCD est un carré de centre O et de sens direct. On considère les rotations : $r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$; $r_2 = r(A, \frac{\pi}{2})$. Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$

Synthèse partielle :

Propriété 1 : composée de deux translations

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$. On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$

Propriété 2 : composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ') , la composée $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$

Propriété 3 : composée de symétries orthogonales d'axes sécants

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes, O un point, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La composée $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Propriété 4 : composée de deux rotations de même centre

Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' . $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Propriété 5 : composée de deux rotations de centres distincts

Soit r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et α' .

- Si $\alpha + \alpha' \neq 0$ alors $r' \circ r$ est la rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.
- $\alpha + \alpha' = 0$ alors $r' \circ r$ est une translation.

Propriété 6 : composée de deux homothéties de même centre

Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' , $h'oh$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k'k$.

Propriété 7 : composée de deux homothéties de centres distincts O et O'

Soit $h_{(O,k)}$ et $h_{(O',k')}$ deux homothéties de centres O et O' .

- Si $k'k \neq 1$, alors $h'oh$ est homothétie de rapport $k'k$;
- Si $k'k = 1$, alors $h'oh$ est une translation.

Evaluation :

Exercice 1 : le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . soit h et h' les homothéties

dont les expressions analytiques sont respectivement : $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$

- 1- Démontrer que les transformations $h'oh$ et hoh' sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques dans le repère (O, I, J)
- 2- Déterminer les coordonnées des centres de ces homothéties

Exercice 2 : le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2, 1)$ et rapport -3 , t la translation de vecteur $\vec{v}\left(\frac{1}{3}\right)$ et σ la symétrie orthogonale d'axe (OI) . Déterminer les expressions analytiques de homothéties toh et hot . Déterminer les expressions analytiques de similitudes σoh et $ho\sigma$.

Exercice 3 : ABCD est un losange de sens direct tel que $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $f = S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$; $g = S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$.
2. Démontrer que : $g \circ f = f \circ g = t_{\vec{AC}}$

Exercice 4 : quelle est l'image par une isométrie d'un carré ? d'un rectangle ? d'un losange ? justifier chaque réponse.

Exercice 5 :

1. Déterminer les symétries orthogonales qui laissent globalement invariant un cercle (C) de centre O .
2. Déterminer les rotations qui laissent globalement invariant un cercle (C) de centre O

Exercice 6 : ABC est un triangle inscrit dans un cercle (Γ) de centre O , H est un orthocentre, I milieu du segment $[BC]$.

1. On considère le point M du plan tel que : $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
 - a) Démontrer que : $\vec{AM} = 2\vec{OI}$; en déduire que le point appartient à la hauteur issue de A .

- b) Démontrer que les points M et H sont confondus.
- 2. Soit P le symétrique du point H par rapport à la droite (BC).
 - a) Déterminer l'image du point P par la transformation définie par : $f = t_{\overline{HA}} \circ S_{(BC)}$.
 - b) Déterminer la droite (Δ) telle que $t_{\overline{HA}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)}$.
 - c) En déduire que le point P est sur le cercle (Γ). Enoncer le théorème ainsi démontré.