

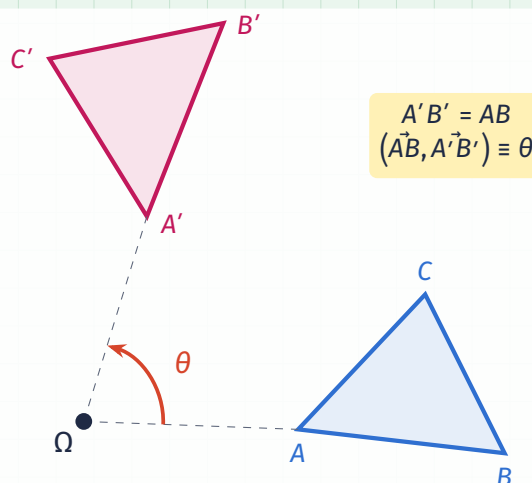
Chapitre 9

La rotation dans le plan

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

$$r(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

*Défi de concours*Où placer M pour que
 $MA + MB + MC$ soit minimal ?Tourner autour de Ω : distances et angles conservés

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	18 Niveau 4 · Concours	27
1 Angles orientés : rappels	5	19 Définition et constructions	29
2 Définition de la rotation	6	20 Images de figures	31
3 La propriété fondamentale	7	21 Propriétés de conservation	32
4 Ce que conserve une rotation	9	22 Déterminer une rotation	34
5 Images de figures	10	23 Utiliser une rotation	35
6 Expression analytique	11	24 Défis de concours	37
7 Déterminer une rotation	13	25 Corrigés du niveau 1	39
8 Composer des rotations	14	26 Corrigés du niveau 2	41
9 Démontrer avec une rotation	15	27 Corrigés du niveau 3	44
10 Construire et chercher des lieux	17	28 Corrigés du niveau 4	47
11 Pour aller plus loin	18	29 Corrigés : définir et construire	50
12 Les pièges classiques	19	30 Corrigés : images de figures	53
13 Les astuces des concours	20	31 Corrigés : propriétés conservées	56
14 L'essentiel du chapitre en une page	22	32 Corrigés : déterminer une rotation	59
15 Niveau 1 · Bases	23	33 Corrigés : utiliser une rotation	62
16 Niveau 2 · Bac	24	34 Corrigés : défis de concours	65
17 Niveau 3 · Approfondissement	26	Corrigé du test d'entrée	69

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

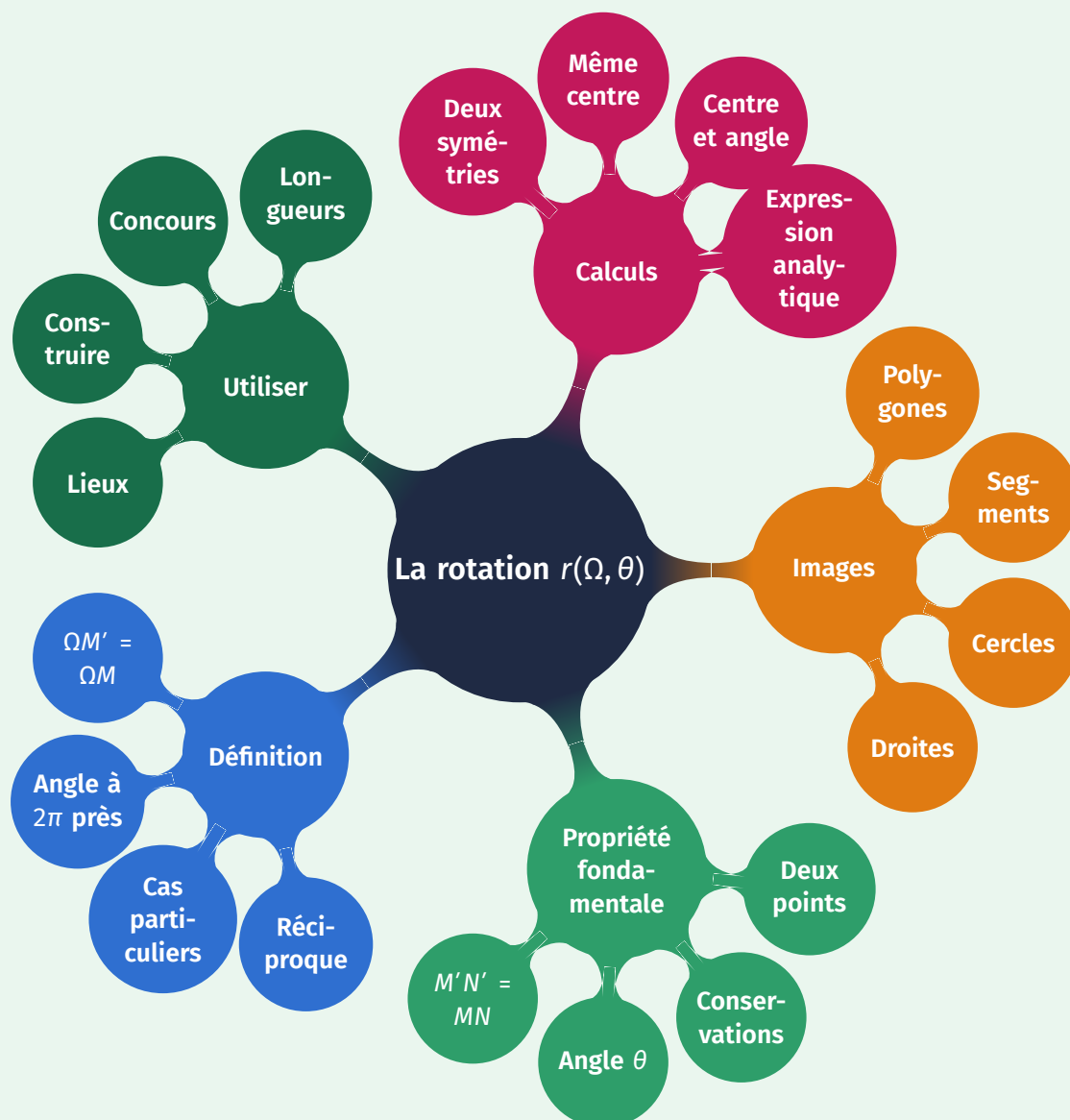
Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Définition et constructions, Images de figures, Propriétés de conservation, Déterminer une rotation, Utiliser une rotation, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|---|
| ☐ calculer avec les angles orientés (Chasles) ; | ☐ calculer une image en coordonnées ; |
| ☐ construire l'image d'un point au compas ; | ☐ reconnaître une rotation, trouver son centre ; |
| ☐ reconnaître Id, s_Ω et les quarts de tour ; | ☐ trouver centre et angle avec deux points ; |
| ☐ utiliser la réciproque $r(\Omega, -\theta)$; | ☐ composer deux rotations de même centre ; |
| ☐ utiliser la propriété fondamentale ; | ☐ composer deux symétries d'axes sécants ; |
| ☐ citer les propriétés de conservation ; | ☐ démontrer avec une rotation cachée ; |
| ☐ construire l'image d'une droite, d'un cercle ; | ☐ construire une figure, trouver un lieu. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant d'ouvrir le cours, fais le point sur les outils des chapitres 6 et 7 et du tronc commun utiles ici (aucune question ne demande le cours ; repères orthonormés). Corrigé et orientation : **page 69**.

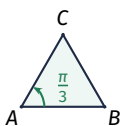
Bloc 1 • Angles orientés (chapitre 7)

___ / 4

① **Mesure principale** Donner la mesure principale, dans $]-\pi, \pi]$, de $\frac{31\pi}{4}$ et de $-\frac{41\pi}{6}$.

② **Relation de Chasles** $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{4}$ et $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. Mesures principales de $(\vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{u})$ et $(-\vec{u}, \vec{w})$?

③ **Lire des angles** ABC est équilatéral, $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Mesures principales de $(\vec{AC}, \vec{AB})$, $(\vec{BC}, \vec{BA})$ et $(\vec{AB}, \vec{BC})$?



④ **Cosinus, sinus, addition** Trouver $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos \theta = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, puis écrire $\cos(x + \theta)$ et $\sin(x + \theta)$ à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$.

Bloc 2 • Produit scalaire (chapitre 6)

___ / 4

⑤ **Orthogonalité** $A(0; -2)$, $B(5; 0)$, $C(-2; 3)$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, AB et AC ; nature du triangle ABC ?

⑥ **Al-Kashi** $AB = 8$, $AC = 15$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis la longueur BC .

⑦ **Cercle** Équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(3; -1)$ passant par $A(5; 2)$. Le point $B(0; 1)$ est-il sur $\mathcal{C}$? Calculer $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega B}$.

⑧ **Ensembles de points** $A \neq B$. Ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$? Ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$?

Bloc 3 • Géométrie et transformations

___ / 4

⑨ **Triangle équilatéral** ABC est équilatéral, H est le milieu de $[BC]$, O le centre du cercle circonscrit et $OA = 2$. Calculer AH , AB et l'angle $\widehat{BOC}$.

⑩ **Carré** ABCD est un carré de côté 5, de centre O . Calculer AC et OA . Nature du triangle OAB ? Justifier.

⑪ **Symétries, translation** $A(2; -3)$. Coordonnées de l'image de A par la symétrie de centre $I(1; 1)$, par celle d'axe $\Delta : y = x$ et par la translation de vecteur $\vec{u}(3; 1)$.

⑫ **Médiatrice** $A(2; 5)$, $B(6; 3)$. Équation de la médiatrice Δ de $[AB]$; point Ω de Δ situé sur l'axe des abscisses ; distance ΩA .

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 69**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Angles orientés : rappels

L'aiguille d'une horloge, une grande roue, une porte qui pivote sur ses gonds : chaque point tourne autour d'un **centre**, en restant à la **même distance** de lui, d'un **même angle**. Pour décrire mathématiquement ce mouvement, il faut mesurer un angle **avec un sens** : c'est l'angle orienté du chapitre 7, que l'on rappelle d'abord.

Rappels du chapitre 7 (indispensables dans tout le chapitre)

Orientation : le sens **direct** (ou trigonométrique) est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est direct si $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Mesures : si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls, ses mesures sont les réels $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; on écrit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$. La **mesure principale** est l'unique mesure dans $] -\pi, \pi]$: $\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$ a pour mesure principale $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{15\pi}{4} = -4\pi + \frac{\pi}{4}$, mesure principale $\frac{\pi}{4}$.

Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi]$.

Conséquences : $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})$;
 $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$; $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})$;
 $(k\vec{u}, k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})$ si $kk' > 0 [2\pi]$.

Colinéarité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [\pi]$;
de même sens $\iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$; orthogonaux
 $\iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Triangle : $(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \pi [2\pi]$;
ABC est **direct** si la mesure principale de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est dans $]0, \pi[$.

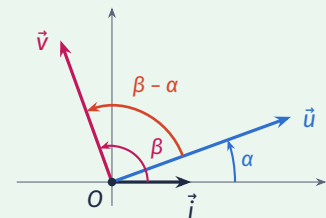
Forme polaire, cosinus et sinus d'un angle orienté

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ s'écrit

$$\vec{u} (\|\vec{u}\| \cos \alpha ; \|\vec{u}\| \sin \alpha), \quad \text{où } \alpha \equiv (\vec{i}, \vec{u}) [2\pi].$$

Si de plus $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\beta \equiv (\vec{i}, \vec{v})$, alors $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \beta - \alpha [2\pi]$ et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}), \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$



Démonstration. Le point U tel que $\vec{OU} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ est sur le cercle trigonométrique et $(\vec{i}, \vec{OU}) \equiv \alpha$, donc $U(\cos \alpha ; \sin \alpha)$ (chapitre 7) : d'où la forme polaire. Chasles donne $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}) \equiv \beta - \alpha$. Avec $a = \|\vec{u}\|$, $b = \|\vec{v}\|$ et les formules d'addition : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = ab \cos(\beta - \alpha)$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = ab \sin(\beta - \alpha)$. $\square$

Usage : on obtient un angle orienté à partir des coordonnées par $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) =$

$\frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$. **Exemple** : $\vec{u}(2; 0)$ et $\vec{v}(-1; \sqrt{3})$: $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2\sqrt{3}$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. Le cosinus seul ne suffit pas : il ne distingue pas $\frac{2\pi}{3}$

de $-\frac{2\pi}{3}$; c'est le **signe du déterminant** qui donne le sens. **Exemple (Chasles dans un carré)**. Soit $ABCD$ un carré direct et ABE le triangle équilatéral direct construit sur $[AB]$ (E intérieur au carré) : $(\vec{AE}, \vec{AD}) \equiv (\vec{AE}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$; en B : $(\vec{BE}, \vec{BC}) \equiv (\vec{BE}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Angle orienté de deux droites. Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dirigent les droites D et D' , on pose $(D, D') \equiv (\vec{u}, \vec{u}') [\pi]$: remplacer $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ ajoute π , donc cet angle n'est défini qu'à π près. En revanche, $2(D, D')$ est bien défini à 2π près (section 8). $D \parallel D' \iff (D, D') \equiv 0 [\pi]$ et $D \perp D' \iff (D, D') \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

2

Définition de la rotation

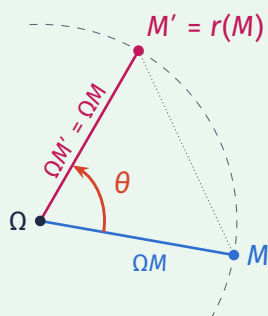
Définition : rotation

Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application r du plan dans lui-même qui transforme Ω en lui-même, et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que

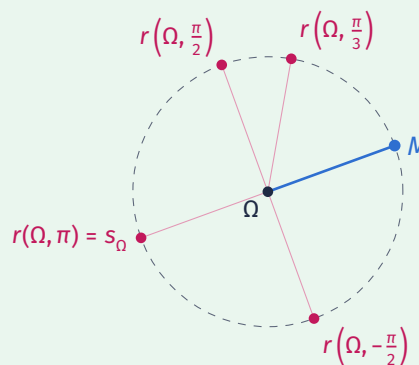
$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi].$$

On note $r = r(\Omega, \theta)$ et $r(M) = M'$: M' est l'**image** de M par r .

Pourquoi M' existe et est unique. Dans le repère orthonormé direct d'origine Ω dont le premier vecteur est $\frac{1}{\Omega M} \vec{\Omega M}$, la forme polaire (section 1) montre qu'un point vérifie les deux conditions si et seulement si ses coordonnées sont $(\Omega M \cos \theta; \Omega M \sin \theta)$: ce point existe et il est unique.



$(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta$: on tourne de M vers M'



images d'un même point M par quatre rotations de centre Ω

Premières propriétés

- **L'angle est défini à 2π près** : $r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; on choisit d'habitude la mesure principale.
- **Cas particuliers** : $r(\Omega, 0) = \text{Id}$ (identité) ; $r(\Omega, \pi) = s_\Omega$, la **symétrie centrale** de centre Ω ; $r(\Omega, \frac{\pi}{2})$ et $r(\Omega, -\frac{\pi}{2})$ sont les **quarts de tour** direct et indirect.
- **Points invariants** : si $\theta \neq 0 [2\pi]$, le centre Ω est le **seul** point invariant ($r(M) = M \iff M = \Omega$).
- Pour $M \neq \Omega$, le triangle $\Omega MM'$ est **isocèle** en Ω : Ω est sur la médiatrice de $[MM']$.

Démonstrations. Les mesures θ et $\theta + 2k\pi$ définissent la même condition $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$. Si

$\theta \equiv \pi : \vec{\Omega M'}$ et $\vec{\Omega M}$ sont colinéaires de sens contraires et de même norme, donc $\vec{\Omega M'} = -\vec{\Omega M} : \Omega$ est le milieu de $[MM']$. Si $M \neq \Omega$ et $r(M) = M$, alors $\theta \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}) \equiv 0$: impossible si $\theta \neq 0$. $\square$

Théorème (rotation réciproque)

La rotation $r = r(\Omega, \theta)$ est une **bijection** du plan ; sa bijection réciproque est la rotation de même centre et d'angle opposé :

$$r(\Omega, \theta)^{-1} = r(\Omega, -\theta) \quad \text{c'est-à-dire} \quad r(M) = M' \iff M = r(\Omega, -\theta)(M').$$

Démonstration. Si $M' = \Omega : r(M) = \Omega \iff M = \Omega$ (car $\vec{\Omega M'} = \vec{\Omega M}$). Si $M' \neq \Omega : r(M) = M' \iff \Omega M = \Omega M'$ et $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta \iff \Omega M = \Omega M'$ et $(\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega M}) \equiv -\theta \iff M = r(\Omega, -\theta)(M')$. Tout point M' a donc un **unique** antécédent, le point $r(\Omega, -\theta)(M')$. $\square$

Méthode : Comment construire l'image d'un point

1. Tracer la demi-droite $[\Omega M)$. **2.** Avec le rapporteur centré en Ω , reporter l'angle $|\theta|$ à partir de $[\Omega M)$, dans le sens **direct** si $\theta > 0$ (dans le sens des aiguilles d'une montre si $\theta < 0$) : on obtient une demi-droite $[\Omega x)$. **3.** Avec le compas, de centre Ω et de rayon ΩM , couper $[\Omega x)$: c'est M' . **4.** Contrôler que le triangle $\Omega MM'$ est isocèle en Ω et que l'on a tourné dans le bon sens.

Sans rapporteur. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$: $\Omega MM'$ est **équilatéral** ; M' est l'un des deux points d'intersection des cercles de centres Ω et M et de rayon ΩM (celui qui rend $\Omega MM'$ direct si $\theta = \frac{\pi}{3}$). Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$: on trace la perpendiculaire à (ΩM) en Ω (équerre) et on reporte ΩM . Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$: on applique deux fois $r(\Omega, \frac{\pi}{3})$ (section 8).

Exemple : les rotations d'un triangle équilatéral et d'un carré

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre G , et $ABCD$ un carré direct de centre O .

- $AB = AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$, donc $r(A, \frac{\pi}{3})(B) = C$ et $r(A, -\frac{\pi}{3})(C) = B$.
- $GA = GB = GC$ et $(\vec{GA}, \vec{GB}) \equiv (\vec{GB}, \vec{GC}) \equiv (\vec{GC}, \vec{GA}) \equiv \frac{2\pi}{3} : r(G, \frac{2\pi}{3})$ transforme A en B , B en C , C en A .
- Dans le carré : $r(O, \frac{\pi}{2})$ transforme A en B , B en C , C en D , D en A ; $r(A, \frac{\pi}{2})(B) = D$, $r(B, \frac{\pi}{2})(C) = A$ et $r(O, \pi)(A) = C$.

Remarque. Un peu d'histoire. Euclide « superpose » déjà les figures pour comparer des triangles, sans définir le mouvement. En 1827, **August Ferdinand Möbius**, dans *Der barycentrische Calcul*, classe les relations entre deux figures selon les transformations qui les font passer de l'une à l'autre. En 1872, **Felix Klein** pousse l'idée au bout dans son **programme d'Erlangen** : une géométrie est l'étude des propriétés qui ne changent pas sous l'action d'un ensemble de transformations ; la géométrie euclidienne est celle des propriétés conservées par les translations, les symétries et les **rotations** (longueurs, angles, alignement...). C'est exactement ce que nous allons étudier.

3

La propriété fondamentale

Théorème (propriété fondamentale)

Soit $r = r(\Omega, \theta)$. Pour tous points M et N d'images $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$:

$$M'N' = MN \quad \text{et, si } M \neq N, \quad (\vec{M'N'}, \vec{M'N}) \equiv \theta [2\pi].$$

Une rotation conserve les distances et fait « tourner » **tous** les vecteurs du **même** angle θ .

Lemme. Soit ΩMN et $\Omega M'N'$ deux triangles (éventuellement aplatis), avec M, N, M', N' distincts de Ω , tels que $\Omega M' = \Omega M$, $\Omega N' = \Omega N$ et $(\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega N'}) \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$. Alors $M'N' = MN$ et, si $M \neq N$, $(\vec{M'N'}, \vec{M'N}) \equiv (\vec{M'N'}, \vec{M'N}) [2\pi]$.

Démonstration du lemme. Posons $a = \Omega M$, $b = \Omega N$ et $\varphi \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$. Alors $\vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega N} = ab \cos \varphi$ et $\det(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N}) = ab \sin \varphi$ (section 1), donc

$$MN^2 = \|\vec{\Omega N} - \vec{\Omega M}\|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi,$$

$$\vec{\Omega M} \cdot \vec{M'N} = \vec{\Omega M} \cdot (\vec{M'N} + \vec{N'N}) = a^2 - ab \cos \varphi,$$

$$\det(\vec{\Omega M}, \vec{M'N}) = \det(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N}) = -ab \sin \varphi.$$

Ces trois nombres ne dépendent que de a, b et φ : ils sont les mêmes pour le triangle $\Omega M'N'$. Donc $M'N' = MN$, puis les angles $(\vec{M'N'}, \vec{M'N})$ et $(\vec{M'N'}, \vec{M'N'})$ ont le même cosinus $\frac{a^2 - ab \cos \varphi}{a \cdot MN}$ et le même sinus $\frac{-ab \sin \varphi}{a \cdot MN}$: ils sont égaux à 2π près. $\square$

Démonstration du théorème. Si $N = \Omega$ (de même si $M = \Omega$) : $N' = \Omega$, $M'N' = \Omega M' = \Omega M = MN$ et $(\vec{M'N'}, \vec{M'N}) \equiv (\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta$, car $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})$. **Si non**, Chasles donne

$$(\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega N'}) \equiv (\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega M}) + (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N}) + (\vec{\Omega N}, \vec{\Omega N'}) \equiv -\theta + (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N}) + \theta,$$

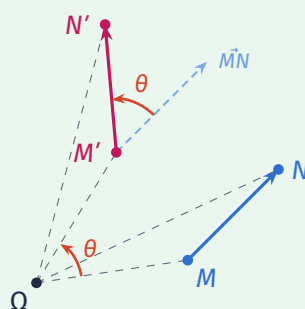
donc le lemme s'applique : $M'N' = MN$. Enfin, avec Chasles et le lemme :

$$(\vec{M'N'}, \vec{M'N'}) \equiv \underbrace{(\vec{M'N'}, \vec{M'N})}_{\equiv (\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega M'})} + \underbrace{(\vec{M'N'}, \vec{M'N})}_{\equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})} + \underbrace{(\vec{M'N'}, \vec{M'N'})}_{\equiv (\vec{M'N'}, \vec{M'N'})} \equiv \theta [2\pi]. \square$$

Théorème (caractérisations)

1. Si une application f du plan fixe un point Ω et si, pour tous points $M \neq N$ d'images M', N' , on a $M'N' = MN$ et $(\vec{M'N'}, \vec{M'N'}) \equiv \theta$, alors $f = r(\Omega, \theta)$.
2. Deux rotations de **même angle** qui ont la même image en **un** point sont égales.
3. Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ avec $A \neq B$, l'angle de r est $\theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$: **une rotation est déterminée par deux points distincts et leurs images** (et si $A'B' = AB$, $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \neq 0$, une telle rotation existe : section 7).

Démonstration. 1. On prend $N = \Omega$, donc $N' = \Omega$: $\Omega M' = \Omega M$ et $(\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega M'}) \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta$: c'est la définition de $r(\Omega, \theta)$. 2. Soit r_1, r_2 d'angle θ avec $r_1(A) = r_2(A) = A'$. Pour $M \neq A$, posons $M_1 = r_1(M)$, $M_2 = r_2(M)$: d'après le théorème, $A'M_1$ et $A'M_2$ ont la même norme AM et font le même angle θ avec $\vec{AM}$, donc ils sont égaux et $M_1 = M_2$. 3. Le théorème donne $\theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$, puis on applique 2. $\square$



$\vec{M'N}$ reporté en M' : il tourne de θ

4

Ce que conserve une rotation

Théorème (conservations)

Soit $r = r(\Omega, \theta)$ et $A', B', C', D', G' \dots$ les images des points $A, B, C, D, G \dots$. Une rotation **conserve** :

- les **distances** ($A'B' = AB$: r est une **isométrie**) et le **produit scalaire** : $\vec{A'B'} \cdot \vec{C'D'} = \vec{AB} \cdot \vec{CD}$;
- les **angles orientés** : $(\vec{A'B'}, \vec{C'D'}) \equiv (\vec{AB}, \vec{CD}) [2\pi]$ ($A \neq B, C \neq D$) ;
- les **égalités vectorielles** : $\vec{AG} = k\vec{AB} \Rightarrow \vec{A'G'} = k\vec{A'B'}$ et $\vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{A'B'} = \vec{C'D'}$;
- le **milieu** et le **barycentre** : $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Rightarrow G' = \text{Bar}\{(A', \alpha); (B', \beta); (C', \gamma)\}$;
- l'**alignement**, le **parallélisme** et l'**orthogonalité** ; donc les parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés.

Démonstrations. Angles : $(\vec{A'B'}, \vec{C'D'}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{CD}) + (\vec{CD}, \vec{C'D'}) \equiv -\theta + (\vec{AB}, \vec{CD}) + \theta$ (Chasles).

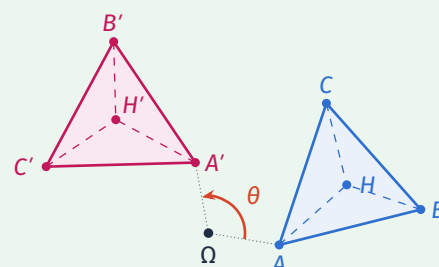
Produit scalaire : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \times CD \times \cos(\vec{AB}, \vec{CD})$, et les trois facteurs sont conservés (si un vecteur est nul, son image l'est aussi). **Colinéarité** : si $\vec{AG} = k\vec{AB}$ avec $k > 0$, alors $(\vec{AB}, \vec{AG}) \equiv 0$, donc $(\vec{A'B'}, \vec{A'G'}) \equiv 0$: $\vec{A'G'}$ et $\vec{A'B'}$ sont de même sens, et $A'G' = AG = kA'B'$, d'où $\vec{A'G'} = k\vec{A'B'}$; si $k < 0$, même raisonnement avec l'angle π ; si $k = 0$, $G' = A'$. **Vecteurs égaux** : $\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu ; or le milieu I de $[AD]$ vérifie $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, donc $\vec{A'I'} = \frac{1}{2}\vec{A'D'}$: I' est le milieu de $[A'D']$ et aussi de $[B'C']$. **Barycentre** : $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$; pour trois points, on regroupe deux points dont la somme des coefficients n'est pas nulle (associativité, chapitre 5). **Alignement, parallélisme, orthogonalité** : $C \in (AB) \iff \vec{AC} = k\vec{AB}$; et $(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv 0$ ou $\frac{\pi}{2} [\pi]$ est conservé. $\square$

Méthode : Comment utiliser les conservations

Pour obtenir une propriété des images, on la lit sur la figure de départ, et inversement : **1.** identifier une rotation r et les images des points utiles ; **2.** traduire la propriété (milieu, barycentre, alignement, perpendiculaire, longueur...) ; **3.** la « transporter » par r (ou par r^{-1}), en citant la propriété de conservation utilisée.

Exemple : dans un carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O , I et J les milieux de $[AB]$ et $[BC]$, L celui de $[CD]$. La rotation $r = r(O, \frac{\pi}{2})$ transforme A en B et B en C , donc le milieu I de $[AB]$ en le milieu J de $[BC]$: $OI = OJ$ et $(OI) \perp (OJ)$. De même $r(J) = L$, donc r transforme $[AJ]$ en $[BL]$: $AJ = BL$ et $(AJ) \perp (BL)$. Le point $K = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ a pour image $\text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$.



l'orthocentre H de ABC a pour image l'orthocentre H' de $A'B'C'$

Points remarquables. La hauteur issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) ; son image passe par A' et est perpendiculaire à $(B'C')$: c'est la hauteur de $A'B'C'$ issue de A' . Donc l'**orthocentre** H de ABC a pour image l'orthocentre H' de $A'B'C'$ (figure, avec $\theta = \frac{11\pi}{18}$). De même pour le **centre de gravité** (barycentre), le **centre du cercle circonscrit** (distances) et le **centre du cercle inscrit** (angles).

Remarque. Une symétrie axiale conserve elle aussi les distances, mais elle **change les angles orientés en leurs opposés** (section 8) : c'est ce qui la distingue d'une rotation. Une rotation

conserve l'**orientation** : l'image d'un triangle direct est un triangle direct.

5 Images de figures

Théorème (images des figures usuelles)

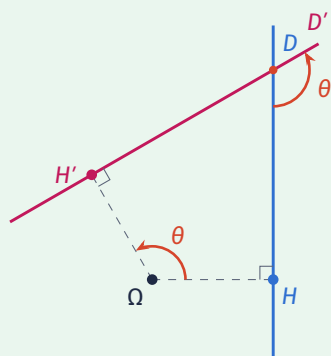
Soit $r = r(\Omega, \theta)$, $A \neq B$, $A' = r(A)$, $B' = r(B)$.

- L'image de la **droite** (AB) est la droite $(A'B')$, et $((AB), (A'B')) \equiv \theta \pmod{\pi}$; l'image du **segment** $[AB]$ est $[A'B']$, celle de la **demi-droite** $[AB)$ est $[A'B')$.
- L'image du **cercle** $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon R est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $I' = r(I)$ et de **même rayon** R ; la tangente à $\mathcal{C}$ en M a pour image la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' .
- L'image d'un **triangle** ABC est le triangle $A'B'C'$, de mêmes côtés et de mêmes angles orientés ; plus généralement, l'image d'un polygone est un polygone de mêmes côtés et de mêmes angles (un carré a pour image un carré, un triangle équilatéral un triangle équilatéral...).

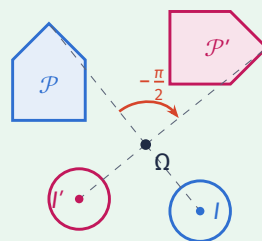
Démonstration. Les points de (AB) sont les barycentres $M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$, $t \in \mathbb{R}$ (chapitre 5) ; leurs images sont les points $\text{Bar}\{(A', 1-t); (B', t)\}$ (section 4), c'est-à-dire **tous** les points de $(A'B')$; on se restreint à $t \in [0, 1]$ pour le segment, à $t \geq 0$ pour la demi-droite. L'angle vient de $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv \theta$. Pour le cercle : $I'M' = IM$, donc $M \in \mathcal{C} \iff I'M' = R \iff M' \in \mathcal{C}'$, et r est bijective ; la tangente en M est la perpendiculaire en M à (IM) , et l'orthogonalité est conservée. $\square$

Méthode : Comment construire l'image d'une droite, d'un cercle

Droite D : on construit les images de deux de ses points ; ou, si $\Omega \notin D$, on construit le projeté orthogonal H de Ω sur D et son image H' : D' est la **perpendiculaire à $(\Omega H')$ en H'** (car $(\Omega H) \perp D$ et $H \in D$). **Cercle** : on construit l'image du centre, et l'on garde le rayon.



droite D et image D' par $r\left(\Omega, \frac{2\pi}{3}\right)$:
 $D' \perp (\Omega H')$ en H' , $(D, D') \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{\pi}$



un polygone et un cercle et leurs images
 par le quart de tour indirect $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$

Exemple. À gauche, $\Omega H = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$: D' est la perpendiculaire en H' à $(\Omega H')$, à la distance 2 de Ω ; elle coupe D en K , et $(D, D') \equiv \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$ (angle géométrique $\frac{\pi}{3}$). La figure est symétrique par rapport à (ΩK) , bissectrice de l'angle $H\Omega H'$: dans le triangle ΩHK rectangle en H , $HK = 2 \tan \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

Conséquences

- $D' \parallel D \iff \theta \equiv 0 [\pi]$; si $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, $D' \perp D$; la distance de Ω à D' est égale à la distance de Ω à D .
- Si $\Omega \in D$, alors $\Omega \in D'$: D' est la droite passant par Ω telle que $(D, D') \equiv \theta [\pi]$.
- Pour $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$: $D' = D$ si et seulement si $\theta \equiv \pi$ et $\Omega \in D$. Tout cercle de centre Ω est invariant.

En effet, si $D' = D$, alors $\theta \equiv 0 [\pi]$, donc $\theta \equiv \pi$ et $r = s_\Omega$; pour $A \in D$, le milieu Ω de $[AA']$ est alors sur D . Réciproquement, s_Ω laisse invariante toute droite passant par Ω .

6**Expression analytique**

Le plan est muni d'un repère orthonormé **direct** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème (expression analytique)

Soit r la rotation de centre $\Omega(a; b)$ et d'angle θ . Le point $M'(x'; y')$ est l'image de $M(x; y)$ par r si et seulement si

$$\begin{cases} x' - a = (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta \\ y' - b = (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta \end{cases}$$

En particulier, pour $\Omega = O$: $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ et $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$.

Démonstration. Si $M = \Omega$, les deux membres sont nuls. Sinon, posons $\rho = \Omega M$ et $\varphi \equiv (\vec{i}, \Omega\vec{M})$: par la forme polaire (section 1), $x - a = \rho \cos \varphi$ et $y - b = \rho \sin \varphi$. Le vecteur $\Omega\vec{M}'$ a pour norme ρ et, par Chasles, $(\vec{i}, \Omega\vec{M}') \equiv (\vec{i}, \Omega\vec{M}) + (\Omega\vec{M}, \Omega\vec{M}') \equiv \varphi + \theta$. Donc, avec les formules d'addition :

$$x' - a = \rho \cos(\varphi + \theta) = \rho \cos \varphi \cos \theta - \rho \sin \varphi \sin \theta = (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta,$$

$$y' - b = \rho \sin(\varphi + \theta) = \rho \sin \varphi \cos \theta + \rho \cos \varphi \sin \theta = (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta.$$

Réciproquement, le point défini par ces formules est $r(M)$, puisque $r(M)$ les vérifie et qu'elles le déterminent. $\square$

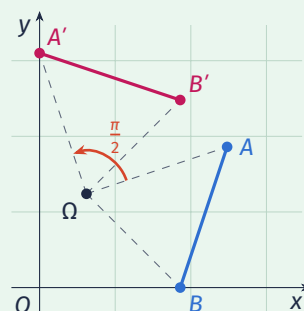
Les cas à connaître (centre O) :

- quart de tour direct $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$: $(x; y) \mapsto (-y; x)$; indirect $r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$: $(x; y) \mapsto (y; -x)$;
- symétrie centrale $r(O, \pi)$: $(x; y) \mapsto (-x; -y)$;
- $r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$: $x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$; par exemple $(2; 0) \mapsto (1; \sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}; 1) \mapsto (0; 2)$.

Exemple 1. $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ avec $\Omega(1; 2)$: $x' - 1 = -(y - 2)$ et $y' - 2 = x - 1$, soit

$$r : x' = -y + 3, \quad y' = x + 1.$$

$A(4; 3)$ a pour image $A'(0; 5)$ et $B(3; 0)$ a pour image $B'(3; 4)$.
Contrôle : $\vec{\Omega A}(3; 1)$ et $\vec{\Omega A'}(-1; 3)$ ont la même norme $\sqrt{10}$, un produit scalaire nul et un déterminant $3 \times 3 - 1 \times (-1) = 10 > 0$: l'angle vaut bien $+\frac{\pi}{2}$. Et $\vec{AB}(-1; -3)$, $\vec{A'B'}(3; -1)$: même norme, orthogonaux.



Théorème (reconnaître une rotation)

Soit f l'application qui à $M(x; y)$ associe $M'(x'; y')$ avec $x' = \alpha x - \beta y + c$, $y' = \beta x + \alpha y + d$, où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$. Alors f est la rotation d'angle θ tel que $\cos \theta = \alpha$ et $\sin \theta = \beta$, dont le centre est l'**unique point invariant** de f . (Si $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, f est la translation de vecteur $\vec{u}(c; d)$.)

Démonstration. Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, le point $(\alpha; \beta)$ est sur le cercle trigonométrique : il existe θ tel que $\cos \theta = \alpha$, $\sin \theta = \beta$. Les points invariants vérifient $(1 - \alpha)x + \beta y = c$ et $-\beta x + (1 - \alpha)y = d$: système de déterminant $(1 - \alpha)^2 + \beta^2 = 2 - 2\alpha \neq 0$ (car $\alpha \neq 1$, sinon $\beta = 0$). Il a une unique solution $\Omega(a; b)$. En retranchant $a = \alpha a - \beta b + c$ et $b = \beta a + \alpha b + d$ aux formules de f : $x' - a = \alpha(x - a) - \beta(y - b)$ et $y' - b = \beta(x - a) + \alpha(y - b)$: c'est l'expression de $r(\Omega, \theta)$. $\square$

Méthode : Comment reconnaître une rotation et trouver son centre

1. Vérifier la forme : le coefficient de x dans x' est égal à celui de y dans y' (α), et les deux autres sont opposés ($-\beta$ et β). 2. Vérifier que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, puis lire θ : $\cos \theta = \alpha$, $\sin \theta = \beta$. 3. Résoudre $x' = x$, $y' = y$: la solution est le centre.

Exemple 2. $f : x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2$. Ici $\alpha = \frac{1}{2}$ et $-\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: la forme est bonne et $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Donc f est une rotation d'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Point invariant : $x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \iff x = \sqrt{3}y$, puis $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}y + \frac{1}{2}y + 2 \iff 2y = 2 \iff y = 1$: $f = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{3}\right)$, $\Omega(\sqrt{3}; 1)$.

Contre-exemples. $x' = y$, $y' = x$: les coefficients de y dans x' et de x dans y' (1 et 1) ne sont pas opposés : c'est la **symétrie d'axe** $y = x$. $x' = 2x - y$, $y' = x + 2y$ a la bonne forme, mais $2^2 + 1^2 = 5 \neq 1$: f ne conserve pas les distances.

Méthode : Image d'une droite ou d'un cercle en coordonnées

On exprime x et y en fonction de x' et y' (on « remonte » par $r^{-1} = r(\Omega, -\theta)$), puis on remplace dans l'équation. **Exemple** (rotation de l'exemple 1) : $x' = -y + 3$ et $y' = x + 1$ donnent $x = y' - 1$ et $y = 3 - x'$.

- $D: x+2y-2=0$ devient $(y'-1)+2(3-x')-2=0$, soit $D': 2x-y-3=0$. Contrôle: $(2;0) \in D$ a pour image $(3;3) \in D'$, et les vecteurs normaux $(1;2)$ et $(2;-1)$ sont orthogonaux ($\theta = \frac{\pi}{2}$).
- Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ (centre O , rayon 1) devient $(3-x')^2 + (y'-1)^2 = 1$: c'est le cercle de centre $r(O) = (3;1)$ et de rayon 1.

7

Déterminer une rotation

Théorème (un point, son image et l'angle)

Soit A et A' deux points et $\theta \neq 0 [2\pi]$. Il existe une **unique** rotation d'angle θ qui transforme A en A' . Si $A \neq A'$, son centre Ω est le point de la **médiatrice** de $[AA']$ tel que $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega A'}) \equiv \theta$; pour $\theta \in]0, \pi]$, il est défini par $(\vec{AA'}, \vec{A\Omega}) \equiv \frac{\pi-\theta}{2}$, et pour $\theta \in]-\pi, 0[$ par $(\vec{AA'}, \vec{A\Omega}) \equiv -\frac{\pi+\theta}{2}$.

Démonstration. Dans un repère orthonormé direct, notons $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ et $(a; b)$ les coordonnées cherchées du centre. D'après la section 6, $r(\Omega, \theta)(A) = A'$ s'écrit

$$\begin{cases} (1-c)a + sb = x_{A'} - cx_A + sy_A \\ -sa + (1-c)b = y_{A'} - sx_A - cy_A \end{cases}$$

système linéaire de déterminant $(1-c)^2 + s^2 = 2 - 2\cos \theta \neq 0$: il a une **unique** solution. Le centre vérifie $\Omega A = \Omega A'$: il est sur la médiatrice de $[AA']$. Le triangle $\Omega AA'$ est isocèle en Ω , ses angles à la base sont égaux, et la somme des angles orientés d'un triangle donne $2(\vec{AA'}, \vec{A\Omega}) \equiv \pi - \theta [2\pi]$; on choisit la solution qui place Ω du côté direct de (AA') si $\theta > 0$ et du côté indirect si $\theta < 0$. $\square$

Théorème (deux points et leurs images)

Soit $A \neq B$ et A', B' deux points tels que $A'B' = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv \theta \neq 0 [2\pi]$. Il existe une **unique** rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$: son angle est θ , et si $A \neq A'$ et $B \neq B'$, son centre est sur les médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$; lorsque ces médiatrices sont sécantes, **le centre est leur point d'intersection**.

Démonstration. **Unicité**: section 3. **Existence**: soit r la rotation d'angle θ qui transforme A en A' (théorème précédent) et $B_1 = r(B)$. D'après la propriété fondamentale, $A'B_1 = AB = A'B'$ et $(\vec{AB}, \vec{A'B_1}) \equiv \theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$: les vecteurs $\vec{A'B_1}$ et $\vec{A'B'}$ sont égaux, donc $B_1 = B'$. Enfin $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$. $\square$

Remarque. Si $A = A'$, le centre est A . Si les deux médiatrices sont **confondues** en une droite Δ , la symétrie d'axe Δ échange A et A' , B et B' , et le centre est le point $(AB) \cap (A'B')$ de Δ . (Elles ne peuvent pas être parallèles et distinctes: elles passent par le centre.)

Méthode : Comment déterminer le centre et l'angle d'une rotation

1. Contrôler que $A'B' = AB$ (sinon, aucune rotation ne convient). **2. L'angle**: $\theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$, avec $\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{A'B'}}{AB^2}$ et $\sin \theta = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{A'B'})}{AB^2}$. **3. Le centre**: intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ (construction, ou équations $MA^2 = MA'^2$ et $MB^2 = MB'^2$); ou résolution du système de la section 6; ou construction avec l'angle à la base du triangle isocèle $\Omega AA'$. **4. Vérifier** en calculant $r(A)$ et $r(B)$ avec l'expression analytique.

Modèle de rédaction. « On a $A'B' = AB$. Soit r la rotation telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$; son angle θ vérifie $\theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$, et l'on trouve $\theta \equiv \dots$. Son centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$: il est sur les médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$, qui sont sécantes en $\dots$. Donc $r = r(\Omega, \theta)$. Vérification : $\dots$ »

Exemple : deux points et leurs images

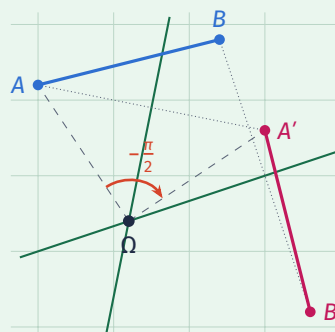
$A(0; 2)$, $B(4; 3)$, $A'(5; 1)$, $B'(6; -3)$. $\vec{AB}(4; 1)$, $\vec{A'B'}(1; -4)$: $AB = A'B' = \sqrt{17}$, $\vec{AB} \cdot \vec{A'B'} = 0$ et $\det(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = -16 - 1 = -17$, donc $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = -1$: $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Médiatrice de $[AA']$: $MA^2 = MA'^2 \iff x^2 + (y - 2)^2 = (x - 5)^2 + (y - 1)^2 \iff 5x - y = 11$. **Médiatrice de $[BB']$:**

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 6)^2 + (y + 3)^2 \iff x - 3y = 5$.

Solution : $\boxed{\Omega(2; -1)}$.

Vérification : $r : x' - 2 = y + 1$, $y' + 1 = -(x - 2)$, soit $x' = y + 3$, $y' = -x + 1$; on retrouve $A'(5; 1)$ et $B'(6; -3)$.



le centre est à l'intersection des médiatrices

Exemple : un point, son image et l'angle

Centre Ω de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme $A(-1; 0)$ en $A'(1; 0)$: **par le système** ($c = \frac{1}{2}$, $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$) : $\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $a = 0$, $b = \sqrt{3}$. **Par la géométrie :** $(\vec{AA'}, \vec{A\Omega}) \equiv \frac{\pi - \pi/3}{2} = \frac{\pi}{3}$, donc $AA'\Omega$ est équilatéral direct : Ω est sur l'axe des ordonnées, à la hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}AA' = \sqrt{3}$.

$\boxed{\Omega(0; \sqrt{3})}$.

Sans calcul. Dans un carré direct $ABCD$ de centre O , la rotation qui envoie A sur B et B sur C a pour angle $(\vec{AB}, \vec{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}$ et pour centre O (médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$) ; celle qui envoie A sur C et B sur D a pour angle $(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \pi$: c'est s_O .

8 Composer des rotations

Théorème (rotations de même centre)

Pour tous réels θ et θ' : $r(\Omega, \theta') \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + \theta') = r(\Omega, \theta) \circ r(\Omega, \theta')$: les angles s'ajoutent.

En particulier : $r(\Omega, \theta) \circ r(\Omega, -\theta) = \text{Id}$; $r(\Omega, \frac{\pi}{2}) \circ r(\Omega, \frac{\pi}{2}) = s_\Omega$; $s_\Omega \circ s_\Omega = \text{Id}$; $s_\Omega \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + \pi)$; et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r(\Omega, \theta)^n = r(\Omega, n\theta)$, où $r^n = r \circ r \circ \dots \circ r$ (n fois).

Démonstration. Le centre Ω est fixe. Pour $M \neq \Omega$, soit $M_1 = r(\Omega, \theta)(M)$ et $M' = r(\Omega, \theta')(M_1)$: $\Omega M' = \Omega M_1 = \Omega M$ et, par Chasles, $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M_1}) + (\vec{\Omega M_1}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta + \theta'$. Comme $\theta + \theta' = \theta' + \theta$, l'ordre est indifférent. La formule $r^n = r(\Omega, n\theta)$ se démontre par récurrence sur n (hérédité : $r^{n+1} = r \circ r^n = r(\Omega, \theta + n\theta)$). $\square$

Exemples : $r(\Omega, \frac{\pi}{3}) \circ r(\Omega, \frac{\pi}{6}) = r(\Omega, \frac{\pi}{2})$; $r(\Omega, \frac{2\pi}{3})^3 = r(\Omega, 2\pi) = \text{Id}$; $r(\Omega, \frac{3\pi}{4}) \circ r(\Omega, \frac{5\pi}{4}) = \text{Id}$: ces deux

rotations sont réciproques l'une de l'autre, car $\frac{5\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$. **Ordre** : $r(\Omega, \theta)^n = \text{Id} \iff n\theta \equiv 0 [2\pi]$; pour $\theta = \frac{4\pi}{15}$, cela s'écrit $15 \mid 2n$, soit $15 \mid n$: le plus petit $n \geq 1$ est 15 ; et $r^n = s_\Omega$ est impossible ($4n = 15(2k+1)$: un nombre pair égal à un nombre impair).

Remarque. La composée de deux rotations de centres **différents** n'est pas au programme ; on ne l'étudie, si besoin, que par un calcul explicite en coordonnées (section 6).

Symétries axiales. Soit D une droite passant par Ω , dirigée par $\vec{u}$, et s_D la symétrie orthogonale d'axe D . Dans le repère orthonormé direct d'origine Ω dont le premier vecteur dirige D , s_D s'écrit $(x; y) \mapsto (x; -y)$: elle transforme $\rho(\cos \varphi; \sin \varphi)$ en $\rho(\cos(-\varphi); \sin(-\varphi))$. Donc, si $M_1 = s_D(M)$: $\Omega M_1 = \Omega M$ et $(\vec{u}, \Omega \vec{M}_1) \equiv -(\vec{u}, \Omega \vec{M}) [2\pi]$: **une symétrie axiale change les angles orientés en leurs opposés.**

Théorème (composée de deux symétries axiales d'axes sécants)

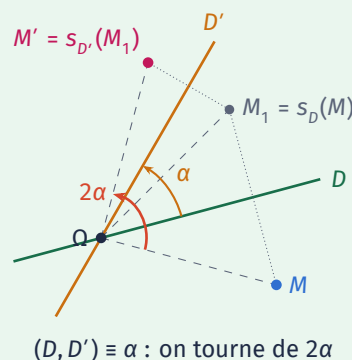
Soit D et D' deux droites sécantes en Ω . Alors $s_{D'} \circ s_D = r(\Omega, 2(D, D'))$.

L'ordre compte : $s_D \circ s_{D'} = r(\Omega, -2(D, D'))$. Si $D \perp D'$, $s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_{D'} = s_\Omega$. (Si $D \parallel D'$, la composée est une translation.)

Démonstration. $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dirigent D et D' . Le point Ω est fixe. Pour $M \neq \Omega$, soit $M_1 = s_D(M)$ et $M' = s_{D'}(M_1)$: $\Omega M' = \Omega M_1 = \Omega M$. D'après la remarque précédente, $(\vec{u}, \Omega \vec{M}_1) \equiv -(\vec{u}, \Omega \vec{M}) = (\Omega \vec{M}, \vec{u})$, donc par Chasles $(\Omega \vec{M}, \Omega \vec{M}_1) \equiv (\Omega \vec{M}, \vec{u}) + (\vec{u}, \Omega \vec{M}_1) \equiv 2(\vec{u}, \Omega \vec{M}_1)$. De même $(\Omega \vec{M}_1, \Omega \vec{M}') \equiv 2(\Omega \vec{M}_1, \vec{u}')$. En ajoutant :

$$(\Omega \vec{M}, \Omega \vec{M}') \equiv 2(\vec{u}, \Omega \vec{M}_1) + 2(\Omega \vec{M}_1, \vec{u}') \equiv 2(\vec{u}, \vec{u}') [2\pi].$$

Enfin $2(\vec{u}, \vec{u}')$ ne change pas (à 2π près) si l'on remplace $\vec{u}$ par $-\vec{u}$: c'est $2(D, D')$. $\square$



Théorème (décomposer une rotation)

Soit $r = r(\Omega, \theta)$ et D n'importe quelle droite passant par Ω . Si D' est la droite passant par Ω telle que $(D, D') \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$, alors $r = s_{D'} \circ s_D$. De même $r = s_D \circ s_{D''}$, où $(D'', D) \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$.

En effet, $s_{D'} \circ s_D = r(\Omega, 2 \cdot \frac{\theta}{2}) = r$; le choix libre de D est très utile (section 13). **Exemples.** Avec $\Delta : y = x$: $s_{(Ox)}$ envoie $(x; y)$ sur $(x; -y)$, puis s_Δ envoie $(x; -y)$ sur $(-y; x)$: on retrouve le quart de tour $s_\Delta \circ s_{(Ox)} = r(O, \frac{\pi}{2})$, car $((Ox), \Delta) \equiv \frac{\pi}{4}$. Dans l'autre ordre, $(x; y) \mapsto (y; x) \mapsto (y; -x)$: $s_{(Ox)} \circ s_\Delta = r(O, -\frac{\pi}{2})$. Si ABC est équilatéral direct et H le milieu de $[BC]$: $s_{(AC)} \circ s_{(AB)} = r(A, \frac{2\pi}{3})$ et $s_{(AH)} \circ s_{(AB)} = r(A, \frac{\pi}{3})$, car $((AB), (AH)) \equiv \frac{\pi}{6}$.

9 Démontrer avec une rotation

Méthode : Comment démontrer avec une rotation

1. Repérer la rotation cachée : triangle équilatéral direct ABC : $r(A, \frac{\pi}{3})(B) = C$; triangle rectangle isocèle direct en A : $r(A, \frac{\pi}{2})(B) = C$; carré : $r(O, \frac{\pi}{2})$ autour du centre, ou un quart de tour autour d'un sommet. **2. Écrire les images de deux points**, en justifiant chacune par

la définition (même distance au centre, angle θ). **3. Conclure :** si r envoie $[MN]$ sur $[PQ]$, alors $PQ = MN$ et $(\vec{MN}, \vec{PQ}) \equiv \theta$ (longueurs, angle, orthogonalité si $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) ; puis, par les conservations : milieux, alignements, concours.

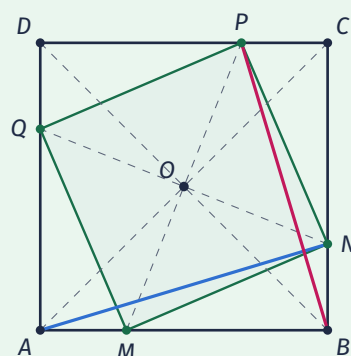
Modèle de rédaction. « Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Comme $AB = AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$, on a $r(B) = C$; de même $r(D) = E$. La rotation r transforme donc le segment $[BD]$ en $[CE]$; d'après la propriété fondamentale, $CE = BD$ et $(\vec{BD}, \vec{CE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. »

Exemple : un carré dans un carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$. La rotation $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ transforme A, B, C, D en B, C, D, A .

Comme $\vec{AM} = k\vec{AB}$ (avec $k = \frac{AM}{AB}$), on a $Br(\vec{M}) = k\vec{BC}$: $r(M) = N$; de même $r(N) = P$, $r(P) = Q$, $r(Q) = M$.

- $OM = ON$ et $(\vec{OM}, \vec{ON}) \equiv \frac{\pi}{2}$, de même pour N, P, Q : **$MNPQ$ est un carré de centre O .**
- **Concours :** $r \circ r = s_O$ envoie M sur P et N sur Q : O est le milieu de $[MP]$ et de $[NQ]$, donc les droites (MP) , (NQ) , (AC) et (BD) sont concourantes en O .
- r envoie A sur B et N sur P : **$AN = BP$ et $(AN) \perp (BP)$.**

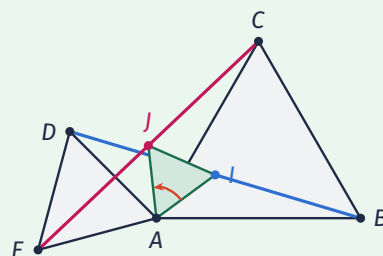


Exemple : deux triangles équilatéraux de même sommet

Soit ABC et ADE deux triangles équilatéraux directs, de sommet commun A , et I, J les milieux de $[BD]$ et $[CE]$. La rotation $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$ envoie B sur C et D sur E (modèle de

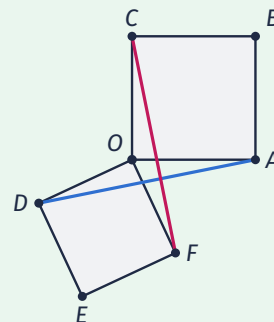
rédaction) : **$CE = BD$ et $(\vec{BD}, \vec{CE}) \equiv \frac{\pi}{3}$** . Elle conserve

les milieux : $r(I) = J$, donc $AI = AJ$ et $(\vec{AI}, \vec{AJ}) \equiv \frac{\pi}{3}$: **le triangle AIJ est équilatéral**, quelle que soit la position du second triangle.



Exemple : deux carrés de même sommet

Soit $OABC$ et $ODEF$ deux carrés directs de sommet commun O . La rotation $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie A sur C ($OA = OC$, $(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}$) et D sur F : elle transforme $[AD]$ en $[CF]$, donc **$CF = AD$ et $(AD) \perp (CF)$** . Le triangle OAD a pour image OCF : ils ont la même aire.

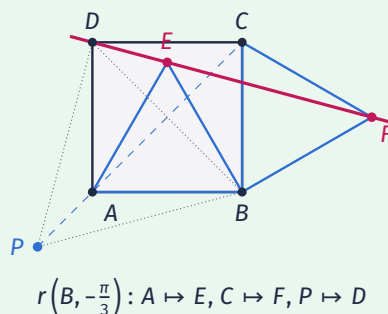


Exemple : un alignement surprenant

Soit $ABCD$ un carré direct, ABE le triangle équilatéral construit à l'intérieur du carré et BCF le triangle équilatéral construit à l'extérieur. Montrons que D, E, F sont alignés.

La rotation : $r = r(B, -\frac{\pi}{3})$ envoie A sur E et C sur F (triangles équilatéraux indirects BAE et BCF).

L'antécédent de D : soit $P = r^{-1}(D) = r(B, \frac{\pi}{3})(D)$. Alors $BP = BD$ et $(\vec{BD}, \vec{BP}) \equiv \frac{\pi}{3}$: le triangle BDP est équilatéral, donc $PB = PD$ et P est sur la médiatrice de $[BD]$, qui est la diagonale (AC) . **Conclusion :** A, C, P sont alignés, donc leurs images E, F, D aussi (conservation de l'alignement). $\square$



$$r(B, -\frac{\pi}{3}) : A \mapsto E, C \mapsto F, P \mapsto D$$

10

Construire et chercher des lieux
Méthode : Comment construire ou trouver un lieu avec une rotation

Construire un point N qui doit appartenir à une figure $\mathcal{G}$ et être l'image par r d'un point M d'une figure $\mathcal{F}$: **analyse** : $N = r(M)$ avec $M \in \mathcal{F}$, donc $N \in r(\mathcal{F}) \cap \mathcal{G}$; **synthèse** : réciproquement, tout point N de $r(\mathcal{F}) \cap \mathcal{G}$ convient, avec $M = r^{-1}(N) \in \mathcal{F}$; **discussion** : le nombre de solutions est le nombre de points de $r(\mathcal{F}) \cap \mathcal{G}$. **Lieu** : si M décrit $\mathcal{F}$, alors $N = r(M)$ décrit **exactement** $r(\mathcal{F})$ (une droite, un cercle...), car r est bijective.

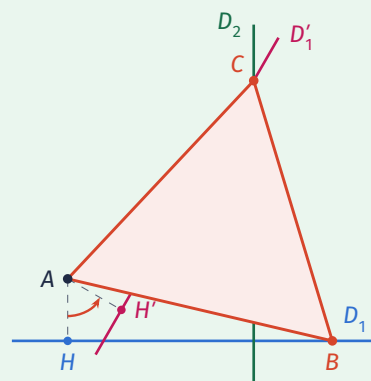
Exemple : un triangle équilatéral de sommets sur deux droites

On donne $A(0;0)$, $D_1 : y = -1$ et $D_2 : x = 3$. Construire un triangle équilatéral **direct** ABC avec $B \in D_1$ et $C \in D_2$.

Analyse : $C = r(A, \frac{\pi}{3})(B)$, donc $C \in D'_1 \cap D_2$, où $D'_1 = r(A, \frac{\pi}{3})(D_1)$. Le projeté de A sur D_1 est $H(0; -1)$, d'image $H'(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$: D'_1 est la perpendiculaire à (AH') en H' , d'équation $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = AH'^2 = 1$, soit $\sqrt{3}x - y = 2$.

Synthèse : $D'_1 \cap D_2$ est le point $C(3; 3\sqrt{3} - 2)$, et

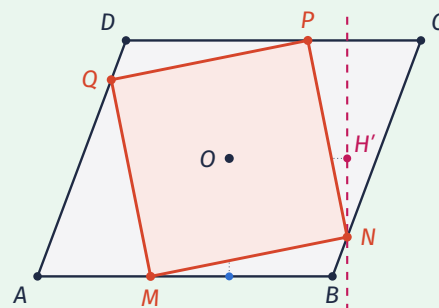
$B = r(A, -\frac{\pi}{3})(C) = (6 - \sqrt{3}; -1) \in D_1$. Contrôle : $AB^2 = AC^2 = 40 - 12\sqrt{3}$. **Discussion :** une seule solution directe ; une autre, indirecte, avec $r(A, -\frac{\pi}{3})$.



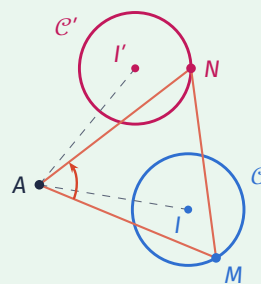
Exemple : un carré inscrit dans un parallélogramme

Soit le parallélogramme $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C\left(\frac{13}{2};4\right)$, $D\left(\frac{3}{2};4\right)$, de centre $O\left(\frac{13}{4};2\right)$. On cherche un carré direct $MNPQ$ avec $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$.

Analyse : le milieu de $[MP]$ est sur la parallèle à (AB) à mi-distance de (AB) et (CD) , celui de $[NQ]$ sur la parallèle à (BC) à mi-distance de (BC) et (DA) : le centre du carré est donc O , et $N = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(M) \in r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)((AB))$. Cette droite est $x = \frac{21}{4}$ (perpendiculaire en $H'\left(\frac{21}{4};2\right)$ à (OH') , image du projeté $H\left(\frac{13}{4};0\right)$). **Synthèse :** elle coupe (BC) en $N\left(\frac{21}{4};\frac{2}{3}\right)$; puis $M = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)(N) = \left(\frac{23}{12};0\right)$, $P = s_O(M) = \left(\frac{55}{12};4\right)$, $Q = s_O(N) = \left(\frac{5}{4};\frac{10}{3}\right)$: $MNPQ$ est un carré de centre O , de côté $MN = \frac{2\sqrt{26}}{3}$.



Lieux. 1. Soit A un point fixe et $\mathcal{C}$ un cercle de centre I et de rayon R ne passant pas par A . À tout point M de $\mathcal{C}$, on associe le point N tel que AMN soit équilatéral direct. Alors $N = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(M)$: quand M décrit $\mathcal{C}$, N décrit le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $I' = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(I)$ et de rayon R (figure) ; et tout point de $\mathcal{C}'$ est atteint. **2.** Si M décrit une droite D et si OMN est rectangle isocèle direct en O , alors $N = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(M)$ décrit la droite $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(D)$, perpendiculaire à D . **3.** Si M est fixe et si l'angle θ varie, $r(O, \theta)(M)$ décrit le cercle de centre Ω passant par M .



11

Pour aller plus loin

Le quart de tour en coordonnées. Dans un repère orthonormé direct, on note $\rho(\vec{u})$ le vecteur de coordonnées $(-y; x)$ si $\vec{u}(x; y)$: si r est un quart de tour direct (de centre quelconque), $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors $\vec{A'B'} = \rho(\vec{AB})$ (section 6). On vérifie que $\|\rho(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, $\vec{u} \cdot \rho(\vec{u}) = 0$, $\det(\vec{u}, \rho(\vec{u})) = x^2 + y^2$, $\rho(\rho(\vec{u})) = -\vec{u}$, $\rho(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(\vec{u}) + \rho(\vec{v})$ et $\rho(k\vec{u}) = k\rho(\vec{u})$. **Carré direct :** $ABCD$ est un carré direct $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC} = \rho(\vec{AB})$. Ainsi, pour $A(1;1)$ et $B(4;2)$: $\vec{AB}(3;1)$, $\rho(\vec{AB})(-1;3)$, d'où $D(0;4)$ et $C(3;5)$.

Carrés construits sur les côtés d'un parallélogramme (Thébault). Soit $ABCD$ un parallélogramme direct de centre O , et P, Q, R, S les centres des carrés construits à l'extérieur sur $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Avec $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ (donc $\vec{OC} = -\vec{a}$, $\vec{OD} = -\vec{b}$), chaque centre étant à la distance $\frac{1}{2}AB$ du milieu, du côté droit : $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\rho(\vec{b} - \vec{a})$ et $\vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \frac{1}{2}\rho(-\vec{a} - \vec{b})$. Comme $\rho \cdot \rho = -Id$: $\rho(\vec{OP}) = \frac{1}{2}\rho(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{OQ}$, soit $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(P) = Q$; de même (remplacer $(\vec{a}, \vec{b})$ par $(\vec{b}, -\vec{a})$) $Q \mapsto R \mapsto S \mapsto P$: $PQRS$ est un carré de centre O .

Rotations d'un polygone régulier. Pour un polygone régulier direct $A_1 \dots A_n$ de centre O , $OA_1 = \dots = OA_n$ et $(\vec{OA}_k, \vec{OA}_{k+1}) \equiv \frac{2\pi}{n}$: les n rotations $r\left(O, \frac{2k\pi}{n}\right)$ ($0 \leq k \leq n-1$) le conservent. Ce sont les seules : une telle rotation permute les sommets, donc fixe leur isobarycentre O ; son centre est O et $r(A_1)$

est un sommet A_k , d'où l'angle $\frac{2(k-1)\pi}{n}$. Triangle équilatéral : 3 ; carré : 4 ; hexagone : 6. Et $r\left(O, \frac{2\pi}{n}\right)$ est la composée de deux symétries d'axes du polygone faisant l'angle $\frac{\pi}{n}$ (section 8).

Carrés construits sur deux côtés d'un triangle. Soit ABC un triangle direct, $ABDE$ et $ACFG$ les carrés construits à l'extérieur (E et G adjacents à A) : $\vec{AB} = \rho(\vec{AE})$ et $\vec{AG} = \rho(\vec{AC})$.

1. $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie E sur B et C sur G : $EC = BG$ et $(EC) \perp (BG)$ (section 9). 2. **Un concours** : soit X le point tel que $\vec{AX} = \rho(\vec{BC})$; il est sur la hauteur issue de A . Alors

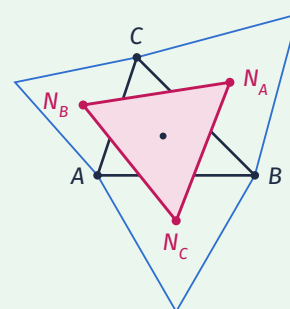
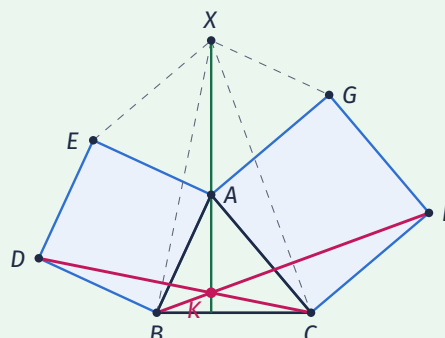
$$\vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BD} = -\vec{BC} - \rho(\vec{AB}) = \rho(\rho(\vec{BC}) - \vec{AB}) = \rho(\vec{BX}),$$

car $\vec{BX} = \vec{BA} + \vec{AX}$; de même $\vec{BF} = \vec{BC} + \rho(\vec{AC}) = -\rho(\vec{CX})$. Donc $(CD) \perp (BX)$ et $(BF) \perp (CX)$: les droites (CD) , (BF) et (XA) sont les **trois hauteurs** du triangle XBC . **Elles sont concourantes** : (CD) , (BF) et la hauteur issue de A du triangle ABC passent par un même point K .

Le théorème de Napoléon (admis). Si l'on construit des triangles équilatéraux à l'extérieur sur les trois côtés d'un triangle quelconque, leurs **centres** forment un triangle équilatéral. **Vérification** sur $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(1;3)$ (triangle direct). Le centre du triangle équilatéral extérieur sur $[AB]$ est $N_C = I - \frac{\sqrt{3}}{6}\rho(\vec{AB})$, où I est le milieu de $[AB]$ (distance $\frac{AB}{2\sqrt{3}}$ au milieu) : $N_C\left(2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $N_A\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N_B\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. Par exemple $N_A N_B\left(-2 - \sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, d'où $N_A N_B^2 = 7 + 4\sqrt{3} + \frac{1}{3}$; et l'on trouve

$$N_A N_B^2 = N_B N_C^2 = N_C N_A^2 = \frac{22}{3} + 4\sqrt{3}.$$

Le centre du triangle de Napoléon est $\left(\frac{5}{3}; 1\right)$: c'est aussi le centre de gravité de ABC .



12

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
« $\theta > 0$: je tourne dans le sens des aiguilles d'une montre »	le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre ; pour $\theta < 0$, on tourne dans le sens des aiguilles
$r(M) = M' \iff (\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega M}) \equiv \theta$	$(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta$: on part du point vers son image ; l'autre ordre donne $-\theta$
« ABC est équilatéral, donc $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B) = C$ »	seulement si ABC est direct ; sinon $r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(B) = C$: on vérifie toujours le sens de la figure
$r(\Omega, \theta)^{-1} = r(\Omega, \theta)$ ou $r\left(\Omega, \frac{1}{\theta}\right)$	$r(\Omega, \theta)^{-1} = r(\Omega, -\theta)$; seules Id et s_Ω sont leur propre réciproque

« $r\left(\Omega, -\frac{3\pi}{2}\right)$ est un quart de tour indirect, car son angle est négatif »	l'angle est défini à 2π près : $-\frac{3\pi}{2} = -2\pi + \frac{\pi}{2}$, c'est le quart de tour direct ; on lit le sens sur la mesure principale
« une droite passant par Ω est invariante »	son image passe par Ω mais fait l'angle θ avec elle ($(D, D') \equiv \theta [\pi]$) ; elle n'est invariante que si $\theta \equiv 0 [\pi]$
« l'image du cercle de centre I est un cercle de centre I' »	son centre est $I' = r(I)$, son rayon est le même ; le centre reste I seulement si $I = \Omega$
« une isométrie qui fixe Ω est une rotation de centre Ω »	la symétrie d'axe D (avec $\Omega \in D$) fixe Ω et conserve les distances, mais change les angles orientés en leurs opposés : ce n'est pas une rotation
« le centre de la rotation qui envoie A sur A' est le milieu de $[AA']$ »	seulement si $\theta \equiv \pi$; en général, il est sur la médiatrice de $[AA']$, à la position fixée par θ
« le centre est toujours l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ »	si elles sont confondues, le centre est $(AB) \cap (A'B')$; si $A = A'$, c'est A ; et on vérifie d'abord $A'B' = AB$
$x' = (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta$ (centre $\Omega(a; b)$)	$x' - a = (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta$: on n'oublie pas de rajouter a (et b)
« $x' = y, y' = x$ est un quart de tour »	c'est la symétrie d'axe $y = x$; le quart de tour direct de centre O est $(x; y) \mapsto (-y; x)$
$s_{D'} \circ s_D = r(\Omega, (D, D')) = s_D \circ s_{D'}$	$s_{D'} \circ s_D = r(\Omega, 2(D, D'))$: l'angle est doublé , et l'ordre change son signe
$r(\Omega, \theta) \circ r(\Omega, \theta') = r(\Omega, \theta + \theta')$	les angles s'ajoutent : $r(\Omega, \theta + \theta')$ (même centre seulement)

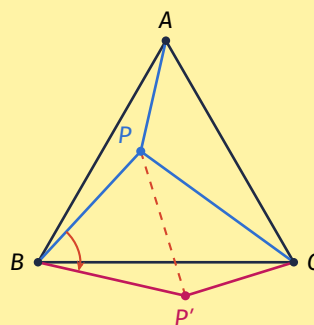
13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : « voir » la rotation cachée

Un triangle équilatéral, un triangle isocèle rectangle, un carré, un hexagone régulier cachent une rotation de $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{2\pi}{3}$: elle déplace des longueurs **sans les changer**.

Exemple : ABC est équilatéral direct et P un point intérieur tel que $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$. La rotation $r = r\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)$ envoie A sur C ; soit $P' = r(P)$. Alors BPP' est équilatéral ($PP' = 4$) et $P'C = PA = 3$. Le triangle $PP'C$ a pour côtés 3, 4, 5 : il est rectangle en P' (Pythagore). Donc $\widehat{BP'C} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, et $\widehat{APB} = \widehat{CP'B} = 150^\circ$ (la rotation conserve les angles). Enfin, par Al-Kashi dans APB : $AB^2 = 9 + 16 - 24 \cos 150^\circ = 25 + 12\sqrt{3}$.



★ **Astuce de concours : transporter une longueur pour redresser une ligne brisée**

On fait tourner un morceau de la figure pour mettre bout à bout des longueurs dispersées.

Exemple : $ABCD$ est un carré direct de côté 1, $M \in [BC]$, $N \in [CD]$ et $\widehat{MAN} = 45^\circ$. La rotation $r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ envoie D sur B et N sur un point N' de la droite (BC) , au-delà de B , avec $BN' = DN$. Comme $AN' = AN$ et $\widehat{MAN'} = 90^\circ - 45^\circ = \widehat{MAN}$, la droite (AM) est un axe de symétrie de la figure NAN' : $MN = MN' = MB + BN'$, soit $MN = BM + DN$. Le périmètre du triangle CMN vaut donc toujours $CM + CN + BM + DN = 2$.

★ **Astuce de concours : le quart de tour en coordonnées : $(x; y) \mapsto (-y; x)$**

Pour montrer que $CD = AB$ et $(CD) \perp (AB)$, il suffit de vérifier que $\vec{CD} = \pm \rho(\vec{AB})$, sans calculer de racine. **Exemple :** $A(1; 2)$, $B(4; 3)$, $C(0; 1)$, $D(-1; 4)$: $\vec{AB}(3; 1)$ et $\vec{CD}(-1; 3) = \rho(\vec{AB})$. En prime, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie A sur C envoie B sur D .

★ **Astuce de concours : trouver le centre sans hésiter**

Un point fixe connu **est** le centre. Sinon : résoudre $x' = x$, $y' = y$ en coordonnées ; couper les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$; ou placer Ω sur la médiatrice de $[AA']$ avec l'angle à la base $\frac{\pi - |\theta|}{2}$ du triangle isocèle $\Omega AA'$. L'angle se lit sur **un** vecteur et son image : $\theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$.

★ **Astuce de concours : décomposer en deux symétries**

On écrit $r(\Omega, \theta) = s_{D'} \circ s_D$ en choisissant D passant par un point utile M : alors $s_D(M) = M$, donc $r(M)$ **est le symétrique de M par rapport à D'** , la bissectrice de l'angle $M\Omega M'$. **Exemple :** $r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $M(2; 0)$: avec $D = (Ox)$, D' fait l'angle $\frac{\pi}{3}$ avec (Ox) , et le symétrique de M par rapport à D' est $(-1; \sqrt{3})$.

14

L'essentiel du chapitre en une page

Angles orientés (rappels)

Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) \pmod{2\pi}$;

$(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})$; $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$,

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Droites : (D, D') défini à π près, $2(D, D')$ à 2π près.

Définition $r = r(\Omega, \theta)$

$r(\Omega) = \Omega$; pour $M \neq \Omega$:

$$r(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$\theta \equiv 0$: Id ; $\theta \equiv \pi$: s_Ω ; $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2}$: quarts de tour.

$\theta \neq 0$: Ω est le **seul** point invariant.

r est bijective : $r(\Omega, \theta)^{-1} = r(\Omega, -\theta)$.

Propriété fondamentale

$r(M) = M'$, $r(N) = N' \Rightarrow M'N' = MN$ et $(\vec{M'N'}, \vec{M'N'}) \equiv \theta$.

Deux points distincts et leurs images déterminent r ; $\theta \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})$.

Conservations

Distances, produit scalaire, angles orientés, milieu, barycentre, alignement, parallélisme, orthogonalité, aires, orientation.

Images

Droite $(AB) \mapsto (A'B')$, $((AB), (A'B')) \equiv \theta \pmod{\pi}$;

$\Omega \in D \Rightarrow \Omega \in D'$.

Image de D : H projeté de Ω sur D ; $D' \perp (\Omega H')$ en H' .

Segment $\mapsto$ segment ; cercle $\mathcal{C}(I, R) \mapsto \mathcal{C}(I', R)$; triangle, polygone $\mapsto$ figure de mêmes côtés et angles.

Expression analytique (repère orthonormé direct)

$$\Omega(a; b) : \begin{cases} x' - a = (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta \\ y' - b = (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta \end{cases}$$

$$r\left(O, \frac{\pi}{2}\right) : (x; y) \mapsto (-y; x) ; r(O, \pi) : (x; y) \mapsto (-x; -y).$$

$x' = \alpha x - \beta y + c$, $y' = \beta x + \alpha y + d$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$: rotation, $\cos \theta = \alpha$, $\sin \theta = \beta$, centre = point invariant.

Déterminer une rotation

$A \neq A'$ et $\theta \neq 0$: une unique rotation, centre sur la médiatrice de $[AA']$ (système de déterminant $2 - 2 \cos \theta$).

$A'B' = AB$: $\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{A'B'}}{AB^2}$, $\sin \theta = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{A'B'})}{AB^2}$; centre = intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ (si confondues : $(AB) \cap (A'B')$).

Composer

$r(\Omega, \theta') \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + \theta')$; $r(\Omega, \theta)^n = r(\Omega, n\theta)$.

$D \cap D' = \{\Omega\}$: $s_{D'} \circ s_D = r(\Omega, 2(D, D'))$; $D \perp D'$: s_Ω .

$r(\Omega, \theta) = s_{D'} \circ s_D$, $D \ni \Omega$ quelconque,

$(D, D') \equiv \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$.

Démontrer, construire

Équilatéral direct ABC : $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B) = C$; isocèle

rectangle direct en A : $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(B) = C$; carré :

$r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

$r([MN]) = [PQ] \Rightarrow PQ = MN$, $(\vec{MN}, \vec{PQ}) \equiv \theta$.

Construire : $N = r(M)$, $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$N \in r(\mathcal{F}) \cap \mathcal{G}$; lieu de $r(M)$: $r(\mathcal{F})$.

Vecteurs : $\rho(x; y) = (-y; x)$; $ABCD$ carré direct

$\iff \vec{AD} = \vec{BC} = \rho(\vec{AB})$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations : $r(\Omega, \theta)$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ , s_Ω la symétrie de centre Ω ; le repère est orthonormé direct. Un triangle ABC est *direct* si $(\vec{AB}, \vec{AC})$ a une mesure dans $]0; \pi[$, un carré $ABCD$ si $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

15 Niveau I • Bases

Exercice 1 Angles orientés : échauffement ★

corrigé p. 39

- Mesures principales de $\frac{35\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{4}$, $\frac{100\pi}{3}$? 2. $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$: mesures de $(\vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{u})$, $(-\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, -\vec{w})$, $(-\vec{v}, -\vec{w})$, $(3\vec{v}, -2\vec{u})$? Que dire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
- OAB est équilatéral direct et OBC isocèle rectangle en O avec $(\vec{OB}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Mesures de $(\vec{OA}, \vec{OC})$, $(\vec{AO}, \vec{OC})$ et $(\vec{BA}, \vec{BC})$ (Chasles en passant par $\vec{BO}$) ?

Exercice 2 Sur le cercle trigonométrique ★

corrigé p. 39

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique, $M(t)$ son point de coordonnées $(\cos t; \sin t)$ et $A = M\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- Montrer que $r(O, \alpha)$ transforme $M(t)$ en $M(t + \alpha)$. 2. Placer A et ses images A_1, A_2, A_3, A_4 par $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, $r\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)$, $r(O, \pi)$, $r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$; coordonnées ?
- Quelle rotation de centre O transforme A en $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$? A_2 en A_4 ? 4. Nature du triangle AA_1A_3 ?

Exercice 3 Sur un quadrillage ★

corrigé p. 40

$\Omega(1; 1)$, $r = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$: si $\Omega\vec{M}(a; b)$, alors $\Omega\vec{M}'(b; -a)$.

- Placer $A(4; 1)$, $B(4; 3)$ et leurs images A', B' . Images de $[AB]$ et de la demi-droite $[AB)$? Directions de (AB) et $(A'B')$?
- D est la droite $y = 3$ et H le projeté orthogonal de Ω sur D : construire $H' = r(H)$, puis $D' = r(D)$ sans autre point ; équation de D' ?
- Construire l'image du cercle de centre $I(-2; 2)$ et de rayon 1. 4. Trouver le point P de D dont l'image est sur D .

Exercice 4 Rotation ou pas ? ★

corrigé p. 40

- $A(1; 0)$, $B(3; 0)$, $C(1; 2)$; on donne les images respectives de A, B, C : $T_1 : (0; 1), (0; 3), (-2; 1)$; $T_2 : (-1; 0), (-3; 0), (-1; -2)$; $T_3 : (0; 1), (0; 3), (2; 1)$; $T_4 : (0; -1), (0; -3), (2; -1)$. Lesquels sont images de ABC par une rotation de centre O ? Angle ?
- Vrai ou faux ? a) $r\left(\Omega, \frac{11\pi}{2}\right)$ est un quart de tour indirect. b) $r(\Omega, -3\pi) = s_\Omega$. c) $r\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)^{-1} = r\left(\Omega, \frac{5\pi}{3}\right)$. d) Si $r(A) = B$, alors $r(B) = A$. e) Une transformation qui conserve les distances et fixe O est une rotation de centre O .

Exercice 5 Calculer des images en coordonnées ★

corrigé p. 40

- Expressions analytiques de $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, $r(O, \pi)$, $r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$; image de $A(3; -2)$ par chacune ?
- $r_1 = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, $\Omega(-1; 2)$: montrer que $x' = 1 - y$, $y' = x + 3$; calculer $r_1(A)$, $r_1(O)$, $r_1(B)$ pour $B(1; 1)$; vérifier $\Omega A = \Omega A'$ et $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega A'} = 0$.
- Expression analytique de $r_2 = r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$; images de $P(2\sqrt{3}; 2)$, $Q(-2; 0)$, $R(1; -\sqrt{3})$; vérifier $OP = OP'$.

Exercice 6 La propriété fondamentale ★

corrigé p. 40

ABC est un triangle direct rectangle en A , $AB = 3$, $AC = 4$, et I le milieu de $[BC]$. Une rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme A, B, C, I en A', B', C', I' .

- Calculer $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, l'aire de $A'B'C'$; montrer que I' est le milieu de $[B'C']$; $A'I'$? 2. Mesures de $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$, $(\vec{AB}, \vec{A'B'})$, $(\vec{BC}, \vec{B'C'})$? (BC) et $(B'C')$ sont-elles parallèles ? Angle ? 3. Si $\Omega = A$, calculer BB' et CC' .

Exercice 7 Une figure et son image ★

corrigé p. 41

$AB = 4$, I est le milieu de $[AB]$, $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, Δ la médiatrice de $[AB]$; $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $B' = r(B)$, $I' = r(I)$.

- Construire B', I' . Nature de ABB' ? Montrer que I' est le milieu de $[AB']$ et que $I' \in \mathcal{C}$.
- Construire les images $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, Δ' de Δ et celle de la demi-droite $[BA)$; montrer que Δ' passe par B .
- K est le milieu de $[BB']$: montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A; K\}$. 4. Montrer que Δ et Δ' se coupent au centre G de ABB' et font un angle de 60° .

Exercice 8 La rotation réciproque ★

corrigé p. 41

- Réciproque de $r\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$? Montrer que Ω est son seul point invariant.
- $r = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\Omega(3; 1)$. a) Montrer que $x' = y + 2$, $y' = -x + 4$. b) Antécédent de $P(5; 0)$: par un système, puis avec r^{-1} . c) Retrouver le point invariant. d) Expression de $r \circ r$? La reconnaître. e) Montrer que tout point $N(\alpha; \beta)$ a un unique antécédent : r est une bijection.

16

Niveau 2 • Bac

Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : un carré, quatre triangles ★★

corrigé p. 41

$ABCD$ est un carré direct de centre O et de côté 4; $E = r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(B)$, $F = r\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)(C)$, $G = r\left(C, -\frac{\pi}{3}\right)(D)$, $H = r\left(D, -\frac{\pi}{3}\right)(A)$, et $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Montrer que ABE est équilatéral, E et D de part et d'autre de (AB) (de même pour F, G, H); figure.
- Rappeler $r(A)$, $r(B)$, $r(C)$, $r(D)$; par conservation des distances et des angles, montrer que $r(E) = F$; de même $r(F) = G$, $r(G) = H$, $r(H) = E$. 3. En déduire que $EFGH$ est un carré de centre O .
- Montrer que $AF = BG$, $(AF) \perp (BG)$ et $CH = AF$. 5. Calculer OE (milieu de $[AB]$), puis EF et AF .

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : déterminer une rotation ★★

corrigé p. 42

On donne $A(1; -1)$, $B(3; 1)$, $A'(3; 3)$, $B'(1; 5)$ et $C(5; 3)$.

1. a) Vérifier que $AB = A'B'$ et que $A'B'$ se déduit de $\vec{AB}$ par $(a; b) \mapsto (-b; a)$; mesure de $(\vec{AB}, \vec{A'B'})$?
b) Justifier qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$; son angle ?
2. a) Équations des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$; centre Ω de r ? b) Expression analytique de r ; vérifier les images de A et B . c) Figure.
3. Montrer qu'il existe une unique rotation r' telle que $r'(A) = B'$ et $r'(B) = A'$; angle ? Que dire des médiatrices de $[AB']$ et $[BA']$? Calculer le centre Ω' de r' (expression analytique) et vérifier que $\Omega' \in (AB) \cap (A'B')$.
4. Une rotation peut-elle transformer A en A' et B en C ?

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : expression analytique ★★

corrigé p. 42

f associe à $M(x; y)$ le point $M'(x'; y')$ tel que $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3}$.

1. Montrer que f a un unique point invariant Ω , puis que f est une rotation (centre, angle).
2. Calculer $O' = f(O)$; vérifier $\Omega O = \Omega O'$.
3. Équation de l'image par f : a) de l'axe des ordonnées ; b) de l'axe des abscisses (il passe par Ω).
4. $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}y - 4 = 0$. a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle passant par Ω . b) Équation de $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$? c) Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.
5. Sans calcul, montrer que $f \circ f \circ f = \text{Id}$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : deux carrés de même sommet ★★

corrigé p. 43

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés directs de même sommet A ; $r = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. On rappelle (cours) : $r(B) = D$, $r(E) = G$, d'où $BE = DG$ et $(BE) \perp (DG)$.

1. E' est le symétrique de E par rapport à A . Montrer que $r(G) = E'$, puis que les triangles ABG et ADE ont la même aire.
2. Les droites (BE) et (DG) se coupent en K (on suppose $K \neq A$). a) Montrer que K appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 circonscrits aux deux carrés. b) En déduire que C, K, F sont alignés : (BE) , (DG) et (CF) sont concourantes.
3. Exemple : $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $E(-2; -3)$; calculer C, D, F, G , les aires du 1., puis K , et vérifier que $K \in (CF)$.

Exercice 13 Composer des rotations de même centre ★★

corrigé p. 43

1. $r_1 = r\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right)$, $r_2 = r\left(\Omega, \frac{5\pi}{12}\right)$: reconnaître $r_2 \circ r_1$, $r_1 \circ r_2$, $r_1 \circ r_1$, r_1^4 , r_1^8 , $r_2^{-1} \circ r_1$. 2. $\rho = r\left(\Omega, \frac{3\pi}{10}\right)$, $\rho^n = \rho \circ \dots \circ \rho$ (n fois) : entiers $n \geq 1$ tels que $\rho^n = \text{Id}$? tels que $\rho^n = s_\Omega$? 3. Pour quels θ a-t-on $r(\Omega, \theta) \circ r(\Omega, \theta) = s_\Omega$?
4. $f : x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$, $y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$. Reconnaître f ; expressions de $f \circ f$ et de $f \circ f \circ f$? Les reconnaître.

Exercice 14 Composer deux symétries axiales ★★

corrigé p. 43

1. s_1, s_2 sont les symétries d'axes $\Delta_1 = (Ox)$ et $\Delta_2 : y = \sqrt{3}x$. a) Mesure de (Δ_1, Δ_2) ? b) Vérifier que s_2 s'écrit $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ (milieu de $[MM']$ sur Δ_2 , $\vec{MM'} \perp \vec{u}\left(1; \sqrt{3}\right)$). c) Expressions de $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$? Les reconnaître. d) Image de $M(2; 0)$ par $s_2 \circ s_1$?
2. $ABCD$ est un carré direct de centre O , I et K les milieux de $[AB]$ et $[CD]$, $\Delta = (IK)$. Reconnaître $s_{(AC)} \circ s_\Delta$ et $s_{(AC)} \circ s_{(BD)}$; écrire $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right) = s_{\Delta'} \circ s_{(AC)}$ et vérifier sur l'image de B .

Exercice 15 Un trapèze et son image ★★

corrigé p. 44

$A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(4; 3)$, $D(1; 3)$, et $r = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ avec $\Omega(2; 1)$.

1. Vérifier que $ABCD$ est un trapèze ; expression analytique de r ; A', B', C', D' ? 2. Pourquoi $A'B'C'D'$ est-il un trapèze ? Position de $(A'B')$ par rapport à (AB) ?

- Point commun I aux diagonales de $ABCD$; en déduire, sans calculer d'intersection, celui des diagonales de $A'B'C'D'$.
- Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$, $\vec{A'C'} \cdot \vec{B'D'}$ et l'aire de $A'B'C'D'$.
- Point M de (AB) dont l'image est sur (BC) ?

Exercice 16 Toutes les rotations qui envoient A sur A' ★★

corrigé p. 44

- $A(4;0)$, $A'(0;2)$: montrer que le centre de toute rotation qui transforme A en A' est sur la médiatrice Δ de $[AA']$; équation de Δ ?
- Avec l'expression analytique $(\Omega(a;b)$ inconnu), trouver le centre de la rotation d'angle θ qui transforme A en A' pour $\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi$.
- $\theta = \frac{\pi}{3}$: montrer que $\Omega AA'$ est équilatéral ; en déduire deux points candidats et trouver celui qui convient.
- Montrer que tout point de Δ est le centre d'une unique rotation qui transforme A en A' .

17

Niveau 3 • Approfondissement**Exercice 17** Une famille de transformations ★★★

corrigé p. 44

Pour $m \in \mathbb{R}$, f_m associe à $M(x;y)$ le point M' tel que $x' = \frac{mx-12y}{13} + 4$ et $y' = \frac{12x+my}{13}$.

- Si $f_m(M) = M'$ et $f_m(N) = N'$, montrer que $M'N'^2 = \frac{m^2+144}{169}MN^2$; pour quels m f_m conserve-t-elle les distances ?
- Montrer que $f_5 = r(\Omega, \theta)$ avec $\Omega(2;3)$, $\cos \theta = \frac{5}{13}$ et $\sin \theta = \frac{12}{13}$.
- Même étude pour f_{-5} ; exprimer son angle θ' à l'aide de θ .
- Calculer l'expression de $f_5 \circ f_5$ et vérifier que c'est $r(\Omega, 2\theta)$.

Exercice 18 Une droite et son image : où est le centre ? ★★★

corrigé p. 45

D est l'axe des abscisses, D' la droite $y = \sqrt{3}(x+2)$ et $K(-2;0)$.

- Vérifier que $D \cap D' = \{K\}$ et que $r(K, \frac{\pi}{3})$ transforme D en D' .
- $\Omega(a;b)$ et $r = r(\Omega, \frac{\pi}{3})$. a) Image du point $(t;0)$? En déduire que $r(D) \parallel D'$. b) Montrer que $r(D) = D' \iff b = -\sqrt{3}(a+2)$. c) En déduire que les centres des rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforment D en D' forment une bissectrice de D et D' .
- Déterminer la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme D en D' et O en $P(0;2\sqrt{3})$.
- Montrer que les centres des rotations d'angle $\frac{4\pi}{3}$ qui transforment D en D' forment l'autre bissectrice.

Exercice 19 Un point dans un carré ★★★

corrigé p. 45

$ABCD$ est un carré direct, M un point intérieur tel que $MA = 1$, $MB = 2$, $MC = 3$; $r = r(B, -\frac{\pi}{2})$, $M' = r(M)$.

- Montrer que $r(A) = C$; nature de BMM' ? Calculer MM' et CM' .
- Montrer que $MM'C$ est rectangle en M' ; en déduire $\widehat{BM'C}$, puis $\widehat{AMB}$.
- Calculer le côté du carré.

Exercice 20 Un ensemble de points ★★★

corrigé p. 45

ABC est un triangle direct isocèle rectangle en A , $AB = AC = a$, et $r = r(A, \frac{\pi}{2})$.

- Vérifier que $r(B) = C$. Pour $M \in (BC)$, $M \neq B$, et $M' = r(M)$: montrer que $CM' = BM$ et $(CM') \perp (BC)$.
- Montrer que $MM'^2 = 2MA^2$, puis que $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ (vrai aussi si $M = B$).

3. Dans le repère $(A; \frac{1}{a}\vec{AB}, \frac{1}{a}\vec{AC})$, montrer que $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 2a(a - x - y)$; en déduire $\mathcal{E} = \{M \mid MB^2 + MC^2 = 2MA^2\}$. 4. Déterminer et construire $\mathcal{F} = \{M \mid MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + a^2\}$.

Exercice 21 Un parallélogramme et deux triangles équilatéraux ★★★

corrigé p. 46

$ABCD$ est un parallélogramme avec $(\vec{AB}, \vec{AD}) \in]0; \pi[$; $E = r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(B)$ et $F = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(D)$.

- Montrer que ABE et ADF sont équilatéraux, extérieurs au parallélogramme, et que $(\vec{EA}, \vec{EB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.
- $\rho = r\left(E, -\frac{\pi}{3}\right)$. a) Montrer que $\rho(A) = B$. b) Montrer que $AF = BC$ et $(\vec{AF}, \vec{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$. c) En déduire que $\rho(F) = C$, puis que CEF est équilatéral.
- Exemple : $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $D(1; 3)$; calculer C , E , F et vérifier que $EF^2 = EC^2 = CF^2 = 30 + 12\sqrt{3}$.

Exercice 22 Rotation et symétries de même centre ★★★

corrigé p. 46

- $r = r(\Omega, \theta)$; D, D', D'' passent par Ω , avec $(D, D') \equiv (D'', D) \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$. Montrer que $r = s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_{D''}$, puis $r \circ s_D = s_{D'}$ et $s_D \circ r = s_{D''}$.
- ABC est équilatéral direct de centre O ; A_1, B_1, C_1 sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, s_A, s_B, s_C les symétries d'axes (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) ; $r = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. a) Mesures modulo π de $((AA_1), (BB_1))$ et $((AA_1), (CC_1))$? b) Reconnaitre $r \circ s_A, s_B \circ s_A, s_A \circ r$; vérifier sur les images de A et B .
- Le catadioptre. Un rayon de direction $\vec{u}$ se réfléchit sur deux miroirs perpendiculaires D_1 puis D_2 ; chaque réflexion transforme sa direction par la symétrie vectorielle d'axe le miroir. Montrer qu'il repart dans la direction $-\vec{u}$. Et pour un angle de $\frac{\pi}{3}$?

Exercice 23 Un triangle équilatéral et deux cercles ★★★

corrigé p. 46

$A(0; 0)$; Γ_1 est le cercle de centre $I_1(4; 0)$ et de rayon 2, Γ_2 celui de centre $I_2(2; 0)$ et de rayon 2. On cherche les triangles équilatéraux ABC tels que $B \in \Gamma_1$ et $C \in \Gamma_2$.

- Analyse : si ABC est direct, montrer que $C \in r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(\Gamma_1) \cap \Gamma_2$; et s'il est indirect ? 2. Quand B décrit Γ_1 , quel ensemble décrit $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B)$? Équation ?
- Déterminer les points C possibles et les quatre triangles solutions ; construire. 4. On remplace le rayon de Γ_2 par $\lambda > 0$: pour quels λ le problème a-t-il des solutions ?

18

Niveau 4 • Concours

Exercice 24 Un triangle équilatéral sur trois droites parallèles ★★★★★

corrigé p. 47

$D_1 : y = 1$, $D_2 : y = 0$, $D_3 : y = -2$ et $A(0; 0) \in D_2$. On cherche $B \in D_1$ et $C \in D_3$ tels que ABC soit équilatéral.

- Si ABC est direct, montrer que $C \in r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(D_1) \cap D_3$; en déduire C , B et le côté. Nombre de solutions ?
- Cas général : $D_1 : y = p$, $D_3 : y = -q$ ($p, q > 0$). Montrer que le côté ℓ vérifie $\ell^2 = \frac{4}{3}(p^2 + pq + q^2)$.
- Montrer que $\ell \geq p + q$; cas d'égalité ?

Exercice 25 Le triangle équilatéral inscrit dans un carré ★★★★★

corrigé p. 47

$ABCD$ est un carré direct de côté 1 ; on cherche $E \in [BC]$ et $F \in [CD]$ tels que AEF soit équilatéral.

- Si AEF est direct, montrer que F est sur l'image de $[BC]$ par $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$. Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$, avec $E(1; t)$, $t \in [0; 1]$, calculer $r(E)$ et en déduire t .

2. Montrer qu'il n'y a pas de solution indirecte ; conclure que $BE = DF = 2 - \sqrt{3}$. 3. Montrer que $AE = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; aire de AEF ? En déduire $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 26 L'inégalité de Pompeiu ★★★★★

corrigé p. 48

ABC est un triangle équilatéral direct de côté a et P un point du plan ; $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $P' = r(P)$.

- Montrer que $r(B) = C$, $PP' = PA$, $P'C = PB$; en déduire que $PB \leq PA + PC$: PA , PB , PC sont les côtés d'un triangle (peut-être aplati).
- Égalité : pour $P \neq A, C$, montrer que $PB = PA + PC \iff (\vec{PA}, \vec{PC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$, i.e. P est sur l'arc AC du cercle circonscrit ne contenant pas B (Van Schooten). 3. Si $a = 7$, montrer qu'il existe un point P de cet arc tel que $PA = 3$ et $PC = 5$; PB ?

Exercice 27 Le théorème de Van Aubel ★★★★★

corrigé p. 48

Pour $\vec{u}(x; y)$, on pose $R(\vec{u}) = (-y; x)$. $ABCD$ est un quadrilatère convexe parcouru dans le sens direct ; I est le point tel que $r\left(I, -\frac{\pi}{2}\right)(A) = B$ (centre du carré construit sur $[AB]$ à l'extérieur) ; J, K, L sont définis de même sur $[BC], [CD], [DA]$.

- Montrer que $R(\vec{u} + \vec{v}) = R(\vec{u}) + R(\vec{v})$, $R(k\vec{u}) = kR(\vec{u})$, $R(R(\vec{u})) = -\vec{u}$ et $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)(M) = M' \iff \Omega\vec{M}' = R(\Omega\vec{M})$. 2. Montrer que $\vec{IA} = R(\vec{IB})$, puis $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) - \frac{1}{2}R(\vec{AB})$; de même pour J, K, L .
- Montrer que $\vec{JL} = R(\vec{IK})$, d'où $IK = JL$ et $(IK) \perp (JL)$. 4. Exemple : $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(5; 3)$, $D(0; 4)$.

Exercice 28 Le trésor de l'île ★★★★★

corrigé p. 48

« Du gibet G , va au chêne C en comptant tes pas, tourne d'un quart de tour à droite, fais autant de pas : plante S_1 . Du gibet, va au pin P , tourne d'un quart de tour à gauche, fais autant de pas : plante S_2 . Le trésor T est au milieu de $[S_1S_2]$. » Le gibet a disparu ! $C(-2; 0)$, $P(2; 0)$, $G(x; y)$.

- Justifier que $S_1 = r\left(C, \frac{\pi}{2}\right)(G)$ et $S_2 = r\left(P, -\frac{\pi}{2}\right)(G)$. 2. Calculer S_1, S_2, T : le trésor se trouve sans le gibet ! Nature de CTP ?
- Exprimer S_2 en fonction de S_1 ; en déduire que $r\left(P, -\frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(C, -\frac{\pi}{2}\right) = s_T$.

Exercice 29 Dans un hexagone régulier ★★★★★

corrigé p. 49

$ABCDEF$ est un hexagone régulier direct de centre O et de côté 2 ; M, N sont les milieux de $[CD]$, $[DE]$; (AM) et (BN) se coupent en P ; $r = r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$.

- Montrer que r transforme A, B, C, D, M en B, C, D, E, N ; en déduire que $AM = BN$ et que $(AM), (BN)$ font un angle de 60° . 2. À l'aide de l'image de $ABCM$, montrer que le triangle ABP et le quadrilatère $MDNP$ ont la même aire.
- Avec $O(0; 0)$ et $A(2; 0)$, calculer M, N, P, AM , cette aire commune et $\frac{AP}{AM}$.

Exercice 30 Le défi de la couverture : le point de Fermat ★★★★★

corrigé p. 49

ABC est un triangle direct dont les angles sont inférieurs à 120° , et $S(M) = MA + MB + MC$; $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $C' = r(C)$ et $M' = r(M)$.

- Montrer que $MM' = MA$ et $M'C' = MC$, puis que $S(M) = BM + MM' + M'C' \geq BC'$.
- On admet qu'il existe F intérieur au triangle tel que $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^\circ$. Montrer que B, F, F', C' sont alignés dans cet ordre, puis que S atteint son minimum BC' en F et seulement en F .
- $B^* = r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(B)$, et BCA^* est équilatéral, extérieur à ABC . Montrer que $CB^* = BC'$ et que F est sur (BC') , (CB^*) et (AA^*) (construction de F).
- Exemple : $A(0; 4)$, $B(-\sqrt{3}; 0)$, $C(2\sqrt{3}; -1)$. Vérifier les hypothèses ; calculer C' et BC' ; vérifier que $F(0; 1)$ est sur (BC') et voit les côtés sous 120° . Minimum de $MA + MB + MC$?

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Définition et constructions

$r = r(\Omega, \theta)$ fixe Ω et, pour $M \neq \Omega$: $r(M) = M' \iff \Omega M' = \Omega M$ et $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$; $r^{-1} = r(\Omega, -\theta)$.
Repère orthonormé direct d'origine Ω : si $\Omega M = d$ et $(\vec{i}, \vec{\Omega M}) \equiv \varphi$, alors $M' (d \cos(\varphi + \theta); d \sin(\varphi + \theta))$.

Exercice 31 Un point et sept rotations ★

corrigé p. 50

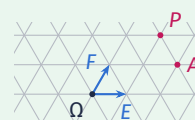
Soit $\Omega M = 3$ cm. Pour $\theta_1 = \frac{23\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{39\pi}{4}$, $\theta_3 = 13\pi$, $\theta_4 = -40\pi$, $\theta_5 = \frac{9\pi}{2}$, $\theta_6 = \frac{15\pi}{2}$, $\theta_7 = -\frac{10\pi}{3}$, on note r_k la rotation de centre Ω et d'angle θ_k , et $M_k = r_k(M)$.

1. Mesure principale de chaque θ_k ? Quelles r_k sont l'identité, une symétrie centrale, un quart de tour ?
2. Placer $M_1, \dots, M_7$. Quels points sont confondus ? Quelles rotations sont égales ? réciproques l'une de l'autre ? Écrire $r_7^{-1} = r(\Omega, \alpha)$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$.
3. Mesures de $(\vec{\Omega M_1}, \vec{\Omega M_7})$ et $(\vec{\Omega M_5}, \vec{\Omega M_3})$? Rotation de centre Ω envoyant M_7 sur M_6 ? Image de M_1 par $r(\Omega, -\frac{3\pi}{4})$?

Exercice 32 Sur un réseau triangulaire ★

corrigé p. 50

Le plan est pavé par des triangles équilatéraux de côté 1. On fixe un nœud Ω et deux nœuds voisins E, F tels que $(\vec{\Omega E}, \vec{\Omega F}) \equiv \frac{\pi}{3}$; on pose $\vec{e}_1 = \vec{\Omega E}$, $\vec{e}_2 = \vec{\Omega F}$. Tout nœud N vérifie $\vec{\Omega N} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: on le note $N[a, b]$. Soit $r = r(\Omega, \frac{\pi}{3})$ et $\rho = r(\Omega, \frac{2\pi}{3})$.



1. Montrer que $G[-1, 1]$ est un voisin de Ω et que $(\vec{\Omega E}, \vec{\Omega G}) \equiv \frac{2\pi}{3}$. En déduire $r(E)$ et $r(F)$.
2. On admet (conservation du barycentre) que, pour toute rotation f de centre Ω , $\Omega \vec{f}(N) = a\Omega \vec{f}(E) + b\Omega \vec{f}(F)$. Montrer que $r(N[a, b]) = N[-b, a + b]$, puis donner l'image de $N[a, b]$ par r^{-1} , ρ , ρ^{-1} et la symétrie s_Ω .
3. Soit $A[2, 1]$. Calculer et placer $r(A)$, $\rho(A)$, $s_\Omega(A)$, $\rho^{-1}(A)$ et $r^{-1}(A)$.
4. Montrer que $\Omega N^2 = a^2 + ab + b^2$. Le nœud $P[1, 2]$ est-il l'image de A par une rotation de centre Ω ? par une rotation de centre Ω d'angle multiple de $\frac{\pi}{3}$?

Exercice 33 Transporter un angle au compas ★★

corrigé p. 51

Un angle est dessiné par trois points non alignés P, Q, R ; θ est une mesure de $(\vec{PQ}, \vec{PR})$. On donne $\Omega \neq M$, $d = \Omega M$, et $r = r(\Omega, \theta)$. But : construire $M' = r(M)$ sans rapporteur.

1. Le cercle de centre P et de rayon d coupe $[PQ]$ en Q_1 et $[PR]$ en R_1 . Montrer que $Q_1 R_1 = 2d \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.
2. Montrer que M' et $M'' = r^{-1}(M)$ sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon d et sur le cercle Γ de centre M et de rayon $Q_1 R_1$.
3. Si $\theta \neq 0 [\pi]$, montrer que $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{M', M''\}$. Comment reconnaître M' ? Cas $\theta \equiv \pi$?
4. Application : $d = 4$ cm, $\cos \theta = \frac{3}{4}$, $\theta \in]0, \pi[$. Calculer MM' et $M'M''$.

Exercice 34 Le centre est hors de la feuille ★★

corrigé p. 51

Le centre Ω de r , d'angle $\theta \neq 0 [2\pi]$, est hors de la feuille ; on connaît θ , un point A et $A' = r(A)$.

1. Soit $M \neq A$ et $M' = r(M)$. Justifier que $A'M' = AM$ et $(\vec{AM}, \vec{A'M'}) \equiv \theta$. Réciproquement, montrer que si $A'N = AM$ et $(\vec{AM}, \vec{A'N}) \equiv \theta$, alors $N = M'$.
2. Soit P tel que $\vec{A'P} = \vec{AM}$. Montrer que $M' = r(A', \theta)(P)$ et en déduire une construction de M' sur la feuille. Comment construire l'antécédent d'un point ?
3. Application : $\theta = \frac{\pi}{3}$. Construire au compas l'image d'un triangle ABC et celle du cercle de centre B passant par C .

Exercice 35 Les rotations qui conservent un quadrillage ★★★

corrigé p. 52

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des nœuds (points à coordonnées entières) ; une rotation r conserve $\mathcal{Q}$ si $r(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

1. Soit r de centre Ω et d'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ qui conserve $\mathcal{Q}$, et $I(1; 0)$. Montrer que $r(O)\vec{r}(I)$ a des coordonnées entières et pour norme 1, puis que $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\right\}$.
2. Cas $\theta = \pi$: montrer que r conserve $\mathcal{Q}$ si et seulement si $2\vec{O}\Omega$ est à coordonnées entières.
3. Cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\Omega(a; b)$: établir $x' = -y + a + b$, $y' = x - a + b$; montrer que r conserve $\mathcal{Q}$ si et seulement si $a + b$ et $b - a$ sont entières (Ω nœud ou centre d'une case).
4. Construire l'image du triangle de sommets $(2; 0)$, $(3; 0)$, $(2; 1)$ par $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ peut-elle conserver $\mathcal{Q}$? (Comparer avec l'exercice 32.)

Exercice 36 Une rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ au compas ★★★

corrigé p. 52

1. Pour $a = \frac{\pi}{5}$, $c = \cos a$: justifier $\cos 3a = -\cos 2a$, puis $(c + 1)(4c^2 - 2c - 1) = 0$, $c = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
2. Repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ cercle de centre Ω et de rayon 1, $M(1; 0)$, $S = s_\Omega(M)$, $U = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)(M)$, K milieu de $[OS]$; le cercle de centre K passant par U coupe $[OM]$ en L ; H est le milieu de $[OL]$. Coordonnées de L et H ?
3. La perpendiculaire à (ΩM) en H coupe $\mathcal{C}$ en M_1 (d'ordonnée positive) et M_4 . Montrer que $M_1 = r(M)$ et $M_4 = r^{-1}(M)$ pour $r = r\left(\Omega, \frac{2\pi}{5}\right)$, et que $MM_1 = UL = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. En déduire un pentagone régulier inscrit dans $\mathcal{C}$, au compas.

20 Images de figures

Par $r = r(\Omega, \theta)$: une droite $\mathcal{D}$ devient une droite $\mathcal{D}'$, $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \equiv \theta [\pi]$, perpendiculaire à $(\Omega H')$ en $H' = r(H)$ (H : projeté de Ω sur $\mathcal{D}$) ; $\mathcal{C}(I, R)$ devient $\mathcal{C}(r(I), R)$; segments, demi-droites, polygones et tangentes se conservent.

Exercice 37 Sept pièces de monnaie ★

corrigé p. 53

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon 1, Ω un point tel que $\Omega I = 2$, et $r = r\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de Ω le touchent en T_1 et T_2 , nommés de sorte que $(\Omega \vec{T}_1, \Omega \vec{T}_2)$ ait une mesure dans $]0, \pi[$. Montrer que $\Omega T_1 = \Omega T_2 = \sqrt{3}$ et $(\Omega \vec{T}_1, \Omega \vec{T}_2) \equiv \frac{\pi}{3}$, puis en déduire $r(T_1)$.
2. Soit $\mathcal{C}_1 = r(\mathcal{C})$, de centre I_1 . Déterminer l'image de la droite (ΩT_1) , montrer que $\mathcal{C}_1$ est tangent à (ΩT_2) en T_2 , puis que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont tangents en T_2 .
3. Pour $0 \leq k \leq 5$, $\mathcal{C}_k = r\left(\Omega, \frac{k\pi}{3}\right)(\mathcal{C})$, de centre I_k . Montrer que deux cercles consécutifs (et $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_0$) sont tangents, et que tous sont tangents au cercle de centre Ω et de rayon 1.

Exercice 38 Un quart de tour autour d'un sommet ★

corrigé p. 53

Soit ABC un triangle direct dont les angles en B et C sont aigus, H le pied de la hauteur issue de A , I le milieu de $[BC]$, $r = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$, et B', C', H', I' les images de B, C, H, I .

1. Montrer que $(B'C') \perp (BC)$, que H' est le pied de la hauteur issue de A dans $AB'C'$, que I' est le milieu de $[B'C']$, et que $AI' = AI$ avec $(AI') \perp (AI)$.
2. Les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en K . Montrer que $AHKH'$ est un carré.
3. On donne $AH = 2\sqrt{2}$, $HB = 3\sqrt{2}$ et $HC = \sqrt{2}$. Calculer $AB, AC, B'C'$ et l'aire du carré $AHKH'$.

Exercice 39 Un cercle et toutes ses images ★★

corrigé p. 54

$\Omega A = 4$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, 2)$; pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, A_θ et $\mathcal{C}_\theta$ sont les images de A et $\mathcal{C}$ par $r_\theta = r(\Omega, \theta)$.

1. Préciser $\mathcal{C}_\theta$ et montrer que $AA_\theta = 8 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.
2. Pour quelles valeurs de θ les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_\theta$ ont-ils un point commun ? sont-ils tangents ?
3. Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: montrer que le point de contact T est le milieu de $[AA_\theta]$ et que la tangente commune passe par Ω ; calculer ΩT .
4. Démontrer que la réunion des cercles $\mathcal{C}_\theta$ est la couronne $\mathcal{K} = \{M : 2 \leq \Omega M \leq 6\}$.

Exercice 40 Une droite qui tourne ★★

corrigé p. 54

Repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$; $\mathcal{D} : y = -3$, $H(0; -3)$, $\Gamma = \mathcal{C}(O, 3)$; pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, $\mathcal{D}_\theta = r_\theta(\mathcal{D})$ où $r_\theta = r(O, \theta)$.

1. Montrer que $H_\theta = r_\theta(H)$ a pour coordonnées $(3 \sin \theta; -3 \cos \theta)$, que $\mathcal{D}_\theta$ est tangente à Γ en H_θ et qu'elle a pour équation $x \sin \theta - y \cos \theta = 3$.
2. Pour quelles valeurs de θ a-t-on $\mathcal{D}_\theta \parallel \mathcal{D}$? $\mathcal{D}_\theta \perp \mathcal{D}$?
3. Déterminer les θ tels que $\mathcal{D}_\theta$ passe par $P(0; 6)$, par $Q(3\sqrt{3}; 3)$, par $R(1; 1)$.
4. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[, \theta \neq 0$, montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\theta$ se coupent en $P_\theta\left(3 \tan \frac{\theta}{2}; -3\right)$ et que $P_\theta H = P_\theta H_\theta$.

Exercice 41 L'aire commune à un carré et à son image ★★★

corrigé p. 55

Repère orthonormé direct ; $\mathcal{K} = \{(x; y) : |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$ (carré plein) ; $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $r = r(O, \theta)$, $\mathcal{K}' = r(\mathcal{K})$.

1. Montrer que l'image de la droite $x = 1$ est la droite $\Delta_1 : cx + sy = 1$; donner les images des trois autres côtés et décrire $\mathcal{K}'$ par deux inégalités.
2. Montrer que $V(1; 1) \notin \mathcal{K}'$, que Δ_1 coupe les côtés de $\mathcal{K}$ issus de V en $P(1; \frac{1-c}{s})$ et $Q(\frac{1-s}{c}; 1)$, et calculer l'aire du triangle VPQ .
3. On admet que $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ est $\mathcal{K}$ privé de VPQ et de ses images par les rotations $r(O, \frac{k\pi}{2})$; montrer que son aire est $\mathcal{A}(\theta) = \frac{8}{1+\cos \theta + \sin \theta}$.
4. En écrivant $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$, trouver le minimum de $\mathcal{A}$; calculer $\mathcal{A}(\frac{\pi}{6})$.

Exercice 42 Faire tourner une hyperbole ★★★

corrigé p. 55

Dans un repère orthonormé direct, $\mathcal{H}$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $r = r(O, \frac{\pi}{4})$.

1. Donner l'expression analytique de r et de r^{-1} , puis l'image M' de $M(t; \frac{1}{t})$ ($t \neq 0$).
2. Montrer que $r(\mathcal{H})$ est l'ensemble Γ des points tels que $y^2 - x^2 = 2$.
3. Montrer que r envoie la branche $t > 0$ sur la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$, la branche $t < 0$ sur celle de $-f$. Image de $(1; 1)$? Minimum de f ?
4. Images de $\mathcal{H}$ par $r(O, \frac{\pi}{2})$, $r(O, \pi)$, $r(O, -\frac{\pi}{4})$? Laquelle n'est pas une courbe de fonction ?

21

Propriétés de conservation

Une rotation d'angle θ conserve distances, produit scalaire, angles orientés, milieu, barycentre, alignement, parallélisme et orthogonalité, et $(\vec{MN}, \vec{M'N'}) \equiv \theta [2\pi]$.

Exercice 43 Angles entre une figure et son image ★

corrigé p. 56

ABC est direct, $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}$; r a pour angle θ et $A'B'C' = r(ABC)$.

1. Déterminer $(\vec{CA}, \vec{CB})$ et les trois angles orientés correspondants du triangle $A'B'C'$.
2. Exprimer en fonction de θ des mesures de $(\vec{AB}, \vec{A'C'})$, $(\vec{AC}, \vec{A'B'})$, $(\vec{AB}, \vec{B'C'})$ et $(\vec{BC}, \vec{A'C'})$.
3. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, montrer que $(A'B') \parallel (AC)$ et $(A'C') \perp (AB)$. Pour quels θ a-t-on $(B'C') \perp (AB)$? $(A'C') \parallel (BC)$?
4. ABC direct quelconque : montrer qu'une rotation donne $(A'B') \parallel (BC)$, $(B'C') \parallel (CA)$ et $(C'A') \parallel (AB)$ si et seulement si ABC est équilatéral ; angle ?

Exercice 44 Une rotation qu'on ne connaît pas ★

corrigé p. 56

Une rotation r inconnue transforme $A(5; 2)$, $B(6; -2)$, $C(0; 5)$ en $A'(2; 5)$, $B'(6; 4)$, $C'(-3; 2)$.

1. Vérifier que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et $B'C' = BC$.
2. Sans chercher r , calculer les images de $D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ et du centre de gravité G .
3. La droite (AD) coupe (BC) en F . Montrer que $F = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$ et en déduire $r(F)$.

4. Écrire $N(11; 7)$ comme barycentre de A', B', C' , puis déterminer l'antécédent de N par r .

Exercice 45 Les distances suffisent ★★

corrigé p. 57

Soit f une transformation du plan qui conserve les distances ($f(M)f(N) = MN$ pour tous M, N : rotation, translation, symétrie...), et $M' = f(M)$. On n'utilise que cette propriété.

1. Pour $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls, montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$, puis que $AC = AB + BC \iff B \in [AC]$.
2. En déduire que $B \in [AC] \Rightarrow B' \in [A'C']$, puis que f conserve l'alignement.
3. Soient $A \neq C, k \in \mathbb{R}$ et G tel que $\vec{AG} = k\vec{AC}$. Montrer que $A'\vec{G}' = kA'\vec{C}'$ (cas $0 \leq k \leq 1, k > 1, k < 0$).
4. En déduire que f conserve le milieu, le barycentre de deux points et le centre de gravité.

Exercice 46 Des ensembles définis par des distances ★★

corrigé p. 57

Soit r une rotation et $A \neq B, A' = r(A), B' = r(B)$.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des M vérifiant une relation entre $MA, MB, \vec{MA} \cdot \vec{MB}$, et $\mathcal{E}'$ celui de la même relation avec A', B' . Montrer que $r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$.
2. Dans un repère orthonormé direct, $A(2; 0), B(5; 0)$ et $r = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$. Déterminer, puis transformer par r : $\mathcal{E}_1 = \{M : MA = 2MB\}, \mathcal{E}_2 = \{M : MA^2 - MB^2 = 3\}$ et $\mathcal{E}_3 = \{M : \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0\}$.
3. Montrer que $\mathcal{E}_4 = \{M : (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\}$ est la partie de $\mathcal{E}_3$ où $y > 0$; décrire $r(\mathcal{E}_4)$, puis $s(\mathcal{E}_4)$ pour la symétrie s d'axe (Oy) .

Exercice 47 Produits scalaires entre une figure et son image ★★★

corrigé p. 57

$r = r(\Omega, \theta), \theta \neq 0 [2\pi]$; M, N distincts de $\Omega, M' = r(M), N' = r(N), m = \Omega M, n = \Omega N, \varphi \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$.

1. Exprimer $\vec{\Omega M'} \cdot \vec{\Omega N'}, \vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega N'}, \vec{\Omega M'} \cdot \vec{\Omega N}$ et les déterminants associés.
2. Montrer que $\vec{MM'} \cdot \vec{NN'} = 2(1 - \cos \theta) \vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega N}$ et $\det(\vec{MM'}, \vec{NN'}) = 2(1 - \cos \theta) \det(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$. En déduire MM' , puis que $(\vec{MM'}, \vec{NN'}) \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$ et $(MM') \perp (NN') \iff (\Omega M) \perp (\Omega N)$.
3. Montrer que $MN'^2 - M'N^2 = 4mn \sin \varphi \sin \theta$; si $\theta \neq \pi, MN' = M'N \iff \Omega, M, N$ alignés.
4. Montrer que $\vec{MN'} \cdot \vec{M'N} = (m^2 + n^2) \cos \theta - 2 \vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega N}$. Application : $m = 2, n = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{2}$; calculer $\vec{MM'} \cdot \vec{NN'}, MN'^2, M'N^2$ et $\vec{MN'} \cdot \vec{M'N}$.

Exercice 48 Viviani par une rotation ★★★

corrigé p. 58

ABC est équilatéral direct, de côté a , de centre O , de hauteur h ; $r = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right) (A \mapsto B \mapsto C \mapsto A)$. $\delta_A(M)$: distance de M à (BC) , positive du côté de A , négative sinon ; δ_B, δ_C : idem avec $(CA), B$ et $(AB), C$.

1. Montrer que $\delta_B(r(M)) = \delta_A(M)$ et $\delta_C(r(M)) = \delta_B(M)$ pour tout point M .
2. Soit $M_1 = r^{-1}(M), M_2 = r^{-1}(M_1)$: montrer que $r^{-1}(M_2) = M$, puis que O est l'isobarycentre de M, M_1, M_2 .
3. Dans un repère orthonormé d'axe des abscisses (BC) où A a une ordonnée positive, montrer que $\delta_A(M) = y_M$. En déduire que $\delta_A(M) + \delta_B(M) + \delta_C(M) = h$ pour tout point M .
4. Conclure pour M intérieur (théorème de Viviani). Si $a = 6, d(M, (BC)) = 1$ et $d(M, (CA)) = 2$, que vaut $d(M, (AB))$? Cas d'un polygone régulier ?

22 Déterminer une rotation

Centre et angle, expressions analytiques, composées, symétries ; repère orthonormé direct.

Exercice 49 Les rotations qui conservent une figure ★

corrigé p. 59

Déterminer (centre et angle) les rotations r qui conservent ($r(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$) la figure $\mathcal{F}$ suivante :

1. un segment $[AB]$ ($A \neq B$) de milieu I (montrer d'abord que $\{r(A), r(B)\} = \{A, B\}$) ;
2. la réunion de deux droites parallèles distinctes D et D' ;
3. la réunion de deux droites D et D' sécantes en I (distinguer le cas $D \perp D'$) ;
4. un cercle $\mathcal{C}$ de centre K ; puis la réunion de deux cercles de même rayon et de centres $K \neq K'$;
5. la figure formée des droites $y = 1$, $y = 5$ et du cercle de centre $\Omega(2; 3)$ et de rayon 1.

Exercice 50 Lire l'angle sur l'expression ★

corrigé p. 59

Chaque application $M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ est-elle une rotation ? Si oui, angle (mesure principale) et centre ?

$$\begin{aligned} f_1 : x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \quad y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y & f_4 : x' &= -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}, \quad y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_2 : x' &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 1 + \sqrt{2}, \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 1 & f_5 : x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1, \quad y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ f_3 : x' &= ax - by, \quad y' = bx + ay, \text{ avec } a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

1. Traiter f_1, f_2, f_4, f_5 ; pour f_5 , comparer $(\vec{i}, O\vec{i}')$ et $(\vec{j}, O\vec{j}')$, où $X' = f_5(X)$, $I(1; 0)$, $J(0; 1)$.
2. Pour f_3 , utiliser $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Calculer l'expression de $f_3 \circ f_3$ et la reconnaître.
3. Donner l'expression analytique de la réciproque de f_2 .

Exercice 51 Deux droites et leurs images ★★

corrigé p. 60

On donne les droites $D_1 = (Ox)$, $D_2 = (Oy)$, $D'_1 : x = 4$ et $D'_2 : y = 2$, qui se coupent en $P'(4; 2)$.

1. Si r , d'angle θ , vérifie $r(D_1) = D'_1$ et $r(D_2) = D'_2$, montrer que $r(O) = P'$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
2. En déduire les deux rotations possibles, r_1 d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 d'angle $-\frac{\pi}{2}$: centres et expressions.
3. Laquelle de ces rotations transforme $A(1; 0)$ en $A'(4; 3)$?
4. Déterminer toutes les rotations ρ telles que $\rho(D_1 \cup D_2) = D'_1 \cup D'_2$ (on pourra avoir $\rho(D_1) = D'_2$).

Exercice 52 Des rotations en série ★★

corrigé p. 60

Ω est un point fixé et, pour $k \geq 1$, $r_k = r\left(\Omega, \frac{k\pi}{6}\right)$. On pose $F_1 = r_1$ et $F_{n+1} = r_{n+1} \circ F_n$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer par récurrence que $F_n = r\left(\Omega, \frac{n(n+1)\pi}{12}\right)$ pour tout $n \geq 1$. Reconnaitre F_2, F_3, F_4, F_5 .
2. Montrer que $F_n = \text{Id} \iff 24 \mid n(n+1) \iff$ le reste de n dans la division par 24 est 0, 8, 15 ou 23 (étudier la divisibilité par 8 et par 3). Plus petit n ?
3. Pour quels entiers n a-t-on $F_n = s_\Omega$?
4. Pour $M \neq \Omega$ et $M_k = r\left(\Omega, \frac{k\pi}{6}\right)(M)$, montrer que les $F_n(M)$ sont exactement huit des M_k ($0 \leq k \leq 11$).

Exercice 53 Le kaléidoscope ★★★

corrigé p. 61

Deux miroirs sont portés par $D : y = x + 1$ et $D' : x = 2$, sécantes en Ω ; on note $s = s_D$ et $s' = s_{D'}$.

1. Donner Ω et les expressions de s, s' . Montrer que $r = s' \circ s = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ et $s \circ s' = r^{-1}$.
2. Montrer que $r \circ s = s'$ et que $s \circ r^k = r^{4-k} \circ s$ pour $0 \leq k \leq 4$.
3. Montrer par récurrence que toute composée de $p \geq 1$ applications égales à s ou à s' est l'une des huit applications r^k ou $r^k \circ s$ ($0 \leq k \leq 3$). Reconnaitre $r^2 \circ s$ et $r^3 \circ s$.
4. Calculer les huit images (lui compris) d'un objet placé en $M(4; 2)$. Et pour $M(4; 3)$?

Exercice 54 Combien de rotations ? ★★★

corrigé p. 62

Les carrés $\mathcal{Q} = ABCD$, $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 2)$, $D(0; 2)$, et $\mathcal{Q}' = EFGH$, $E(4; 0)$, $F(6; 0)$, $G(6; 2)$, $H(4; 2)$, ont pour centres O_1 et O_2 . On cherche les rotations r qui transforment $\{A, B, C, D\}$ en $\{E, F, G, H\}$.

1. Montrer que $r(O_1) = O_2$, puis que r est déterminée par le sommet $X = r(A)$.
2. Montrer que $X = E$ est impossible ; pour $X \in \{F, G, H\}$, trouver r et vérifier. Où sont les centres ?
3. Pour deux carrés de même côté et de centres distincts, montrer qu'il y a 4 rotations, ou 3 si leurs côtés sont parallèles.
4. Même question pour deux triangles équilatéraux de même côté et de centres distincts.

23

Utiliser une rotation

Démontrer, construire, chercher des lieux : triangles, carrés, polygones réguliers.

Exercice 55 Le losange de 60° ★

corrigé p. 62

Losange $ABCD$ de côté a , $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ (ABD et BCD sont équilatéraux) ; $r = r\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)$.

1. Justifier que $r(A) = D$ et $r(D) = C$. Quelle est l'image du segment $[AD]$?
2. $M \in [AD]$, $N \in [DC]$ et $AM = DN$: montrer que $r(M) = N$, puis que BMN est équilatéral.
3. Montrer que $DM + DN = a$, que le périmètre de DMN vaut $a + BM$, et trouver sa valeur minimale.

Exercice 56 Le pentagone et ses diagonales ★

corrigé p. 63

$ABCDE$ est un pentagone régulier direct de centre O : $r = r\left(O, \frac{2\pi}{5}\right)$ envoie $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto E \mapsto A$.

1. Images par r des diagonales $[AC]$, $[BD]$, $[CE]$, $[DA]$, $[EB]$? En déduire qu'elles sont égales.
2. Montrer que $(\vec{AC}, \vec{BD}) \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi]$.
3. Soit $I_1 = (AC) \cap (BD)$, $I_2 = (BD) \cap (CE)$, $I_3 = (CE) \cap (DA)$, $I_4 = (DA) \cap (EB)$, $I_5 = (EB) \cap (AC)$. Montrer que $r(I_1) = I_2$ et que $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$ est un pentagone régulier de centre O .
4. Montrer que les cinq « pointes » $BI_5 I_1$, $CI_1 I_2$, $DI_2 I_3$, $EI_3 I_4$, $AI_4 I_5$ de l'étoile sont isométriques.

Exercice 57 Un carré de centre imposé ★★

corrigé p. 63

On cherche les carrés $MNPQ$ de centre O tels que $M \in D_1 : y = 1$ et $N \in D_2 : y = x + 3$ (M, N consécutifs).

1. *Analyse.* Montrer que $N = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(M)$ ou $N = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)(M)$, puis que N appartient à $D_2 \cap \Delta_+$ ou à $D_2 \cap \Delta_-$, où $\Delta_{\pm} = r\left(O, \pm\frac{\pi}{2}\right)(D_1)$.
2. Déterminer des équations de Δ_+ et Δ_- (utiliser le projeté orthogonal H de O sur D_1).
3. *Synthèse.* Coordonnées de M, N, P, Q et côté de chaque solution. Combien y a-t-il de carrés ?
4. Pour quelles droites D_2 (sécantes à D_1) le nombre de solutions est-il différent de 2 ?

Exercice 58 Le carré et l'inverse des carrés ★★

corrigé p. 64

$ABCD$ est un carré direct de côté a . Une droite passant par A coupe le segment $[DC]$ en $E \neq D$ et la droite (BC) en G . On pose $r = r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ et $F = r(E)$.

1. Montrer que $r(D) = B$, que $r((DC)) = (BC)$, puis que $F \in (BC)$, $AF = AE$ et $(AF) \perp (AE)$.
2. Montrer que AFG est rectangle en A , de hauteur $[AB]$. Avec deux calculs de son aire, montrer que $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AG^2}$, puis que $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{a^2}$.
3. *Exemple :* $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 4)$, $D(0; 4)$, $E(3; 4)$: calculer AE , G , AG , F ; vérifier.
4. Montrer que $AE \times AG \geq 2a^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 59 Euclide et le quart de tour ★★★

corrigé p. 64

ABC est rectangle en A , $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, et H est le pied de sa hauteur issue de A . On pose $F = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)(A)$, $E = r\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)(C)$, et l'on construit les carrés $ABFG$ et $BCDE$, extérieurs au triangle.

1. Montrer que $r\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)$ transforme le triangle FBC en ABE . Que dire de leurs aires ?
2. Montrer que $(AC) \parallel (BF)$ et en déduire que $\text{aire}(FBC) = \frac{1}{2}AB^2$.
3. Montrer que la distance de A à (BE) vaut BH ; en déduire $AB^2 = BH \times BC$.
4. Établir $AC^2 = CH \times CB$ et Pythagore ; interpréter avec (AH) , qui coupe $BCDE$ en deux rectangles.
5. *Contrôle :* $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 1)$: calculer F, G, E, D, H et vérifier $AB^2 = BH \times BC$.

Exercice 60 Quand le centre se déplace ★★★

corrigé p. 65

On fixe $M(1; 3)$; pour $t \in \mathbb{R}$, $P_t(t; 0)$ et $M_t = r\left(P_t, \frac{\pi}{2}\right)(M)$: c'est le centre qui bouge.

1. Calculer M_t . Montrer que le lieu $\mathcal{L}$ des points M_t ($t \in \mathbb{R}$) est une droite ; équation ?
2. Trouver $P \in (Ox)$ tel que PMM' , rectangle isocèle direct en P , ait M' : a) sur $y = 2$; b) sur le cercle $(O, 2)$.
3. Pour $\theta \neq 0 [2\pi]$, montrer que le lieu des $r(P_t, \theta)(M)$ est une droite dirigée par $\vec{u}(1 - \cos \theta; -\sin \theta)$. Cas $\theta = \pi$?
4. Le centre P décrit maintenant le cercle de centre O et de rayon 1 : lieu de $r\left(P, \frac{\pi}{2}\right)(M)$?

24

Défis de concours

Olympiades, formules célèbres, réseaux, théorèmes : la rotation est la clé (repère orthonormé direct).

Exercice 61 Les 1986 rotations ★★★★★

corrigé p. 65

(Olympiades internationales, 1986.) $A_1A_2A_3$ est un triangle, P_0 un point ; $A_{k+3} = A_k$ ($k \geq 1$) et $P_{k+1} = r\left(A_{k+1}, -\frac{2\pi}{3}\right)(P_k)$ ($k \geq 0$). Pour $\vec{u}(x; y)$, on note $\rho(\vec{u})\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y; -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.

1. Montrer que $N = r\left(\Omega, -\frac{2\pi}{3}\right)(M) \iff \vec{\Omega N} = \rho(\vec{\Omega M})$, que $\rho(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(\vec{u}) + \rho(\vec{v})$, $\rho(k\vec{u}) = k\rho(\vec{u})$, et, en notant $\rho^2 = \rho \circ \rho$, que $\rho^3(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\rho^2(\vec{u}) + \rho(\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.
2. On pose $\vec{u} = A_1\vec{A}_2$ et $\vec{v} = A_1\vec{A}_3$. Montrer que $P_0\vec{P}_3 = \vec{w}$, avec $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \rho(2\vec{u} - \vec{v})$.
3. Montrer que $P_0\vec{P}_{3m} = m\vec{w}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, puis que $P_{1986} = P_0 \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$.
4. Avec $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$, montrer que $\vec{w} = \vec{0} \iff A_3 = r\left(A_1, \frac{\pi}{3}\right)(A_2)$. Conclure.
5. Réciproque et exemple : $A_1(0; 0)$, $A_2(2; 0)$, $A_3(1; \sqrt{3})$, $P_0(1; -\sqrt{3})$: calculer P_1, P_2, P_3 .

Exercice 62 De trois carrés à la formule de Machin ★★★★★

corrigé p. 66

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$, on pose $\vec{u} * \vec{v} = (ac - bd; ad + bc)$.

1. Soit α une mesure de $(\vec{i}, \vec{u})$ et V le point tel que $\vec{OV} = \vec{v}$. Calculer les coordonnées de $V' = r(O, \alpha)(V)$ et en déduire que $(\vec{i}, \vec{u} * \vec{v}) \equiv (\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{i}, \vec{v}) [2\pi]$.
2. Les trois carrés. Trois carrés de côté 1 sont côte à côte ; de $O(0; 0)$, on voit $P_1(1; 1)$, $P_2(2; 1)$, $P_3(3; 1)$ sous les angles $\alpha_k \in]0, \frac{\pi}{2}[$, mesures de $(\vec{i}, \vec{OP}_k)$. Montrer que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.
3. Machin (1706). Soit $\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ et $\tan \beta = \frac{1}{239}$. Montrer que $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.
4. De même : $2\gamma + \delta = \frac{\pi}{4}$ si $\gamma, \delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan \gamma = \frac{1}{3}$, $\tan \delta = \frac{1}{7}$ (Hutton).

Exercice 63 Polygones réguliers à sommets entiers ★★★★★

corrigé p. 66

Un point est *entier* si ses coordonnées le sont. Un polygone régulier à $n \geq 3$ sommets de centre Ω est une famille de points distincts $(A_0, \dots, A_{n-1})$ avec $A_{k+1} = r\left(\Omega, \frac{2\pi}{n}\right)(A_k)$ et $A_n = A_0$.

1. Montrer que $A_0(1; 0)$, $A_1(3; 1)$, $A_2(2; 3)$, $A_3(0; 2)$ forment un polygone régulier ($n = 4$).
2. Soit $(A_0, \dots, A_{n-1})$ un polygone régulier à sommets entiers, $\vec{u} = A_0\vec{A}_1$ et $\vec{u}' = A_1\vec{A}_2$. Montrer que $\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\|^2}$ et $\sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\det(\vec{u}, \vec{u}')}{\|\vec{u}\|^2}$ sont des rationnels.
3. En déduire l'impossibilité pour $n = 3, 6$ et 5 (on admet $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, voir l'exercice 36).
4. Soit $n \geq 7$. Par l'absurde, on prend un tel polygone dont le carré s^2 du côté est minimal, et B_k tel que $A_0\vec{B}_k = A_k\vec{A}_{k+1}$. Montrer que $(B_0, \dots, B_{n-1})$ est un polygone régulier à sommets entiers, de centre A_0 et de côté $2s \sin \frac{\pi}{n}$; conclure.

Exercice 64 Le théorème de Finsler–Hadwiger ★★★★★

corrigé p. 67

Les carrés directs $ABCD$ et $AB'C'D'$ ont pour centres O_1, O_2 ; M, N sont les milieux de $[BD']$, $[B'D]$. Origine A , $B(b_1; b_2)$, $B'(c_1; c_2)$, et $\rho(x; y) = (-y; x)$ (quart de tour).

1. Justifier que $\vec{AD} = \rho(\vec{AB})$ et $\vec{AD'} = \rho(\vec{AB'})$; calculer les coordonnées de D, D', O_1, O_2, M, N .
2. Montrer que $M\vec{O}_2 = \frac{1}{2}\vec{BB'}$ et $O_1\vec{M} = \rho(M\vec{O}_2)$, puis que $O_2\vec{N} = -O_1\vec{M}$.
3. En déduire que O_1MO_2N est un carré de côté $\frac{1}{2}BB'$, dont le centre est le milieu de $[O_1O_2]$.
4. Exemple : $B(4; 0)$ et $B'(3; 2)$. Calculer O_1, O_2, M, N et le côté du carré.

Exercice 65 Les isométries qui fixent un point ★★★★★

corrigé p. 67

Une *isométrie* est une application du plan dans lui-même qui conserve les distances. Soit f une isométrie telle que $f(\Omega) = \Omega$; on note $M^* = f(M)$.

1. Montrer que $\Omega\vec{M}^* \cdot \Omega\vec{N}^* = \Omega\vec{M} \cdot \Omega\vec{N}$ pour tous points M, N .
2. Soit $A \neq \Omega$. Justifier qu'il existe une rotation ρ de centre Ω telle que $\rho(A) = A^*$, et que $g = \rho^{-1} \circ f$ est une isométrie qui fixe Ω et A .
3. On écrit $\Omega\vec{M} = \lambda\vec{\Omega A} + \vec{w}$, $\vec{w} \perp \vec{\Omega A}$. Montrer que $\Omega g(M) = \lambda\vec{\Omega A} + \vec{w}'$ avec $\vec{w}' \perp \vec{\Omega A}$, $\|\vec{w}'\| = \|\vec{w}\|$, puis que $g(M) \in \{M, s(M)\}$, où s est la symétrie d'axe (ΩA) .
4. Montrer que $g = \text{Id}$ ou $g = s$ (raisonner par l'absurde avec deux points M, N hors de (ΩA)).
5. Conclure (f est une rotation de centre Ω ou une symétrie d'axe passant par Ω) ; lesquelles conservent les angles ?
6. Identifier $f : (x; y) \mapsto \left(\frac{8x+15y}{17}; \frac{15x-8y}{17}\right)$ et $g : (x; y) \mapsto \left(\frac{8x-15y}{17}; \frac{15x+8y}{17}\right)$.

Exercice 66 Les pieds des perpendiculaires ★★★★★

corrigé p. 68

Trois droites D_1, D_2, D_3 passent par O , avec $(D_1, D_2) \equiv (D_2, D_3) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$. Pour $M \neq O$, on note $M_i = s_{D_i}(M)$, P_i le projeté orthogonal de M sur D_i et K le milieu de $[OM]$.

1. Montrer que $s_{D_2} \circ s_{D_1} = s_{D_3} \circ s_{D_2} = s_{D_1} \circ s_{D_3} = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. En déduire que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral de centre O .
2. Montrer que $K\vec{P}_i = \frac{1}{2}\vec{OM}_i$, puis que $r\left(K, \frac{2\pi}{3}\right)$ transforme P_1, P_2, P_3 en P_2, P_3, P_1 . Conclure : nature de $P_1P_2P_3$, centre et côté en fonction de OM .
3. Exemple : $D_1 = (Ox)$, $D_2 : y = \sqrt{3}x$, $D_3 : y = -\sqrt{3}x$ et $M(0; 2)$: calculer P_1, P_2, P_3 et vérifier.
4. Si $n \geq 3$ droites passent par O avec $(D_k, D_{k+1}) \equiv \frac{\pi}{n} [\pi]$, montrer que les projetés de M forment un polygone régulier de centre K , de côté $OM \sin \frac{\pi}{n}$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

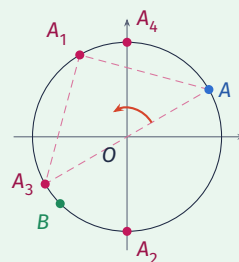
25 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

1. On retranche le multiple de 2π le plus proche : $\frac{35\pi}{6} = 6\pi - \frac{\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4}$, $\frac{100\pi}{3} = 34\pi - \frac{2\pi}{3}$; mesures principales $\boxed{-\frac{\pi}{6}}$, $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$, $\boxed{-\frac{2\pi}{3}}$ (dans $]-\pi; \pi]$).
2. Chasles : $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$; $(\vec{w}, \vec{u}) \equiv -\frac{\pi}{2}$; $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi + \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}$; $(\vec{u}, -\vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi \equiv -\frac{\pi}{2}$; $(-\vec{v}, -\vec{w}) \equiv (\vec{v}, \vec{w}) \equiv -\frac{\pi}{6}$; les coefficients 3 et 2 étant positifs, $(3\vec{v}, -2\vec{u}) \equiv (\vec{v}, -\vec{u}) \equiv (\vec{v}, \vec{u}) + \pi \equiv -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$. Comme $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2}$: $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
3. $(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv (\vec{OA}, \vec{OB}) + (\vec{OB}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$, $(\vec{AO}, \vec{OC}) \equiv \pi + \frac{5\pi}{6} \equiv \boxed{-\frac{\pi}{6}}$. Les triangles OAB et OBC étant directs, $(\vec{BO}, \vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{BC}, \vec{BO}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (angle de base). Donc $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv (\vec{BA}, \vec{BO}) + (\vec{BO}, \vec{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{7\pi}{12}}$.

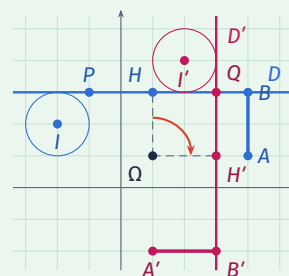
■ Corrigé de l'exercice 2

1. Soit M' l'image de $M(t)$: $OM' = OM(t) = 1$, donc $M' \in \mathcal{C}$, et par Chasles $(\vec{i}, \vec{OM'}) \equiv (\vec{i}, \vec{OM}) + (\vec{OM}, \vec{OM'}) \equiv t + \alpha$: $\boxed{M' = M(t + \alpha)}$.
2. $A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$; $A_1 = M \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $A_2 = M \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \boxed{(0; -1)}$,
 $A_3 = M \left(\frac{7\pi}{6} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$, $A_4 = M \left(\frac{\pi}{2} \right) = \boxed{(0; 1)}$.
3. $-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{12}$: c'est $\boxed{r \left(O, -\frac{11\pi}{12} \right)}$. $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$: c'est $\boxed{r(O, \pi) = s_O}$.
4. $A_3 = s_O(A)$: $[AA_3]$ est un diamètre, donc AA_1A_3 est rectangle en A_1 ; de plus $AA_1 = A_1A_3 = \sqrt{2}$ (angles au centre $\frac{\pi}{2}$) : **isocèle rectangle en A_1** .



■ Corrigé de l'exercice 3

1. $\vec{\Omega}A(3;0) \mapsto (0;-3) : \boxed{A'(1;-2)}$; $\vec{\Omega}B(3;2) \mapsto (2;-3) : \boxed{B'(3;-2)}$. Images : $[A'B']$ et $[A'B']$. $(AB) : x = 4$ et $(A'B') : y = -2$ sont **perpendiculaires** (angle $-\frac{\pi}{2}$).
2. $H(1;3), \vec{\Omega}H(0;2) \mapsto (2;0) : H'(3;1)$. Comme $D \perp (OH)$ en H , et qu'une rotation conserve l'orthogonalité, D' est la perpendiculaire à (OH') en $H' : \boxed{D' : x = 3}$.
3. $\vec{\Omega}I(-3;1) \mapsto (1;3) : \text{l'image est le cercle de centre } \boxed{I'(2;4)} \text{ et de rayon } 1$.
4. $r(P) \in D$ et $r(P) \in D'$, donc $r(P)$ est le point $Q(3;3)$ de $D \cap D'$. Avec $r^{-1} = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right), (a;b) \mapsto (-b;a) : \vec{\Omega}Q(2;2) \mapsto (-2;2)$, d'où $\boxed{P(-1;3)}$, bien sur D ✓.



■ Corrigé de l'exercice 4

1. **Méthode** : l'angle est imposé par $A \mapsto A_k$; on teste ensuite B et C . T_1, T_2, T_4 sont les images par $(x;y) \mapsto (-y;x), (-x;-y), (y;-x) : \text{oui}, r\left(O, \frac{\pi}{2}\right), r(O, \pi) = s_O, r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$. T_3 : l'image de A imposerait l'angle $\frac{\pi}{2}$, mais $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(C) = (-2;1) \neq (2;1) : \text{non}$. D'ailleurs $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$ alors que $(\vec{A_3B_3}, \vec{A_3C_3}) \equiv -\frac{\pi}{2}$: l'orientation est renversée (T_3 est l'image par la symétrie d'axe $y = x$).
2. a) $\frac{11\pi}{2} = 6\pi - \frac{\pi}{2} : \text{vrai}$. b) $-3\pi \equiv \pi : \text{vrai}$. c) $\frac{5\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} : \text{vrai}$. d) **Faux** : $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie $(1;0)$ sur $(0;1)$, et $(0;1)$ sur $(-1;0)$ (vrai seulement si $\theta \equiv \pi$). e) **Faux** : la symétrie d'axe $y = x$ conserve les distances et fixe O sans être une rotation (T_3).

■ Corrigé de l'exercice 5

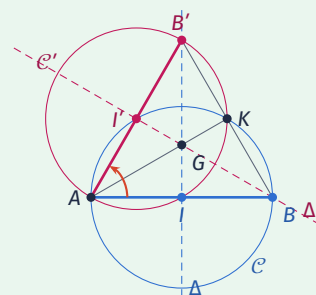
1. $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right) : x' = -y, y' = x, A \mapsto \boxed{(2;3)}$; $r(O, \pi) : x' = -x, y' = -y, A \mapsto \boxed{(-3;2)}$; $r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right) : x' = y, y' = -x, A \mapsto \boxed{(-2;-3)}$.
2. $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1 : x' + 1 = -(y - 2), y' - 2 = x + 1$, soit $x' = 1 - y, y' = x + 3$. $r_1(A) = \boxed{(3;6)}$, $r_1(O) = \boxed{(1;3)}$, $r_1(B) = \boxed{(0;4)}$. $\vec{\Omega}A(4;-4), \vec{\Omega}A'(4;4) : \Omega A = \Omega A' = 4\sqrt{2}$ et $\vec{\Omega}A \cdot \vec{\Omega}A' = 16 - 16 = 0$ ✓.
3. $r_2 : x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$. $P' = (\sqrt{3} - \sqrt{3}; 3 + 1) = \boxed{(0;4)}$, $Q' = \boxed{(-1;-\sqrt{3})}$, $R' = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{(2;0)}$. $OP = \sqrt{12 + 4} = 4 = OP'$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 6

1. **Une rotation conserve les distances** : $\boxed{A'B' = 3}, \boxed{A'C' = 4}, B'C' = BC = \sqrt{9 + 16} = \boxed{5}$. Elle conserve l'orthogonalité : $A'B'C'$ est rectangle en A' , d'aire $\frac{3 \times 4}{2} = \boxed{6}$. Elle conserve le milieu : I' est le milieu de $[B'C']$, et $A'I' = AI = \frac{BC}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$ (médiane relative à l'hypoténuse).
2. Les angles orientés sont conservés : $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \boxed{\frac{\pi}{2}}$; propriété fondamentale : $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv \boxed{\frac{2\pi}{3}}$ et $(\vec{BC}, \vec{C'B'}) \equiv \frac{2\pi}{3} + \pi \equiv \boxed{-\frac{\pi}{3}}$. Comme $\frac{2\pi}{3} \neq 0 [\pi]$, (BC) et $(B'C')$ sont **sécantes**; l'angle de droites vaut $\frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} [\pi]$: elles font un angle de 60° .
3. $AB' = AB = 3$ et $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv \frac{2\pi}{3}$; Al-Kashi : $BB'^2 = 9 + 9 - 18 \cos \frac{2\pi}{3} = 27$, $\boxed{BB' = 3\sqrt{3}}$; de même $CC'^2 = 48$, $\boxed{CC' = 4\sqrt{3}}$.

■ Corrigé de l'exercice 7

1. $AB' = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AB'}) \equiv \frac{\pi}{3}$: le triangle ABB' , isocèle d'angle au sommet 60° , est **équilatéral**. r conserve le milieu : I' est le milieu de $[AB']$; $AI'I'$ est équilatéral ($AI = AI' = 2$, angle 60°) : $II' = 2$, $I' \in \mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, 2)$ a pour image $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(I', 2)$, cercle de diamètre $[AB']$. Δ , perpendiculaire à (AB) en I , a pour image la perpendiculaire à (AB') en I' : Δ' est la médiatrice de $[AB']$; comme $BA = BB'$, $B \in \Delta'$. L'image de $[BA]$ est $[B'A]$.
3. Dans le triangle équilatéral ABB' , la médiane (AK) est une hauteur : $\hat{AKB} = \hat{AKB'} = 90^\circ$, donc $K \in \mathcal{C}$ et $K \in \mathcal{C}'$. Deux cercles distincts ont au plus deux points communs : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A; K\}$.
4. Δ et Δ' sont deux médiatrices de ABB' : elles se coupent au centre du cercle circonscrit, qui est le centre G du triangle équilatéral. L'angle d'une droite et de son image est $\frac{\pi}{3} [\pi]$: $[60^\circ]$.



■ Corrigé de l'exercice 8

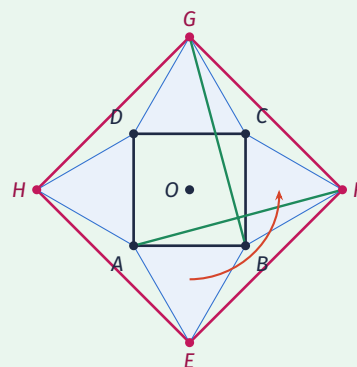
1. $r\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)^{-1} = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{3}\right)$. **Par l'absurde** : si $M \neq \Omega$ était invariant, on aurait $\frac{\pi}{3} \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}) \equiv 0 [2\pi]$, ce qui est faux. Seul Ω est invariant.
2. a) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$: $x' - 3 = y - 1$, $y' - 1 = -(x - 3)$, soit $x' = y + 2$, $y' = -x + 4$. b) $y + 2 = 5$ et $-x + 4 = 0$: $(4; 3)$. Avec $r^{-1} = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$: $x = 3 - (y' - 1)$, $y = 1 + (x' - 3)$, d'où $(3 - (-1); 1 + 2) = (4; 3)$ ✓. c) $x = y + 2$ et $y = -x + 4$ donnent $x = 3$, $y = 1$: c'est Ω . d) $x'' = y' + 2 = 6 - x$, $y'' = -x' + 4 = 2 - y$: $r \circ r = s_\Omega$ (Ω est le milieu de $[MM']$), soit $r(\Omega, -\pi)$. e) $r(M) = N \iff x = 4 - \beta$ et $y = \alpha - 2$: un unique antécédent, r est une bijection.

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

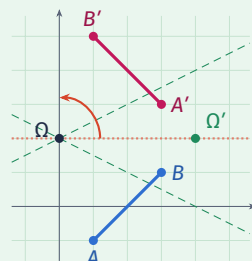
1. $AE = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3}$: ABE est **équilatéral**. Les sinus de $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}$ et de $(\vec{AB}, \vec{AE})$ sont de signes contraires : D et E sont de part et d'autre de (AB) ; de même aux autres sommets.
2. $r : A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ (cours). Soit $E_1 = r(E)$: $BE_1 = AE = AB = BC$ et $(\vec{BC}, \vec{BE_1}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (angles conservés). Donc $E_1 = r\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)(C) = F$: $r(E) = F$, et de même $r(F) = G$, $r(G) = H$, $r(H) = E$.
3. $r \circ r = s_O$ envoie E sur G et F sur H : $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu O ; $OE = OF$ et $(OE) \perp (OF)$: diagonales de même milieu, de même longueur et perpendiculaires : $EFGH$ est un **carré de centre O** .
4. $r(A) = B$ et $r(F) = G$: $AF = BG$ et $(\vec{AF}, \vec{BG}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $(AF) \perp (BG)$. $s_O = r \circ r$ envoie A sur C et F sur H : $CH = AF$.
5. Le milieu I de $[AB]$, O et E sont sur la médiatrice de $[AB]$, O et E de part et d'autre de (AB) :



$OE = OI + IE = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \boxed{2 + 2\sqrt{3}}$. Demi-diagonale du carré $EFGH$: $EF = OE\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$.
 Dans ABF : $BA = BF = 4$, $\hat{ABF} = 150^\circ$, donc $AF^2 = 32 - 32 \cos 150^\circ = 32 + 16\sqrt{3} = \left(2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)^2$:
 $\boxed{AF = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}} (= EF)$.

■ Corrigé de l'exercice 10

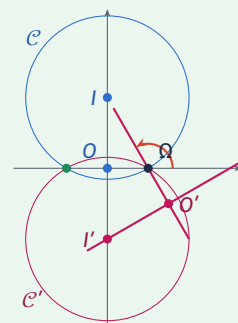
1. a) $\vec{AB}(2; 2) \mapsto \vec{A'B'}(-2; 2)$ par le quart de tour direct :
 $AB = A'B' = 2\sqrt{2}$, $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv \frac{\pi}{2}$. b) $AB = A'B' \neq 0$ et
 $(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \neq 0$: d'après le cours, il existe **une unique rotation**
 r , d'angle $\frac{\pi}{2}$, telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.



2. a) Médiatrice de $[AA']$ (milieu $(2; 1)$, normale $\vec{AA'}(2; 4)$) : $\boxed{x + 2y - 4 = 0}$; de $[BB']$ (milieu $(2; 3)$, normale $(-2; 4)$) : $\boxed{-x + 2y - 4 = 0}$. Le centre est sur les deux ($\Omega A = \Omega A'$, $\Omega B = \Omega B'$) : en ajoutant, $y = 2$, puis $x = 0$: $\boxed{\Omega(0; 2)}$. b) $x' = -(y - 2)$, $y' - 2 = x$: $\boxed{x' = 2 - y, y' = x + 2}$; $A \mapsto (3; 3)$, $B \mapsto (1; 5)$ ✓.
 3. $\vec{B'A'}(2; -2)$ est l'image de $\vec{AB}$ par $(a; b) \mapsto (b; -a)$: $AB = B'A'$, angle $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$: r' existe et est unique. Les médiatrices de $[AB']$ et $[BA']$ sont **confondues** ($y = 2$) : elles ne suffisent pas. Avec $\Omega'(a; b)$: $x' - a = y - b$, $y' - b = -(x - a)$; $r'(A) = B'$ donne $a - b - 1 = 1$ et $a + b - 1 = 5$, soit $\boxed{\Omega'(4; 2)}$; contrôle : $r'(B) = (3; 3) = A'$ ✓. (AB) : $y = x - 2$ et $(A'B')$: $x + y = 6$ passent par $(4; 2)$ ✓.
 4. $A'C = 2 \neq AB = 2\sqrt{2}$: une rotation conserve les distances, **c'est impossible**.

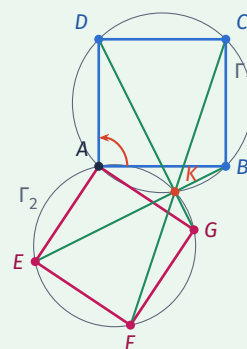
■ Corrigé de l'exercice 11

1. M invariant $\iff \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 3$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = -\sqrt{3}$, soit
 $3x + \sqrt{3}y = 6$ et $3x - 3\sqrt{3}y = 6$: $y = 0$, $x = 2$: **un unique point invariant** $\boxed{\Omega(2; 0)}$. Alors $x' - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y - 0)$ et
 $y' - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 0)$: avec $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\boxed{f = r\left(\Omega, \frac{2\pi}{3}\right)}$.
 2. $O' = \boxed{(3; -\sqrt{3})}$; $\Omega O = 2$ et $\Omega O' = \sqrt{1 + 3} = 2$ ✓.
 3. a) Les points $(0; t)$ ont pour images $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}t; -\sqrt{3} - \frac{t}{2}\right)$; en éliminant $t = -2\left(y + \sqrt{3}\right)$: $x = 6 + \sqrt{3}y$:
 $\boxed{x - \sqrt{3}y - 6 = 0}$. b) L'image passe par Ω et par O' , de pente $\frac{-\sqrt{3}}{1}$: $\boxed{\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0}$.
 4. a) $x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 16$: cercle de centre $I(0; 2\sqrt{3})$, de rayon 4 ; $4 + 0 - 0 - 4 = 0$: $\Omega \in \mathcal{C}$. b)
 $f(I) = (0; -2\sqrt{3})$, même rayon : $\boxed{\mathcal{C}' : x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = 16}$. c) Par différence, $8\sqrt{3}y = 0$: $y = 0$,
 $x^2 = 4$: $\boxed{\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{\Omega; (-2; 0)\}}$.
 5. $f \circ f \circ f = r\left(\Omega, 3 \times \frac{2\pi}{3}\right) = r(\Omega, 2\pi) = \text{Id}$ (rotations de même centre).



■ Corrigé de l'exercice 12

1. $r \circ r = r(A, \pi) = s_A$, donc $r(G) = r(r(E)) = s_A(E) = E'$. r transforme le triangle ABG en ADE' ; une rotation conserve les distances, donc les aires : $\text{aire}(ABG) = \text{aire}(ADE')$. Or A est le milieu de $[EE']$: $[DA]$ est une médiane de DEE' et $\text{aire}(ADE) = \text{aire}(ADE')$ (bases $AE = AE'$, même hauteur). **Donc $\text{aire}(ABG) = \text{aire}(ADE)$.**



2. a) $(BE) \perp (DG)$: $\widehat{BKD} = 90^\circ$ (ou $K \in \{B; D\}$), donc K est sur le cercle de diamètre $[BD]$, c'est-à-dire Γ_1 ; de même $\widehat{EKD} = 90^\circ$: $K \in \Gamma_2$. b) $[AC]$ est un diamètre de Γ_1 et $K \neq A$: $(KC) \perp (KA)$ (ou $K = C$) ; $[AF]$ est un diamètre de Γ_2 : $(KF) \perp (KA)$ (ou $K = F$). Donc C et F sont sur la perpendiculaire à (AK) en K : C, K, F **sont alignés**, et $(BE), (DG), (CF)$ **sont concourantes en K** .
3. $D = r(B) = (0; 4)$, $C = (4; 4)$, $G = r(E) = (3; -2)$ (quart de tour $(x; y) \mapsto (-y; x)$), $F = (1; -5)$ ($\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{AG}$). $\text{aire}(ABG) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ (base $[AB]$, hauteur $|y_G|$), $\text{aire}(ADE) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ ✓. $(BE) : (4 - 6t; -3t)$, $(DG) : (3s; 4 - 6s)$; on trouve $t = \frac{4}{15}$: $K(\frac{12}{5}; -\frac{4}{5})$. $\vec{CK} = (-\frac{8}{5}; -\frac{24}{5}) = \frac{8}{15}\vec{CF}$, avec $\vec{CF}(-3; -9)$: $K \in (CF)$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. **Les angles de rotations de même centre s'ajoutent** : $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2 = r(\Omega, \frac{2\pi}{3})$; $r_1 \circ r_1 = r(\Omega, \frac{\pi}{2})$; $r_1^4 = r(\Omega, \pi) = s_\Omega$; $r_1^8 = r(\Omega, 2\pi) = \text{Id}$; $r_2^{-1} \circ r_1 = r(\Omega, -\frac{\pi}{6})$.
2. $\rho^n = r(\Omega, \frac{3n\pi}{10})$. $\rho^n = \text{Id} \iff \frac{3n}{10} = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \iff 3n = 20k \iff 20 \mid n$ (Gauss, $3 \wedge 20 = 1$) : $n \in \{20; 40; 60; \dots\}$. $\rho^n = s_\Omega \iff 3n = 10(2k+1) : 10 \mid 3n$, donc $10 \mid n$; avec $n = 10m$, $3m = 2k+1$ est impair $\iff m$ impair : $n \in \{10; 30; 50; \dots\}$.
3. $r(\Omega, \theta) \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, 2\theta) = s_\Omega \iff 2\theta \equiv \pi [2\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
4. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$: $f = r(O, \frac{\pi}{6})$. $f \circ f : x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$: $r(O, \frac{\pi}{3})$; puis $x''' = -y$, $y''' = x$: $f \circ f \circ f = r(O, \frac{\pi}{2})$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 14

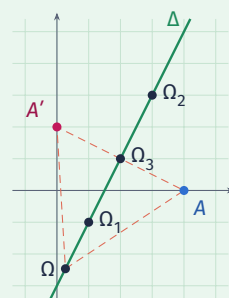
1. a) Δ_1 est dirigée par $\vec{i}$, Δ_2 par $\vec{u}(1; \sqrt{3})$, avec $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{3}$ ($\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$) : $(\Delta_1, \Delta_2) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$.
b) Le milieu $\frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y; \sqrt{3}x + 3y)$ de $[MM']$ est sur Δ_2 , et $M\vec{M}'(-\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y; \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$ vérifie $M\vec{M}' \cdot \vec{u} = 0$: c'est bien s_2 .
c) $s_2 \circ s_1 : (x; y) \mapsto (x; -y) \mapsto (-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y; \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$: $s_2 \circ s_1 = r(O, \frac{2\pi}{3}) = r(O, 2(\Delta_1, \Delta_2))$ (cours). De même $s_1 \circ s_2 : (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y; -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y) : r(O, -\frac{2\pi}{3})$. d) $M(2; 0) \mapsto (-1; \sqrt{3})$.
2. Les trois droites passent par O et font avec (AB) les angles $\frac{\pi}{4}$ ((AC)), $\frac{\pi}{2}$ (Δ), $\frac{3\pi}{4}$ ((BD)). Donc $(\Delta, (AC)) \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi]$: $s_{(AC)} \circ s_\Delta = r(O, -\frac{\pi}{2})$; $((BD), (AC)) \equiv -\frac{\pi}{2} [\pi]$: $s_{(AC)} \circ s_{(BD)} = r(O, -\pi) = s_O$. Pour $r(O, \frac{\pi}{2}) = s_{\Delta'} \circ s_{(AC)}$, il faut $((AC), \Delta') \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$: $\Delta' = \Delta$. Contrôle : $s_{(AC)}(B) = D$, $s_\Delta(D) = C = r(O, \frac{\pi}{2})(B)$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 15

- $\vec{AB}(6;0)$ et $\vec{DC}(3;0) = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AD}(1;3)$ non colinéaire à $\vec{AB}$: trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$: $x' - 2 = y - 1$, $y' - 1 = -(x - 2)$, soit $\boxed{x' = y + 1, y' = 3 - x}$; $A'(1;3)$, $B'(1;-3)$, $C'(4;-1)$, $D'(4;2)$.
- Une rotation conserve le parallélisme (et le non-parallélisme, r^{-1} étant une rotation) : $(A'B') \parallel (D'C')$, $(A'D') \nparallel (B'C')$: **trapèze**. L'angle étant $-\frac{\pi}{2}$, $(A'B') \perp (AB)$ ($x = 1$ et $y = 0$).
- $(AC) : y = \frac{3}{4}x$; $(BD) : y = -\frac{3}{5}(x - 6)$; $\frac{3}{4}x + \frac{3}{5}x = \frac{18}{5}$ donne $\boxed{I\left(\frac{8}{3}; 2\right)}$. L'image du point commun à deux droites est le point commun à leurs images : $I' = r(I) = \boxed{\left(3; \frac{1}{3}\right)}$.
- $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (4;3) \cdot (-5;3) = \boxed{-11} = (3;-4) \cdot (3;5) = \vec{A'C'} \cdot \vec{B'D'}$ (produit scalaire conservé). Aire : $\frac{(6+3) \times 3}{2} = \boxed{\frac{27}{2}}$, conservée. 5. $M(t;0) \mapsto (1;3-t)$; $(BC) : 3x + 2y - 18 = 0$, d'où $3 + 6 - 2t - 18 = 0$: $\boxed{M\left(-\frac{9}{2}; 0\right)}$, d'image $\left(1; \frac{15}{2}\right)$.

■ Corrigé de l'exercice 16

- Si $r(\Omega, \theta)(A) = A'$, alors $\Omega A = \Omega A' : \Omega \in \Delta$. Milieu $(2;1)$, normale $\vec{AA'}(-4;2) : -4(x-2) + 2(y-1) = 0$, $\boxed{\Delta : y = 2x - 3}$.
- $\theta = \frac{\pi}{2} : A \mapsto (a+b; b+4-a) = (0;2)$, d'où $\boxed{\Omega_1(1;-1)}$. $\theta = -\frac{\pi}{2} : A \mapsto (a-b; a+b-4) = (0;2)$, d'où $\boxed{\Omega_2(3;3)}$. $\theta = \pi$: le milieu $\boxed{\Omega_3(2;1)}$. Tous vérifient $y = 2x - 3$ ✓.



- $\Omega A = \Omega A'$ et $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega A'}) \equiv \frac{\pi}{3} : \Omega A A' \text{ est équilatéral} : \Omega \in \Delta$ à la distance $\frac{\sqrt{3}}{2} AA' = \sqrt{15}$ du milieu, d'où (vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{5}}(1;2)$) les candidats $(2 \pm \sqrt{3}; 1 \pm 2\sqrt{3})$. Pour $\Omega(2 - \sqrt{3}; 1 - 2\sqrt{3})$, $\vec{\Omega A}(2 + \sqrt{3}; 2\sqrt{3} - 1)$ tourne de $\frac{\pi}{3}$ en $(\sqrt{3} - 2; 2\sqrt{3} + 1)$, et $\Omega + (\sqrt{3} - 2; 2\sqrt{3} + 1) = (0;2) = A'$ ✓ : $\boxed{\Omega(2 - \sqrt{3}; 1 - 2\sqrt{3})}$ (l'autre convient pour $-\frac{\pi}{3}$).
- Si $\Omega \in \Delta : \Omega A = \Omega A'$, $\Omega \neq A$, et seule la rotation de centre Ω et d'angle $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega A'})$ convient : l'ensemble des centres est Δ .

27

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- Avec $\Delta x = x_N - x_M$, $\Delta y = y_N - y_M$: $x_{N'} - x_{M'} = \frac{m\Delta x - 12\Delta y}{13}$, $y_{N'} - y_{M'} = \frac{12\Delta x + m\Delta y}{13}$; en développant, les doubles produits $\mp 24m \Delta x \Delta y$ s'éliminent : $M'N'^2 = \frac{(m^2 + 144)(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{169}$. Conservation des distances $\Leftrightarrow m^2 + 144 = 169 \Leftrightarrow \boxed{m = \pm 5}$.
- $\frac{5}{13}(x-2) - \frac{12}{13}(y-3) = \frac{5x-12y}{13} + 2 = x' - 2$ et $\frac{12}{13}(x-2) + \frac{5}{13}(y-3) = \frac{12x+5y}{13} - 3 = y' - 3$: comme $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$, il existe θ tel que $\cos \theta = \frac{5}{13}$, $\sin \theta = \frac{12}{13}$, et $\boxed{f_5 = r(\Omega, \theta)}$, $\Omega(2;3)$.
- Point invariant de $f_{-5} : 18x + 12y = 52$ et $18y = 12x$: $\boxed{\Omega'\left(2; \frac{4}{3}\right)}$; on vérifie de même $x' - 2 = -\frac{5}{13}(x-2) - \frac{12}{13}\left(y - \frac{4}{3}\right)$, $y' - \frac{4}{3} = \frac{12}{13}(x-2) - \frac{5}{13}\left(y - \frac{4}{3}\right)$: angle θ' avec $\cos \theta' = -\frac{5}{13} = -\cos \theta$, $\sin \theta' = \sin \theta$: $\boxed{\theta' \equiv \pi - \theta}$.

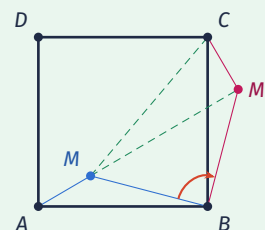
4. $x'' = \frac{5x' - 12y'}{13} + 4 = \frac{-119x - 120y}{169} + \frac{72}{13}$, $y'' = \frac{12x' + 5y'}{13} = \frac{120x - 119y}{169} + \frac{48}{13}$. Or $\cos 2\theta = \frac{25-144}{169} = -\frac{119}{169}$, $\sin 2\theta = \frac{120}{169}$, et $r(\Omega, 2\theta) : x'' = 2 - \frac{119}{169}(x-2) - \frac{120}{169}(y-3)$, $y'' = 3 + \frac{120}{169}(x-2) - \frac{119}{169}(y-3)$ redonne ces constantes ✓.

■ Corrigé de l'exercice 18

- $y = 0$ et $y = \sqrt{3}(x+2)$ donnent $x = -2 : D \cap D' = \{K\}$. $r(K, \frac{\pi}{3})(D)$ passe par K , dirigée par $(\cos \frac{\pi}{3}; \sin \frac{\pi}{3})$, de pente $\sqrt{3}$: c'est D' .
- a) $(t; 0) \mapsto (\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{t}{2}; \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}t)$: quand t varie, ces points décrivent la droite dirigée par $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, **parallèle à D'** . b) Deux droites parallèles sont égales si et seulement si elles ont un point commun : pour $t = a$, le point $(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b; \frac{b}{2})$ est sur $D' \iff \frac{b}{2} = \sqrt{3}a + \frac{3}{2}b + 2\sqrt{3} \iff b = -\sqrt{3}(a+2)$. c) $\mathcal{B} : y = -\sqrt{3}(x+2)$ passe par K , dirigée par $(1; -\sqrt{3})$, d'angle $-\frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi]$; D et D' font les angles 0 et $\frac{\pi}{3}$, leurs bissectrices font les angles $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$: $\mathcal{B}$ **est une bissectrice**.
- $\Omega \in \mathcal{B}$ et $\Omega O = \Omega P$ (Ω sur la médiatrice $y = \sqrt{3}$ de $[OP]$) : $-\sqrt{3}(a+2) = \sqrt{3}$, $\Omega(-3; \sqrt{3})$. Contrôle : $\vec{\Omega O}(3; -\sqrt{3})$ tourne de $\frac{\pi}{3}$ en $(3; \sqrt{3})$, et $\Omega + (3; \sqrt{3}) = P$ ✓.
- Pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ($\cos = -\frac{1}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) : $(t; 0) \mapsto (a - \frac{t-a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b; \frac{3}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}(t-a))$, direction parallèle à D' ; le point $t = a$ est sur $D' \iff \frac{3}{2}b = \sqrt{3}a - \frac{3}{2}b + 2\sqrt{3} \iff b = \frac{a+2}{\sqrt{3}}$: droite par K d'angle $\frac{\pi}{6}$, **l'autre bissectrice**.

■ Corrigé de l'exercice 19

- Le carré étant direct, $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}$, et $BA = BC : r(A) = C$. $BM = BM' = 2$, $(\vec{BM}, \vec{BM'}) \equiv -\frac{\pi}{2}$: BMM' est **isocèle rectangle en B** , $MM' = 2\sqrt{2}$; $r(A) = C$ et $r(M) = M'$: $CM' = AM = 1$.



- $MM'^2 + M'C^2 = 8 + 1 = 9 = MC^2$: par la réciproque de Pythagore, $MM'C$ **est rectangle en M'** . Donc $\widehat{BM'C} = 45^\circ + 90^\circ$ ou $90^\circ - 45^\circ$. **Par l'absurde**, si $\widehat{BM'C} = 45^\circ$, Al-Kashi donnerait $BC^2 = 4 + 1 - 4 \cos 45^\circ = 5 - 2\sqrt{2}$, et M étant intérieur, $MC < AC = BC\sqrt{2} = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} < 3$: impossible. Ainsi $\widehat{BM'C} = 135^\circ$, et comme r transforme AMB en $CM'B$, $\widehat{AMB} = 135^\circ$.
- $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos 135^\circ = 5 + 2\sqrt{2}$: $AB = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx 2,80$.

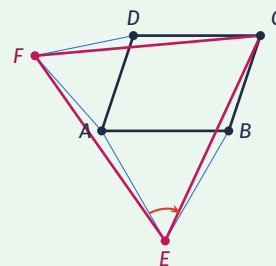
■ Corrigé de l'exercice 20

- $AB = AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$: $r(B) = C$. Propriété fondamentale : $CM' = BM$ et $(\vec{BM}, \vec{CM'}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $(CM') \perp (BM) = (BC)$.
- AMM' est isocèle rectangle en A : $MM'^2 = 2MA^2$. Comme $M \in (BC)$ et $(CM') \perp (BC)$, le triangle MCM' est rectangle en C (ou aplati si $M = C$) : $MM'^2 = MC^2 + CM'^2 = MC^2 + MB^2$. Donc $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$; pour $M = B$: $0 + 2a^2 = 2a^2$ ✓.
- Repère orthonormé direct : $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; a)$. $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = (x-a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 - 2x^2 - 2y^2 = 2a^2 - 2ax - 2ay = 2a(a-x-y)$. Donc $M \in \mathcal{E} \iff x+y = a$: $\mathcal{E} = (BC)$ (réciproque de 2.).

4. $2a(a - x - y) = a^2 \iff x + y = \frac{a}{2} : \mathcal{F}$ est la droite des milieux de $[AB]$ et $[AC]$, parallèle à (BC) .

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $AE = AB$, $(\vec{AB}, \vec{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3} : ABE$ est équilatéral, et E, D sont de part et d'autre de (AB) (sinus de signes contraires); de même pour ADF et (AD) . Dans le triangle équilatéral indirect ABE , les trois angles orientés valent $-\frac{\pi}{3} : (\vec{EA}, \vec{EB}) \equiv -\frac{\pi}{3}$.



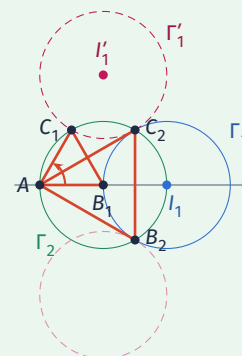
2. a) $EA = EB$ et $(\vec{EA}, \vec{EB}) \equiv -\frac{\pi}{3} : \rho(A) = B$. b) $AF = AD = BC$, et $\vec{BC} = \vec{AD}$, donc $(\vec{AF}, \vec{BC}) \equiv (\vec{AF}, \vec{AD}) \equiv -\frac{\pi}{3}$.
c) Soit $F_1 = \rho(F) : BF_1 = AF = BC$ et $(\vec{AF}, \vec{BF}_1) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (propriété fondamentale), d'où $(\vec{BC}, \vec{BF}_1) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0 : \vec{BF}_1 = \vec{BC}$, $\boxed{\rho(F) = C}$. Donc $EF = EC$ et $(\vec{EF}, \vec{EC}) \equiv -\frac{\pi}{3} : CEF$ est équilatéral.
3. $C = \boxed{(5; 3)} (\vec{DC} = \vec{AB})$, $E = \left(4 \cdot \frac{1}{2}; -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{(2; -2\sqrt{3})}$, $F = \boxed{\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)}$. $EC^2 = 9 + (3 + 2\sqrt{3})^2 = 30 + 12\sqrt{3}$; $EF^2 = \frac{(3+3\sqrt{3})^2 + (3+5\sqrt{3})^2}{4} = \frac{120+48\sqrt{3}}{4} = 30 + 12\sqrt{3}$; $CF^2 = \frac{(9+3\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2}{4} = 30 + 12\sqrt{3} \checkmark$.

■ Corrigé de l'exercice 22

1. Cours : pour deux droites sécantes en Ω , $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = r(\Omega, 2(\Delta_1, \Delta_2))$. Ici $2(D, D') \equiv 2(D'', D) \equiv \theta [2\pi] : r = s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_{D''}$. Comme $s_D \circ s_D = \text{Id} : \boxed{r \circ s_D = s_{D'} \circ s_D \circ s_D = s_{D'}}$ et $\boxed{s_D \circ r = s_D \circ s_D \circ s_{D''} = s_{D''}}$.
2. a) Les axes passent par O , dirigés par $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$, avec $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv -\frac{2\pi}{3} : \boxed{((AA_1), (BB_1)) \equiv -\frac{\pi}{3}}$ et $\boxed{((AA_1), (CC_1)) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]}$. b) D'après 1. $(\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}) : \boxed{r \circ s_A = s_C}$, $\boxed{s_A \circ r = s_B}$ (car $((AA_1), (BB_1)) \equiv -\frac{\pi}{3}$, soit $((BB_1), (AA_1)) \equiv \frac{\pi}{3}$), et $\boxed{s_B \circ s_A = r(O, -\frac{2\pi}{3})}$. Contrôle : $r \circ s_A$ et s_C échangent A et B ; $s_A \circ r$ et s_B envoient A sur C et fixent $B \checkmark$.
3. Les directions sont transformées par les parties vectorielles, et $s_{D_2} \circ s_{D_1} = r(\Omega, 2(D_1, D_2)) = r(\Omega, \pi)$ si $D_1 \perp D_2$: la direction $\vec{u}$ devient $\boxed{-\vec{u}}$: le rayon revient parallèlement à lui-même. Pour un angle de $\frac{\pi}{3}$, la direction tourne de $\frac{2\pi}{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. **Analyse** : si ABC est équilatéral direct, $C = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B)$ avec $B \in \Gamma_1$, donc $C \in r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(\Gamma_1)$, et $C \in \Gamma_2$. S'il est indirect, $C \in r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(\Gamma_1) \cap \Gamma_2$. **Synthèse** : un tel C donne $B = r^{-1}(C) \in \Gamma_1$.
2. $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(I_1) = (2; 2\sqrt{3})$: l'image de B décrit tout le cercle $\boxed{\Gamma'_1 : (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 4}$ (r est une bijection).



3. $\Gamma_2 : (x-2)^2 + y^2 = 4$; par différence, $-4\sqrt{3}y + 12 = 0$, $y = \sqrt{3}$, $(x-2)^2 = 1 : C_1(1; \sqrt{3}), C_2(3; \sqrt{3})$, et $B = r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(C) : B_1(2; 0), B_2(3; -\sqrt{3})$. Par symétrie par rapport à (Ox) , les solutions indirectes sont $C_3(1; -\sqrt{3}), B_3(2; 0)$ et $C_4(3; -\sqrt{3}), B_4(3; \sqrt{3})$. **Quatre triangles**, de côtés 2 (AB_1C_1, AB_3C_3) et $2\sqrt{3}$.

4. Il faut que $\mathcal{C}(I_2, \lambda)$ coupe $\Gamma'_1 : |\lambda - 2| \leq I_2 I'_1 = 2\sqrt{3} \leq \lambda + 2$, soit $\boxed{2\sqrt{3} - 2 \leq \lambda \leq 2\sqrt{3} + 2}$ (même condition pour le cas indirect).

28

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

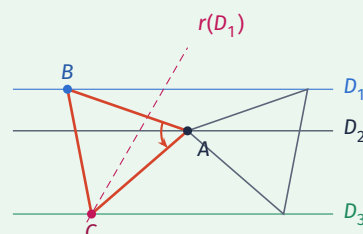
1. ABC direct : $C = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B)$ avec $B \in D_1$, donc $C \in r(D_1) \cap D_3$.

Image de D_1 : le projeté $H(0; 1)$ de A a pour image $H' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, et $r(D_1)$ est la perpendiculaire à (AH') en H' : $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$, soit $y = \sqrt{3}x + 2$. Avec $y = -2$: $\boxed{C\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; -2\right)}$, puis

$$B = r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(C) = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}; 1\right) \in D_1 \quad \checkmark. \text{ Côté : } AC^2 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3},$$

$$\boxed{\ell = \frac{2\sqrt{21}}{3}}. \text{ Le cas indirect donne le symétrique par rapport à } (Oy) : \text{deux solutions.}$$

2. $H(0; p) \mapsto H' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}p; \frac{p}{2}\right)$, $r(D_1) : -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = p$; avec $y = -q : x_C = -\frac{2p+q}{\sqrt{3}}$, et $\ell^2 = AC^2 = \frac{(2p+q)^2}{3} + q^2 = \frac{4}{3}(p^2 + pq + q^2)$.
3. $\ell^2 - (p+q)^2 = \frac{(p-q)^2}{3} \geq 0 : \boxed{\ell \geq p+q}$, avec égalité si et seulement si $p = q$: alors $B(-\sqrt{3}p; p)$ et $C(-\sqrt{3}p; -p)$, $[BC]$ est perpendiculaire aux droites et $\ell = BC = d(D_1, D_3)$.



■ Corrigé de l'exercice 25

1. AEF direct : $F = r(E)$ avec $E \in [BC]$, donc $F \in r([BC]) = [B'C']$. $r :$

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \text{ donc } r(E) = \left(\frac{1-\sqrt{3}t}{2}; \frac{\sqrt{3}+t}{2}\right);$$

$$F \in (CD) \iff \frac{\sqrt{3}+t}{2} = 1 \iff \boxed{t = 2 - \sqrt{3}} \in [0; 1], \text{ et alors}$$

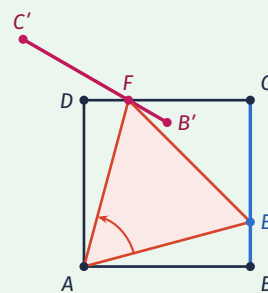
$$F(2 - \sqrt{3}; 1) \in [CD] \quad \checkmark.$$

2. Indirect : $r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(E) = \left(\frac{1+\sqrt{3}t}{2}; \frac{t-\sqrt{3}}{2}\right)$, d'ordonnée 1 si $t = 2 + \sqrt{3} > 1$:

aucune solution. Le triangle est unique : $\boxed{BE = DF = 2 - \sqrt{3}}$.

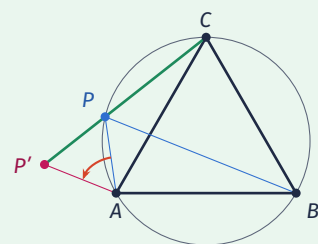
3. $AE^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 : \boxed{AE = \sqrt{6} - \sqrt{2}}$; aire = $\frac{\sqrt{3}}{4}AE^2 = \boxed{2\sqrt{3} - 3}$. Les triangles rectangles ABE et ADF sont isométriques ($AB = AD$, $BE = DF$) : $\hat{BAE} = \hat{DAF} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12}$, d'où

$$\boxed{\tan \frac{\pi}{12} = \frac{BE}{AB} = 2 - \sqrt{3}}.$$



■ Corrigé de l'exercice 26

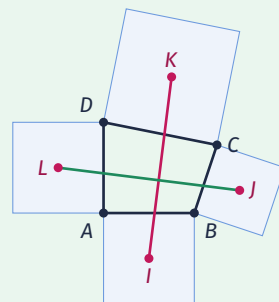
1. $AB = AC$, $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$: $r(B) = C$. $AP = AP'$, $\widehat{PAP'} = 60^\circ$: APP' est équilatéral (ou réduit à A) : $PP' = PA$; $r(B) = C$, $r(P) = P'$: $P'C = PB$. Dans $PP'C$: $P'C \leq P'P + PC$, soit $\boxed{PB \leq PA + PC}$: PA, PB, PC sont les côtés du triangle $PP'C$ (d'où aussi les deux autres inégalités).



2. $PB = PA + PC \iff P'C = P'P + PC \iff P \in [P'C] \iff (\vec{PP'}, \vec{PC}) \equiv \pi$ ($P \neq P'$ et $P \neq C$). APP' est équilatéral direct, donc $(\vec{PP'}, \vec{PA}) \equiv \frac{\pi}{3}$, et par Chasles $(\vec{PP'}, \vec{PC}) \equiv \frac{\pi}{3} + (\vec{PA}, \vec{PC})$: **égalité** $\iff (\vec{PA}, \vec{PC}) \equiv \frac{2\pi}{3}$. Ces points voient $[AC]$ sous $120^\circ = 180^\circ - \widehat{ABC}$, du côté opposé à B : c'est l'arc AC du cercle circonscrit ne contenant pas B (angle inscrit).
3. Avec $PA = 3$, $PC = 5$ et $\widehat{APC} = 120^\circ$, Al-Kashi donne $AC^2 = 9 + 25 + 15 = 49$: un tel P existe sur l'arc, et $\boxed{PB = 3 + 5 = 8}$ (dans le repère $A(0;0)$, $B(7;0)$: $P(-\frac{3}{7}; \frac{12\sqrt{3}}{7})$, $PB^2 = 64$ ✓).

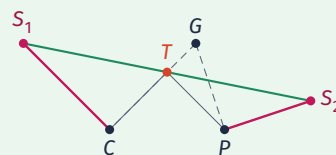
■ Corrigé de l'exercice 27

1. $R(\vec{u} + \vec{v}) = (-(y + y'); x + x') = R(\vec{u}) + R(\vec{v})$,
 $R(k\vec{u}) = (-ky; kx) = kR(\vec{u})$, $R(-y; x) = (-x; -y) = -\vec{u}$. L'expression de $r(\Omega, \frac{\pi}{2})$, $x' - a = -(y - b)$, $y' - b = x - a$, s'écrit $\Omega\vec{M}' = R(\Omega\vec{M})$.
2. $r(I, -\frac{\pi}{2})(A) = B \iff r(I, \frac{\pi}{2})(B) = A \iff \boxed{\vec{IA} = R(\vec{IB})}$. Le point I_0 tel que $\vec{OI}_0 = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) - \frac{1}{2}R(\vec{AB})$ vérifie $I_0\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}R(\vec{AB}) = R(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}R(\vec{AB})) = R(I_0\vec{B})$; par unicité du centre (angle donné, $A \mapsto B$), $I_0 = I$. De même pour J, K, L.
3. Posons $\vec{U} = \vec{OC} + \vec{OD} - \vec{OA} - \vec{OB}$ et $\vec{V} = \vec{OD} + \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}$. Comme $\vec{CD} - \vec{AB} = \vec{V}$ et $\vec{DA} - \vec{BC} = -\vec{U}$: $\vec{IK} = \vec{OK} - \vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{U} - \frac{1}{2}R(\vec{V})$ et $\vec{JL} = \frac{1}{2}\vec{V} + \frac{1}{2}R(\vec{U})$. Alors $R(\vec{IK}) = \frac{1}{2}R(\vec{U}) - \frac{1}{2}R(R(\vec{V})) = \frac{1}{2}R(\vec{U}) + \frac{1}{2}\vec{V} = \vec{JL}$. Or $R(\vec{w})$ a la norme de $\vec{w}$ et lui est orthogonal : $\boxed{IK = JL \text{ et } (IK) \perp (JL)}$ (Van Aubel).
4. $R(\vec{AB}) = (0; 4)$: $I = (2; 0) - (0; 2) = \boxed{(2; -2)}$; $R(\vec{BC}) = (-3; 1)$: $J = (\frac{9}{2}; \frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}) = \boxed{(6; 1)}$; $K = \boxed{(3; 6)}$, $L = \boxed{(-2; 2)}$. $\vec{IK}(1; 8)$, $\vec{JL}(-8; 1) = R(\vec{IK})$: $IK = JL = \sqrt{65}$ ✓.



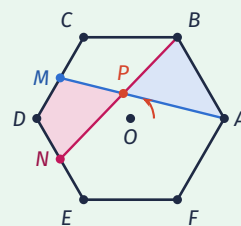
■ Corrigé de l'exercice 28

1. En C, la direction $\vec{GC}$ tourne de $-\frac{\pi}{2}$: $(\vec{GC}, \vec{CS}_1) \equiv -\frac{\pi}{2}$ et $CS_1 = CG$; donc $(\vec{CG}, \vec{CS}_1) \equiv \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$: $\boxed{S_1 = r(C, \frac{\pi}{2})(G)}$. En P (à gauche) : $(\vec{GP}, \vec{PS}_2) \equiv \frac{\pi}{2}$, d'où $(\vec{PG}, \vec{PS}_2) \equiv -\frac{\pi}{2}$: $\boxed{S_2 = r(P, -\frac{\pi}{2})(G)}$.
2. $r(C, \frac{\pi}{2})$: $x' + 2 = -y$, $y' = x + 2$; $r(P, -\frac{\pi}{2})$: $x' - 2 = y$, $y' = -(x - 2)$. D'où $S_1(-y - 2; x + 2)$, $S_2(y + 2; 2 - x)$ et $\boxed{T(0; 2)}$: T ne dépend pas de G. $\vec{TC}(-2; -2)$, $\vec{TP}(2; -2)$: $TC = TP$ et $\vec{TC} \cdot \vec{TP} = 0$: CTP est isocèle rectangle en T.
3. Si $S_1(X; Y)$: $x = Y - 2$, $y = -X - 2$, donc $S_2(-X; 4 - Y)$: $S_2 = s_T(S_1)$. Or $G = r(C, -\frac{\pi}{2})(S_1)$ et S_1 décrit tout le plan quand G le décrit : $\boxed{r(P, -\frac{\pi}{2}) \circ r(C, -\frac{\pi}{2}) = s_T}$ (calcul explicite : deux quarts de tour de centres différents donnent un demi-tour).



■ Corrigé de l'exercice 29

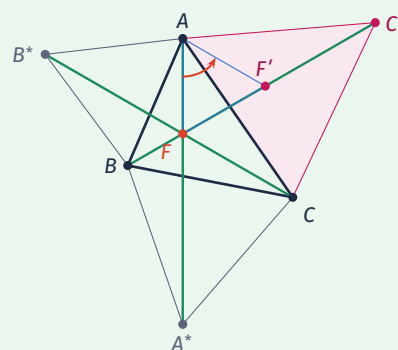
1. L'hexagone étant régulier direct, $OA = OB = \dots$ et $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv (\vec{OB}, \vec{OC}) \equiv \dots \equiv \frac{\pi}{3} : r : A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto E$. Le milieu M de $[CD]$ a pour image le milieu de $[DE]$: $r(M) = N$. Donc $r([AM]) = [BN]$: $\boxed{AM = BN}$, et $(\vec{AM}, \vec{BN}) \equiv \frac{\pi}{3}$: angle de $\boxed{60^\circ}$.



2. r transforme $ABCM$ en $BCDN$: ces quadrilatères ont même aire. $P \in [AM] \cap [BN]$: $ABCM$ est la réunion de ABP et de $BCMP$, et $BCDN$ celle de $BCMP$ et de $MDNP$. En retranchant l'aire de $BCMP$: $\boxed{\text{aire}(ABP) = \text{aire}(MDNP)}$.
3. $B(1; \sqrt{3})$, $C(-1; \sqrt{3})$, $D(-2; 0)$, $E(-1; -\sqrt{3})$, $M(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $N(-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $AM^2 = \frac{49}{4} + \frac{3}{4} = 13$: $\boxed{AM = \sqrt{13}}$.
 $(AM) : (2 - \frac{7}{2}t; \frac{\sqrt{3}}{2}t)$, $(BN) : (1 - \frac{5}{2}s; \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}s)$; on trouve $t = \frac{8}{13}$, $s = \frac{6}{13}$: $\boxed{P(-\frac{2}{13}; \frac{4\sqrt{3}}{13})}$ et $\boxed{\frac{AP}{AM} = \frac{8}{13}}$.
 Aire : $\frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AP})| = \frac{1}{2} \left| -\frac{4\sqrt{3}}{13} + \frac{28\sqrt{3}}{13} \right| = \boxed{\frac{12\sqrt{3}}{13}}$ ($\det = AB \cdot AP \sin$, cours).

■ Corrigé de l'exercice 30

1. $AM = AM'$ et $(\vec{AM}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{3}$: AMM' est équilatéral (si $M \neq A$), d'où $MM' = MA$; $r(C) = C'$, $r(M) = M'$: $M'C' = MC$. **La ligne brisée $BMM'C'$ a pour longueur $S(M)$ et des extrémités fixes** : $\boxed{S(M) = BM + MM' + M'C' \geq BC'}$ (inégalité triangulaire deux fois).
2. Pour ABC direct et F intérieur, $(\vec{FA}, \vec{FB}) \equiv (\vec{FB}, \vec{FC}) \equiv (\vec{FC}, \vec{FA}) \equiv \frac{2\pi}{3}$. Dans AFF' équilatéral direct : $(\vec{FA}, \vec{FF'}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ et $(\vec{F'F}, \vec{F'A}) \equiv -\frac{\pi}{3}$. Chasles : $(\vec{FB}, \vec{FF'}) \equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \equiv \pi$: $F \in [BF']$. Les angles étant conservés, $(\vec{F'A}, \vec{F'C'}) \equiv (\vec{FA}, \vec{FC}) \equiv -\frac{2\pi}{3}$, donc $(\vec{F'F}, \vec{F'C'}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \equiv \pi$: $F' \in [FC']$. **B, F, F', C' sont alignés dans cet ordre, $S(F) = BC'$: le minimum de S est BC' , atteint en F .**



Unicité. Si $S(M) = BC'$ et $M \neq A$, les deux inégalités triangulaires sont des égalités : B, M, M', C' alignés dans cet ordre. Le même calcul à l'envers donne $(\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{MC}, \vec{MA}) \equiv \frac{2\pi}{3}$: M est sur deux arcs de cercles distincts passant par A , qui se coupent en A et en F ; d'où $M = F$. Et $M = A$ est exclu : $S(A) = BA + AC' = BC'$ imposerait $A \in [BC']$, c'est-à-dire $\hat{BAC} = 120^\circ$.

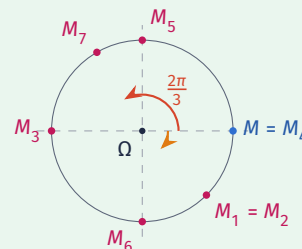
3. r envoie B^* sur B et C sur C' : $\boxed{CB^* = BC'}$. Le triangle BCA est direct : le 2. appliqué au sommet B , avec $r(B, \frac{\pi}{3})(A) = B^*$ (sommet du triangle équilatéral extérieur sur $[AB]$), montre que C, F, B^* sont alignés ; appliqué au sommet C (triangle CAB), avec $r(C, \frac{\pi}{3})(B) = A^*$, il montre que A, F, A^* sont alignés. **F est le point commun à (BC') , (CB^*) et (AA^*) .**
4. $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} > 0$: direct. $AB^2 = 19$, $BC^2 = 28$, $CA^2 = 37$: le plus grand angle, en B , a un cosinus $\frac{19+28-37}{2\sqrt{19 \times 28}} > 0$: angles aigus. $\vec{AC'} = r(\vec{AC}) = (\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2}; 3 - \frac{5}{2})$: $\boxed{C'(\frac{7\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2})}$, $\vec{BC'} = (\frac{9\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2})$, $\boxed{BC' = 9}$. $\vec{BF}(\sqrt{3}; 1) = \frac{2}{9}\vec{BC'}$: $F \in [BC']$. $FA = 3$, $FB = 2$, $FC = 4$, $\vec{FA} \cdot \vec{FB} = -3$, $\vec{FB} \cdot \vec{FC} = -4$, $\vec{FC} \cdot \vec{FA} = -6$: cosinus $-\frac{1}{2}$, angles de 120° ✓. **Minimum** : $\boxed{FA + FB + FC = 3 + 2 + 4 = 9 = BC'}$.

29

Corrigés : définir et construire

■ Corrigé de l'exercice 31

1. On retranche le multiple de 2π qui ramène θ_k dans $]-\pi, \pi]$
 $\theta_1 = 6\pi - \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = 10\pi - \frac{\pi}{4}$, $\theta_3 = 12\pi + \pi$, $\theta_4 = -20 \times 2\pi$,
 $\theta_5 = 4\pi + \frac{\pi}{2}$, $\theta_6 = 8\pi - \frac{\pi}{2}$, $\theta_7 = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$: mesures principales
 $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \pi, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$. Donc $r_4 = \text{Id}$, $r_3 = s_\Omega$, r_5 et r_6 sont
 les quarts de tour direct et indirect.



2. Repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\Omega\vec{M}$: par définition $\Omega M_k = 3$ et $(\vec{i}, \Omega\vec{M}_k) \equiv \theta_k$, d'où $M_k(3 \cos \theta_k; 3 \sin \theta_k)$
 $M_1 = M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3(-3; 0)$, $M_4 = M$, $M_5(0; 3)$, $M_6(0; -3)$,
 $M_7\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (figure).

Seuls $M_1 = M_2$ (et $M_4 = M$) sont confondus ; deux rotations de même centre dont les angles sont égaux modulo 2π coïncident : $r_1 = r_2$. $r(\Omega, \alpha)$ et $r(\Omega, \beta)$ sont réciproques si et seulement si $\alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$: r_5 et r_6 le sont ($\theta_5 + \theta_6 = 12\pi$), r_3 et r_4 sont leurs propres réciproques, et $r_7^{-1} = r\left(\Omega, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Par Chasles, $(\Omega\vec{M}_1, \Omega\vec{M}_7) \equiv (\Omega\vec{M}_1, \Omega\vec{M}) + (\Omega\vec{M}, \Omega\vec{M}_7) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$, et $(\Omega\vec{M}_5, \Omega\vec{M}_3) \equiv \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

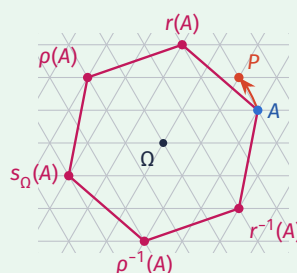
Comme $\Omega M_6 = \Omega M_7$, la rotation cherchée a pour angle $-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6}$: $r\left(\Omega, \frac{5\pi}{6}\right)$. Enfin $-\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\pi \equiv \pi$: l'image de M_1 est M_3 .

■ Corrigé de l'exercice 32

1. Dans le repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{j})$, $\vec{e}_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\Omega\vec{G} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\cos \frac{2\pi}{3}; \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
 $\Omega G = 1$ (G est un voisin) et $(\Omega\vec{E}, \Omega\vec{G}) \equiv \frac{2\pi}{3}$. Les six voisins sont aux angles $\frac{k\pi}{3}$ du cercle unité, donc $r(E) = F$ et, comme $(\Omega\vec{F}, \Omega\vec{G}) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, $r(F) = G$.
2. $\Omega r(N) = a\vec{e}_2 + b(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = -b\vec{e}_1 + (a+b)\vec{e}_2$: $r(N[a, b]) = N[-b, a+b]$. Même méthode avec les images de E et F lues sur le cercle unité : $r^{-1} : E \mapsto [1, -1], F \mapsto E$; $\rho : E \mapsto G, F \mapsto [-1, 0]$; $\rho^{-1} : E \mapsto [0, -1], F \mapsto [1, -1]$. D'où

$$r^{-1} : [a, b] \mapsto [a+b, -a], \quad \rho : [a, b] \mapsto [-a-b, a], \quad \rho^{-1} : [a, b] \mapsto [b, -a-b], \quad s_\Omega : [a, b] \mapsto [-a, -b].$$

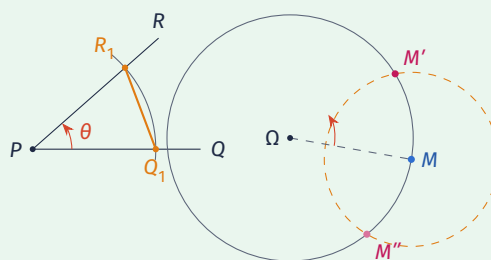
3. $r(A) = [-1, 3]$, $\rho(A) = [-3, 2]$, $s_\Omega(A) = [-2, -1]$,
 $\rho^{-1}(A) = [1, -3]$, $r^{-1}(A) = [3, -2]$: avec A , six points du cercle de centre Ω passant par A , aux angles $\varphi_A + \frac{k\pi}{3}$: un hexagone régulier.



4. $\Omega N^2 = a^2 + 2ab \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + b^2 = \boxed{a^2 + ab + b^2}$ car $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Ainsi $\Omega A^2 = 7 = \Omega P^2$: **oui**, P est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega P})$. Mais $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega P} = (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = 2 + \frac{5}{2} + 2 = \frac{13}{2}$, d'où $\boxed{\cos \theta = \frac{13}{14}}$, qui n'est ni ± 1 ni $\pm \frac{1}{2}$: **non**, θ n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{3}$ (P n'est d'ailleurs aucun des points de la question 3).

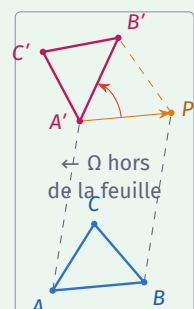
■ Corrigé de l'exercice 33

1. $P\vec{Q}_1$ et $P\vec{R}_1$ ont la norme d et les directions et sens de $P\vec{Q}$ et $P\vec{R}$, donc $P\vec{Q}_1 \cdot P\vec{R}_1 = d^2 \cos \theta$ et $Q_1 R_1^2 = \|\vec{P\vec{R}_1} - \vec{P\vec{Q}_1}\|^2 = 2d^2 - 2d^2 \cos \theta$: $\boxed{Q_1 R_1^2 = 2d^2(1 - \cos \theta)}$; avec $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $\boxed{Q_1 R_1 = 2d \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$.
2. $\Omega M' = \Omega M'' = d$ et $MM'^2 = \|\vec{\Omega M'} - \vec{\Omega M}\|^2 = 2d^2 - 2\vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega M'} = 2d^2(1 - \cos \theta) = Q_1 R_1^2$: $M' \in \mathcal{C} \cap \Gamma$; de même pour M'' car $\cos(-\theta) = \cos \theta$.
3. $M' = M'' \iff \theta \equiv -\theta [2\pi] \iff \theta \equiv 0 [\pi]$: ici $M' \neq M''$, et deux cercles de centres distincts ont au plus deux points communs : $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{M', M''\}$. Ces points sont symétriques par rapport à (ΩM) ; M' est celui pour lequel $\Omega M M'$ tourne dans le même sens que $P Q_1 R_1$. Si $\theta \equiv \pi$: $Q_1 R_1 = 2d$, les cercles sont tangents en $s_\Omega(M) = r(M) = r^{-1}(M)$.
4. D'après 1, $MM'^2 = 2 \times 16 \times \frac{1}{4} = 8$: $\boxed{MM' = 2\sqrt{2} \text{ cm}}$. Dans le repère d'origine Ω avec $\vec{i} = \frac{1}{d}\vec{\Omega M}$: $M'(d \cos \theta; d \sin \theta)$, $M''(d \cos \theta; -d \sin \theta)$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, d'où $M' M'' = 2d \sin \theta$: $\boxed{M' M'' = 2\sqrt{7} \text{ cm}}$.



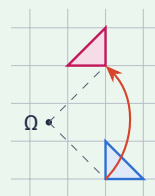
■ Corrigé de l'exercice 34

1. C'est la propriété fondamentale du cours. Réciproquement, si $A'N = AM$ et $(\vec{A'M}, \vec{A'N}) \equiv \theta$, alors $A'N = A'M'$ et, par Chasles, $(\vec{A'M'}, \vec{A'N}) \equiv (\vec{A'M'}, \vec{A'M}) + (\vec{A'M}, \vec{A'N}) \equiv -\theta + \theta \equiv 0$: $\vec{A'N}$ et $\vec{A'M'}$ ont même norme, même direction et même sens, donc $\boxed{N = M'}$.
2. Soit N l'image de P par $r(A', \theta)$: $A'N = A'P = AM$ et $(\vec{A'M}, \vec{A'N}) \equiv (\vec{A'M}, \vec{A'P}) + (\vec{A'P}, \vec{A'N}) \equiv 0 + \theta$, donc $\boxed{N = M'}$ d'après 1. **Construction** : on place P , quatrième sommet du parallélogramme $AMPA'$, puis on le tourne de θ autour de A' , qui est sur la feuille (exercice 33). **Antécédent** : r^{-1} a pour angle $-\theta$ et envoie A' sur A ; on place Q tel que $\vec{A'Q} = \vec{A'N}$ et l'antécédent de N est l'image de Q par $r(A, -\theta)$.
3. On place P_B tel que $A'P_B = \vec{AB}$; B' est le troisième sommet du triangle équilatéral direct $A'P_B B'$ (cercles de centres A' et P_B de rayon AB). De même pour C' . L'image du cercle de centre B passant par C est le **cercle de centre B' et de rayon BC** , qui passe par C' . (Figure : centre caché $\Omega(-3, 2; 2, 6)$.)



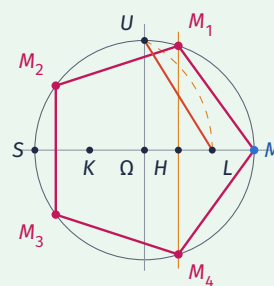
■ Corrigé de l'exercice 35

1. $r(O)$ et $r(I)$ sont des nœuds, donc $r(\vec{OI})$ a des coordonnées entières $(p; q)$; sa norme est $OI = 1$, donc $p^2 + q^2 = 1$: $(p; q) \in \{(\pm 1; 0), (0; \pm 1)\}$, vecteurs d'angles polaires $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$. Or $(\vec{i}, r(\vec{OI})) = (\vec{OI}, r(\vec{OI})) \equiv \theta$ (propriété fondamentale) : $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\right\}$.
2. $r = s_\Omega$: $O\vec{M}' = 2O\vec{\Omega} - O\vec{M}$. Si r conserve $\mathcal{Q}$, $r(O)$ est un nœud $(p; q)$ et $\Omega\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right)$. Réciproquement, si $\Omega\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, alors $r(x; y) = (p - x; q - y)$ est un nœud pour tout nœud, et $N = r(r(N))$: $r(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Ω est un nœud, le milieu d'un côté ou le centre d'une case.
3. L'expression analytique avec $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$ donne $x' - a = -(y - b), y' - b = x - a$. Si r conserve $\mathcal{Q}$, $r(O)(a+b; b-a)$ est un nœud. Réciproquement, si $p = a+b$ et $q = b-a$ sont entiers, $r(x; y) = (p - y; q + x)$ et $r^{-1}(x; y) = (y - q; p - x)$ envoient les nœuds sur des nœuds, donc $r(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Enfin $a = \frac{p-q}{2}$, $b = \frac{p+q}{2}$ où $p - q$ et $p + q$ ont la même parité : a, b sont tous deux entiers (nœud) ou tous deux dans $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (centre d'une case), et réciproquement. $r \text{ conserve } \mathcal{Q} \iff a + b \in \mathbb{Z} \text{ et } b - a \in \mathbb{Z}$.
4. $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$: $a+b = 2, b-a = 1, r : (x; y) \mapsto (2 - y; 1 + x)$; les sommets ont pour images $(2; 3), (2; 4), (1; 3)$. D'après 1, aucune rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ne conserve $\mathcal{Q}$, alors que $r\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$ conserve le réseau triangulaire de l'exercice 32 ($[a, b] \mapsto [-b, a+b]$, et sa réciproque aussi) : chaque réseau a ses rotations, quarts de tour pour l'un, sixièmes de tour pour l'autre.



■ Corrigé de l'exercice 36

1. $3a = \pi - 2a$, donc $\cos 3a = -\cos 2a$; avec $\cos 3a = 4c^3 - 3c$ et $\cos 2a = 2c^2 - 1$: $4c^3 + 2c^2 - 3c - 1 = 0$, soit $(c + 1)(4c^2 - 2c - 1) = 0$. Comme $c > 0$, $4c^2 - 2c - 1 = 0$ et $c = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (racine positive), puis $\cos \frac{2\pi}{5} = 2c^2 - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
2. $S(-1; 0), U(0; 1), K\left(-\frac{1}{2}; 0\right), KU = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; le point $L(x; 0)$ de $[\Omega M]$ vérifie $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$: $L\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right), H\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0\right)$.
3. La perpendiculaire est $x = \cos \frac{2\pi}{5}$; sur $\mathcal{C}$, $y^2 = \sin^2 \frac{2\pi}{5}$: $M_1\left(\cos \frac{2\pi}{5}; \sin \frac{2\pi}{5}\right)$, donc $\Omega M_1 = 1, (\vec{i}, \Omega \vec{M}_1) \equiv \frac{2\pi}{5}$ et $M_1 = r(M)$; de même $M_4\left(\cos \frac{2\pi}{5}; -\sin \frac{2\pi}{5}\right) = r^{-1}(M)$. Puis $MM_1^2 = 2 - 2\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et, par Pythagore, $UL^2 = 1 + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$: $MM_1 = UL$.



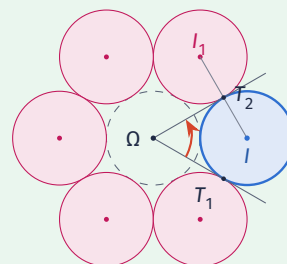
Construction. Le cercle de centre M et de rayon UL coupe $\mathcal{C}$ en $r(M)$ et $r^{-1}(M)$ (exercice 33) ; à partir de M_1 on obtient $M_2 = r(M_1)$ (angle $\frac{4\pi}{5}$ par Chasles), puis M_3 . Les cinq côtés valent UL , et r envoie chaque sommet sur le suivant ($r(M_4) = M$ car $5 \times \frac{2\pi}{5} = 2\pi$) : $MM_1M_2M_3M_4$ est un **pentagone régulier**.

30

Corrigés : images de figures

■ Corrigé de l'exercice 37

1. Une tangente est perpendiculaire au rayon : $\Omega T_1 I$ est rectangle en T_1 , d'hypoténuse $\Omega I = 2$ et $IT_1 = 1$, d'où $\Omega T_1 = \sqrt{3}$ et $\cos \widehat{I\Omega T_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\widehat{I\Omega T_1} = \frac{\pi}{6}$; de même pour T_2 . Les deux tangentes sont symétriques par rapport à (ΩI) , donc $(\vec{\Omega I}, \vec{\Omega T_2}) \equiv (\vec{\Omega T_1}, \vec{\Omega I}) \equiv \pm \frac{\pi}{6}$ et, par Chasles, $(\vec{\Omega T_1}, \vec{\Omega T_2}) \equiv \pm \frac{\pi}{3}$; le choix des noms donne $\frac{\pi}{3}$. Comme $\Omega T_2 = \Omega T_1$: $r(T_1) = T_2$.

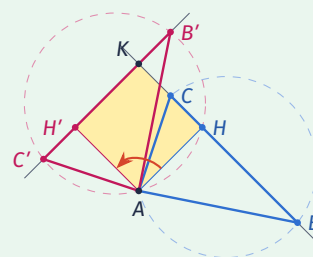


2. $r((\Omega T_1))$ passe par $r(\Omega) = \Omega$ et par $r(T_1) = T_2$: c'est la droite (ΩT_2) . La rotation conserve l'orthogonalité et les distances : $(\Omega T_1) \perp (IT_1)$ donne $(\Omega T_2) \perp (I_1 T_2)$ avec $I_1 T_2 = IT_1 = 1$, donc (ΩT_2) est **tangente à $\mathcal{C}_1$ en T_2** . Les centres I et I_1 sont alors sur la perpendiculaire à (ΩT_2) en T_2 , à la distance 1 de T_2 , et distincts ($I \neq \Omega$ n'est pas fixe) : T_2 est le milieu de $[II_1]$, $II_1 = 2 = 1 + 1$ et **les cercles sont tangents en T_2** .
3. $I_k = r\left(\Omega, \frac{k\pi}{3}\right)(I)$: $\Omega I_k = 2$ et, par Chasles, $(\vec{\Omega I_k}, \vec{\Omega I_{k+1}}) \equiv \frac{\pi}{3}$, ainsi que $(\vec{\Omega I_5}, \vec{\Omega I_0}) \equiv -\frac{5\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$. Chaque triangle $\Omega I_k I_{k+1}$ est isocèle en Ω avec un angle de $\frac{\pi}{3}$, donc équilatéral : $I_k I_{k+1} = 2 = 1 + 1$, **deux cercles consécutifs sont tangents**. Enfin $\Omega I_k = 2 = 1 + 1$: chaque $\mathcal{C}_k$ est tangent au cercle de centre Ω et de rayon 1 (la pièce centrale).

■ Corrigé de l'exercice 38

1. Par la propriété fondamentale, $(\vec{BC}, \vec{B'C'}) \equiv \frac{\pi}{2}$: $(B'C') \perp (BC)$. $H \in (BC)$ et $(AH) \perp (BC)$, donc $H' \in (B'C')$ et $(AH') \perp (B'C')$ (conservation de l'alignement et de l'orthogonalité) : H' est le pied de la hauteur issue de A dans $AB'C'$. Le milieu est conservé : I' est le milieu de $[B'C']$; enfin $AI' = AI$ et $(\vec{AI}, \vec{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2}$.

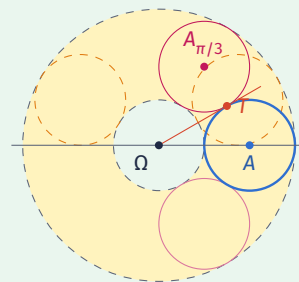
2. $(BC) \perp (B'C')$, donc ces droites se coupent en K . Le quadrilatère $AHKH'$ a trois angles droits, en H , K et H' : c'est un rectangle ; comme $AH' = AH$ (r conserve la distance au centre), $AHKH'$ est un carré.



3. Pythagore : $AB^2 = 8 + 18 = 26$ et $AC^2 = 8 + 2 = 10$: $AB = \sqrt{26}$, $AC = \sqrt{10}$. Les angles en B et C étant aigus, $H \in]BC[$: $B'C' = BC = HB + HC = 4\sqrt{2}$. Aire du carré : $AH^2 = 8$. (Figure : $A(0;0)$, $B(5;-1)$, $C(1;3)$, $H(2;2)$, $K(0;4)$.)

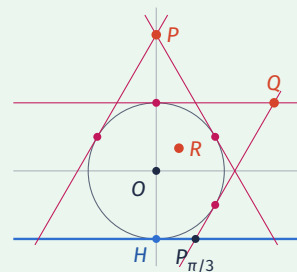
■ Corrigé de l'exercice 39

- $\mathcal{C}_\theta$ est le **cercle de centre A_θ et de rayon 2**. Avec $\Omega A_\theta = \Omega A = 4$ et $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega A}_\theta = 16 \cos \theta : AA_\theta^2 = 32 - 32 \cos \theta = 64 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, d'où $AA_\theta = 8 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.
- Deux cercles de même rayon 2 dont les centres sont à la distance δ se coupent si et seulement si $\delta \leq 4$ (si $\delta \leq 4$, la médiatrice des centres contient deux points, ou un seul, à la distance 2 des deux centres ; si $\delta > 4$, l'inégalité triangulaire l'interdit). Or $8 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq 4 \iff \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ (car $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) : $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Tangence pour $\delta = 4$: $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ ($\theta = 0$ redonne $\mathcal{C}$).
- Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\Omega A A_\theta$ est équilatéral de côté 4 : $AA_\theta = 4 = 2 + 2$ et le point de contact T , sur $[AA_\theta]$ à la distance 2 de A et de A_θ , en est le milieu. La tangente commune est la perpendiculaire à (AA_θ) en T , c'est-à-dire la médiatrice de $[AA_\theta]$, qui **passse par Ω** ($\Omega A = \Omega A_\theta$). ΩT est une hauteur : $\Omega T = 2\sqrt{3}$.
- On raisonne par double inclusion. Si $M \in \mathcal{C}_\theta$: $\Omega M \leq \Omega A_\theta + A_\theta M = 6$ et $4 = \Omega A_\theta \leq \Omega M + MA_\theta = \Omega M + 2$, donc $M \in \mathcal{K}$. Réciproquement, soit M tel que $m = \Omega M \in [2, 6]$. Dans le repère d'origine Ω avec $\vec{i} = \frac{1}{m} \vec{\Omega M}$, un point $P(4 \cos \varphi; 4 \sin \varphi)$ vérifie $MP^2 = m^2 + 16 - 8m \cos \varphi$, donc $MP = 2 \iff \cos \varphi = \frac{m^2 + 12}{8m}$; ce nombre est dans $]0, 1]$ car $m^2 - 8m + 12 = (m - 2)(m - 6) \leq 0$, donc un tel φ existe. Alors $\Omega P = 4 = \Omega A : P = A_\theta$ pour $\theta = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega P})$, et $M \in \mathcal{C}_\theta$. **La réunion des $\mathcal{C}_\theta$ est la couronne $\mathcal{K}$.**



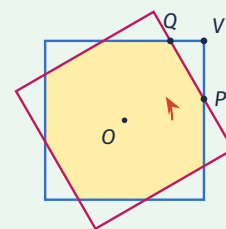
■ Corrigé de l'exercice 40

- H a pour angle polaire $-\frac{\pi}{2}$ et $OH = 3$, donc $H_\theta \left(3 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right); 3 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) = (3 \sin \theta; -3 \cos \theta)$. Comme $\mathcal{D} \perp (OH)$ en H , $\mathcal{D}_\theta \perp (OH_\theta)$ en H_θ avec $OH_\theta = 3$: $\mathcal{D}_\theta$ **est tangente à Γ en H_θ** . Puis $M \in \mathcal{D}_\theta \iff H_\theta \vec{M} \cdot \vec{OH}_\theta = 0 \iff \vec{OM} \cdot \vec{OH}_\theta = OH_\theta^2 = 9$, soit $x \sin \theta - y \cos \theta = 3$.
- $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_\theta) \equiv \theta [\pi]$. Parallèles $\iff \theta \in \{0, \pi\}$: $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\pi : y = 3$. Perpendiculaires $\iff \theta = \pm \frac{\pi}{2}$: $x = 3$ et $x = -3$.
- P : $-6 \cos \theta = 3$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$: $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$. Q : $3\sqrt{3} \sin \theta - 3 \cos \theta = 3$, soit $2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = 1$, $\theta - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$: $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$. R : $\sin \theta - \cos \theta = 3$, soit $\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = 3 > \sqrt{2}$: **aucune droite**.
- Pour $y = -3$: $x \sin \theta = 3(1 - \cos \theta)$ avec $\sin \theta \neq 0$, d'où $x = \frac{3 \times 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = 3 \tan \frac{\theta}{2}$: $P_\theta \left(3 \tan \frac{\theta}{2}; -3 \right)$. Les triangles OHP_θ et $OH_\theta P_\theta$, rectangles en H et H_θ , ont la même hypoténuse et $OH = OH_\theta$: $P_\theta H^2 = OP_\theta^2 - 9 = P_\theta H_\theta^2$, donc $P_\theta H = P_\theta H_\theta$.



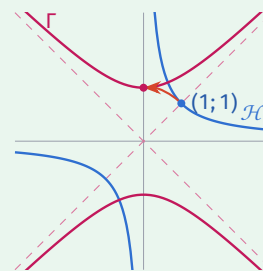
■ Corrigé de l'exercice 41

- La droite $x = 1$ est l'ensemble des M tels que $\vec{OM} \cdot \vec{OI} = 1$, avec $I(1; 0)$. La rotation conserve le produit scalaire et fixe O : son image est l'ensemble des M tels que $\vec{OM} \cdot \vec{OI}' = 1$, avec $I' = r(I)(c; s)$, soit $\Delta_1 : cx + sy = 1$. De même, avec $J(0; 1) \mapsto J'(-s; c) : y = 1 \mapsto -sx + cy = 1, x = -1 \mapsto cx + sy = -1, y = -1 \mapsto -sx + cy = -1$, et $\mathcal{K}' = \{|cx + sy| \leq 1 \text{ et } |-sx + cy| \leq 1\}$.
- $(c + s)^2 = 1 + 2sc > 1$ et $c + s > 0$, donc $c + s > 1 : V \notin \mathcal{K}'$. Sur $x = 1$, Δ_1 donne $y = \frac{1-c}{s} \in]0, 1[$ (car $0 < 1 - c < s$) ; de même pour Q . Le triangle VPQ est rectangle en V , avec $VP = \frac{c+s-1}{s}$ et $VQ = \frac{c+s-1}{c}$: $\text{aire}(VPQ) = \frac{(c + s - 1)^2}{2sc}$.
- Avec $t = c + s$ et $2sc = t^2 - 1 : \mathcal{A} = 4 - \frac{4(t-1)^2}{t^2-1} = 4 - \frac{4(t-1)}{t+1} = \frac{8}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$.
- $\theta - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[: \cos \theta + \sin \theta$ est maximal, égal à $\sqrt{2}$, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, où $\mathcal{A}$ est minimale : son minimum est $\frac{8}{1+\sqrt{2}}$, soit $\mathcal{A}_{\min} = 8(\sqrt{2} - 1) \approx 3,31$. Et $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{16}{3+\sqrt{3}} = \frac{8(3-\sqrt{3})}{3} \approx 3,38$.



■ Corrigé de l'exercice 42

- $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : r : x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) ; r^{-1} : x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - x') ; M' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right); \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right)$.
- On raisonne par double inclusion. D'abord $y'^2 - x'^2 = \frac{1}{2} \left[\left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \times 4 = 2 : r(\mathcal{H}) \subset \Gamma$. Réciproquement, si $N(X; Y) \in \Gamma$, son antécédent $N_0(x_0; y_0) = r^{-1}(N)$ vérifie $x_0 y_0 = \frac{1}{2}(X + Y)(Y - X) = \frac{1}{2}(Y^2 - X^2) = 1 : x_0 \neq 0, y_0 = \frac{1}{x_0}, N_0 \in \mathcal{H}$ et $N = r(N_0) \in r(\mathcal{H})$. Donc $r(\mathcal{H}) = \Gamma$.
- Si $t > 0, y' = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) > 0$ et $y'^2 = x'^2 + 2$, donc $y' = f(x')$. Réciproquement, un point de Γ d'ordonnée $Y > 0$ a pour antécédent un point $\left(t; \frac{1}{t} \right)$ avec $t + \frac{1}{t} > 0$, donc $t > 0$. Ainsi r envoie la branche $t > 0$ sur $\mathcal{C}_f$, et de même la branche $t < 0$ sur la courbe de $-f$. $r(1; 1) = (0; \sqrt{2})$, et $f(x) \geq \sqrt{2} = f(0) : \text{le minimum de } f \text{ est } \sqrt{2}, \text{ atteint en } 0$.
- $r\left(0, \frac{\pi}{2}\right) : (x; y) \mapsto (-y; x)$ envoie $\left(t; \frac{1}{t}\right)$ sur $\left(-\frac{1}{t}; t\right)$, d'ordonnée $-\frac{1}{x}$: la courbe de $x \mapsto -\frac{1}{x} : r(0, \pi) : \left(-t; -\frac{1}{t}\right) \in \mathcal{H} : r(0, \pi)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. $r\left(0, -\frac{\pi}{4}\right) : x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$, d'où $x'^2 - y'^2 = 2xy = 2$; on obtient (comme en 2) l'ensemble $x^2 - y^2 = 2$, qui contient $(2; \sqrt{2})$ et $(2; -\sqrt{2})$: ce n'est pas la courbe d'une fonction.



31 Corrigés : propriétés conservées

■ Corrigé de l'exercice 43

1. Par Chasles, avec $(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv (\vec{AC}, \vec{CB}) + \pi$ et $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv (\vec{CB}, \vec{BA}) + \pi : (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv (\vec{AB}, \vec{BA}) \equiv \pi$. Donc $(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$. La rotation conserve les angles orientés : $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(\vec{B'C'}, \vec{B'A'}) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(\vec{C'A'}, \vec{C'B'}) \equiv \frac{5\pi}{12}$.
2. Chasles et $(\vec{XY}, \vec{X'Y'}) \equiv \theta : (\vec{AB}, \vec{A'C'}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{A'C'}) \equiv \frac{\pi}{4} + \theta$; $(\vec{AC}, \vec{A'B'}) \equiv -\frac{\pi}{4} + \theta$; $(\vec{AB}, \vec{B'C'}) \equiv (\vec{AB}, \vec{BC}) + \theta$ avec $(\vec{AB}, \vec{BC}) \equiv (\vec{AB}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \pi - \frac{\pi}{3}$, d'où $\frac{2\pi}{3} + \theta$; enfin $(\vec{BC}, \vec{A'C'}) \equiv (\vec{CB}, \vec{CA}) \equiv -\frac{5\pi}{12}$, d'où $(\vec{BC}, \vec{A'C'}) \equiv \theta - \frac{5\pi}{12}$.
3. Pour $\theta = \frac{\pi}{4} : (\vec{AC}, \vec{A'B'}) \equiv 0$, donc $(A'B') \parallel (AC)$, et $(\vec{AB}, \vec{A'C'}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $(A'C') \perp (AB)$. Ensuite $(B'C') \perp (AB) \iff \frac{2\pi}{3} + \theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \theta \in \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$, et $(A'C') \parallel (BC) \iff \theta \equiv \frac{5\pi}{12} [\pi] \iff \theta \in \left\{\frac{5\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}$.
4. Pour un triangle direct, $(\vec{AB}, \vec{BC}) \equiv \pi - \beta$, $(\vec{BC}, \vec{CA}) \equiv \pi - \gamma$, $(\vec{CA}, \vec{AB}) \equiv \pi - \alpha$ (comme en 2). Or $(\vec{BC}, \vec{A'B'}) \equiv (\vec{BC}, \vec{AB}) + \theta \equiv \theta - \pi + \beta$, donc $(A'B') \parallel (BC) \iff \theta \equiv -\beta [\pi]$; de même $(B'C') \parallel (CA) \iff \theta \equiv -\gamma [\pi]$ et $(C'A') \parallel (AB) \iff \theta \equiv -\alpha [\pi]$. Les trois conditions exigent $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma [\pi]$, et comme ces angles sont dans $]0, \pi[$, $\alpha = \beta = \gamma : ABC$ est équilatéral. Réciproquement, un triangle équilatéral convient avec $\theta \equiv -\frac{\pi}{3} [\pi]$, par exemple la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre, qui envoie (AB) sur (BC) .

■ Corrigé de l'exercice 44

1. $\vec{AB}(1; -4)$, $\vec{A'B'}(4; -1) : AB = A'B' = \sqrt{17}$; $\vec{AC}(-5; 3)$, $\vec{A'C'}(-5; -3) : \sqrt{34}$; $\vec{BC}(-6; 7)$, $\vec{B'C'}(-9; -2) : \sqrt{85}$. ✓
2. $D\left(\frac{5+12+0}{4}; \frac{2-4+5}{4}\right) = \left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$ et, la rotation conservant le barycentre, $D' = \text{Bar}\{(A', 1); (B', 2); (C', 1)\} : D'\left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right)$. De même $G\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}\right)$ a pour image le centre de gravité de $A'B'C' : G'\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right)$.
3. Soit $F_0 = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$; par associativité $D = \text{Bar}\{(A, 1); (F_0, 3)\}$, donc $F_0 \in (AD) \cap (BC)$, et ces droites sont distinctes ($A \notin (BC)$) : $F = F_0\left(4; \frac{1}{3}\right)$. Puis $r(F) = \text{Bar}\{(B', 2); (C', 1)\} : r(F)\left(3; \frac{10}{3}\right)$.
4. On cherche $\alpha + \beta + \gamma = 1$ avec $2\alpha + 6\beta - 3\gamma = 11$ et $5\alpha + 4\beta + 2\gamma = 7$. En remplaçant $\gamma = 1 - \alpha - \beta$: $5\alpha + 9\beta = 14$ et $3\alpha + 2\beta = 5$, d'où $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$: $N = \text{Bar}\{(A', 1); (B', 1); (C', -1)\}$. Comme r est bijective et conserve le barycentre, l'antécédent de N est $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\} : (11; -5)$.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$; deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont, d'où la première équivalence ; la seconde vient de $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Si $B = A$ ou $B = C$, les deux membres sont vrais. Sinon, avec $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$: $AC = AB + BC \iff (\vec{AB}, \vec{BC}) \equiv 0 \iff \vec{BC} = \lambda \vec{AB} (\lambda > 0) \iff \vec{AB} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{AC} (\lambda > 0) \iff B \in [AC]$.
2. $B \in [AC] \Rightarrow AC = AB + BC \Rightarrow A'C' = A'B' + B'C' \Rightarrow B' \in [A'C']$. Si A, B, C sont alignés, l'un est entre les deux autres, donc son image est entre les deux autres images : A', B', C' sont alignés.
3. Si $0 \leq k \leq 1$: $G \in [AC]$ et $AG = kAC$, donc $G' \in [A'C']$ avec $A'G' = kA'C'$, soit $A'\vec{G}' = kA'\vec{C}'$. Si $k > 1$: $\vec{A'C} = \frac{1}{k}\vec{A'G}$ avec $0 < \frac{1}{k} < 1$, et le premier cas (appliqué à A, G, C) donne $A'\vec{C}' = \frac{1}{k}A'\vec{G}'$. Si $k < 0$: $\vec{GA} = \mu\vec{GC}$ avec $\mu = \frac{-k}{1-k} \in]0, 1[$, d'où $G'\vec{A}' = \mu G'\vec{C}' = \mu(G'\vec{A}' + A'\vec{C}')$, puis $(1 - \mu)G'\vec{A}' = \mu A'\vec{C}'$ et $G'\vec{A}' = -kA'\vec{C}'$. Dans tous les cas, $A'\vec{G}' = kA'\vec{C}'$.
4. Avec $k = \frac{1}{2}$, puis $k = \frac{y}{\alpha+y}$: f conserve le milieu et $\text{Bar}\{(A, \alpha); (C, y)\}$. Le centre de gravité est $\text{Bar}\{(A, 1); (I, 2)\}$ où I est le milieu de $[BC]$: son image est $\text{Bar}\{(A', 1); (I', 2)\}$ avec I' milieu de $[B'C']$, le centre de gravité de $A'B'C'$. (On retrouve, sans angle, des propriétés du cours, valables aussi pour les translations et les symétries.)

■ Corrigé de l'exercice 46

1. Par double inclusion. Pour tout M , $r(M)A' = MA$, $r(M)B' = MB$ et $r(\vec{M})A' \cdot r(\vec{M})B' = \vec{MA} \cdot \vec{MB}$: $M \in \mathcal{E} \iff r(M) \in \mathcal{E}'$. Donc $r(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$; et si $N \in \mathcal{E}'$, $M = r^{-1}(N)$ vérifie $M \in \mathcal{E}$, d'où $N = r(M) \in r(\mathcal{E})$: $r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$.
2. $r : (x; y) \mapsto (y; -x)$, $A'(0; -2)$, $B'(0; -5)$.
 $\mathcal{E}_1 : (x - 2)^2 + y^2 = 4(x - 5)^2 + 4y^2 \iff x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \iff (x - 6)^2 + y^2 = 4$: cercle de centre $(6; 0)$ et de rayon 2 ; image : $\{MA' = 2MB'\}$, **cercle de centre $(0; -6)$ et de rayon 2** (centre transformé, même rayon).
 $\mathcal{E}_2 : (x - 2)^2 - (x - 5)^2 = 6x - 21 = 3 \iff x = 4$; image : $\{MA'^2 - MB'^2 = 3\}$, soit $(y + 2)^2 - (y + 5)^2 = -6y - 21 = 3$: **la droite $y = -4$** .
 $\mathcal{E}_3$: cercle de diamètre $[AB]$ (centre $(\frac{7}{2}; 0)$, rayon $\frac{3}{2}$) ; image : **cercle de diamètre $[A'B']$** , de centre $(0; -\frac{7}{2})$.
3. Pour $M \neq A, B$: $(\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \iff \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ et $\det(\vec{MA}, \vec{MB}) > 0$. Avec $\vec{MA}(2-x; -y)$, $\vec{MB}(5-x; -y)$: $\det = (2-x)(-y) + y(5-x) = 3y$. Donc $\mathcal{E}_4$ est **le demi-cercle de $\mathcal{E}_3$ où $y > 0$** . La rotation conserve les angles orientés : $r(\mathcal{E}_4) = \{M : (\vec{MA'}, \vec{MB'}) \equiv \frac{\pi}{2}\}$, image des points $(x; y)$, $y > 0$, par $(x; y) \mapsto (y; -x)$: **le demi-cercle de diamètre $[A'B']$ situé dans $x > 0$** . La symétrie s d'axe (Oy) conserve les distances mais change les angles orientés en leurs opposés : $s(\mathcal{E}_4) = \{M : (\vec{MA''}, \vec{MB''}) \equiv -\frac{\pi}{2}\}$ avec $A''(-2; 0)$, $B''(-5; 0)$.

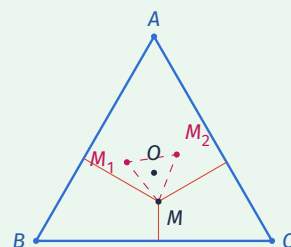
■ Corrigé de l'exercice 47

1. Conservation et Chasles : $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N'}) \equiv \varphi + \theta$, $(\vec{\Omega M'}, \vec{\Omega N}) \equiv \varphi - \theta$. D'où $\vec{\Omega M'} \cdot \vec{\Omega N'} = mn \cos \varphi$, $\vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega N'} = mn \cos(\varphi + \theta)$, $\vec{\Omega M'} \cdot \vec{\Omega N} = mn \cos(\varphi - \theta)$ et, de même, les déterminants $mn \sin \varphi$, $mn \sin(\varphi + \theta)$, $mn \sin(\varphi - \theta)$ (et $\vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega M'} = m^2 \cos \theta$).

2. $\vec{MM}' \cdot \vec{NN}' = (\vec{\Omega M}' - \vec{\Omega M}) \cdot (\vec{\Omega N}' - \vec{\Omega N}) = 2mn \cos \varphi - mn [\cos(\varphi - \theta) + \cos(\varphi + \theta)] = 2mn \cos \varphi (1 - \cos \theta)$, soit $\vec{MM}' \cdot \vec{NN}' = 2(1 - \cos \theta) \vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega N}$; le même calcul avec les déterminants et $\sin(\varphi - \theta) + \sin(\varphi + \theta) = 2 \sin \varphi \cos \theta$ donne $\det(\vec{MM}', \vec{NN}') = 2(1 - \cos \theta) \det(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$. Pour $N = M$: $MM'^2 = 2m^2(1 - \cos \theta)$, d'où $MM' = 2m \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$. Alors $MM' \times NN' = 2mn(1 - \cos \theta)$, donc $\cos(\vec{MM}', \vec{NN}') = \cos \varphi$ et $\sin(\vec{MM}', \vec{NN}') = \sin \varphi$: $(\vec{MM}', \vec{NN}') \equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N})$. En particulier, $1 - \cos \theta \neq 0$ donne $(MM') \perp (NN') \iff (\Omega M) \perp (\Omega N)$.
3. $MN'^2 = \|\vec{\Omega N}' - \vec{\Omega M}\|^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos(\varphi + \theta)$ et $M'N^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos(\varphi - \theta)$, d'où $MN'^2 - M'N^2 = 2mn [\cos(\varphi - \theta) - \cos(\varphi + \theta)] = 4mn \sin \varphi \sin \theta$. Si $\theta \neq 0, \pi$, $\sin \theta \neq 0$: $MN' = M'N \iff \sin \varphi = 0 \iff \Omega, M, N$ alignés.
4. $\vec{M'N} \cdot \vec{M'N} = (\vec{\Omega N} - \vec{\Omega M}') \cdot (\vec{\Omega N} - \vec{\Omega M}') = n^2 \cos \theta - mn \cos \varphi - mn \cos \varphi + m^2 \cos \theta$ ✓. Application ($\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$) : $\vec{MM}' \cdot \vec{NN}' = 2 \times 3 = 6$; $MN'^2 = 13 - 12 \cos \frac{5\pi}{6} = 13 + 6\sqrt{3}$; $M'N^2 = 13 - 12 \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 13 - 6\sqrt{3}$ (différence $12\sqrt{3} = 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓) ; $\vec{M'N} \cdot \vec{M'N} = -2 \times 3 = -6$.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $r(B) = C$ et $r(C) = A$, donc $r((BC)) = (CA)$; de même $r((CA)) = (AB)$. Si H est le projeté de M sur (BC) , $r(H) \in (CA)$ et $(r(M)r(H)) \perp (CA)$: $r(H)$ est le projeté de $r(M)$ sur (CA) et $r(M)r(H) = MH$. Pour le signe : M et A sont du même côté de (BC) si et seulement si $[MA]$ ne coupe pas (BC) , si et seulement si $[r(M)B]$ ne coupe pas (CA) (r est bijective et transforme segments et droites en segments et droites). Donc $\delta_B(r(M)) = \delta_A(M)$, et de même $\delta_C(r(M)) = \delta_B(M)$.
2. $OM_2 = OM$ et $(\vec{OM}, \vec{OM}_2) \equiv -\frac{4\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$ (Chasles), donc $M_2 = r(M)$ et $r^{-1}(M_2) = M$: r^{-1} permute M, M_1, M_2 . L'isobarycentre K de ces trois points a pour image celui de M_1, M_2, M , c'est-à-dire K : $r^{-1}(K) = K$, et le seul point fixe de r^{-1} est O : $K = O$.
3. (BC) est l'axe $y = 0$ et A est du côté $y > 0$: $\delta_A(M) = |y_M|$ avec le signe de y_M , soit $\delta_A(M) = y_M$. D'après 1, $\delta_B(M) = \delta_A(M_1)$ et $\delta_C(M) = \delta_B(M_1) = \delta_A(M_2)$. L'ordonnée de l'isobarycentre est la moyenne des ordonnées, donc $\delta_A(M) + \delta_B(M) + \delta_C(M) = y_M + y_{M_1} + y_{M_2} = 3y_O = 3 \times \frac{h}{3} = h$.
4. Si M est intérieur, les trois nombres sont les distances aux côtés : **leur somme vaut h** , quel que soit M . Application : $h = 3\sqrt{3}$, d'où $d(M, (AB)) = 3\sqrt{3} - 1 - 2 = 3\sqrt{3} - 3 \approx 2,20$ (figure : $y_{M_1} = 2$, $y_{M_2} = 3\sqrt{3} - 3$). Pour un polygone régulier à n côtés, de centre O et d'apothème ρ (distance de O aux côtés), la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ envoie chaque côté sur le suivant ; le même raisonnement (isobarycentre des n points $r^{-k}(M)$ fixe, donc égal à O) donne une somme des distances égale à $n\rho$.



32

Corrigés : déterminer une rotation

■ Corrigé de l'exercice 49

Idée : un point caractéristique de la figure (milieu, intersection, centre) est fixe, et une rotation distincte de Id n'a qu'un point fixe, son centre.

1. $r([AB]) = [r(A)r(B)] = [AB]$ et deux segments égaux ont les mêmes extrémités : $\{r(A), r(B)\} = \{A, B\}$. Si $r(A) = A$ et $r(B) = B$, r a deux points fixes : $r = \text{Id}$. Sinon $r(A) = B$, $r(B) = A$, et r conserve le milieu : $r(I) = I$, I est le centre et $(\vec{IA}, \vec{IB}) \equiv \pi$: $r = s_I$. Réciproque immédiate : $\boxed{\text{Id et } s_I}$.
2. $r(D) \in \{D, D'\}$ est parallèle à D : l'angle vérifie $\theta \equiv (D, r(D)) \equiv 0 [\pi]$, donc $r = \text{Id}$ ou $r = s_\Omega$. Si $s_\Omega(D) = D$, alors $\Omega \in D$, et $s_\Omega(D')$ est une parallèle à D' distincte de D' : exclu. Donc $s_\Omega(D) = D'$: pour $P \in D$, $s_\Omega(P) \in D'$ et Ω , milieu de $[Ps_\Omega(P)]$, est sur la parallèle Δ « à mi-distance ». Réciproquement, ces s_Ω échangent D et D' : $\boxed{\text{Id et les } s_\Omega, \Omega \in \Delta}$.
3. Une droite contenue dans $D \cup D'$ est D ou D' : $\{r(D), r(D')\} = \{D, D'\}$, et $r(I) \in r(D) \cap r(D') = \{I\}$: $r = \text{Id}$ ou r a pour centre I . Si $r(D) = D$: $\theta \equiv 0 [\pi]$, d'où Id ou s_I . Si $r(D) = D'$ et $r(D') = D$: $\theta \equiv (D, D') \equiv -(D, D') [\pi]$, donc $2(D, D') \equiv 0 [\pi]$: il faut $D \perp D'$, et $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. $\boxed{\text{Id, } s_I, \text{ et } r\left(I, \pm \frac{\pi}{2}\right) \text{ si } D \perp D'}$.
4. $r(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $r(K)$ et de même rayon : $r(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \iff r(K) = K$: **toutes les rotations de centre K** . Deux cercles distincts ont au plus deux points communs : un cercle contenu dans $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ est l'un d'eux, donc $\{r(K), r(K')\} = \{K, K'\}$, et la question 1 appliquée à $[KK']$ donne $\boxed{\text{Id et } s_J}$, J milieu de $[KK']$.
5. Le cercle est le seul cercle contenu dans la figure : r a pour centre Ω (ou $r = \text{Id}$) et conserve la réunion des deux droites ; d'après 2, r est Id ou un demi-tour de centre sur Δ : $y = 3$, qui contient Ω : $\boxed{\text{Id et } s_\Omega}$.

■ Corrigé de l'exercice 50

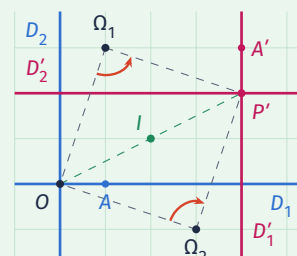
Méthode (cours) : $x' = ax - by + c$, $y' = bx + ay + d$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $(a, b) \neq (1, 0)$ est la rotation d'angle θ ($\cos \theta = a$, $\sin \theta = b$) dont le centre est l'unique point fixe.

1. f_1 : $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ (le coefficient de y dans x' vaut bien $-b$), $c = d = 0$: $\boxed{f_1 = r\left(O, -\frac{\pi}{6}\right)}$.
- f_2 : $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$; la seconde équation de point fixe donne $x = (1 + \sqrt{2})y - \sqrt{2}$, et la première devient $4(1 + \sqrt{2})y = 4(1 + \sqrt{2})$: $\boxed{f_2 = r\left(\Omega, \frac{3\pi}{4}\right), \Omega(1; 1)}$ (contrôle $f_2(1; 1) = (1; 1)$ ✓).
- f_4 : $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = -\frac{2\pi}{3}$; le système $\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution $\Omega'(1; 0)$: $\boxed{f_4 = r\left(\Omega', -\frac{2\pi}{3}\right)}$.
- f_5 : $O'(1; 0)$, $I'\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $J'\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{O'I'}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donne $(\vec{i}, \vec{O'I'}) \equiv \frac{\pi}{6}$, et $\vec{O'J'}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donne $(\vec{j}, \vec{O'J'}) \equiv (\vec{j}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{O'J'}) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$. Pour une rotation, ces deux angles seraient égaux à θ : $\boxed{f_5 \text{ n'est pas une rotation}}$.

2. $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = a$, $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = b$:
 $f_3 = r\left(O, \frac{\pi}{12}\right)$. Puis $x'' = ax' - by' = (a^2 - b^2)x - 2aby$, $y'' = bx' + ay' = 2abx + (a^2 - b^2)y$, avec
 $a^2 - b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2ab = \frac{2(6-2)}{16} = \frac{1}{2}$: $f_3 \circ f_3 : x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$, $y'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, c'est $r\left(O, \frac{\pi}{6}\right)$
 (composée de deux rotations de même centre).
3. $f_2^{-1} = r\left(O, -\frac{3\pi}{4}\right) : x' - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - 1)$, $y' - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - 1)$, soit
- $$x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \quad y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 + \sqrt{2} \quad (\text{contrôle : } f_2(O) = (1 + \sqrt{2}; 1) \mapsto O \checkmark).$$

■ Corrigé de l'exercice 51

1. r est une bijection : $r(O) \in r(D_1) \cap r(D_2) = D'_1 \cap D'_2$, donc $r(O) = P'$. L'angle d'une droite et de son image vaut θ modulo π : $\theta \equiv (D_1, D'_1) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
2. Donc $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, et pour chaque angle une seule rotation envoie O sur P' . Pour $\frac{\pi}{2}$ et $\Omega_1(a; b)$: $4 - a = b$, $2 - b = -a$, d'où $\Omega_1(1; 3)$ et $r_1 : x' = -y + 4$, $y' = x + 2$. Pour $-\frac{\pi}{2}$: $4 - a = -b$, $2 - b = a$, d'où $\Omega_2(3; -1)$ et $r_2 : x' = y + 4$, $y' = -x + 2$.
 Vérification : $r_1(t; 0) = (4; t+2)$, $r_1(0; t) = (4-t; 2)$ décrivent D'_1 et D'_2 ; de même $r_2(t; 0) = (4; 2-t)$, $r_2(0; t) = (t+4; 2)$:
exactement deux rotations.
3. $r_1(1; 0) = (4; 3) = A'$, mais $r_2(1; 0) = (4; 1)$: **c'est r_1 .**
4. Une droite contenue dans $D'_1 \cup D'_2$ est l'une des deux : $\{p(D_1), p(D_2)\} = \{D'_1, D'_2\}$, et $p(O) = P'$.
 Si $p(D_1) = D'_1$, $p \in \{r_1, r_2\}$. Si $p(D_1) = D'_2$ et $p(D_2) = D'_1$: $\theta \equiv (D_1, D'_2) \equiv 0 [\pi]$, et $\theta \equiv 0$ est exclu (Id n'envoie pas O sur P') : p est le demi-tour qui envoie O sur P' , $p = s_l$, $l(2; 1)$, et $s_l(x; y) = (4 - x; 2 - y)$ envoie bien $y = 0$ sur $y = 2$ et $x = 0$ sur $x = 4$. **trois rotations : r_1 , r_2 , s_l .**

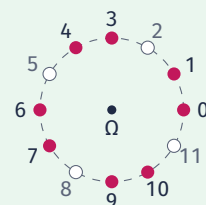


■ Corrigé de l'exercice 52

1. **Récurrence.** Initialisation : $F_1 = r\left(O, \frac{\pi}{6}\right) = r\left(O, \frac{1 \times 2 \pi}{12}\right)$. Hérédité : si $F_n = r\left(O, \frac{n(n+1)\pi}{12}\right)$, la composée de deux rotations de même centre donne $F_{n+1} = r\left(O, \frac{2(n+1)\pi + n(n+1)\pi}{12}\right) = r\left(O, \frac{(n+1)(n+2)\pi}{12}\right)$. **Conclusion** : la formule vaut pour tout $n \geq 1$. $F_2 = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, $F_3 = r(O, \pi) = s_O$, $F_4 = r\left(O, \frac{5\pi}{3}\right) = r\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)$, $F_5 = r\left(O, \frac{5\pi}{2}\right) = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. $F_n = \text{Id} \iff \frac{n(n+1)\pi}{12} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff 24 \mid n(n+1)$, soit, 8 et 3 étant premiers entre eux, $8 \mid n(n+1)$ et $3 \mid n(n+1)$. Des deux entiers consécutifs $n, n+1$, l'un est impair, donc premier avec 8 : $8 \mid n(n+1) \iff 8 \mid n$ ou $8 \mid n+1$, c'est-à-dire que le reste de n modulo 8 est 0 ou 7 ; 3 est premier : $3 \mid n(n+1) \iff$ le reste de n modulo 3 est 0 ou 2. Parmi les restes modulo 24 qui valent 0 ou 7 modulo 8 (0, 8, 16, 7, 15, 23), on garde 0, 8, 15, 23 :
 $F_n = \text{Id} \iff$ le reste de n modulo 24 est 0, 8, 15 ou 23 ; le plus petit est $n = 8$ ($8 \times 9 = 3 \times 24$).

3. $F_n = s_\Omega \iff \frac{n(n+1)}{12}$ est un entier impair $\iff n(n+1) = 24q + 12 \iff 3 \mid n(n+1)$ et $n(n+1)$ a pour reste 4 modulo 8 (car $24q + 12 = 8(3q + 1) + 4$, et réciproquement $N - 12$ est alors divisible par 8 et par 3). Pour les restes 0, ..., 7 de n modulo 8, ceux de $n(n+1)$ sont 0, 2, 6, 4, 4, 6, 2, 0 : il faut le reste 3 ou 4, soit 3, 11, 19, 4, 12, 20 modulo 24, dont on garde ceux de reste 0 ou 2 modulo 3 : reste de n modulo 24 égal à 3, 11, 12 ou 20.

4. $F_n = r\left(\Omega, T_n \frac{\pi}{6}\right)$ avec $T_n = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N} : F_n(M) = M_k, k$ reste de T_n modulo 12 ; comme $3 \mid 12$, k et T_n ont le même reste modulo 3. Si n a pour reste 0 ou 2 modulo 3, 3 divise $n(n+1) = 2T_n$, donc T_n ; si $n = 3q + 1$, $2T_n = 9q^2 + 9q + 2$ a pour reste 2, donc T_n a pour reste 1 (un reste 0 ou 2 donnerait 0 ou 1 pour $2T_n$). Ainsi k n'a jamais pour reste 2 modulo 3 : M_2, M_5, M_8, M_{11} ne sont jamais atteints, et les huit autres le sont : $T_8 = 36, T_1 = 1, T_2 = 3, T_7 = 28, T_3 = 6, T_{13} = 91, T_6 = 21, T_4 = 10$ donnent $k = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10$.



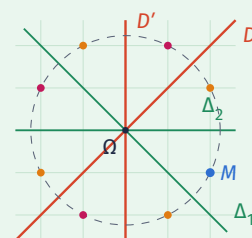
■ Corrigé de l'exercice 53

1. $\Omega(2; 3)$. Le milieu $\left(\frac{x+y-1}{2}; \frac{x+y+1}{2}\right)$ de $M(x; y)$ et $(y-1; x+1)$ est sur D , et le vecteur $(y-1-x; x+1-y)$ est orthogonal à $\vec{u}(1; 1)$: $s(x; y) = (y-1; x+1)$; de même $s'(x; y) = (4-x; y)$. Puis $r(x; y) = s'(y-1; x+1) = (5-y; x+1) : a = 0, b = 1$, point fixe $\Omega : \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $r = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, en accord avec $2(D, D') = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Enfin $(s \circ s') \circ (s' \circ s) = \text{Id} : s \circ s' = r^{-1}$.$

2. $r \circ s = s' \circ s \circ s = s'$. Puis $s \circ r = s \circ s' \circ s = r^{-1} \circ s$, et par récurrence $s \circ r^{k+1} = (s \circ r^k) \circ r = r^{-k} \circ s \circ r = r^{-(k+1)} \circ s$; or $r^4 = r(\Omega, 2\pi) = \text{Id}$, donc $r^{-k} = r^{4-k}$.

3. Soit $\mathcal{G} = \{r^k, r^k \circ s : 0 \leq k \leq 3\}$ et $\mathcal{P}(p)$: « toute composée de p applications prises parmi s, s' est dans $\mathcal{G}$ ». Initialisation : $s = r^0 \circ s$ et $s' = r \circ s$. Hérédité : une composée de $p+1$ facteurs s'écrit $t \circ g, t \in \{s, s'\}, g \in \mathcal{G}$; or $s \circ r^k = r^{4-k} \circ s, s \circ (r^k \circ s) = r^{4-k}, s' \circ g = r \circ (s \circ g)$, et $r \circ r^k = r^{k+1}, r \circ (r^k \circ s) = r^{k+1} \circ s$ (exposants modulo 4) : $t \circ g \in \mathcal{G}$. Conclusion : $\mathcal{P}(p)$ pour tout $p \geq 1$. Avec $r^2 = s_\Omega : (x; y) \mapsto (4-x; 6-y)$ et $r^{-1} : (x; y) \mapsto (y-1; 5-x) : r^2 \circ s(x; y) = (5-y; 5-x)$ et $r^3 \circ s(x; y) = (x; 6-y)$, donc $r^2 \circ s = s_{\Delta_1}, \Delta_1 : x+y=5$ et $r^3 \circ s = s_{\Delta_2}, \Delta_2 : y=3$: quatre rotations de centre Ω et quatre symétries d'axes $D, D', \Delta_1, \Delta_2$, passant par Ω et formant des angles de $\frac{\pi}{4}$.

4. $M(4; 2)$ a pour images $r(M) = (3; 5), r^2(M) = (0; 4), r^3(M) = (1; 1), s(M) = (1; 5), s'(M) = (0; 2), s_{\Delta_1}(M) = (3; 1), s_{\Delta_2}(M) = (4; 4) : \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8 points, sur le cercle de centre Ω et de rayon $\Omega M = \sqrt{5}$. Pour $M(4; 3) \in \Delta_2 : s_{\Delta_2}(M) = M, r(M) = s(M) = (2; 5), r^2(M) = s'(M) = (0; 3), r^3(M) = s_{\Delta_1}(M) = (2; 1) : \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4 points seulement (l'objet est sur un miroir).$$

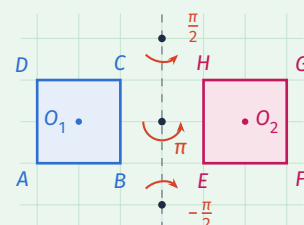


images directes (•), « miroirs » (•)

■ Corrigé de l'exercice 54

- $O_1(1; 1)$ est l'isobarycentre de A, B, C, D , et une rotation conserve les barycentres : $r(O_1)$ est l'isobarycentre de E, F, G, H , $r(O_1) = O_2(5; 1)$. Une rotation est déterminée par deux points distincts et leurs images : ici $O_1 \mapsto O_2$ et $A \mapsto X$.
- $O_1 A(-1; -1) = O_2 E$: l'angle serait nul, et la seule rotation d'angle nul, Id, n'envoie pas O_1 sur O_2 : **impossible**.

Suite de 2. $X = F : O_2 F(1; -1)$ se déduit de $O_1 A$ par un quart de tour direct : $\theta = \frac{\pi}{2}$. Le centre est sur la médiatrice $x = 3$ de $[O_1 O_2]$; $r(B)$ est le sommet G (car $(O_1 A, O_1 B) \equiv \frac{\pi}{2}$ donne $(O_2 F, O_2 r(B)) \equiv \frac{\pi}{2}$), et la médiatrice $2x + y = 9$ de $[BG]$ coupe $x = 3$ en $(3; 3)$: $r\left((3; 3), \frac{\pi}{2}\right)$, $(x; y) \mapsto (-y + 6; x) : A, B, C, D \mapsto F, G, H, E$ ✓. $X = G : O_2 G = -O_1 A$, demi-tour de centre le milieu de $[O_1 O_2]$: $s_{(3; 1)}$, $(6 - x; 2 - y) : A, B, C, D \mapsto G, H, E, F$ ✓. $X = H : \theta = -\frac{\pi}{2}$, centre symétrique du premier par rapport à $(O_1 O_2)$: $r\left((3; -1), -\frac{\pi}{2}\right)$, $(y + 4; 2 - x) : A, B, C, D \mapsto H, E, F, G$ ✓. **Trois rotations**, de centres sur la médiatrice $x = 3$ de $[O_1 O_2]$.



- Soit X_0 un sommet de $\mathcal{Q}'$, $X_k = r\left(O_2, \frac{k\pi}{2}\right)(X_0)$ ses sommets et $\alpha = (O_1 A, O_2 X_0)$. Une rotation qui convient envoie O_1 sur O_2 et A sur un X_k ; son angle est $\theta_k \equiv \alpha + \frac{k\pi}{2}$. Si $\theta_k \neq 0$, une unique rotation r_k d'angle θ_k envoie O_1 sur O_2 ; elle envoie A sur X_k ($O_2 r_k(A) = O_1 A = O_2 X_k$, même angle), puis, par conservation des distances et des angles, B sur X_{k+1} , etc. : elle convient. Si $\theta_k \equiv 0$, aucune. Les θ_k sont distincts modulo 2π , donc **au plus un** est nul, ce qui arrive si et seulement si $\alpha \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$, c'est-à-dire si les côtés sont parallèles : **4 rotations, ou 3**.
- Même raisonnement avec les angles $\alpha + \frac{2k\pi}{3}$: **3 rotations, ou 2** si l'un des triangles est l'image de l'autre par une translation.

33

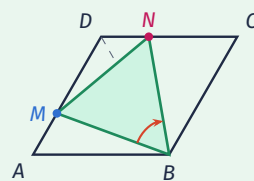
Corrigés : utiliser une rotation

■ Corrigé de l'exercice 55

- ABD est équilatéral direct $((\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}) : BA = BD$ et $(\vec{BA}, \vec{BD}) \equiv -\frac{\pi}{3}$, donc $r(A) = D$. De même $BD = BC$ et, par Chasles, $(\vec{BD}, \vec{BC}) \equiv (\vec{BD}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} : r(D) = C$, et $r([AD]) = [r(A)r(D)] = [DC]$.

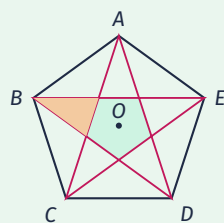
- $r(M) \in [DC]$ et $D r(M) = r(A)r(M) = AM = DN$: le seul point de $[DC]$ à la distance DN de D est N : $r(M) = N$. Donc $BN = BM$ et $(\vec{BM}, \vec{BN}) \equiv -\frac{\pi}{3}$: **BMN est équilatéral.**
- $M \in [AD]$, donc $DM + DN = DM + MA = a$, et le périmètre de DMN vaut $a + MN = a + BM$. Or BM est minimal quand M est le pied de la hauteur issue de B dans ABD , le milieu de $[AD]$, où $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$:

minimum $a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



■ Corrigé de l'exercice 56

- $r([AC]) = [BD]$, $r([BD]) = [CE]$, $r([CE]) = [DA]$, $r([DA]) = [EB]$, $r([EB]) = [AC]$; une rotation conserve les distances : $AC = BD = CE = DA = EB$.
- Propriété fondamentale avec $r(A) = B$ et $r(C) = D$: $(\vec{AC}, \vec{BD}) \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi]$.
- r transforme (AC) en (BD) et (BD) en (CE) , droites sécantes (angle $\frac{2\pi}{5} \not\equiv 0 [\pi]$) : $r(I_1) \in (BD) \cap (CE)$, $r(I_1) = I_2$, et de même $r(I_2) = I_3, \dots, r(I_5) = I_1$. Comme $I_1 \neq O$ ($O \notin (AC)$), les cinq points se déduisent les uns des autres par r : $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$ **est un pentagone régulier de centre O .**
- $r(B) = C$, $r(I_5) = I_1$, $r(I_1) = I_2$: r transforme $BI_5 I_1$ en $CI_1 I_2$, puis en $DI_2 I_3$, $EI_3 I_4$, $AI_4 I_5$: images par r, r^2, r^3, r^4 , qui conservent les distances, **les pointes sont isométriques.**



■ Corrigé de l'exercice 57

Raisonnement par analyse-synthèse.

- Les diagonales d'un carré ont même milieu O , même longueur et sont perpendiculaires : $OM = ON$ et $(\vec{OM}, \vec{ON}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}$, soit $N = r\left(O, \pm\frac{\pi}{2}\right)(M)$. Comme $M \in D_1$, $N \in \Delta_+$ ou $N \in \Delta_-$, et $N \in D_2$.
- $H(0; 1)$ a pour images $H_{\pm} = r\left(O, \pm\frac{\pi}{2}\right)(H) = (\mp 1; 0)$, et $\Delta_{\pm}$ est la perpendiculaire à $(OH_{\pm})$ en $H_{\pm}$:

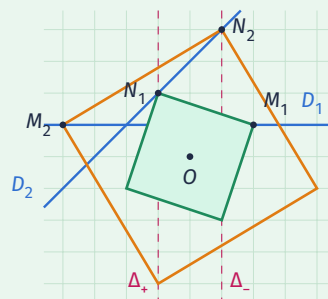
$\Delta_+ : x = -1$

 et

$\Delta_- : x = 1$

.
- $\Delta_+ \cap D_2 : N_1(-1; 2)$, puis $M_1 = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)(N_1) = (2; 1) \in D_1$, et $P_1 = s_O(M_1) = (-2; -1)$, $Q_1 = s_O(N_1) = (1; -2)$: côté $M_1 N_1 = \sqrt{10}$.
 $\Delta_- \cap D_2 : N_2(1; 4)$, $M_2 = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(N_2) = (-4; 1) \in D_1$, $P_2 = (4; -1)$, $Q_2 = (-1; -4)$: côté $\sqrt{34}$. **Synthèse** : dans chaque cas, M, N, P, Q se déduisent l'un de l'autre par un même quart de tour de centre O : $MNPQ$ est un carré de centre O , avec $M \in D_1$, $N \in D_2$: **exactement deux carrés.**
- Chaque cas donne un seul point tant que D_2 n'est pas parallèle à $\Delta_{\pm}$, qui sont verticales. Si D_2 est verticale, donc perpendiculaire à D_1 :

aucune solution, ou une infinité si $D_2 : x = \pm 1$.



■ Corrigé de l'exercice 58

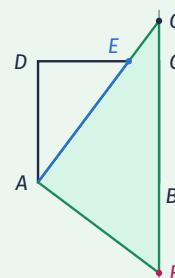
1. $AD = AB$ et $(\vec{AD}, \vec{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}$ (carré direct) : $r(D) = B$. L'image de (DC) est la droite passant par B et perpendiculaire à (DC) : c'est (BC) . Donc $F \in (BC)$, et par définition $AF = AE$, $(\vec{AE}, \vec{AF}) \equiv -\frac{\pi}{2}$: $(AF) \perp (AE)$.

2. $G \in (AE)$, donc $(AF) \perp (AG)$: AFG est rectangle en A ; $F, G \in (BC)$ et $(AB) \perp (BC)$: $[AB]$ est sa hauteur. Le double de l'aire vaut $AF \times AG = FG \times AB$, et $FG^2 = AF^2 + AG^2$ (Pythagore) :

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{AF^2 + AG^2}{AF^2 AG^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AG^2}, \text{ d'où } \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{a^2} \quad (AF = AE).$$

3. $AE = \sqrt{9 + 16} = 5$; $(AE) : y = \frac{4}{3}x$ coupe $x = 4$ en $G(4; \frac{16}{3})$, $AG = \sqrt{16 + \frac{256}{9}} = \frac{20}{3}$; $r(x; y) = (y; -x)$, $F(4; -3)$, sur (BC) , $AF = 5$. Contrôle : $\frac{1}{25} + \frac{9}{400} = \frac{25}{400} = \frac{1}{4^2}$ ✓.

4. Avec $u = \frac{1}{AE}$, $v = \frac{1}{AG}$: $\frac{1}{a^2} = u^2 + v^2 \geq 2uv = \frac{2}{AE \times AG}$, donc $AE \times AG \geq 2a^2$; égalité si et seulement si $AE = AG$, soit $E = G \in (DC) \cap (BC)$: $E = G = C$.



■ Corrigé de l'exercice 59

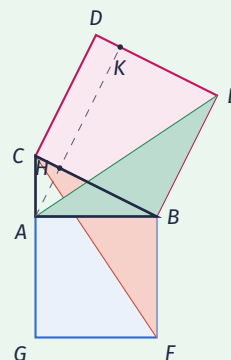
1. $r(F) = A$ (car $F = r(B, \frac{\pi}{2})(A)$), $r(B) = B$, $r(C) = E$: r transforme FBC en ABE ; elle conserve les distances, donc les aires : $\text{aire}(FBC) = \text{aire}(ABE)$.

2. $(\vec{BA}, \vec{BF}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $(BF) \perp (AB)$, et $(AC) \perp (AB)$: $(AC) \parallel (BF)$. Le point C est donc à la même distance de (BF) que A , soit AB : $\text{aire}(FBC) = \frac{1}{2}BF \times AB = \frac{1}{2}AB^2$.

3. $(\vec{BC}, \vec{BE}) \equiv -\frac{\pi}{2}$, donc $(BE) \perp (BC)$; or $(AH) \perp (BC)$: $(AH) \parallel (BE)$, et la distance de A à (BE) est celle de H , c'est-à-dire HB . Ainsi $\text{aire}(ABE) = \frac{1}{2}BE \times BH = \frac{1}{2}BC \times BH$, et la question 1 donne $AB^2 = BH \times BC$.

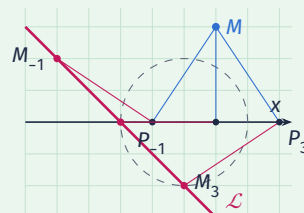
4. De même (carré sur $[AC]$, rotation $r(C, \frac{\pi}{2})$) : $AC^2 = CH \times CB$. Les angles en B et C sont aigus, donc $H \in [BC]$: $AB^2 + AC^2 = BC(BH + CH) = BC^2$. La droite (AH) coupe $[ED]$ en K et partage $BCDE$ en deux rectangles d'aires $BH \times BE = AB^2$ et $CH \times CD = AC^2$: c'est la démonstration d'Euclide (*Éléments*, I, 47, le « moulin à vent »).

5. $\vec{BA}(-2; 0)$ tourné de $\frac{\pi}{2}$ donne $(0; -2)$: $F(2; -2)$, $G = A + \vec{BF} = (0; -2)$; $\vec{BC}(-2; 1)$ tourné de $-\frac{\pi}{2}$ donne $(1; 2)$: $E(3; 2)$, $D = C + \vec{BE} = (1; 3)$. $H = B + \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BC^2} \vec{BC} = (\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$, $BH = \frac{4}{5}\sqrt{5}$, et $BH \times BC = 4 = AB^2$ ✓ ; $\text{aire}(FBC) = \text{aire}(ABE) = 2$.



■ Corrigé de l'exercice 60

1. $x' - t = -(y - 0)$ et $y' - 0 = x - t$ avec $M(1; 3)$: $M_t(t - 3; 1 - t)$, d'où $x' + y' = -2$; réciproquement, $(X; -2 - X)$ est M_t pour $t = X + 3$. Double inclusion : $\mathcal{L} : x + y = -2$, tout entière.
2. a) $1 - t = 2$: $P(-1; 0)$, $M'(-4; 2)$. b) $(t - 3)^2 + (1 - t)^2 = 4 \iff t^2 - 4t + 3 = 0$: $P(1; 0)$ ou $P(3; 0)$, avec $M'(-2; 0)$ ou $M'(0; -2)$.
3. $x' = t + (1 - t)\cos\theta - 3\sin\theta$, $y' = (1 - t)\sin\theta + 3\cos\theta$, soit $M_t = M_0 + t\vec{u}$, $\vec{u}(1 - \cos\theta; -\sin\theta) \neq \vec{0}$ car $\theta \neq 0$: le lieu est la droite passant par M_0 dirigée par $\vec{u}$. Pour $\theta = \pi$: $M_t = s_{P_t}(M) = (2t - 1; -3)$, la droite $y = -3$.
4. Avec $P(p; q)$, $p^2 + q^2 = 1$: $r\left(P, \frac{\pi}{2}\right)(M) = (p + q - 3; q - p + 1)$, et $(x' + 3)^2 + (y' - 1)^2 = (p + q)^2 + (q - p)^2 = 2$. Réciproquement, $(X; Y)$ sur ce cercle est atteint avec $p = \frac{X - Y + 4}{2}$, $q = \frac{X + Y + 2}{2}$ ($p^2 + q^2 = 1$). Lieu : le cercle de centre $(-3; 1) = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(M)$ et de rayon $\sqrt{2}$.



34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Avec $\Omega(a; b)$, l'expression de $r\left(\Omega, -\frac{2\pi}{3}\right)$ s'écrit $x' - a = -\frac{1}{2}(x - a) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y - b)$, $y' - b = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - a) - \frac{1}{2}(y - b)$: c'est exactement $\Omega\vec{N} = \rho(\Omega\vec{M})$. Les coordonnées de $\rho(\vec{u})$ sont linéaires en x, y , d'où $\rho(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(\vec{u}) + \rho(\vec{v})$ et $\rho(k\vec{u}) = k\rho(\vec{u})$. Appliquer trois fois ρ , c'est appliquer $r\left(\Omega, -\frac{2\pi}{3}\right)^3 = r(\Omega, -2\pi) = \text{Id}$: $\rho^3(\vec{u}) = \vec{u}$. Enfin $\rho^2(\vec{u})\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y; \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$, et la somme des trois vecteurs est nulle.
2. $A_1\vec{P}_1 = \rho(A_1\vec{P}_0)$; $A_2\vec{P}_2 = \rho(A_2\vec{A}_1 + A_1\vec{P}_1) = -\rho(\vec{u}) + \rho^2(A_1\vec{P}_0)$; $A_3\vec{P}_3 = \rho(A_3\vec{A}_2 + A_2\vec{P}_2) = \rho(\vec{u}) - \rho(\vec{v}) - \rho^2(\vec{u}) + A_1\vec{P}_0$, car $A_3\vec{A}_2 = \vec{u} - \vec{v}$ et $\rho^3 = \text{Id}$. Par Chasles, $P_0\vec{P}_3 = P_0\vec{A}_1 + \vec{v} + A_3\vec{P}_3 = \vec{v} + \rho(\vec{u}) - \rho(\vec{v}) - \rho^2(\vec{u})$, et $-\rho^2(\vec{u}) = \rho(\vec{u}) + \vec{u}$: $P_0\vec{P}_3 = \vec{u} + \vec{v} + \rho(2\vec{u} - \vec{v}) = \vec{w}$.
3. Récurrence : vrai pour $m = 0$; $P_{3m+1}, P_{3m+2}, P_{3m+3}$ se déduisent de P_{3m} par les rotations de centres $A_{3m+1} = A_1, A_2, A_3$, donc (question 2 appliquée à P_{3m}) $P_{3m}\vec{P}_{3m+3} = \vec{w}$ et $P_0\vec{P}_{3m+3} = (m+1)\vec{w}$. Comme $1986 = 3 \times 662$: $P_{1986} = P_0 \Rightarrow 662\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$.
4. $2\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $(2a - c; 2b - d)$, d'où $\vec{w}\left(\frac{3}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}d + \sqrt{3}b; \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{3}{2}d - \sqrt{3}a\right)$ et $\vec{w} = \vec{0} \iff \sqrt{3}c - d = -2b$ et $c + \sqrt{3}d = 2a \iff c = \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b$, $d = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b$ (substituer $d = \sqrt{3}c + 2b$) : $A_1\vec{A}_3$ est l'image de $A_1\vec{A}_2$ par l'expression de $r\left(A_1, \frac{\pi}{3}\right)$, $A_3 = r\left(A_1, \frac{\pi}{3}\right)(A_2)$. Alors $A_1A_3 = A_1A_2$ et l'angle en A_1 vaut $\frac{\pi}{3}$: $A_1A_2A_3$ est équilatéral (direct).

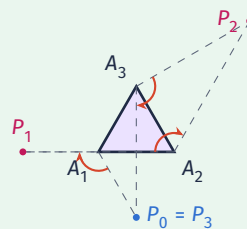
5. Réciproquement, si $A_1A_2A_3$ est équilatéral direct, $\vec{w} = \vec{0}$:

$P_3 = P_0$ pour tout P_0 , la suite est périodique de période 3.

3. Exemple : $\rho(1; -\sqrt{3}) = (-2; 0)$, $P_1(-2; 0)$; $A_2\vec{P}_1(-4; 0)$,

$\rho(-4; 0) = (2; 2\sqrt{3})$, $P_2(4; 2\sqrt{3})$; $A_3\vec{P}_2(3; \sqrt{3})$, $\rho(3; \sqrt{3}) =$

$(0; -2\sqrt{3})$, $P_3(1; -\sqrt{3}) = P_0$ ✓.



■ Corrigé de l'exercice 62

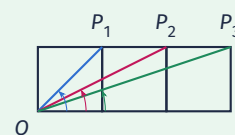
1. $\cos \alpha = \frac{a}{\|\vec{u}\|}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\|\vec{u}\|}$; l'expression de $r(O, \alpha)$ donne $V' (c \cos \alpha - d \sin \alpha ; c \sin \alpha + d \cos \alpha)$, soit $O\vec{V}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} * \vec{v}$. Par définition de la rotation, $(\vec{v}, O\vec{V}') \equiv \alpha$, et $\vec{u} * \vec{v}$ est un multiple positif de $O\vec{V}'$:

par Chasles, $(\vec{i}, \vec{u} * \vec{v}) \equiv (\vec{i}, \vec{v}) + \alpha$.

2. $(1; 1) * (2; 1) = (1; 3)$, puis $(1; 3) * (3; 1) = (0; 10)$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv (\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Or $\tan \alpha_k = \frac{1}{k} \leq 1$, donc $0 < \alpha_k \leq \frac{\pi}{4}$ et la somme est dans $]0, \frac{3\pi}{4}]$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.

3. $\vec{u}(5; 1)$ a pour angle α (coordonnées positives de rapport $\frac{1}{5}$), $(239; -1)$ a pour angle $-\beta$. $\vec{u} * \vec{u} = (24; 10)$, $(24; 10) * (24; 10) = (476; 480) = 4(119; 120)$, d'angle 4α ; $(119; 120) * (239; -1) = (28561; 28561)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$: $4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Or $\tan \alpha < 1$, donc $0 < 4\alpha < \pi$, et $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$: $4\alpha - \beta \in]-\frac{\pi}{4}, \pi[$, d'où $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. (John Machin en tira 100 décimales de π en 1706 ; $28561 = 13^4$.)

4. $(3; 1) * (3; 1) = (8; 6)$ et $(8; 6) * (7; 1) = (50; 50)$: $2\gamma + \delta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$, avec $0 < 2\gamma + \delta < \frac{3\pi}{4}$ ($\gamma, \delta < \frac{\pi}{4}$) : $2\gamma + \delta = \frac{\pi}{4}$.



■ Corrigé de l'exercice 63

1. Le centre est le milieu $\Omega(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ de $[A_0A_2]$; $r(\Omega, \frac{\pi}{2})$ a pour expression $(x; y) \mapsto (-y+3; x)$ et envoie $A_0 \mapsto A_1 \mapsto A_2 \mapsto A_3 \mapsto A_0$: un carré à sommets entiers.

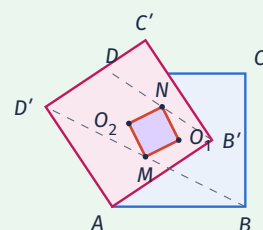
2. $r = r(\Omega, \frac{2\pi}{n})$ envoie A_0, A_1 sur A_1, A_2 : par la propriété fondamentale, $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \frac{2\pi}{n}$. Or $\vec{u} \cdot \vec{u}' = \|\vec{u}\| \|\vec{u}'\| \cos(\vec{u}, \vec{u}')$ et $\det(\vec{u}, \vec{u}') = \|\vec{u}\| \|\vec{u}'\| \sin(\vec{u}, \vec{u}')$, d'où les formules. Les coordonnées de $\vec{u}, \vec{u}'$ sont entières : numérateurs et $\|\vec{u}\|^2 \neq 0$ sont entiers, $\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Q}$.

3. $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{3}$ est irrationnel) : **ni triangle équilatéral ni hexagone régulier** à sommets entiers. $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{5}$ irrationnel) : **pas de pentagone**.

4. Les s^2 possibles forment une partie non vide de $\mathbb{N}^*$: elle a un plus petit élément, réalisé par un polygone $(A_0, \dots, A_{n-1})$. Les points B_k sont entiers (somme d'un point entier et d'un vecteur entier). La propriété fondamentale de r donne $A_{k+1}A_{k+2} = A_kA_{k+1} = s$ et $(A_k\vec{A}_{k+1}, A_{k+1}\vec{A}_{k+2}) \equiv \frac{2\pi}{n}$, soit $A_0B_{k+1} = A_0B_k$ et $(A_0\vec{B}_k, A_0\vec{B}_{k+1}) \equiv \frac{2\pi}{n}$: $B_{k+1} = r\left(A_0, \frac{2\pi}{n}\right)(B_k)$ (et $B_n = B_0$). Les B_k sont distincts ($B_0 \neq A_0$, angles $\frac{2k\pi}{n}$ distincts) : c'est un polygone régulier à sommets entiers de centre A_0 . Dans le triangle isocèle $A_0B_0B_1$ d'angle au sommet $\frac{2\pi}{n}$, la hauteur est aussi bissectrice : $B_0B_1 = 2s \sin \frac{\pi}{n}$. Pour $n \geq 7$, $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6}$, donc $\sin \frac{\pi}{n} < \frac{1}{2}$ et $0 < B_0B_1^2 < s^2$, avec $B_0B_1^2$ entier : cela contredit la minimalité de s^2 . **Conclusion** : seuls les carrés ($n = 4$) peuvent avoir tous leurs sommets entiers.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $ABCD$ est direct : $AD = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $D = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(B)$, d'expression $(x; y) \mapsto (-y; x)$ puisque A est l'origine : $\vec{AD} = \rho(\vec{AB})$, et de même pour D' . D'où $D(-b_2; b_1)$, $D'(-c_2; c_1)$ et (centres = milieux des diagonales) $O_1\left(\frac{b_1-b_2}{2}; \frac{b_1+b_2}{2}\right)$, $O_2\left(\frac{c_1-c_2}{2}; \frac{c_1+c_2}{2}\right)$, $M\left(\frac{b_1-c_2}{2}; \frac{b_2+c_1}{2}\right)$, $N\left(\frac{c_1-b_2}{2}; \frac{b_1+c_2}{2}\right)$.
2. $M\vec{O}_2\left(\frac{c_1-b_1}{2}; \frac{c_2-b_2}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\vec{BB'}}$; $O_1\vec{M}\left(\frac{b_2-c_2}{2}; \frac{c_1-b_1}{2}\right) = \boxed{\rho(M\vec{O}_2)}$; $O_2\vec{N}\left(\frac{c_2-b_2}{2}; \frac{b_1-c_1}{2}\right) = \boxed{-O_1\vec{M}}$.
3. $N\vec{O}_2 = O_1\vec{M}$: O_1MO_2N est un parallélogramme, dont deux côtés consécutifs vérifient $O_1\vec{M} = \rho(M\vec{O}_2)$: ils sont égaux et perpendiculaires. C'est donc un carré : O_1MO_2N carré de côté $\frac{1}{2}BB'$ (si $B \neq B'$), de centre le milieu commun de $[O_1O_2]$ et $[MN]$ (théorème de Finsler et Hadwiger, 1937).
4. $O_1(2; 2)$, $O_2\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2}; 3\right)$; $O_1\vec{M}\left(-1; -\frac{1}{2}\right) = \rho\left(-\frac{1}{2}; 1\right) = \rho(M\vec{O}_2)$ ✓, côté $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}BB'$.



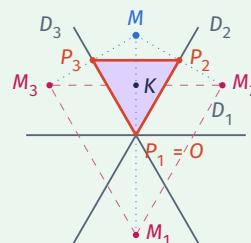
■ Corrigé de l'exercice 65

1. f fixe Ω et conserve les distances : $\Omega M^* = \Omega M$, $\Omega N^* = \Omega N$, $M^*N^* = MN$. Avec $2\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b} - \vec{a}\|^2$: $2\Omega\vec{M}^* \cdot \Omega\vec{N}^* = \Omega M^{*2} + \Omega N^{*2} - M^*N^{*2} = \Omega M^2 + \Omega N^2 - MN^2 = 2\Omega\vec{M} \cdot \Omega\vec{N}$.
2. $\Omega A^* = \Omega A \neq 0$: si $A^* \neq A$, la rotation de centre Ω et d'angle $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega A^*})$ envoie A sur A^* ; si $A^* = A$, on prend $\rho = \text{Id}$. ρ^{-1} est une isométrie, donc $g = \rho^{-1} \circ f$ aussi, et $g(\Omega) = \Omega$, $g(A) = \rho^{-1}(A^*) = A$.
3. On écrit $\Omega g(\vec{M}) = \lambda' \vec{\Omega A} + \vec{w}'$ avec $\vec{w}' \perp \vec{\Omega A}$. La question 1 appliquée à g (avec $N = A$, $g(A) = A$) donne $\lambda' \Omega A^2 = \Omega g(\vec{M}) \cdot \vec{\Omega A} = \vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega A} = \lambda \Omega A^2$, donc $\lambda' = \lambda$; puis $\Omega g(\vec{M})^2 = \Omega M^2$ s'écrit $\lambda^2 \Omega A^2 + \|\vec{w}'\|^2 = \lambda^2 \Omega A^2 + \|\vec{w}\|^2$: $\|\vec{w}'\| = \|\vec{w}\|$. Les vecteurs orthogonaux à $\vec{\Omega A}$ sont colinéaires : $\vec{w}' = \pm \vec{w}$. Or $\Omega s(\vec{M}) = \lambda \vec{\Omega A} - \vec{w}$: $g(\vec{M}) \in \{M, s(M)\}$, et $g(\vec{M}) = M$ si $M \in (\Omega A)$ ($\vec{w} = \vec{0}$).
4. Par l'absurde, supposons $g \neq \text{Id}$ et $g \neq s$: il existe M avec $g(\vec{M}) = s(\vec{M}) \neq M$ et N avec $g(\vec{N}) = N \neq s(\vec{N})$, tous deux hors de (ΩA) . Alors $MN = g(\vec{M})g(\vec{N}) = s(\vec{M})N$: N est sur la médiatrice de $[Ms(M)]$, qui est (ΩA) : contradiction. Donc $g = \text{Id}$ ou $g = s$.

5. $f = \rho \circ g$ vaut ρ ou $\rho \circ s$. Si $\rho = r(\Omega, \theta)$, on la décompose (cours) en $\rho = s_\Delta \circ s$, où Δ passe par Ω avec $((\Omega A), \Delta) \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$: $\rho \circ s = s_\Delta \circ s \circ s = s_\Delta$. **Conclusion** : f est une rotation de centre Ω ou une symétrie d'axe passant par Ω . Une rotation conserve les angles orientés, une symétrie axiale les change en leurs opposés : les isométries fixant Ω et conservant les angles orientés sont les rotations de centre Ω .
6. f et g fixent O ; pour $\vec{MN}(X; Y)$, $f(\vec{M})f(\vec{N})$ a pour coordonnées $(\frac{8X+15Y}{17}; \frac{15X-8Y}{17})$, de carré scalaire $\frac{(64+225)(X^2+Y^2)}{289} = X^2+Y^2$: isométrie, et de même pour g . Les points fixes de f vérifient $15y = 9x$ (les deux équations sont équivalentes) : une droite de points fixes, donc f n'est pas une rotation : $f = s_\Delta$, $\Delta : y = \frac{3}{5}x$. Enfin g s'écrit $(ax - by; bx + ay)$ avec $a^2 + b^2 = 1$: $g = r(O, \theta)$, où $\cos \theta = \frac{8}{17}$ et $\sin \theta = \frac{15}{17}$.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. D'après le cours, $s_{D'} \circ s_D = r(O, 2(D, D'))$ pour deux droites sécantes en O . Ici $2(D_1, D_2) \equiv 2(D_2, D_3) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ et $(D_3, D_1) \equiv -(D_1, D_2) - (D_2, D_3) \equiv -\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$: les trois composées valent $r = r(O, \frac{2\pi}{3})$. Alors $r(M_1) = s_{D_2}(s_{D_1}(M_1)) = s_{D_2}(M) = M_2$, et de même $r(M_2) = M_3$, $r(M_3) = M_1$; $OM_i = OM \neq 0$: $M_1M_2M_3$ équilatéral de centre O .
2. D_i est la médiatrice de $[MM_i]$ (ou $M_i = M \in D_i$) : P_i est le milieu de $[MM_i]$, et $\vec{KP}_i = \vec{OP}_i - \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OM}_i) - \frac{1}{2}\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OM}_i$. Donc $KP_2 = KP_1 = \frac{OM}{2}$ et $(\vec{KP}_1, \vec{KP}_2) \equiv (\vec{OM}_1, \vec{OM}_2) \equiv \frac{2\pi}{3}$: $P_2 = r(K, \frac{2\pi}{3})(P_1)$, et de même pour P_3, P_1 : $P_1P_2P_3$ équilatéral de centre K , de côté $\frac{\sqrt{3}}{2} OM$ ($\sqrt{3}$ fois le rayon $\frac{OM}{2}$).
3. $P_1 = O$; avec $\vec{u}_2(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\vec{u}_3(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ unitaires : $O\vec{P}_2 = (\vec{OM} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 = \sqrt{3}\vec{u}_2$, $P_2(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2})$, $P_3(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2})$; $P_2P_3 = OP_2 = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2$ ✓, et $K(0; 1)$ est à la distance 1 des trois sommets ✓.
4. De même $s_{D_{k+1}} \circ s_{D_k} = r(O, \frac{2\pi}{n})$ et $(D_n, D_1) \equiv -\frac{(n-1)\pi}{n} \equiv \frac{\pi}{n} [\pi]$: $M_{k+1} = r(O, \frac{2\pi}{n})(M_k)$, puis, comme en 2, $P_{k+1} = r(K, \frac{2\pi}{n})(P_k)$: polygone régulier de centre K , de rayon $\frac{OM}{2}$, de côté $2 \times \frac{OM}{2} \sin \frac{\pi}{n} = OM \sin \frac{\pi}{n}$.



Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une partie seulement est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la **page 4**.

Bloc 1 • Angles orientés

- ① $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. $\frac{31\pi}{4} = 8\pi - \frac{\pi}{4}$,
 $-\frac{41\pi}{6} = -6\pi - \frac{5\pi}{6}$.
- ② $-\frac{7\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$. Chasles :
 $\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$; puis $-(\vec{u}, \vec{w})$
 et $\pi + (\vec{u}, \vec{w})$.
- ③ $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. Triangle
 direct : $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC})$;
 $(\vec{AB}, \vec{BC}) \equiv \pi + (\vec{BA}, \vec{BC})$.
- ④ $\theta = -\frac{3\pi}{4}$;
 $\cos(x+\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$,
 $\sin(x+\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$.
 Formules d'addition.

Bloc 2 • Produit scalaire

- ⑤ $0, \sqrt{29}, \sqrt{29}$: rectangle
 isocèle en A. $\vec{AB}(5; 2)$,
 $\vec{AC}(-2; 5)$;
 $5 \times (-2) + 2 \times 5 = 0$.
- ⑥ 60 ; $BC = 13$.
 $8 \times 15 \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; Al-Kashi :
 $BC^2 = 64 + 225 - 120 = 169$.
- ⑦ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$;
 oui ; 0. $\vec{\Omega A}(2; 3)$,
 $\vec{\Omega B}(-3; 2)$: $\Omega B^2 = 13$.
- ⑧ Le cercle de diamètre
 $[AB]$; la perpendiculaire à
 (AB) en A.
 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$ (I
 milieu de $[AB]$).

Bloc 3 • Géométrie

- ⑨ $AH = 3$, $AB = 2\sqrt{3}$,
 $\widehat{BOC} = 120^\circ$. O est le
 centre de gravité :
 $OA = \frac{2}{3}AH$; $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$;
 $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.
- ⑩ $5\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}$; rectangle
 isocèle en O. Diagonales
 de même longueur, de
 même milieu,
 perpendiculaires.
- ⑪ $(0; 5)$, $(-3; 2)$, $(5; -2)$. I
 milieu de $[AA_1]$; on
 échange x et y ; $A + \vec{u}$.
- ⑫ $2x - y - 4 = 0$; $\Omega(2; 0)$;
 $\Omega A = 5$. Milieu $I(4; 4)$,
 normal $\vec{AB}(4; -2)$;
 $\vec{\Omega A}(0; 5)$.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 4 d'abord (rappels de la section 1 compris). **En priorité :** le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 38**, p. 31. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 10), méthodes comprises, puis les pièges (section 12). **En priorité :** le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 31 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 10 en lecture rapide), puis les sections 11 à 13. **En priorité :** le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 • Angles orientés

Relis : les rappels de la section 1, puis les sections 2 et 3 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 23, **exercice 2**, p. 23, **exercice 43**, p. 32 et **exercice 50**, p. 34.

Bloc 2 • Produit scalaire

Relis : les sections 3, 4 et 6 du cours (distances, produit scalaire).
Fais : **exercice 5**, p. 24, **exercice 15**, p. 25, **exercice 39**, p. 31 et **exercice 44**, p. 32.

Bloc 3 • Géométrie

Relis : les exemples de la section 2, puis les sections 5, 7 et 9 du cours.
Fais : **exercice 4**, p. 23, **exercice 7**, p. 24, **exercice 49**, p. 34 et **exercice 55**, p. 35.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Définition et constructions	31 à 36	/ 6	
Thème B · Images de figures	37 à 42	/ 6	
Thème C · Propriétés de conservation	43 à 48	/ 6	
Thème D · Déterminer une rotation	49 à 54	/ 6	
Thème E · Utiliser une rotation	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : *Limites d'une fonction*

Maths Olympiad