

Chapitre 1

Notions de logique

Du niveau de base au niveau concours

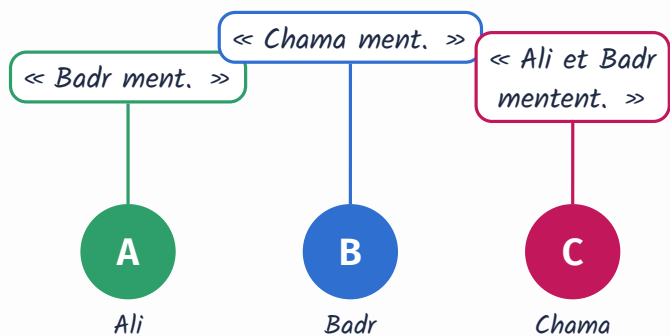
À connaître par cœur

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \iff \bar{Q} \Rightarrow \bar{P} \\ \overline{P \text{ et } Q} \iff \bar{P} \text{ ou } \bar{Q} \end{array}$$

Défi de concours

Trois amis, trois phrases.
Qui ment ? Qui dit vrai ?

Qui dit la vérité ?



Vrai ou faux ? Les tables de vérité tranchent

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	19 Niveau 4 · Concours	27
1 Les propositions	5	20 Connecteurs et tables de vérité	29
2 Négation, conjonction, disjonction	6	21 Quantificateurs	31
3 Implication et équivalence	7	22 Implication et contraposée	32
4 Les lois logiques	8	23 Absurde et disjonction des cas	34
5 Les quantificateurs	10	24 Raisonnement par récurrence	35
6 Nier une proposition quantifiée	11	25 Défis de concours	37
7 Reasonner par équivalences	12	26 Corrigés du niveau 1	39
8 La disjonction des cas	14	27 Corrigés du niveau 2	41
9 Contre-exemple et contraposée	15	28 Corrigés du niveau 3	44
10 Le raisonnement par l'absurde	16	29 Corrigés du niveau 4	46
11 Le raisonnement par récurrence	17	30 Corrigés : connecteurs et tables	49
12 Pour aller plus loin	18	31 Corrigés : quantificateurs	52
13 Les pièges classiques	19	32 Corrigés : implication	55
14 Les astuces des concours	20	33 Corrigés : absurde et disjonction	58
15 L'essentiel du chapitre en une page	22	34 Corrigés : récurrence	60
16 Niveau 1 · Bases	23	35 Corrigés : défis de concours	63
17 Niveau 2 · Bac	24	26 Corrigé du test d'entrée	67
18 Niveau 3 · Approfondissement	26		

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Connecteurs et tables de vérité, Quantificateurs, Implication et contraposée, Absurde et disjonction des cas, Raisonnement par récurrence, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|---|
| ☐ reconnaître une proposition, donner sa valeur de vérité ; | ☐ nier une proposition quantifiée, pas à pas ; |
| ☐ dresser une table de vérité (2, 4 ou 8 lignes) ; | ☐ résoudre par équivalences, sans « $\Leftrightarrow$ » abusif ; |
| ☐ utiliser « non », « et », « ou » inclusif ; | ☐ raisonner par disjonction des cas ; |
| ☐ distinguer réciproque et contraposée ; | ☐ réfuter avec un contre-exemple ; |
| ☐ traduire « il faut », « il suffit » (CN, CS) ; | ☐ rédiger une contraposée ; |
| ☐ démontrer une loi logique (table ou calcul) ; | ☐ raisonner par l'absurde ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) ; |
| ☐ lire et écrire avec $\forall, \exists, \exists!$, dans le bon ordre ; | ☐ rédiger une récurrence (somme, divisibilité, inégalité). |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Fais le point avant le cours : blocs 1 et 2, tes acquis du **tronc commun** ; bloc 3, ton **bon sens logique**, en langage courant. Aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : **page 67**.

Bloc 1 · Calculs et nombres

___ / 4

① **Puissances** (a) Écrire $3^7 \times 9^2 \div 27^3$ sous la forme 3^k . (b) Calculer $(\frac{2}{3})^{-2} \times (\frac{3}{2})^{-3}$.

② **Racines carrées** (a) Simplifier $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$. (b) Écrire $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ sans racine au dénominateur.

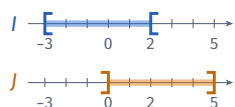
③ **Identités remarquables** (a) Calculer de tête $1001^2 - 999^2$. (b) Factoriser $x^2 + 10x + 25$, puis résoudre $x^2 + 10x + 25 = 0$.

④ **Parité et divisibilité** (a) a, b impairs : $a + b$ est-il pair ? et ab ? (b) Par quels chiffres remplacer $\square$ pour que 9 divise $4\square 5$?

Bloc 2 · Inégalités et intervalles

___ / 4

⑤ **Intervalles** (a) Écrire avec des crochets $/$ et $/$ (ci-contre). (b) Écrire $/ \cap /$ et $/ \cup /$.



⑥ **Valeur absolue** (a) Écrire sans valeur absolue $|\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} - 1|$. (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x - 1| = 5$.

⑦ **Encadrement** On sait que $1 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq -1$. Encadrer (a) $x - y$; (b) xy .

⑧ **Comparer, minorer** (a) Comparer $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$. (b) Écrire $x^2 - 6x + 10 = (x - a)^2 + b$; en déduire que $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout réel x .

Bloc 3 · Bon sens logique

___ / 4

⑨ « Si... alors... » « Si une plante verte reste dans le noir, alors elle ne fabrique pas d'amidon. » Une plante verte (a) fabrique de l'amidon : que conclure ? (b) n'en fabrique pas : est-elle forcément restée dans le noir ?

⑩ « Et », « ou » Parmi les entiers de 1 à 15, lister ceux qui sont (a) impairs **et** multiples de 3 ; (b) premiers **ou** pairs (l'un, l'autre ou les deux).

⑪ **Contre-exemple** Inès affirme : « un entier qui a exactement quatre diviseurs est le produit de deux nombres premiers différents, comme $6 = 2 \times 3$ ou $15 = 3 \times 5$ ». Montrer par un exemple qu'elle a tort.

⑫ **Dire le contraire** Écrire exactement le contraire de (a) « Tous les tubes à essai de la paillasse sont propres » ; (b) « Ce livre coûte entre 50 et 80 DH » (sans « ne... pas »).

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 67**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Les propositions

En physique comme en mathématiques, on énonce des lois et on en tire des conclusions ; la logique donne les règles pour **décider** si un énoncé est vrai et **enchaîner** sans erreur les étapes d'une démonstration.

Définition : proposition, valeur de vérité

Une **proposition** est un énoncé (une phrase, une formule) dont on peut dire, sans ambiguïté, qu'il est **vrai** ou qu'il est **faux** ; il n'est jamais les deux à la fois. Sa **valeur de vérité** est notée **V** (vrai) ou **F** (faux).

proposition	valeur	justification
« 143 est un nombre premier »	F	$143 = 11 \times 13$
« $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$ »	V	$\frac{7}{4} = 1,75$
« $5^3 < 3^5$ »	V	$125 < 243$
« $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$ »	F	$4 + 3 = 7 \neq 5$
« $1,4 < \sqrt{2}$ »	V	$1,4^2 = 1,96 < 2$
« 1 km/h = 3,6 m/s »	F	$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$

Ce ne sont pas des propositions :

- « Factoriser $x^2 - 1$. » (un ordre) ; « Quel temps fera-t-il demain ? » (une question) ;
- « $3x - 6 \geq 0$ » : vraie si $x = 3$, fausse si $x = 0$; tant que x n'est pas choisi, on ne peut pas trancher ;
- « Ce problème est facile. » : un avis, qui change d'une personne à l'autre.

Définition : fonction propositionnelle

Une **fonction propositionnelle** sur un ensemble E est un énoncé $P(x)$ qui contient une **variable** x et qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace x par un élément de E . Elle peut contenir plusieurs variables : $Q(x, y)$, $R(a, b, c)$...

Exemple : trois fonctions propositionnelles

- Sur $\mathbb{R}$, $P(x)$: « $x^2 + 2x \leq 3$ ». $P(1)$ est vraie ($1 + 2 = 3 \leq 3$), $P(-3)$ aussi ($9 - 6 = 3$), mais $P(2)$ est fausse ($4 + 4 = 8 > 3$). Comme $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, $P(x)$ est vraie **exactement** lorsque $-3 \leq x \leq 1$ (le trinôme est négatif entre ses racines).
- **En physique.** Une balle lancée vers le haut depuis le sol, à 10 m/s, a pour altitude $h(t) = 10t - 5t^2 = 5t(2 - t)$ (en m, t en s, avec $g \approx 10 \text{ m/s}^2$) jusqu'à son retour au sol. $M(t)$: « $h(t) > 0$ » est vraie pour $t = 1$ ($h = 5 \text{ m}$), fausse pour $t = 0$ et pour $t = 2$ (la balle est au

sol) ; elle est vraie exactement pour $0 < t < 2$.

- Sur $\mathbb{N}$, $A(n)$: « $3^n \geq 5n + 1$ ». Le tableau ci-contre ne prouve rien pour **tous** les entiers : on **démontrera** $A(n)$ pour tout $n \geq 3$ par récurrence (section 11).

n	0	1	2	3	4	5	6
3^n	1	3	9	27	81	243	729
$5n + 1$	1	6	11	16	21	26	31
$A(n)$	V	F	F	V	V	V	V

Remarque. Un peu d'histoire : d'Aristote à Boole. Au IV^e siècle av. J.-C., **Aristote** étudie les raisonnements valables, comme le **syllogisme** : « tout métal conduit le courant ; or le cuivre est un métal ; donc le cuivre conduit le courant ». Ses textes sont commentés par **Al-Fârâbî** (X^e siècle) et **Ibn Rushd** (Averroès, XII^e siècle, mort à Marrakech). En 1847 et 1854, l'Anglais **George Boole** fait de la logique un **calcul** sur V et F ; en 1938, **Claude Shannon** montre que ce calcul décrit les circuits à interrupteurs (section 2) : l'électronique numérique est née.

2 Négation, conjonction, disjonction

Avec des **connecteurs logiques** (« non », « et », « ou », puis « $\Rightarrow$ » et « $\Leftrightarrow$ » en section 3), on fabrique de nouvelles propositions à partir de $P, Q, \dots$; leur valeur de vérité se lit dans une **table de vérité**, qui passe en revue **tous** les cas possibles.

Définition : négation

La **négation** d'une proposition P est la proposition notée $\bar{P}$ (lue « non P »), qui est **vraie** lorsque P est fausse et **fausse** lorsque P est vraie. De P et $\bar{P}$, une et une seule est vraie.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemples. La négation de « $x \geq 5$ » est « $x < 5$ » (et non « $x \leq 5$ » : le cas $x = 5$ appartient déjà à « $x \geq 5$ »). La négation de « n est un multiple de 7 » est « n n'est pas un multiple de 7 ». « $\sqrt{3} > 2$ » est fausse, donc « $\sqrt{3} \leq 2$ » est vraie.

Définition : conjonction « et », disjonction « ou »

La **conjonction** « P et Q » est vraie lorsque P et Q sont vraies **toutes les deux** ; elle est fausse dans les trois autres cas.

La **disjonction** « P ou Q » est vraie lorsque **l'une au moins** des deux est vraie ; elle n'est fausse que si P et Q sont fausses toutes les deux.

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

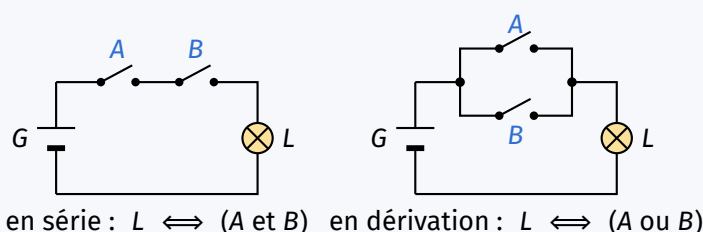
Méthode : Comment dresser une table de vérité

1. Compter les propositions de départ : avec 1, 2 ou 3 propositions, la table a 2, 4 ou 8 lignes.
2. Remplir les premières colonnes dans un **ordre fixe**, pour n'oublier aucun cas : P : **VVFF**, Q : **VFVF** ; avec trois propositions : **VVVFFF**, **VVFFVFFF**, **VFVFVFVF**.
3. Ajouter une colonne par étape du calcul, **de l'intérieur vers l'extérieur** des parenthèses (exemples en section 4).
4. Lire la dernière colonne.

Exemple : « et », « ou » sur des nombres

- « 12 est divisible par 4 et par 6 » est vraie ; « 12 est divisible par 5 et par 6 » est fausse ; « ... par 5 ou par 6 » est vraie. **Un encadrement est une conjonction** : « $7 < \sqrt{50} < 7,1$ » signifie « $7 < \sqrt{50}$ et $\sqrt{50} < 7,1$ » ; elle est vraie, car $49 < 50 < 50,41 = 7,1^2$.
- **Le « ou » mathématique est inclusif** : « 35 est un multiple de 5 ou de 7 » est vraie, alors que 35 est multiple des deux. Ainsi $(x-2)(x+3) = 0 \iff (x = 2 \text{ ou } x = -3)$: un produit est nul lorsque **l'un au moins** de ses facteurs est nul. Et pour tout réel x , « $|x| = x$ ou $|x| = -x$ » est vraie (les deux le sont si $x = 0$).

Intervalles : « $x \in [1, 4]$ et $x \in [3, 6]$ » $\iff x \in [3, 4]$ (intersection) ; « $x \in [1, 4]$ ou $x \in [3, 6]$ » $\iff x \in [1, 6]$ (réunion).

Exemple : logique et circuits électriques (Shannon, 1938)

A : « l'interrupteur A est fermé », B : « l'interrupteur B est fermé », L : « la lampe brille ». En **série**, le courant traverse les deux interrupteurs ; en **dérivation**, un seul suffit, et la lampe brille encore si les deux sont fermés : c'est le « ou » **inclusif**. En codant « fermé » par 1 et « ouvert » par 0, la lampe « vaut » $\min(a, b) = ab$ en série, $\max(a, b)$ en dérivation.

3

Implication et équivalence**Définition : implication**

L'**implication** « $P \Rightarrow Q$ » (lue « P implique Q », ou « si P , alors Q ») est **fausse uniquement** lorsque P est vraie et Q est fausse ; elle est vraie dans les trois autres cas. P est l'**hypothèse**, Q la **conclusion** ; l'implication $Q \Rightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pourquoi une hypothèse fausse donne-t-elle une implication vraie ?

Le règlement d'un lycée dit : « si un élève a au moins 16 de moyenne, alors il reçoit les félicitations ». Il n'est **violé** que par un élève qui a au moins 16 et qui n'est pas félicité (la ligne surlignée). Un élève qui a 12, félicité ou non, ne le contredit pas : lorsque l'hypothèse est fausse, l'implication ne peut pas être prise en défaut ; elle est vraie. Ainsi « $2 + 2 = 5 \Rightarrow \pi > 3$ » et « $2 + 2 = 5 \Rightarrow \pi < 3$ » sont vraies toutes les deux.

Exemple : implications et réciproques

- Pour tout réel x , « $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ » est vraie : si $x > 3$, on multiplie membre à membre $x > 3$ et $x > 3$ (nombres positifs), d'où $x^2 > 9$; si $x \leq 3$, l'hypothèse est fausse. Sa **réciproque** « $x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$ » est fausse pour $x = -4$: $16 > 9$, mais $-4 < 3$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, « n est multiple de 6 $\Rightarrow n$ est multiple de 3 » est vraie ($6k = 3 \times 2k$) ; sa réciproque est fausse : 9 est multiple de 3, pas de 6.

Une implication vraie peut avoir une réciproque fausse : on ne « retourne » jamais une implication sans la démontrer.

Définition : équivalence

L'**équivalence** « $P \Leftrightarrow Q$ » (lue « P si et seulement si Q ») est vraie lorsque P et Q ont la **même** valeur de vérité. Elle a la même table que « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ » : pour démontrer une équivalence, on démontre une implication **et** sa réciproque. Exemple : $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Définition : condition nécessaire, condition suffisante

Lorsque l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, P est une **condition suffisante** (CS) pour Q , et Q est une **condition nécessaire** (CN) pour P . Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour Q .

« $P \Rightarrow Q$ » se dit aussi...

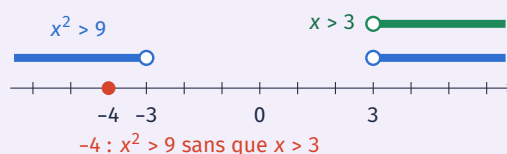
si P , alors Q ; P entraîne Q ; Q dès que P

pour que Q , **il suffit** que P

pour que P , **il faut** que Q

P **seulement si** Q

P est une CS pour Q ; Q est une CN pour P



la zone verte est **dans** la zone bleue :
 $x > 3$ suffit pour que $x^2 > 9$, sans être nécessaire

Exemple : conditions nécessaires, conditions suffisantes

- Pour que $x^2 > 9$, **il suffit** que $x > 3$, mais ce n'est pas nécessaire ($x = -4$). Pour que $x > 3$, **il faut** que $x^2 > 9$.
- Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il faut qu'il soit un losange ; ce n'est pas suffisant (un losange sans angle droit n'est pas un carré).
- Pour que l'entier n soit multiple de 6, il faut **et** il suffit qu'il soit multiple de 2 et de 3 : c'est une CNS.
- En physique.** Si un solide soumis à deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ est en équilibre, alors $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ et les deux forces ont la même droite d'action : conditions **nécessaires**, pas suffisantes. Un palet qui glisse sans frottement sur une glace horizontale subit deux forces qui se compensent (poids, réaction), et pourtant il bouge (mouvement rectiligne uniforme).

4

Les lois logiques

Définition : loi logique, propositions équivalentes

Une **loi logique** (ou **tautologie**) est une proposition construite à partir de $P, Q, R, \dots$, qui est vraie **quelles que soient** les valeurs de vérité de $P, Q, R, \dots$: sa colonne ne contient que des **V**. Deux propositions A et B sont **équivalentes** lorsque « $A \Leftrightarrow B$ » est une loi logique (même colonne) ; on peut alors remplacer l'une par l'autre dans un raisonnement.

Théorème (les lois logiques du programme)

nom	loi (P, Q, R propositions quelconques)	en clair
double négation	$\overline{\overline{P}} \iff P$ tiers exclu : P ou $\overline{P}$ toujours vraie	nier deux fois = affirmer
commutativité	$(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$ $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$	l'ordre ne compte pas
distributivités	$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$ $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$	comme $a(b + c) = ab + ac$
lois de Morgan	$\overline{P \text{ et } Q} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$ $\overline{P \text{ ou } Q} \iff (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$	« non » échange et/ou
implication	$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \text{ ou } Q)$	P fausse ou Q vraie
négation de $P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$	pas une implication
contraposée	$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$	voir la section 9
équivalence	$(P \iff Q) \iff ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$	les deux sens
transitivité	$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (idem avec $\iff$)	enchaîner

Méthode : Comment démontrer une loi avec une table de vérité

1. Écrire les colonnes des propositions de départ (4 ou 8 lignes, dans l'ordre fixe de la section 2). 2. Calculer, colonne par colonne, **chacun des deux membres**. 3. Comparer : si les deux colonnes sont **identiques** ligne par ligne, l'équivalence est une loi logique ; une seule ligne différente suffit pour qu'elle n'en soit pas une.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{P} \text{ ou } Q$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

une table, deux lois : implication et contraposée

P	Q	R	$Q \text{ ou } R$	$P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$	$P \text{ et } Q$	$P \text{ et } R$	$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

la première distributivité : $2^3 = 8$ lignes

Démonstrations par le calcul. On en déduit d'autres lois **sans table**, en remplaçant une proposition par une proposition équivalente :

- **négation d'une implication** : $\overline{P \Rightarrow Q} \iff \overline{\overline{P} \text{ ou } Q} \iff (\overline{\overline{P}} \text{ et } \overline{Q}) \iff (P \text{ et } \overline{Q})$ (implication, Morgan, double négation) ; en remplaçant Q par $\overline{Q}$: $P \Rightarrow \overline{Q} \iff (P \text{ et } Q)$;
- **le raisonnement du détective** : $((P \text{ ou } Q) \text{ et } \overline{P}) \iff ((P \text{ et } \overline{P}) \text{ ou } (Q \text{ et } \overline{P})) \iff (Q \text{ et } \overline{P})$, car $P \text{ et } \overline{P}$ est toujours fausse : si « $P \text{ ou } Q$ » est vraie et si P est fausse, alors Q est vraie (on élimine une piste, il reste l'autre) ;
- **transitivité** : si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies et si P est vraie, la première donne Q vraie, puis la

P	Q	$P \text{ ou } Q$	$\overline{P \text{ ou } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \text{ et } \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

seconde loi de Morgan

Lecture rapide. Dans les quatre lignes où P est fausse, les deux membres sont faux ; dans les quatre lignes où P est vraie, ils valent tous deux Q ou R . On peut souvent **raisonner sur les lignes** au lieu de tout écrire.

seconde R vraie : dès que P est vraie, R l'est, donc $P \Rightarrow R$ est vraie.

Exemple : les lois de Morgan sur des nombres

- « $-2 \leq x \leq 5$ » signifie « $x \geq -2$ et $x \leq 5$ » ; sa négation est « $x < -2$ ou $x > 5$ » : $x \notin [-2, 5] \iff x \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.
- La négation de « $x \leq 0$ ou $x \geq 4$ » est « $x > 0$ et $x < 4$ », soit « $0 < x < 4$ » ; celle de « n est pair et $n > 10$ » est « n est impair ou $n \leq 10$ ».
- La négation de « $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$ » est « $x \geq 2$ et $x^2 < 4$ » : une négation d'implication n'est pas une implication.

5

Les quantificateurs

Définition : les quantificateurs $\forall, \exists, \exists!$

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble E .

- « $\forall x \in E, P(x)$ » se lit « **pour tout** x de $E, P(x)$ » : elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **chaque** élément x de E ($\forall$: quantificateur **universel**).
- « $\exists x \in E, P(x)$ » se lit « **il existe** (au moins) un x de E tel que $P(x)$ » : elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément de E ($\exists$: quantificateur **existantiel**).
- « $\exists! x \in E, P(x)$ » se lit « il existe un **unique** x de E tel que $P(x)$ » : $P(x)$ est vraie pour **exactement un** élément de E .

Exemple : lire, puis décider

proposition	valeur	justification
$\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 \geq 4x$	V	soit $x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 - 4x = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, (x-3)^2 = x^2 - 9$	F	pour $x = 1 : (1-3)^2 = 4$, mais $1 - 9 = -8$
$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 = 0$	F	pour tout réel $x, x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1 > 0$
$\exists n \in \mathbb{N}, 2^n = n^2$	V	$n = 2$ convient : $2^2 = 4 = 2^2$
$\exists! n \in \mathbb{N}, 2^n = n^2$	F	$n = 2$ et $n = 4$ conviennent ($2^4 = 16 = 4^2$) : pas d'unicité
$\exists! x \in \mathbb{R}, 4x^2 - 12x + 9 = 0$	V	$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$
$\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 7$	F	deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$
$\exists! x \in [0, +\infty[, x^2 = 7$	V	seule $\sqrt{7}$ est positive : l'ensemble compte

Méthode : Comment trouver la valeur de vérité d'une proposition quantifiée

« $\forall x \in E, P(x)$ » **vraie** : on écrit « **Soit** $x \in E$ » (x quelconque : on ne le choisit pas) et on démontre $P(x)$. **Fausse** : un seul **contre-exemple** suffit (section 9). « $\exists x \in E, P(x)$ » **vraie** : on **exhibe** un x_0 de E et on vérifie $P(x_0)$. **Fausse** : on démontre que $P(x)$ est fausse pour **tout** x de E . « $\exists!$ » : existence (un exemple) **et** unicité (aucun autre).

Exemple : du français aux symboles

- « Entre deux réels distincts, il y a toujours un autre réel » : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, a < c < b)$. Vraie : si $a < b$, le réel $c = \frac{a+b}{2}$ convient, car $a < \frac{a+b}{2} \iff 2a < a+b \iff a < b$, et de même $\frac{a+b}{2} < b$.
- En physique.** Un mobile a pour vitesse $v(t) = 2t + 3$ (en m/s) à l'instant $t \geq 0$ (en s). « À tout instant, la vitesse est positive » : $\forall t \in [0, +\infty[, v(t) > 0$ (vraie : $2t + 3 \geq 3$). « À un certain instant, la vitesse vaut 10 m/s » : $\exists t \in [0, +\infty[, 2t + 3 = 10$ (vraie : $t = 3,5$ s).

Variable muette. « $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 \geq 4x$ » et « $\forall t \in \mathbb{R}, (t+1)^2 \geq 4t$ » sont la même proposition : une proposition quantifiée ne dépend plus de x , alors que $P(x)$ en dépend.

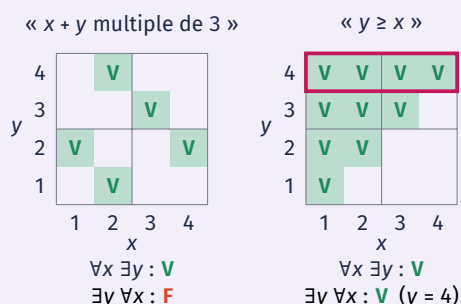
L'ordre des quantificateurs compte

On peut échanger deux quantificateurs **de même nature** : « $\forall x \forall y$ » $\iff$ « $\forall y \forall x$ », « $\exists x \exists y$ » $\iff$ « $\exists y \exists x$ ». On ne peut **pas** échanger $\forall$ et $\exists$: dans « $\forall x, \exists y, \dots$ », y peut **dépendre** de x ; dans « $\exists y, \forall x, \dots$ », le **même** y convient pour tous les x . Ainsi « $\exists y \forall x$ » entraîne « $\forall x \exists y$ », mais pas l'inverse.

Serrures et clés. « Chaque serrure a une clé qui l'ouvre » ($\forall$ serrure, $\exists$ clé) est vraie dans toute maison ; « il existe une clé qui ouvre toutes les serrures » ($\exists$ clé, $\forall$ serrure) décrit un **pass-partout** : c'est beaucoup plus fort.

Sur des nombres. « $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$ » est vraie ($y = \frac{1}{x}$ dépend de x) ; « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ » est fausse : $x = 1$ impose $y = 1$, et alors $x = 2$ donne $xy = 2 \neq 1$.

Sur une grille (x et y dans $\{1, 2, 3, 4\}$, cases **V** colorées) : « $\forall x \exists y$ » signifie que chaque **colonne** contient une case colorée ; « $\exists y \forall x$ », qu'une **ligne** est entièrement colorée.



6

Nier une proposition quantifiée

Négation des quantificateurs

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \iff (\exists x \in E, \overline{P(x)})$$

$$\overline{\exists x \in E, P(x)} \iff (\forall x \in E, \overline{P(x)})$$

Justification. « $\forall x \in E, P(x)$ » est fausse exactement lorsque $P(x)$ est fausse pour **au moins un** x de E ; « $\exists x \in E, P(x)$ » est fausse exactement lorsque $P(x)$ est fausse pour **tous** les x de E . $\square$

Méthode : Comment nier une proposition, pas à pas

- Découper** : repérer les quantificateurs (avec leurs ensembles) et la **partie finale**, sans quantificateur.
- Échanger** : chaque $\forall$ devient $\exists$, chaque $\exists$ devient $\forall$; **l'ordre et les ensembles ne changent pas** (« $\forall x \in]0, +\infty[$ » devient « $\exists x \in]0, +\infty[$ »).
- Nier la fin** avec le tableau.
- Contrôler** : de la proposition et de sa négation, une et une seule est vraie ;

trouver laquelle confirme le travail.

proposition	négation	proposition	négation
$a = b$	$a \neq b$	$P \text{ et } Q$	$\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$
$a < b$	$a \geq b$	$P \text{ ou } Q$	$\overline{P} \text{ et } \overline{Q}$
$a \geq b$	$a < b$	$P \Rightarrow Q$	$P \text{ et } \overline{Q}$
$a \leq x \leq b$	$x < a \text{ ou } x > b$	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } Q)$
$ x < r$	$ x \geq r$	« tous »	« au moins un... ne... pas »
n est pair	n est impair	« aucun »	« au moins un »

Exemple : six négations, de la plus simple à la plus difficile

	proposition P	négation $\overline{P}$	qui est vraie ?
1	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x - 1$	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x - 1$	P : $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
2	$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n = 12$	$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n \neq 12$	P : $n = 3$ ($9 + 3 = 12$)
3	$\forall x \in \mathbb{R}, (x < 1 \Rightarrow x^2 < 1)$	$\exists x \in \mathbb{R}, (x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1)$	P : si $ x < 1$, $x^2 = x \times x \leq x < 1$
4	$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+, y < x$	$\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, y \geq x$	P : $y = \frac{x}{2}$ convient (pas de plus petit réel > 0)
5	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x < y \text{ et } x^2 \geq y^2)$	$\overline{P}$: $x = -3, y = 1$: $-3 < 1$ et $9 \geq 1$
6	$\exists! x \in \mathbb{R}, x - 1 = 2$	aucun réel ne convient, ou au moins deux	$\overline{P}$: -1 et 3 conviennent

Exemple : nier en français

- « Tous les trains sont arrivés à l'heure » $\rightarrow$ « Au moins un train est arrivé en retard » (et non « tous sont en retard ») ; « Il existe un élève qui a eu 20 » $\rightarrow$ « Aucun élève n'a eu 20 » ; « Chaque jour, au moins un élève est absent » $\rightarrow$ « Il existe un jour où aucun élève n'est absent ».
- **En physique.** « Tous les métaux sont attirés par un aimant » $\rightarrow$ « Il existe un métal qui n'est pas attiré par un aimant » : c'est la **négation** qui est vraie (le cuivre, l'aluminium ; le fer, le nickel, le cobalt sont attirés).

7

Raisonner par équivalences

Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on enchaîne $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$: par **transitivité**, $P \Leftrightarrow Q$. Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on la transforme par équivalences jusqu'à une proposition **connue pour être vraie** ; pour résoudre une équation, on la transforme jusqu'à « $x = \dots$ ».

Méthode : raisonner par équivalences successives : $\Leftrightarrow$ ou seulement $\Rightarrow$?

Chaque « $\Leftrightarrow$ » doit pouvoir se lire **dans les deux sens** ; un seul « $\Rightarrow$ » dans la chaîne, et l'on n'a démontré qu'une implication. « $\Leftrightarrow$ » ne s'écrit pas à la place de « donc ».

Ces opérations donnent $\Leftrightarrow$: ajouter un même nombre aux deux membres ; multiplier par un réel **non nul** (pour une inégalité : **strictement positif**, ou strictement négatif en changeant le sens) ; développer, factoriser ; $AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$; pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ et $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ (en physique, pour une vitesse $v \geq 0$: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$).

Celles-ci ne donnent que $\Rightarrow$: élever au carré des membres de signe **inconnu** ($-2 \neq 2$, mais $4 = 4$) ; multiplier ou diviser par une expression dont on ignore le **signe** ou qui peut **s'annuler**. On écrit alors « $\Rightarrow$ » et l'on **vérifie** les candidats à la fin, ou l'on ajoute les conditions qui rétablissent l'équivalence.

Exemple : une inégalité de physique : deux résistances en dérivation

Deux conducteurs ohmiques de résistances $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ montés en dérivation équivalent à une résistance $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Montrons que $R \leq \frac{R_1 + R_2}{4}$. Comme $4(R_1 + R_2) > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \leq \frac{R_1 + R_2}{4} &\Leftrightarrow 4R_1 R_2 \leq (R_1 + R_2)^2 && \text{(on multiplie par } 4(R_1 + R_2) > 0) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq R_1^2 - 2R_1 R_2 + R_2^2 && \text{(on développe, on retranche } 4R_1 R_2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (R_1 - R_2)^2. && \text{(identité remarquable)} \end{aligned}$$

La dernière proposition est vraie, donc la première aussi. **Égalité** si et seulement si $R_1 = R_2$: avec $R_1 = R_2 = 100 \, \Omega$, $R = 50 \, \Omega$; avec $R_1 = 100 \, \Omega$ et $R_2 = 300 \, \Omega$, $R = 75 \, \Omega < 100 \, \Omega$.

Exemple : une équation avec une racine carrée : $\sqrt{2x+6} = x+1$

Faux : « $\sqrt{2x+6} = x+1 \Leftrightarrow 2x+6 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow (x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5})$ ». Or $-\sqrt{5}$ ne convient pas : $x+1 = 1 - \sqrt{5} < 0$, alors qu'une racine carrée est positive. Le premier « $\Leftrightarrow$ » est faux : on a élevé au carré un membre, $x+1$, de signe inconnu.

Juste : une racine carrée est positive, et pour deux réels positifs, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$:

$$\sqrt{2x+6} = x+1 \Leftrightarrow (x+1 \geq 0 \text{ et } 2x+6 = (x+1)^2) \Leftrightarrow (x \geq -1 \text{ et } x^2 = 5) \Leftrightarrow x = \sqrt{5},$$

car $-\sqrt{5} < -1$. (La condition $2x+6 \geq 0$ est automatique, puisque $2x+6 = (x+1)^2$.) **Contrôle :** $(\sqrt{5}+1)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$: $S = \{\sqrt{5}\}$.

Exemple : une inéquation : $\frac{x+4}{x-1} \geq 2$

Faux : « $\frac{x+4}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow x+4 \geq 2(x-1) \Leftrightarrow x \leq 6$ » : on a multiplié par $x-1$, dont le signe est inconnu. Pour $x = 0$: $\frac{4}{-1} = -4 < 2$; 0 n'est pas solution, bien que $0 \leq 6$.

Juste : pour $x \neq 1$, on se ramène à l'étude d'un **signe** :

$$\frac{x+4}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{x-1} \geq 0.$$

Le quotient s'annule en 6, n'est pas défini en 1, et a le signe de $(6-x)(x-1)$, positif entre 1 et 6 : $S =]1, 6]$.

8

La disjonction des cas

Principe du raisonnement par disjonction des cas

Pour démontrer une proposition R , on découpe la situation en **cas** $C_1, C_2, \dots, C_k$ qui **couvrent toutes les possibilités** (« C_1 ou C_2 ou ... ou C_k » est vraie), puis on démontre R dans **chacun** des cas. C'est la loi logique $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$.

Méthode : Comment choisir et rédiger les cas

Parité : $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$. **Restes dans la division par 3** : $n = 3k, 3k + 1$ ou $3k + 2$. **Signe** : $x \geq 0$ ou $x < 0$. **Valeur absolue** : on découpe $\mathbb{R}$ là où l'expression s'annule. **Rédaction** : « Distinguons deux cas. », un paragraphe par cas, puis « Les cas couvrent toutes les possibilités, donc... ». Pour une équation, on **vérifie** à la fin de chaque cas que les solutions trouvées respectent la condition du cas.

Exemple : parité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3n^2 + 5n + 4$ est pair

Soit $n \in \mathbb{N}$. **1^{er} cas** : n est pair ; $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $3n^2 + 5n + 4 = 12k^2 + 10k + 4 = 2(6k^2 + 5k + 2)$: pair. **2^e cas** : n est impair ; $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $3n^2 + 5n + 4 = 3(4k^2 + 4k + 1) + 10k + 5 + 4 = 12k^2 + 22k + 12 = 2(6k^2 + 11k + 6)$: pair. Les deux cas couvrent $\mathbb{N}$: $3n^2 + 5n + 4$ est **toujours pair** (par exemple $3 \times 49 + 35 + 4 = 186$ pour $n = 7$).

Exemple : signe, en trois cas : pour tout réel x , $x^4 - x + 1 > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. **Cas** $x \leq 0$: $x^4 \geq 0$ et $-x \geq 0$, donc $x^4 - x + 1 \geq 1 > 0$. **Cas** $0 < x < 1$: $x^4 > 0$ et $1 - x > 0$, donc $x^4 + (1 - x) > 0$. **Cas** $x \geq 1$: $x^3 \geq 1$, donc $x^4 = x \times x^3 \geq x$ (on multiplie par $x > 0$), et $x^4 - x + 1 \geq 1 > 0$. Les trois cas couvrent $\mathbb{R}$: $x^4 - x + 1 > 0$ pour tout réel x . Chaque cas est facile, alors qu'un calcul direct (forme canonique) ne l'est pas.

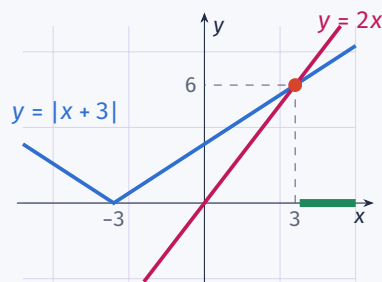
Exemple : valeur absolue : résoudre $|x + 3| = 2x$, puis $|x + 3| < 2x$

On a $|x + 3| = x + 3$ si $x \geq -3$ et $|x + 3| = -x - 3$ si $x < -3$: on découpe $\mathbb{R}$ en -3 .

Cas $x \geq -3$: $x + 3 = 2x \Leftrightarrow x = 3$, et $3 \geq -3$: **solution**.

Cas $x < -3$: $-x - 3 = 2x \Leftrightarrow x = -1$, mais -1 ne vérifie pas $x < -3$: **rejeté**. Donc $S = \{3\}$.

L'inéquation. Cas $x \geq -3$: $x + 3 < 2x \Leftrightarrow x > 3$, d'où $]3, +\infty[$; cas $x < -3$: $-x - 3 < 2x \Leftrightarrow x > -1$, impossible avec $x < -3$. Donc $S =]3, +\infty[$: sur la figure, la droite $y = 2x$ passe **au-dessus** du « V » de $y = |x + 3|$ exactement pour $x > 3$.



Exemple : restes : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $n(n+1)(2n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$; selon son reste dans la division par 3, il y a trois cas ($k \in \mathbb{N}$). $n = 3k$: le facteur n est multiple de 3. $n = 3k + 1$: $2n + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$. $n = 3k + 2$: $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$. Dans chaque cas, **un** des facteurs est multiple de 3, donc le produit aussi (par exemple $5 \times 6 \times 11 = 330 = 3 \times 110$).

9

Contre-exemple et contraposée

Le contre-exemple

Comme $\overline{\forall x \in E, P(x)} \iff (\exists x \in E, \overline{P(x)})$, pour démontrer que « $\forall x \in E, P(x)$ » est **fausse**, il suffit d'exhiber **un seul** élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse : c'est un **contre-exemple**. Pour « $\forall x \in E, (A(x) \Rightarrow B(x))$ », un contre-exemple vérifie $A(x_0)$ mais pas $B(x_0)$.

Méthode : Comment chercher un contre-exemple

Essayer des valeurs simples (0, 1, -1, 2, $\frac{1}{2}$), des nombres négatifs, de grands nombres ; se demander **pourquoi** la propriété pourrait échouer (un signe, un carré, un double produit oublié) ; **vérifier** que le candidat respecte toutes les hypothèses. Des milliers d'exemples ne démontrent jamais un « $\forall$ » ; un seul contre-exemple le réfute.

Exemple : quatre propositions fausses

- « $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a + b)^2 = a^2 + b^2$ » : pour $a = b = 1$, $(1 + 1)^2 = 4$ mais $1^2 + 1^2 = 2$ (on a oublié $2ab$).
- « Pour tous réels a, b : si $a^2 < b^2$, alors $a < b$ » : pour $a = 1$ et $b = -2$, $1 < 4$, mais $1 > -2$.
- « Les nombres 31, 331, 3 331, 33 331, ... sont tous premiers » : c'est vrai pour les **sept** premiers (jusqu'à 33 333 331), et pourtant $333\,333\,331 = 17 \times 19\,607\,843$.
- **En physique**. « Plus un corps est lourd, plus il tombe vite » (Aristote) : dans un tube vidé de son air (tube de Newton), une plume et une bille de plomb tombent ensemble. **Une seule** expérience contraire suffit à réfuter une loi ; mille expériences conformes ne la démontrent pas.

Le raisonnement par contraposée

Les implications $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ sont équivalentes (section 4) : pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on peut démontrer sa **contraposée**, c'est-à-dire supposer $\overline{Q}$ et en déduire $\overline{P}$. On l'utilise lorsque la conclusion est **négative** (« $\neq$ », « n'est pas », « impair ») : sa négation est **positive** (une égalité, une écriture $n = 2k + 1$), bien plus facile à exploiter.

Méthode : Comment rédiger une contraposée

1. Repérer l'hypothèse P et la conclusion Q .
2. Écrire $\overline{Q}$ et $\overline{P}$ (section 6).
3. Annoncer : « **Raisonnons par contraposée : supposons $\overline{Q}$ et montrons $\overline{P}$.** »
4. Démontrer $\overline{P}$.
5. Conclure : « Par contraposée, si P , alors Q . »

Exemple : rédaction modèle : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair

Repérage : P : « n^2 est pair », Q : « n est pair » ; donc $\overline{Q}$: « n est impair », $\overline{P}$: « n^2 est impair ». Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par contraposée : supposons que n est impair et montrons que n^2 est impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$: n^2 est impair. Par contraposée, si n^2 est pair, alors n est pair. $\square$

Comme réciproquement $(2k)^2 = 2 \times 2k^2$ est pair, on retient : $n^2 \text{ pair} \iff n \text{ pair}$ (et donc $n^2 \text{ impair} \iff n \text{ impair}$).

Autre exemple : soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$; si $a \neq b$, alors $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. Raisonnons par contraposée : supposons $\sqrt{a} = \sqrt{b}$; en élevant au carré, $a = b$. Une égalité s'exploite mieux qu'une différence !

Attention, piège ! contraposée ou réciproque ?

nom	énoncé (pour un réel x)	valeur
implication $P \Rightarrow Q$	si $x > 3$, alors $x^2 > 9$	V
contraposée $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$	si $x^2 \leq 9$, alors $x \leq 3$	V
réciproque $Q \Rightarrow P$	si $x^2 > 9$, alors $x > 3$	F ($x = -4$)
contraposée de la réciproque $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$	si $x \leq 3$, alors $x^2 \leq 9$	F ($x = -4$)

Une implication et sa contraposée ont **toujours** la même valeur de vérité ; la réciproque, non.

10

Le raisonnement par l'absurde

Principe

Pour démontrer une proposition P , on **suppose que $\bar{P}$ est vraie** et l'on en déduit une **contradiction** : une proposition à la fois vraie et fausse (comme « $3 = -2$ », ou « k est pair et impair »). Donc $\bar{P}$ est fausse : P est vraie. *Justification* : si $\bar{P} \Rightarrow (R \text{ et } \bar{R})$ est vraie, comme R et $\bar{R}$ est fausse, $\bar{P}$ est fausse.

Méthode : Comment rédiger un raisonnement par l'absurde

1. Annoncer : « **Raisonnons par l'absurde et supposons que...** » (on écrit $\bar{P}$ en clair). 2. Traduire cette hypothèse par des écritures utilisables ($n = 2k$, $x = \frac{p}{q}$...). 3. Calculer, déduire... 4. jusqu'à une contradiction, que l'on signale : « c'est absurde, car... ». 5. Conclure : « L'hypothèse est fausse ; donc P est vraie. »

Échauffement : il n'existe pas de plus grand entier pair. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un plus grand entier pair N . Alors $N + 2$ est pair et $N + 2 > N$: c'est absurde, puisque N est le plus grand. Il n'existe donc pas de plus grand entier pair.

Théorème

$\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration (rédaction modèle ; les numéros sont ceux de la méthode). [1] Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. [2] Comme $\sqrt{2} > 0$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction $\frac{p}{q}$ **irréductible** : p et q ne sont pas tous les deux pairs. [3] En élevant au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair (section 9) ; écrivons $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair. [4] Ainsi p et q sont tous les deux pairs : c'est absurde, car $\frac{p}{q}$ est irréductible. [5] L'hypothèse est fausse : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Conséquence : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ est irrationnel ; sinon $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$ serait rationnel (quotient de deux rationnels), ce qui est absurde.

Exemple : deux autres raisonnements par l'absurde

- 1. Pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$: $\frac{4x+3}{2x-1} \neq 2$.** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $\frac{4x+3}{2x-1} = 2$. Alors $4x + 3 = 2(2x - 1) = 4x - 2$, d'où $3 = -2$: c'est absurde.
- 2. Un triangle n'a jamais deux angles obtus.** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un triangle ABC ait deux angles obtus : $\hat{A} > 90^\circ$ et $\hat{B} > 90^\circ$. Alors $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$, donc $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} < 0^\circ$: c'est absurde.

Remarque. Contraposée ou absurde ? La contraposée démontre une **implication** $P \Rightarrow Q$, avec un but **précis** : $\bar{P}$. L'absurde démontre **n'importe quelle** proposition (souvent « il n'existe pas », « n'est pas rationnel ») ; le but est une contradiction **quelconque**, que l'on ne connaît pas à l'avance.

11

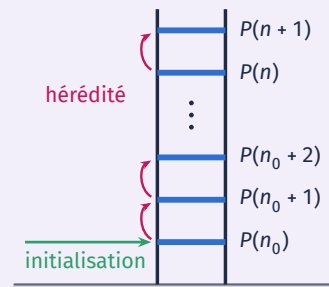
Le raisonnement par récurrence

Théorème (principe de récurrence)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour les entiers $n \geq n_0$. Si (**initialisation**) $P(n_0)$ est vraie, et si (**hérédité**) pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.

L'image de l'échelle. Si l'on peut monter sur le premier barreau (**initialisation**) et passer de **n'importe quel** barreau au suivant (**hérédité**), on atteint **tous** les barreaux. Sans le premier barreau, ou sans le passage d'un barreau au suivant, on reste au sol : les deux étapes sont indispensables (voir le piège en fin de section).

Vocabulaire. n_0 est le **rang initial** ; dans l'hérédité, « $P(n)$ est vraie » est l'**hypothèse de récurrence**, et « $P(n+1)$ est vraie » est le **but**.



Méthode : Comment rédiger une récurrence

Pour tout entier $n \geq n_0$, notons $P(n)$ la proposition « ... ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Initialisation. Pour $n = n_0$: on calcule **séparément** les deux membres... donc $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq n_0$ un entier. Supposons que $P(n)$ est vraie (**hypothèse de récurrence**) et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que « ... » [on écrit le but en entier]. ... [calcul qui utilise l'hypothèse de récurrence] ... Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Conseils : signaler l'endroit où sert l'hypothèse de récurrence ; écrire « supposons $P(n)$ vraie pour **un** entier n », jamais « pour tout n » (ce serait supposer ce que l'on veut démontrer).

Exemple : une somme : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Le n -ième nombre impair est $2n - 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$: « $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 1, celui de droite $1^2 = 1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n + 1)$: « $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ ». D'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 ;$$

$P(n + 1)$ est vraie. **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Application : $1 + 3 + \dots + 99 = 50^2 = 2500$ (ici $2n - 1 = 99$, $n = 50$).



$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
chaque équerre ajoute
le nombre impair suivant

Exemple : une divisibilité : 7 divise $9^n - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $7 \mid 9^n - 2^n$ ». **Initialisation.** $9^0 - 2^0 = 0 = 7 \times 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie : il existe un entier k tel que $9^n - 2^n = 7k$. Montrons $P(n + 1)$: « $7 \mid 9^{n+1} - 2^{n+1}$ ». On fait **apparaître l'hypothèse** en ajoutant et en retranchant 9×2^n :

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 9 \times 9^n - 2 \times 2^n = 9(9^n - 2^n) + 9 \times 2^n - 2 \times 2^n = 9 \times 7k + 7 \times 2^n = 7(9k + 2^n),$$

et $9k + 2^n$ est un entier : $P(n + 1)$ est vraie. **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 9^n - 2^n$ (par exemple $81 - 4 = 77 = 7 \times 11$).

Exemple : une inégalité à partir d'un rang : $3^n \geq 5n + 1$ pour tout entier $n \geq 3$

Pour $n \geq 3$, notons $P(n)$: « $3^n \geq 5n + 1$ ». **Initialisation.** $3^3 = 27 \geq 16 = 5 \times 3 + 1$: $P(3)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 3$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n + 1)$: « $3^{n+1} \geq 5n + 6$ ». D'après l'hypothèse de récurrence, $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(5n + 1) = 15n + 3$. Or $(15n + 3) - (5n + 6) = 10n - 3 \geq 27 > 0$, car $n \geq 3$. Donc $3^{n+1} \geq 15n + 3 > 5n + 6$: $P(n + 1)$ est vraie. **Conclusion.** $3^n \geq 5n + 1$ pour tout $n \geq 3$ (le tableau de la section 1 montre que le rang 3 est nécessaire : $P(1)$ et $P(2)$ sont fausses).

Attention, piège ! l'hérédité seule ne prouve rien

Soit $P(n)$: « 9 divise $10^n + 1$ ». L'hérédité est vraie : si $10^n + 1 = 9k$, alors $10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 9 = 9(10k - 1)$. Mais $P(0)$ est fausse ($10^0 + 1 = 2$), et $P(n)$ est fausse pour **tout** n : $10^n - 1 = 99 \dots 9$ est divisible par 9, donc $10^n + 1 = (10^n - 1) + 2$ a pour reste 2 dans la division par 9. **Sans initialisation, pas de récurrence.**

12

Pour aller plus loin

Méthode : Quel raisonnement choisir ?

dans l'énoncé...	on essaie...	première phrase sur la copie
« Résoudre », « montrer que $A \iff B$ »	les équivalences successives	« Pour tout réel x : ... $\iff$... $\iff$... »
valeur absolue, parité, restes, signe	la disjonction des cas	« Distinguons deux cas : ... »
« Est-il vrai que pour tout... ? » (et l'on s'en méfie)	le contre-exemple	« C'est faux : pour $x = \dots$, on a ... »
conclusion négative : « $\neq$ », « n'est pas », « impair »	la contraposée	« Raisonnons par contraposée : supposons... »
« il n'existe pas », « irrationnel », « l'un au moins »	l'absurde	« Raisonnons par l'absurde et supposons que... »
« pour tout entier $n \geq n_0$ » (somme, divisibilité, inégalité)	la récurrence	« Pour $n \geq n_0$, notons $P(n)$: ... »

Énigme 1 : les trois lampes. Dans un montage, on sait que : (1) si la lampe L_1 brille, alors L_2 brille ; (2) L_1 ou L_3 brille ; (3) L_2 ne brille pas. Quelles lampes brillent ? *Solution.* D'après (3), $\overline{L_2}$ est vraie ; la contraposée de (1), $\overline{L_2} \Rightarrow \overline{L_1}$, donne $\overline{L_1}$: L_1 est éteinte. Alors (2) et $\overline{L_1}$ donnent L_3 (le raisonnement du détective, section 4) : **seule L_3 brille**, et l'on vérifie que (1), (2), (3) sont alors vraies.

Énigme 2 : les trois boîtes. Trois boîtes portent les étiquettes « pommes », « oranges » et « mélange », et **les trois étiquettes sont fausses**. En tirant un seul fruit d'une seule boîte, comment rétablir les étiquettes ? *Solution.* On tire dans la boîte « mélange » : son étiquette est fausse, elle ne contient qu'une sorte de fruit. Si l'on tire une pomme, ce sont les pommes ; la boîte « oranges », qui ne contient ni des oranges seules, ni les pommes, est le mélange ; la boîte « pommes » contient les oranges (de même si l'on tire une orange). Dans une autre boîte, le tirage ne suffit pas : dans la boîte « pommes », une orange peut venir des oranges ou du mélange.

Exemple : logique et sciences physiques

- **Loi d'Ohm.** Pour un conducteur ohmique de résistance $R > 0$, $U = RI$. « Si la tension U augmente, alors l'intensité I augmente » est vraie ($I = \frac{U}{R}$) ; sa contraposée : « si l'intensité n'augmente pas, alors la tension n'a pas augmenté ». Ici la réciproque est vraie aussi : « U augmente » $\iff$ « I augmente ».
- **Principe d'inertie** (référentiel galiléen). « Si les forces qui s'exercent sur un solide se compensent, alors son centre d'inertie est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. » On l'utilise surtout par **contraposée** : si le centre d'inertie n'est ni au repos ni en mouvement rectiligne uniforme (virage, freinage, satellite en orbite), alors les forces ne se compensent pas.
- **Condition nécessaire.** Pour qu'une lampe brille, il faut que le circuit soit fermé ; ce n'est pas suffisant (il faut aussi un générateur et une lampe en bon état).

13

Les pièges classiques

X Faux	✓ Vrai
la négation de « $0 < x < 1$ » est « $x \leq 0$ et $x \geq 1$ »	c'est « $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ » (Morgan) ; « $x \leq 0$ et $x \geq 1$ » est impossible
la négation de « tous les élèves sont présents » est « tous sont absents »	c'est « au moins un élève est absent »
la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \leq 0$ »	c'est « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x \leq 0$ », vraie avec $x = -\frac{1}{2}$
la négation de « si $x > 3$, alors $x^2 > 9$ » est « si $x \leq 3$, alors $x^2 \leq 9$ »	c'est « $x > 3$ et $x^2 \leq 9$ » : la négation d'une implication n'est pas une implication
la contraposée de « $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ » est « $x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$ »	c'est la réciproque (fausse, $x = -4$) ; la contraposée est « $x^2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$ » (vraie)
« $P \Rightarrow Q$ » est vraie, donc Q est vraie	il faut aussi que P soit vraie : « $2 + 2 = 5 \Rightarrow \pi < 3$ » est vraie, $\pi < 3$ ne l'est pas
en mathématiques, « ou » exclut le cas où les deux sont vraies	« ou » est inclusif : « 35 est multiple de 5 ou de 7 » est vraie
« $\forall x \exists y$ » et « $\exists y \forall x$ », c'est pareil	l'ordre compte : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$ est vraie, $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ est fausse
$\sqrt{2x+6} = x+1 \iff 2x+6 = (x+1)^2$	seulement « $\Rightarrow$ » ; il faut ajouter $x+1 \geq 0$ ($-\sqrt{5}$ est une solution parasite)
« c'est vrai pour 31, 331, ..., 33 333 331, donc c'est toujours vrai »	des exemples ne prouvent pas un « $\forall$ » : $333\,333\,331 = 17 \times 19\,607\,843$
« l'hérédité est prouvée, donc $P(n)$ est vraie pour tout n »	sans initialisation, rien n'est prouvé : « $9 \mid 10^n + 1$ » est héréditaire et toujours fausse
hérédité : « supposons $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ »	« supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ » : sinon, on suppose ce qu'on veut démontrer

14

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : nier mécaniquement, de gauche à droite

Le « non » traverse la phrase de gauche à droite : $\forall \leftrightarrow \exists$, « et » $\leftrightarrow$ « ou », $= \leftrightarrow \neq$, $< \leftrightarrow \geq$; il ne touche **ni aux ensembles**, **ni à l'ordre des quantificateurs**, **ni à l'hypothèse** d'une implication ($A \Rightarrow B$ devient A et $\bar{B}$). **Exemple** : P : « $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0))$ ». $\bar{P}$: « $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2 = 0 \text{ et } (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0))$ » (c'est P qui est vraie).

★ Astuce de concours : contraposer quand la conclusion est négative

Soient x, y réels : si $x \neq 2$ et $y \neq 3$, alors $xy - 3x - 2y + 6 \neq 0$. Deux « $\neq$ » : on contrapose (Morgan) : « si $xy - 3x - 2y + 6 = 0$, alors $x = 2$ ou $y = 3$ ». Or $xy - 3x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 3)$, et un produit nul a un facteur nul.

★ **Astuce de concours : la parité règle un QCM en dix secondes**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + 7n + 3$ est : (a) pair ; (b) impair ; (c) tantôt pair, tantôt impair.

Réponse (b). $n^2 + 7n = n(n + 7)$: si n est pair, ce produit est pair ; si n est impair, $n + 7$ est pair. Donc $n(n + 7)$ est pair et $n^2 + 7n + 3$ impair : $n^2 + 7n + 3 = 2026$ n'a aucune solution entière.

★ **Astuce de concours : une inégalité par récurrence : suivre les opérations**

Soit $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour $n \geq 1$ ($u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,848$). Montrons que $0 < u_n < 2$ pour tout $n \geq 1$. **Initialisation** : $0 < \sqrt{2} < 2$. **Hérédité** : si $0 < u_n < 2$, alors $2 < 2 + u_n < 4$, et comme la racine carrée est strictement croissante, $0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$. L'astuce : appliquer à l'hypothèse **les opérations qui fabriquent** u_{n+1} (ajouter 2, puis prendre la racine carrée), qui conservent l'ordre.

★ **Astuce de concours : QCM de logique des concours (médecine, ENSA, ENSAM)**

- La table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$ ou $(R \text{ et } S)$ compte : (a) 4 ; (b) 8 ; (c) 16 lignes. **(c)** : quatre propositions, $2^4 = 16$ lignes.
- P vraie, Q fausse : $(\bar{P} \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q)$ est (a) vraie ; (b) fausse. **(a)** : deux membres faux, et $\mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ est vraie.
- La négation de « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, nx > 1$ » est : (a) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists n \in \mathbb{N}, nx \leq 1$; (b) $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, nx \leq 1$; (c) $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, nx \leq 1$. **(b)**.
- Pour un réel x , « $x^2 = 1$ » est, pour « $x = 1$ », une condition : (a) nécessaire ; (b) suffisante ; (c) nécessaire et suffisante. **(a)** : $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, mais $x = -1$ réfute la réciproque.

★ **Astuce de concours : la ligne dangereuse**

$A \Rightarrow B$ n'est fausse que si A est vraie et B fausse : pour prouver que c'est une loi logique, on montre que ce cas est **impossible**. **Exemple** : $((P \Rightarrow Q) \text{ et } \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P}$. Si $\bar{P}$ était fausse, P serait vraie ; l'hypothèse impose Q fausse, donc $P \Rightarrow Q$ ($\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{F}$) est fausse, et l'hypothèse aussi : le cas dangereux n'arrive jamais.

★ **Astuce de concours : l'absurde pour « l'un au moins »**

Si $a + b + c = 7$, alors l'un au moins des réels a, b, c est supérieur ou égal à $\frac{7}{3}$. Par l'absurde : si $a < \frac{7}{3}$, $b < \frac{7}{3}$ et $c < \frac{7}{3}$ (la négation de « l'un au moins » est « tous »), alors $a + b + c < 7$: contradiction. **En physique** : sur cinq mesures d'une durée, de moyenne 2,4 s, l'une au moins dure 2,4 s ou plus.

15

L'essentiel du chapitre en une page

Les connecteurs

P	Q	$\bar{P}$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

n propositions : 2^n lignes, dans l'ordre **VVFF** / **VFVF**.

« ou » est **inclusif** ; « $P \Rightarrow Q$ » n'est fausse que si P est vraie et Q fausse.

Réciproque de $P \Rightarrow Q$: $Q \Rightarrow P$; contraposée : $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Condition nécessaire, condition suffisante

Si $P \Rightarrow Q$: pour que Q , **il suffit** que P (P est une CS) ; pour que P , **il faut** que Q (Q est une CN).
 $P \Leftrightarrow Q$: CNS, « si et seulement si ».

Les lois logiques

$\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$ P ou $\bar{P}$ toujours vraie
 $\overline{P \text{ et } Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ ou } \bar{Q}$ $\overline{P \text{ ou } Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ et } \bar{Q}$
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$ $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{Q})$
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$
 $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$
 $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
 $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
 $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
 $((P \text{ ou } Q) \text{ et } \bar{P}) \Rightarrow Q$ (on élimine une piste)

Les quantificateurs

$\forall$: pour tout ; $\exists$: il existe au moins un ; $\exists!$: il existe un unique.

$\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \bar{P}(x)$

$\overline{\exists x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \bar{P}(x)$

L'ordre compte : « $\forall x \exists y$ » (y dépend de x) n'est pas « $\exists y \forall x$ » (le même y pour tous) : serrures et passe-partout.

Nier, de gauche à droite : $\forall \Leftrightarrow \exists$; et $\Leftrightarrow$ ou ;
 $= \Leftrightarrow \neq$; $< \Leftrightarrow \geq$; $\leq \Leftrightarrow >$; $A \Rightarrow B$ devient $A \text{ et } \bar{B}$;
l'ordre et les ensembles ne changent pas.

Les raisonnements et leur première phrase

Équivalences successives : chaque « $\Leftrightarrow$ » se lit dans les deux sens ; pour $a, b \geq 0$:

$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$, $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$;

$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow (B \geq 0 \text{ et } A = B^2)$; on ne multiplie pas une inégalité par une expression de signe inconnu.

Disjonction des cas : « Distinguons deux cas » ; des cas qui couvrent **tout** (parité $2k, 2k+1$; restes $3k, 3k+1, 3k+2$; signe ; valeur absolue).

Contre-exemple : un seul x_0 tel que $\bar{P}(x_0)$ réfute « $\forall x, P(x)$ » ; mille exemples ne prouvent pas un « $\forall$ ».

Contraposée : « Raisonnons par contraposée : supposons $\bar{Q}$ et montrons $\bar{P}$. » (conclusion négative)

Absurde : « Raisonnons par l'absurde et supposons que... », jusqu'à une contradiction (« il n'existe pas », « irrationnel »).

La récurrence (rang n_0)

Initialisation : $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq n_0$; supposons $P(n)$ vraie (**pour un** entier n) et montrons $P(n+1)$, en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Sans initialisation, rien n'est prouvé (« $9 \mid 10^n + 1$ » est héréditaire et toujours fausse).

Les résultats du cours

n^2 pair $\Leftrightarrow n$ pair $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (donc $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$)

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$7 \mid 9^n - 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $3^n \geq 5n + 1$ ($n \geq 3$)

$3 \mid n(n+1)(2n+1)$ $3n^2 + 5n + 4$ est pair ($n \in \mathbb{N}$)

$x^4 - x + 1 > 0$ pour tout réel x (trois cas)

$AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$ un encadrement est un « et »

Quel raisonnement choisir ?

« résoudre » $\rightarrow$ équivalences ; $\mid$, parité, signe $\rightarrow$ cas ; « est-il vrai que ? » $\rightarrow$ contre-exemple ; conclusion « $\neq$ » $\rightarrow$ contraposée ; « il n'existe pas » $\rightarrow$ absurde ; « pour tout $n \geq n_0$ » $\rightarrow$ récurrence.

Bon courage ! Une rédaction claire vaut la moitié des points.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours : $\bar{P}$, négation de P ; **V**, **F** : vrai, faux ; $a \mid b$: a divise b ; une récurrence se rédige en trois étapes (initialisation, hérédité, conclusion).

16

Niveau I • Bases

Exercice 1 Proposition ou pas ? ★

corrigé p. 39

- Propositions ou non ? Valeur de vérité (**V** ou **F**) des propositions ?
a) « 161 est divisible par 7. » b) « $(-3)^2 = -9$. » c) « $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{10}$. » d) « Ferme la fenêtre. »
e) « $2x - 1 = 5$. » f) « Quelle heure est-il ? » g) « $1,5 \in \mathbb{N}$. » h) « Tout multiple de 6 est multiple de 4. » i) « $10^{-3} > 10^{-2}$. »
- $P(n)$: « $4 \mid n^2 + n$ » ($n \in \mathbb{N}$). Valeurs de $P(0)$, ..., $P(7)$ (tableau) ? 3. $Q(x, y)$: « $2x + y = 7$ » ($x, y \in \mathbb{N}$). Valeurs de $Q(1, 5)$, $Q(3, 1)$, $Q(2, 2)$? Tous les couples rendant $Q(x, y)$ vraie ?

Exercice 2 Non, et, ou ★

corrigé p. 39

- P : « 84 est multiple de 7 », Q : « $3^4 < 80$ », R : « $\sqrt{7} < 2,7$ ». Valeurs de vérité de P , Q , R (justifier), puis de : $\bar{Q}$; P et Q ; P ou Q ; $\bar{P}$ ou R ; $\bar{Q}$ et R ; $(P$ ou $Q)$ et $\bar{R}$; $\bar{P}$ et $\bar{Q}$.
- Classe d'excellence : il faut au moins 15 en maths et au moins 14 en physique. Notes (maths ; physique) : Amine (16 ; 13), Sara (14 ; 18), Yasmine (17 ; 15), Omar (12 ; 10). Qui est admis ? Qui remplit au moins une condition ? Écrire sans « non » la condition pour ne pas être admis.

Exercice 3 Premières tables de vérité ★

corrigé p. 39

P et Q sont deux propositions (table à 4 lignes : **VV**, **VF**, **FV**, **FF**).

- Dresser la table de vérité de : $A = (\bar{P} \Rightarrow Q)$; $B = ((P \text{ et } Q) \Rightarrow P)$; $C = (P \Leftrightarrow \bar{P})$; $D = (P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow \bar{P})$.
- Laquelle est une tautologie ? Laquelle est toujours fausse ? Montrer que $A \Leftrightarrow P$ ou Q et que $D \Leftrightarrow \bar{P}$.

Exercice 4 Implication, réciproque, contraposée ★

corrigé p. 40

- Relier par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ en justifiant ; la première condition est-elle nécessaire, suffisante, ou les deux, pour la seconde ?
a) $x = 2$... $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) « n premier et $n > 2$ » ... « n impair » ; c) $|x - 1| < 1$... $0 < x < 2$;
d) $x \neq 0$... $x^2 > 0$; e) « ABC rectangle en A » ... $BC^2 = AB^2 + AC^2$; f) $x + y > 0$... « $x > 0$ et $y > 0$ ».
- (I) : « Si un entier se termine par 5, alors il est divisible par 5. » Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de (I) ; valeur de vérité de chacune et de (I) ?

Exercice 5 Lire et écrire avec des quantificateurs ★

corrigé p. 40

1. Lire en français, puis donner la valeur de vérité : a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-2)^2 \geq 0$; b) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$; c) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$; d) $\exists! n \in \mathbb{N}, n^2 = n$; e) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$; f) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$; (O point fixé) g) « pour tout point M, il existe N tel que O soit le milieu de [MN] » ; h) « il existe N tel que, pour tout point M, O soit le milieu de [MN] ».
2. Écrire avec des quantificateurs, puis dire si c'est vrai : a) « Le carré de tout réel est positif. » b) « Un entier naturel a pour carré 50. » c) « Un réel de]0, 1[a pour carré $\frac{1}{2}$. » d) « Un réel strictement négatif est égal à son inverse. »

Exercice 6 Nier des phrases simples ★

corrigé p. 40

1. Nier sans le mot « non » ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) : a) $x \leq 3$; b) « $x = 1$ ou $x = -1$ » ; c) $0 < x \leq 7$; d) « si $4 \mid n$, alors n est pair ».
2. Nier, puis dire qui est vraie, de la proposition ou de sa négation : a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 25 \geq 10x$; b) $\exists n \in \mathbb{N}, 3n + 1 = 20$; c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 = 9 \Rightarrow x = 3)$; d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x^2$.
3. Nier : « Chaque élève de la classe a lu au moins un livre ce mois-ci. » 4. Un élève écrit que la négation de « $x > 0$ et $y > 0$ » est « $x \leq 0$ et $y \leq 0$ » : le contredire avec (1, -1), puis corriger.

Exercice 7 Premières récurrences : deux sommes ★

corrigé p. 41

1. $T_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$ ($n \in \mathbb{N}^*, n$ termes). a) Calculer T_1, T_2, T_3 ; vérifier que $T_n = n(2n - 1)$ pour ces valeurs. b) Initialisation : vérifier le cas $n = 1$. Hérédité : on suppose $T_n = n(2n - 1)$ pour un $n \geq 1$; justifier que $T_{n+1} = T_n + (4n + 1)$ et en déduire $T_{n+1} = (n + 1)(2n + 1)$. Conclure. c) Calculer $1 + 5 + \dots + 397$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$.

Exercice 8 Premières récurrences : divisibilité, inégalité, relation ★

corrigé p. 41

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 1. $4 \mid 3^{2n+1} + 1$ (écrire $3^{2n+3} + 1 = 9(3^{2n+1} + 1) - 8$) ;
 2. $2^n \geq n + 1$; 3. $u_n = 2^{n+1} + 3$, si $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ (calculer d'abord u_1, u_2, u_3 ; en déduire u_{10}).

17

Niveau 2 · Bac**Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : tables de vérité et lois logiques ★★**

corrigé p. 41

P, Q et R sont des propositions.

1. a) Dresser dans un même tableau les tables de $P \Leftrightarrow Q, P \Leftrightarrow \overline{Q}$ et $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$. b) En déduire les lois : $\overline{P \Leftrightarrow Q} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \overline{Q})$ et $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})]$.
2. a) Montrer par une table à 8 lignes que $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)]$. b) Pour démontrer « si $x \leq -2$ ou $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4$ », quelles implications suffit-il de démontrer ? Les démontrer.
3. Sans table (négation d'une implication, lois de Morgan, 1.b), montrer que $\overline{P \Rightarrow \overline{Q}} \text{ ou } \overline{\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : quantificateurs ★★

corrigé p. 42

$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, |x + 1| \leq |x| + 1$; $P_2 : \exists n \in \mathbb{N}, \frac{2n+9}{n+1} \in \mathbb{N}$; $P_3 : \exists! n \in \mathbb{N}, \frac{2n+9}{n+1} \in \mathbb{N}$;
 $P_4 : \forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 2ab$; $P_5 : \exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 2ab$;
 $P_6 : \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > x \Rightarrow x > 1)$; $P_7 : \exists! x \in \mathbb{R}, x^2 + |x| = 0$.

1. Écrire la négation de chaque proposition. 2. Déterminer, en justifiant, la valeur de vérité de chacune.
3. a) Vérifier que $\frac{2n+9}{n+1} = 2 + \frac{7}{n+1}$; en déduire les $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{2n+9}{n+1} \in \mathbb{N}$. b) Déterminer les réels x tels que $x^2 + |x| = 2$ (poser $t = |x|$).

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : trois raisonnements ★★

corrigé p. 42

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. a) Écrire la contraposée de « si $3 \mid n^2$, alors $3 \mid n$ » et la démontrer ($n = 3k + 1$ ou $3k + 2$). b) En déduire par l'absurde que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible).
2. Par l'absurde : a) pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1$; b) si $a^2 + b^2 = 1$ (a, b réels), alors $a + b \leq \sqrt{2}$ (développer $(a - b)^2$).
3. Par disjonction des cas : a) montrer que $|x| \leq x^2 + \frac{1}{4}$ pour tout réel x ; cas d'égalité ? b) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x|x| = 4x$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : récurrence ★★

corrigé p. 43

Montrer par récurrence que : 1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$; en déduire que cette somme est toujours < 2 ; 2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$; 3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{2}$; pour quels n a-t-on l'égalité ?

Exercice 13 Raisonner par équivalences successives ★★

corrigé p. 43

1. a) Comparer $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{8}$. b) Montrer que $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \leq 2\sqrt{x}$ pour tout réel $x \geq 1$. Peut-il y avoir égalité ?
2. Trouver l'erreur de l'élève, puis résoudre correctement dans $\mathbb{R}$: a) « $(x-1)^2 = (2x+1)^2 \iff x-1 = 2x+1 \iff x = -2$ » ; b) « $\frac{1}{x} < 2 \iff 1 < 2x \iff x > \frac{1}{2}$ » ; c) « $x^3 = 4x \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ».

Exercice 14 Conditions nécessaires, conditions suffisantes ★★

corrigé p. 43

Dire si chaque condition est nécessaire, suffisante, ou les deux.

1. Pour que $3 \mid n^2 + n$ ($n \in \mathbb{N}$) : a) $3 \mid n$; b) « $3 \mid n$ ou $3 \mid n+1$ » ; c) « n impair » (cas $n = 3k, 3k+1, 3k+2$).
2. Pour que « $a = 0$ et $b = 0$ » ($a, b \in \mathbb{R}$) : $a + b = 0$; $|a| + |b| = 0$; $ab = 0$.
3. Pour que $M(x, y)$ soit sur le cercle de centre $\Omega(1, 2)$ et de rayon 5 (repère orthonormé) : a) $(x, y) = (4, 6)$; b) $|x - 1| \leq 5$; c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Exercice 15 Vrai ou faux ? Les contre-exemples ★★

corrigé p. 44

Démontrer les affirmations vraies, réfuter les fausses par un contre-exemple. a) Pour tout entier $n \geq 1$, $n^2 + n + 1$ est premier. b) La somme de deux irrationnels est irrationnelle. c) Si l'entier a divise bc (b, c entiers), alors $a \mid b$ ou $a \mid c$. d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 1 est le seul diviseur positif commun à n et $n+1$. e) Si $4 \mid n^2$, alors $4 \mid n$. f) (Physique) Deux dipôles traversés par des courants de même intensité sont forcément en série. g) Il existe un rectangle non carré, à côtés entiers, dont l'aire et le périmètre ont la même valeur.

Exercice 16 Traduire et nier des définitions ★★

corrigé p. 44

1. (f définie sur $\mathbb{R}$, I intervalle) Écrire avec des quantificateurs, puis nier : a) « f est croissante sur I » ; b) « f est paire » ; c) « f admet un maximum en a » ; d) « f s'annule sur I ».
2. $f(x) = x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5$: montrer que f n'est ni croissante sur $[0, 6]$, ni paire ; qu'elle n'a de maximum en aucun a (essayer $x = |a| + 7$) ; qu'elle s'annule sur $[0, 1]$.

18

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Quantificateurs et système à paramètres ★★★

corrigé p. 44

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $(S_{a,b})$ est le système d'inconnue (x, y) : $x + 2y = 3$ et $2x + ay = b$.

1. Montrer : $(S_{a,b})$ a une unique solution $\iff a \neq 4$; si $a = 4$, aucune solution si $b \neq 6$, une infinité si $b = 6$.
2. Nier, puis donner la valeur de vérité de $(a, b \text{ réels})$: $A : \forall a, \forall b, (S_{a,b})$ a une solution au moins ; $B : \forall a, \exists b, (S_{a,b})$ a une solution au moins ; $C : \exists a, \forall b, (S_{a,b})$ a une unique solution ; $D : \forall b, \exists a, (S_{a,b})$ n'a aucune solution ; $E : \exists b, \forall a, (S_{a,b})$ a une unique solution.
3. Réels a tels que $\forall b \in \mathbb{R}, (S_{a,b})$ ait une solution ? Réels b tels que $\forall a \in \mathbb{R}, (S_{a,b})$ ait une solution ?

Exercice 18 Disjonction des cas : restes et valeurs absolues ★★★

corrigé p. 44

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N = n^2 + n + 1$. a) Avec $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$, montrer que $3 \mid N \iff n = 3k + 1$.
b) Dans ce cas, écrire $N = 9q + r$ ($0 \leq r < 9$) ; en déduire que $9 \nmid N$. c) $2026^2 + 2026 + 1$ est-il divisible par 3 ? par 9 ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R} : |x^2 - 1| < 2x$ (justifier que $x > 0$, puis distinguer $x \geq 1$ et $0 < x < 1$).

Exercice 19 Contraposée et absurde ★★★

corrigé p. 45

1. Par contraposée : a) si $x \neq 1$, alors $x^3 + 5x \neq 6$ (factoriser $x^3 + 5x - 6$ par $x - 1$) ; b) si $x \neq y$ et $x + y \neq 0$, alors $x^2 \neq y^2$ ($x, y \in \mathbb{R}$; écrire d'abord la contraposée).
2. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de réels : a) a, b tels que $x^2 = ax + b$ pour tout réel x ;
b) a, b, c tels que $|x| = ax^2 + bx + c$ pour tout réel x (prendre $x = 0, 1, -1$, puis 2).
3. Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer par l'absurde que $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 20 Énigme : l'ordre de passage à l'oral ★★★

corrigé p. 45

Amine, Basma, Chadi et Douae passent l'oral l'un après l'autre ; leurs rangs a, b, c, d sont 1, 2, 3, 4 dans un certain ordre. Amine : « Je ne passe pas le premier. » Basma : « Chadi passe le premier. » Chadi : « Douae passe après Basma. » Douae : « Amine passe juste avant moi. »

1. Traduire chaque déclaration et sa négation par une relation entre les rangs (Amine : $a \neq 1$).
2. Ordre de passage si les quatre déclarations sont vraies ? si elles sont toutes fausses ? (montrer l'unicité)
3. Et si exactement une est fausse ?

Exercice 21 L'équivalence est associative ★★★

corrigé p. 45

P, Q et R sont des propositions.

1. Dresser la table de vérité (8 lignes) de $E = (P \iff Q) \iff R$ et de $F = P \iff (Q \iff R)$. Conclure.
2. Montrer que E est vraie si et seulement si le nombre de propositions fausses parmi P, Q, R est pair.
3. Avec $\overline{P \iff Q} \iff (\overline{P} \iff Q)$ (exercice 9), montrer que remplacer dans E une seule proposition par sa négation change la valeur de E .

Exercice 22 Deviner, puis démontrer par récurrence ★★★

corrigé p. 46

1. Un quadrillage de $n \times n$ cases utilise a_n allumettes (une par côté de case) : $a_1 = 4, a_2 = 12$. a) Calculer a_3 ; justifier que $a_{n+1} = a_n + 4(n + 1)$. b) Montrer par récurrence que $a_n = 2n(n + 1)$. c) a_{10} ? Plus grand quadrillage réalisable avec 1000 allumettes ?

2. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$: calculer $u_1, \dots, u_4$, conjecturer u_n et le démontrer par récurrence (avec $u_n \neq 2$, pour que u_{n+1} existe).

Exercice 23 Une divisibilité, puis une erreur à trouver ★★★

corrigé p. 46

- Montrer par récurrence que $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $11^{2028} + 12^{4053}$ est divisible par 7 et par 19.
- Erreur ? « $\mathcal{P}(n)$: n crayons ont la même couleur. Initialisation : évident. Hérédité : parmi $c_1, \dots, c_{n+1}$, par $\mathcal{P}(n)$, $c_1, \dots, c_n$ ont la même couleur, de même $c_2, \dots, c_{n+1}$; c_2 est commun : tous ont la même couleur. »

19

Niveau 4 • Concours

Exercice 24 QCM type concours de médecine et de pharmacie ★★★★★

corrigé p. 46

Une seule réponse exacte par question ; justifier (P, Q propositions).

- Négation de « Tous les patients ont reçu un vaccin au moins » : (A) aucun n'a reçu de vaccin (B) un patient au moins n'a reçu aucun vaccin (C) tous n'ont reçu aucun vaccin (D) un patient au moins en a reçu deux.
- Pour que $|x - 1| \leq 2$, la condition $x^2 \leq 9$ est : (A) nécessaire, non suffisante (B) suffisante, non nécessaire (C) les deux (D) ni l'un ni l'autre.
- Une tautologie : (A) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ (B) $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$ (C) $(P \text{ et } \overline{Q}) \Rightarrow \overline{P \Rightarrow Q}$ (D) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.
- $\mathcal{P}(n)$: « $7 \mid 8^n + 6$ » ($n \in \mathbb{N}$) : (A) vraie pour tout n (B) vraie pour n pair seulement (C) héréditaire mais jamais vraie (D) fausse pour $n = 0$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) =$ (A) $\frac{3n^2 - n}{2}$ (B) $\frac{3n^2 + n}{2}$ (C) $3n^2 - n$ (D) $\frac{n(3n+1)}{3}$.
- Nombre d'entiers n de 1 à 100 rendant vraie « n pair $\Rightarrow 3 \mid n$ » : (A) 16 (B) 50 (C) 66 (D) 84.

Exercice 25 QCM type concours ENSA – ENSAM ★★★★★

corrigé p. 47

Une seule réponse exacte par question ; justifier.

- Laquelle est vraie ? (A) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ (B) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$ (C) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - xy = 1$ (D) $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = |x|$.
- Nombre de réels x tels que $x^2 - 3|x| + 2 = 0$: (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4.
- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A) $u_n = 3 \times 2^n$ (B) $u_n = 3(2^n - 1)$ (C) $u_n = 3n$ (D) $u_n = 3(2^{n+1} - 1)$.
- Nombre d'entiers n de 1 à 100 rendant vraie « $4 \mid n \iff 6 \mid n$ » : (A) 8 (B) 33 (C) 67 (D) 75.
- Négation de « $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ » : (A) $\forall x, f(x) \neq 0$ (B) $\exists x, f(x) \neq 0$ (C) $(\forall x, f(x) \neq 0)$ ou $(\exists x, \exists y, x \neq y \text{ et } f(x) = f(y) = 0)$ (D) $\exists x, \exists y, x \neq y \text{ et } f(x) = f(y) = 0$.

Exercice 26 Un invariant : pile ou face ★★★★★

corrigé p. 47

- 9 pièces sont côté « face » ; un coup retourne deux pièces ; N_k est le nombre de « piles » après k coups. a) Montrer par récurrence que N_k est pair. b) Peut-on obtenir neuf « piles » ? c) Avec n pièces, montrer qu'on peut toutes les mettre côté « pile » si et seulement si n est pair.
- On retourne trois pièces par coup : avec 10 pièces, montrer qu'il faut au moins 4 coups, et que 4 coups suffisent.

Exercice 27 Le nombre mystère ★★★★★

corrigé p. 47

Imane choisit un entier parmi N ; Yassine le cherche par des questions auxquelles Imane répond, sans mentir, « oui » ou « non ». Une stratégie à n questions réussit si, quel que soit le nombre choisi, un seul nombre reste possible après les n réponses.

1. Montrer par récurrence : $\mathcal{P}(n)$: « une stratégie à n questions réussit pour 2^n entiers » (couper en deux moitiés).
2. Montrer par récurrence : $\mathcal{Q}(n)$: « pour toute stratégie à n questions et tout groupe d'au moins $2^n + 1$ entiers, un choix d'Imane laisse au moins deux nombres possibles » (hérédité : par l'absurde, une réponse à la première question laisse au moins $2^n + 1$ nombres).
3. Nombre minimal de questions pour un entier de 1 à 1000 ? Ordre de « il existe une stratégie » et « pour tout choix » dans $\mathcal{P}(n)$, dans $\mathcal{Q}(n)$?

Exercice 28 Achille et la tortue ★★★★★

corrigé p. 48

Achille (10 m/s) poursuit une tortue (1 m/s) sur une droite ; à $t = 0$, leurs abscisses sont 0 et 100 (en m). Zénon : à t_1 , Achille atteint le point où était la tortue à $t_0 = 0$; à t_2 , celui où elle était à t_1 , etc. ; d_n est leur distance à t_n .

1. Justifier que $t_{n+1} = t_n + \frac{d_n}{10}$ et $d_{n+1} = \frac{d_n}{10}$; montrer par récurrence que $d_n = \frac{100}{10^n}$ et $t_n = \frac{100}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.
2. Zénon : « pour tout n , à l'instant t_n , Achille est derrière la tortue », donc « à tout instant $t \geq 0$, il est derrière ». Écrire ces phrases avec des quantificateurs ; la première est-elle vraie ?
3. Avec $x_A(t)$, $x_T(t)$ (mouvements uniformes), trouver l'instant du rattrapage. Erreur de Zénon ? Plus petit n tel que $t_n > 11,1$?

Exercice 29 Le carré magique ★★★★★

corrigé p. 48

On place 1, ..., 9 dans un tableau 3×3 ; lignes, colonnes et diagonales ont la même somme S .

1. Montrer que $S = 15$.
2. Avec les quatre sommes passant par la case centrale, montrer qu'elle contient 5.
3. Montrer par l'absurde que 1 n'est pas dans un coin (le coin opposé contiendrait 9 ; couples disponibles de somme 14 ?).
4. En déduire la place de 1 et de 9, puis tous les carrés magiques : combien y en a-t-il ?

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 48

Chacun dit vrai ou ment. Ali : « Badr ment. » Badr : « Chama ment. » Chama : « Ali et Badr mentent. » Qui dit vrai ? On note A : « Ali dit la vérité », de même B et C .

1. Justifier que $A \Leftrightarrow \bar{B}$, $B \Leftrightarrow \bar{C}$ et $C \Leftrightarrow (\bar{A} \text{ et } \bar{B})$.
2. Première méthode : dresser la table de vérité (8 lignes) de ces trois équivalences ; conclure.
3. Seconde méthode : a) montrer que $A \Leftrightarrow C$; b) supposer que Chama dit vrai et aboutir à une contradiction ; conclure.
4. Généralisation. $n \geq 3$ personnes $P_1, \dots, P_n$ en file : pour $k < n$, P_k dit « P_{k+1} ment » ; P_n dit « Tous les autres mentent ». Soit p_k : « P_k dit vrai ». a) Montrer par récurrence que, pour $1 \leq k \leq n$, $p_k \Leftrightarrow p_1$ (k impair) et $p_k \Leftrightarrow \bar{p}_1$ (k pair). b) Montrer par l'absurde que P_n ment. c) En déduire que P_k dit vrai $\Leftrightarrow n - k$ est impair ; vérifier la cohérence. Combien disent vrai si $n = 2026$? d) Et si P_n dit plutôt « Tous les autres disent la vérité » ?

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

20 Connecteurs et tables de vérité

Une table de vérité à n propositions a 2^n lignes ; deux propositions sont **équivalentes** lorsqu'elles ont la même colonne. Le « ou » est inclusif ; nier un « et » donne un « ou », et inversement (lois de Morgan).

Exercice 31 Et, ou, non : premiers pas ★

corrigé p. 49

- On considère P : « 259 est un nombre premier », Q : « $2^7 = 128$ » et R : « $\sqrt{90} > 9,5$ ». Donner, en justifiant, la valeur de vérité de P , Q et R , puis celle de : $\overline{P}$; P et Q ; P ou Q ; $\overline{Q}$ ou R ; $\overline{P}$ et $\overline{R}$; $\overline{P}$ ou $\overline{R}$; $(P$ ou $Q)$ et $\overline{R}$; $(Q$ et $R)$ ou P .
- Écrire la négation sans le mot « non » ni le symbole de négation (x est un réel) : a) « $x \geq -1$ et $x < 4$ » ; b) « $|x| > 2$ » (l'écrire d'abord avec « ou ») ; c) « Le mouvement du mobile est rectiligne et sa vitesse est constante. » d) « La lampe L_1 brille ou la lampe L_2 brille. »

Exercice 32 Compléter des tables de vérité ★

corrigé p. 49

P , Q et R sont trois propositions. On pose $A = \overline{P}$ et Q , $B = \overline{P}$ ou $\overline{Q}$, $C = (P$ et $Q)$ ou $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ et $D = (P$ ou $Q)$ et $\overline{P}$ et $\overline{Q}$.

- Dresser une table de vérité de quatre lignes avec, dans l'ordre, les colonnes : P , Q , $\overline{P}$, $\overline{Q}$, A , P ou $\overline{Q}$, B , P et Q , C , P ou Q , D .
- Que remarque-t-on pour les colonnes de A et de B ? de C ? de D ? Expliquer les résultats pour C et D à l'aide des lois de Morgan.
- a) Dresser la table de vérité (huit lignes) de $X = (P$ ou $Q)$ et R et de $Y = P$ ou $(Q$ et $R)$.
b) X et Y sont-elles équivalentes ? Quand différent-elles ? Que retenir sur les parenthèses ?

Exercice 33 Simplifier avec les lois logiques ★★

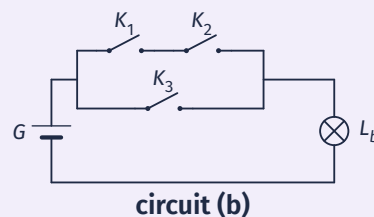
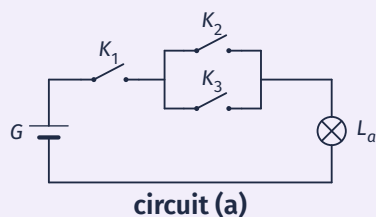
corrigé p. 50

- Sans table de vérité, à l'aide des lois du cours (Morgan, distributivités...), démontrer :
a) $(P$ ou $Q)$ et $(\overline{P}$ ou $Q) \iff Q$; b) $\overline{P$ et $\overline{Q}$ et $P \iff P$ et Q ;
c) P ou $(\overline{P}$ et $Q) \iff P$ ou Q ; d) $\overline{(P$ ou $Q)$ et $\overline{R} \iff (\overline{P}$ et $\overline{Q})$ ou R .
- Vérifier l'équivalence b) à l'aide d'une table de vérité.
- Applications (x réel). Simplifier à l'aide du 1, puis donner l'intervalle où c'est vrai :
a) $(x^2 \geq 1$ ou $x \geq 5)$ et $(x^2 < 1$ ou $x \geq 5)$; b) $x \geq -1$ et $x \geq 3$ et $x \geq -1$;
c) $x \leq 0$ ou $(x > 0$ et $x^2 < 4)$.

Exercice 34 Des interrupteurs et des lampes ★★

corrigé p. 50

On note K_i : « l'interrupteur K_i est fermé » et L : « la lampe brille » (lampe et générateur G en état de marche). En **série**, deux interrupteurs donnent un « et », en **dérivation** un « ou ».



1. Exprimer L_a et L_b à l'aide de K_1, K_2, K_3 , puis dresser leurs tables de vérité. Pour quelles positions des interrupteurs une lampe brille-t-elle et pas l'autre ?
2. Dans un circuit (c), deux branches sont en dérivation : l'une contient K_1 et K_2 en série, l'autre K'_1 et K_3 en série, où K'_1 est actionné par le même bouton que K_1 (ils sont ouverts ou fermés en même temps). Exprimer L_c et montrer, sans table, que $L_c \iff L_a$. Quel est l'intérêt pratique ?
3. Dans un circuit (d), K_1 est en série avec un bloc formé de K'_1 (couplé à K_1) et de K_2 en dérivation. Montrer que $L_d \iff K_1$. L'interrupteur K_2 sert-il à quelque chose ?

Exercice 35 Le robot d'arrosage ★★★

corrigé p. 51

Un robot arrose un jardin. Il dispose de trois capteurs : S : « le sol est sec », P : « il pleut », T : « la température dépasse 30°C ». Son programme est donné par la table ci-contre, où A est la proposition « le robot arrose ».

S	P	T	A
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

1. *Méthode.* Une ligne se décrit par un « et » : la ligne (S V, P F, T V) correspond à S et $\bar{P}$ et T , qui n'est vraie que sur cette ligne. Écrire ainsi les trois lignes où A est vraie, et justifier que A équivaut au « ou » de ces trois propositions.
2. À l'aide de la distributivité, montrer que $A \iff \bar{P}$ et (S ou T) ; traduire le programme par une phrase, puis écrire simplement la négation de A .
3. Pour ne pas arroser en pleine chaleur, on ajoute la règle « jamais d'arrosage si le sol est sec et que la température dépasse 30°C ». Le nouveau programme est donc $A' = A$ et $\bar{S}$ et $\bar{T}$: montrer que $A' \iff \bar{P}$ et $((S$ et $\bar{T})$ ou $(\bar{S}$ et $T))$, et dire dans combien de cas, sur huit, le robot arrose désormais.

Exercice 36 Signe d'un produit et connecteurs ★★★

corrigé p. 51

Soient a et b deux réels.

1. Justifier la règle des signes : $ab > 0 \iff ((a > 0 \text{ et } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ et } b < 0))$.
2. En niant les deux membres (lois de Morgan), puis en développant (distributivité), en déduire que : $ab \leq 0 \iff ((a \geq 0 \text{ et } b \leq 0) \text{ ou } (a \leq 0 \text{ et } b \geq 0))$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide des questions 1 et 2 : a) $(3x - 2)(x + 4) > 0$; b) $(5 - x)(2x + 3) \leq 0$.
4. Soient a, b, c trois réels **non nuls** ; on note P : « $a > 0$ », Q : « $b > 0$ », R : « $c > 0$ ».
 - a) Dresser la table de « $abc > 0$ » selon P, Q, R , et en déduire que $abc > 0$ si et seulement si un nombre impair des propositions P, Q, R sont vraies.
 - b) Écrire « $abc > 0$ » à l'aide de P, Q, R et des connecteurs (méthode de l'exercice 35).
 - c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x(x - 3)(x + 2) > 0$.

21 Quantificateurs

Un « $\forall$ » se démontre pour un élément quelconque et se réfute par **un** contre-exemple ; un « $\exists$ » se démontre par un exemple. Pour nier, on échange $\forall$ et $\exists$ (sans toucher aux domaines) et l'on nie la propriété.

Exercice 37 Lire, traduire, décider ★

corrigé p. 52

- Lire en français, puis donner la valeur de vérité en justifiant :
 a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 8x + 17 > 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, 5x^2 + 2 = 3x$; c) $\exists! x \in \mathbb{R}, 11 - 4x = 23$;
 d) $\exists n \in \mathbb{N}, 5n + 2$ est un multiple de 9 ; e) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2+1} \leq 1$; f) $\forall x \in \mathbb{R}, (2x)^2 = 2x^2$;
 g) $\exists x \in]0, +\infty[, \sqrt{x} > x$; h) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a + b = ab$; i) $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a^2 - 2a + b > 0$.
- Écrire avec des quantificateurs, puis dire si c'est vrai : a) « Tout réel est inférieur ou égal à son carré. » b) « Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 = 3n + 10$. » c) « Deux réels distincts peuvent avoir le même carré. »

Exercice 38 Nier pas à pas ★

corrigé p. 53

- Écrire la négation, puis dire laquelle, de la proposition ou de sa négation, est vraie :
 a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 3| > 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 4 = 0$; c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n + m = 12$;
 d) $\forall x \in \mathbb{R}, (x < -1 \Rightarrow x^2 > 1)$; e) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y^2 + 1$.
- Nier sans écrire « il est faux que » : a) « Il existe un instant où les deux mobiles sont au même endroit. » b) « Chaque matin, un élève de la classe arrive avant 8 h. » c) « Pour tout entier naturel n , il existe un nombre premier strictement supérieur à n . »
- Un élève écrit que la négation de P : « $\forall x \in [0, +\infty[, \sqrt{x} \leq x + 1$ » est « $\exists x \in]-\infty, 0[, \sqrt{x} > x + 1$ ». Expliquer son erreur et écrire la bonne négation. Laquelle, de P et de sa négation, est vraie ? (On pourra poser $t = \sqrt{x}$.)

Exercice 39 Divisibilité et ordre des quantificateurs ★★

corrigé p. 53

On pose $E = \{2, 3, 4, 6, 12\}$; pour a et b dans E , on écrit $a \mid b$ pour « a divise b ». Dans les propositions ci-dessous, a, b, c décrivent E .

- Dresser le tableau des valeurs de vérité de « $a \mid b$ » (a en ligne, b en colonne).
- Traduire en français, puis donner la valeur de vérité de :
 $P_1 : \forall a, \exists b, (b \neq a \text{ et } a \mid b)$; $P_2 : \exists b, \forall a, a \mid b$; $P_3 : \exists a, \forall b, a \mid b$; $P_4 : \forall b, \exists a, (a \neq b \text{ et } a \mid b)$;
 $P_5 : \exists! b, \forall a, a \mid b$; $P_6 : \forall a, \forall b, ((a \mid b \text{ et } b \mid a) \Rightarrow a = b)$; $P_7 : \forall a, \forall b, \exists c, (a \mid c \text{ et } b \mid c)$.
- Écrire et traduire les négations de P_1 et de P_3 ; les justifier par des éléments de E .
- a) Quel entier faut-il ajouter à E pour que P_3 devienne vraie ? P_4 le devient-elle ?
 b) Soit F un ensemble fini non vide d'entiers naturels non nuls. Montrer (plus grand élément) que « $\forall a \in F, \exists b \in F, (b \neq a \text{ et } a \mid b)$ » est fausse.

Exercice 40 Un mobile et des quantificateurs ★★

corrigé p. 54

Un mobile se déplace sur un axe gradué en mètres ; à l'instant t (en secondes), $t \in [0, 8]$, son abscisse est $x(t) = t^2 - 6t + 5$.

- Vérifier que $x(t) = (t - 3)^2 - 4$, puis calculer $x(0)$, $x(1)$, $x(3)$, $x(5)$ et $x(8)$.
- Écrire chaque phrase avec des quantificateurs, puis dire si elle est vraie (justifier) : a) « Le mobile passe par l'origine O . » b) « Il passe une et une seule fois au point d'abscisse 12. »
 c) « Il passe une et une seule fois au point d'abscisse 5. » d) « Son abscisse reste supérieure ou égale à -4 . » e) « Il existe un réel M que son abscisse ne dépasse jamais. » f) « À chaque

instant, le mobile est à moins de 10 m de O . » g) « Pour tout réel a de $[-4, 21]$, le mobile passe au moins une fois au point d'abscisse a . »

3. Écrire les négations de d) et de f) avec des quantificateurs, puis en français. 4. Déterminer les instants $t \in [0, 8]$ tels que $|x(t)| < 5$.

Exercice 41 Quantificateurs et paramètre ★★★

corrigé p. 54

Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels chaque proposition est vraie.

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2mx + 9 > 0$ (utiliser la forme canonique). Écrire sa négation, et donner un réel x qui la vérifie lorsque $m = 3$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + mx + m + 3 = 0$.
- $\exists! x \in \mathbb{R}, mx^2 - 4x + 2 = 0$ (distinguer $m = 0$ et $m \neq 0$).
- a) $\forall x \in [0, +\infty[, x^2 - 4x + m \geq 0$; b) $\forall x \in [3, +\infty[, x^2 - 4x + m \geq 0$ (écrire $x^2 - 4x + m = (x-2)^2 + m - 4$).
- a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, mx + y \geq 0$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, mx + y \geq 0$. Comparer et commenter.

Exercice 42 Une famille de droites ★★★

corrigé p. 54

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- Pour tout réel m , D_m est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $(2m - 1)x + (m + 1)y = 3m$.
a) Écrire avec des quantificateurs « toutes les droites D_m passent par un même point ». En écrivant l'équation sous la forme $m(2x + y - 3) + (y - x) = 0$, montrer que c'est vrai et déterminer ce point A .
b) La proposition « $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (2m - 1)x + (m + 1)y = 3m$ » a-t-elle le même sens ? Est-elle vraie ?
- Pour tout réel m , Δ_m est la droite d'équation $y = 2mx - m^2$, et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.
a) En utilisant $m = 0$, $m = 1$ et $m = -1$, montrer que les droites Δ_m n'ont aucun point commun à toutes. Écrire ce résultat avec des quantificateurs.
b) Soit $M(x, y)$ un point. Montrer que $M \in \Delta_m \iff (m - x)^2 = x^2 - y$. En déduire qu'il passe au moins une droite Δ_m par M si et seulement si $y \leq x^2$, et exactement une si et seulement si $M \in \mathcal{P}$.
c) Montrer que, pour tout réel m , Δ_m et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun (à préciser) ; l'écrire avec des quantificateurs.

22

Implication et contraposée

$P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q fausse ; sa **contraposée** $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ lui est équivalente, pas sa **réciroque** $Q \Rightarrow P$. Si $P \Rightarrow Q$: P est **suffisante** pour Q , Q est **nécessaire** pour P .

Exercice 43 Si... alors... : valeur de vérité ★

corrigé p. 55

- On considère P : « $7 \times 8 = 56$ », Q : « 121 est un nombre premier » et R : « $\frac{2}{3} > 0,6$ ». Donner la valeur de vérité de P , Q , R , puis de : $P \Rightarrow Q$; $Q \Rightarrow P$; $Q \Rightarrow R$; $R \Rightarrow P$; $(P \text{ et } R) \Rightarrow Q$; $\overline{Q} \Rightarrow R$; $P \Leftrightarrow R$; $P \Leftrightarrow Q$.
- Pour chaque implication, écrire sa réciproque et sa contraposée, puis donner la valeur de vérité des trois (contre-exemple si elle est fausse) :
a) « Si $x \geq 3$, alors $x^2 \geq 3x$ » (x réel) ; b) « Si M est un point de la médiatrice de $[AB]$, alors $MA = MB$ » ;
c) *En cinématique* : « Si deux voitures roulent sur une route droite, à chaque instant dans le même sens et à la même vitesse, alors elles occupent à chaque instant la même position. »

Exercice 44 Il faut, il suffit ★

corrigé p. 56

- Compléter par « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit », puis écrire avec $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ (x réel, $n \in \mathbb{N}$) :
 - Pour que $x^2 = 25$, ... que $x = -5$.
 - Pour que n soit divisible par 4, ... que son chiffre des unités soit pair.
 - Pour que $|x - 1| = 4$, ... que $x = 5$ ou $x = -3$.
 - Pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme, ... que $\vec{AB} = \vec{DC}$.
 - Pour qu'un mouvement soit rectiligne uniforme, ... que la trajectoire soit une droite.
- Relier par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou « aucune » (contre-exemples) ; la première proposition est-elle nécessaire, suffisante, les deux ou rien pour la seconde (x réel) ?
 - « $x > 5$ » ... « $x > 2$ » ;
 - « $x^2 \leq 9$ » ... « $-3 \leq x \leq 3$ » ;
 - « $x > 1$ » ... « $x^2 < 4$ » ;
 - « $x^2 = 4$ » ... « $x = -2$ ».

Exercice 45 Démontrer par contraposée ★★

corrigé p. 56

Pour chaque propriété, écrire d'abord sa contraposée, puis la démontrer.

- Dans un repère, on donne $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ et un point $C(x, y)$. Si $3x - 2y + 1 \neq 0$, alors les points A, B, C ne sont pas alignés. (Rappel : $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.)
- Soient x et y deux réels différents de -1 . Si $x \neq y$, alors $\frac{2x-5}{x+1} \neq \frac{2y-5}{y+1}$.
- Soit x un réel. Si $x^2 + 2 < 3x$, alors $1 < x < 2$ (factoriser $x^2 - 3x + 2$). La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 46 Équivalence : deux implications ★★

corrigé p. 56

- Dire si $P \Rightarrow Q$ et si $Q \Rightarrow P$ sont vraies (contre-exemple sinon), puis conclure :
 - P : « $|2x + 1| < 7$ », Q : « $-4 < x < 3$ » ;
 - P : « $(x - 1)(x + 2) \geq 0$ », Q : « $x \geq 1$ » ;
 - P : « $x \neq 0$ et $x + \frac{9}{x} = 6$ », Q : « $x = 3$ » ;
 - P : « $ABCD$ est un losange », Q : « $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ».
- Démontrer par double implication (rédiger séparément les deux sens) :
 - pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $a + b = 2\sqrt{ab} \iff a = b$;
 - pour tout réel x : $|x - 2| = |x + 4| \iff x = -1$.

Exercice 47 Cartes, règles et contraposée ★★★

corrigé p. 57

- Les quatre cartes. Chaque carte porte un entier sur une face et une couleur sur l'autre. On voit sur la table :

8

5

bleu

rouge

. On veut contrôler la règle « si une carte porte un nombre pair, alors son autre face est bleue ».
 - Avec P : « la carte porte un nombre pair » et B : « l'autre face est bleue », quand $P \Rightarrow B$ est-elle fausse ?
 - Quelles cartes faut-il retourner, au minimum, pour contrôler la règle ? Justifier à l'aide de la contraposée, et expliquer pourquoi les deux autres sont inutiles.
- La salle de TP. Règlement : (R1) tout élève qui manipule (M) porte une blouse (B) ; (R2) tout élève qui porte une blouse a lu les consignes de sécurité (C) ; (R3) aucun élève qui a lu les consignes ne mange dans la salle (E).
 - Traduire (R1), (R2), (R3) par des implications entre M, B, C, E .
 - En déduire que tout élève qui manipule ne mange pas dans la salle ; écrire la contraposée de ce résultat.
 - Le règlement est respecté : que dire de Hamza, qui porte une blouse ? de Rania, qui mange dans la salle ?

Exercice 48 Trouver la bonne condition ★★★

corrigé p. 57

- Soit (I) l'inéquation $2x^2 - x - 6 < 0$, d'inconnue réelle x .
 - Factoriser $2x^2 - x - 6$, puis résoudre (I).
 - « $0 \leq x \leq 1$ » est-elle une condition suffisante pour que x soit solution de (I) ? nécessaire ? Et « $x > -2$ » ?
 - Pour quels réels a la condition « $a \leq x \leq a + 2$ » est-elle suffisante ?
 - Pour quels $b > 0$ la condition « $|x| < b$ » est-elle nécessaire ? nécessaire et suffisante ?
- Pour tout réel m , on considère l'équation $(E_m) : x^2 - 2mx + m + 2 = 0$.
 - Montrer que (E_m) a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $m < -1$ ou $m > 2$.
 - Si (E_m) a deux solutions distinctes x_1 et x_2 , alors $x^2 - 2mx + m + 2 = (x - x_1)(x - x_2)$ pour tout réel x : en déduire $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.
 - En déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que (E_m) ait deux solutions distinctes strictement positives.

23

Absurde et disjonction des cas

Annoncer le raisonnement dès la première ligne ; les cas doivent couvrir **toutes** les possibilités.

Exercice 49 Disjonction des cas : premiers pas ★

corrigé p. 58

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = n(2n + 1)(7n + 1)$.
 - En distinguant n pair et n impair, montrer que A_n est pair.
 - En distinguant $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), montrer que 3 divise A_n .
 - En déduire que 6 divise A_n ; vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit m un réel et (E_m) l'équation $m(x - 1) = 2x - 3$, d'inconnue réelle x .
 - Montrer que $(E_m) \iff (m - 2)x = m - 3$.
 - Résoudre (E_m) en distinguant les cas $m = 2$ et $m \neq 2$.
 - Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) a-t-elle une solution positive ou nulle ?

Exercice 50 L'absurde : premiers pas ★

corrigé p. 58

- Montrer par l'absurde qu'aucun couple de réels (x, y) ne vérifie $x + y = 2$ et $xy = 3$ (calculer $(x - y)^2$).
- Montrer par l'absurde qu'aucun carré d'entier ne s'écrit $4k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$ (on rappelle que m^2 pair $\Rightarrow m$ pair). 2026 est-il un carré ? Et 2030 ?
- Un réel x vérifie $x^3 + 4x = 8$. On admet que, pour tous réels $a \leq b$, on a $a^3 \leq b^3$.
 - Montrer par l'absurde que $x < 2$, puis que $x > 1$.
 - Montrer de même que $1,3 < x < 1,4$.

Exercice 51 Équivalences successives ★★

corrigé p. 59

- Pour $x \geq 0$, montrer que $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x} = 2 \iff \sqrt{x + 8} = \sqrt{x} + 2 \iff \sqrt{x} = 1$, puis résoudre l'équation.
 - Résoudre de même l'inéquation $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x} > 2$.
- Sur un axe, deux mobiles ont pour abscisses $x_1(t) = 3t + 4$ et $x_2(t) = t^2$ (en m) à l'instant $t \geq 0$ (en s). Montrer par équivalences que $x_2(t) > x_1(t) \iff t > 4$. À quel instant et en quel point se rejoignent-ils ?
- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$ (faire apparaître deux carrés).

Exercice 52 Prouver ou contredire ★★

corrigé p. 59

Vrai ou faux ? Si c'est faux, donner un contre-exemple, puis démontrer la version corrigée.

1. « Pour tous réels non nuls a et b : si $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. » Version corrigée : avec $ab > 0$.
2. « Pour tout entier $n \geq 2$, le nombre $n^2 - 1$ n'est pas premier. » Version corrigée : $n \geq 3$.
3. « Pour tous entiers naturels a et b : si $a + b$ est pair, alors a et b sont pairs. » Version corrigée : si $a + b$ **et** ab sont pairs, alors a et b sont pairs (par l'absurde).
4. « La somme de deux premiers n'est jamais première. » Version corrigée : deux premiers **impairs**.

Exercice 53 Des irrationnels par l'absurde ★★★

corrigé p. 59

On admet que tout rationnel $r > 0$ s'écrit $\frac{p}{q}$, fraction irréductible ($p, q \in \mathbb{N}^*$ non tous deux pairs).

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$ (si $p^2 = 10q^2$, montrer que p , puis q , sont pairs).
2. a) Calculer $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$ et $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$. b) Montrer par l'absurde que $\sqrt{5} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis que $\sqrt{5} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. c) Le produit de deux irrationnels est-il toujours irrationnel ?
3. Supposons, par l'absurde, que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ ait une solution rationnelle $\frac{p}{q}$, fraction irréductible ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$). a) Montrer que $p^3 - pq^2 - q^3 = 0$. b) Étudier la parité de $p^3 - pq^2 - q^3$ dans chacun des trois cas : p et q impairs ; p pair et q impair ; p impair et q pair. Conclure. c) On admet que l'équation a une solution réelle α ($1,32 < \alpha < 1,33$). Que dire de α ?

Exercice 54 Trois réels et leurs signes ★★★

corrigé p. 60

Soit a, b, c trois réels tels que $(H_1) : a + b + c > 0$, $(H_2) : ab + bc + ca > 0$ et $(H_3) : abc > 0$.

1. On suppose, par l'absurde, que $a \leq 0$. a) Montrer que $a < 0$ et $bc < 0$. b) À l'aide de (H_2) , montrer que $a(b + c) > 0$, puis que $b + c < 0$. c) Conclure à une contradiction, puis que $a, b, c > 0$.
2. Montrer qu'aucune des trois hypothèses ne peut être supprimée : pour chacune, trouver trois réels qui vérifient les deux autres sans être tous strictement positifs.
3. Application. On sait que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - a)(x - b)(x - c)$ pour tout réel x . En développant, montrer sans calculer a, b, c qu'ils sont strictement positifs ; vérifier avec $x = 1, 2, 3$.

24

Raisonnement par récurrence

Écrire la propriété $P(n)$, puis les trois étapes : **initialisation, hérédité, conclusion**.

Exercice 55 Une somme de produits ★

corrigé p. 60

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+2) = 1 \times 3 + 2 \times 4 + \dots + n(n+2)$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 et vérifier que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ pour ces quatre valeurs de n .
2. a) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n . b) Démontrer par récurrence la formule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $1 \times 3 + 2 \times 4 + \dots + 20 \times 22$. Puis, sachant que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, en déduire une expression de $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ (écrire $k(k+2) = k^2 + 2k$).

Exercice 56 Deux divisibilités ★

corrigé p. 61

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 5^n - 4n - 1$. a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 . b) Montrer que $u_{n+1} = 5u_n + 16n$. c) Démontrer par récurrence que 16 divise u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ($5^{2n+3} = 25 \times 5^{2n+1}$, $2^{3n+4} = 8 \times 2^{3n+1}$).

Exercice 57 Inégalités et premier rang ★★

corrigé p. 61

1. a) Vérifier que $4^n \geq 3n^2 + 1$ pour $n = 0, 1, 2, 3$. b) Montrer que $3n(3n - 2) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis démontrer par récurrence que $4^n \geq 3n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. c) Montrer que l'inégalité est stricte pour tout $n \geq 2$; quand a-t-on l'égalité ?
2. a) Comparer 5^n et $3^n + 4^n$ pour $n = 1, 2, 3$. b) Démontrer par récurrence que $5^n > 3^n + 4^n$ pour tout entier $n \geq 3$. c) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $3^n + 4^n = 5^n$; interpréter le cas trouvé à l'aide d'un triangle rectangle.

Exercice 58 Conjecturer, puis démontrer ★★

corrigé p. 61

1. On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 , puis $u_n - n$ pour $0 \leq n \leq 4$. b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis la démontrer par récurrence. c) Calculer u_{10} .
2. On pose $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + 1$ pour tout $n \geq 1$. a) Calculer a_2, a_3, a_4 . b) Conjecturer une expression de a_n , puis la démontrer par récurrence (remarquer que $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$).

Exercice 59 Paver un damier avec des triminos ★★★

corrigé p. 62

Un *trimino* est une pièce en L : un carré de 2×2 cases privé d'une case. Un damier privé d'une case est *pavable* si on peut le recouvrir exactement de triminos (sans chevauchement ni débordement).

1. Pourquoi un damier 2×2 privé d'une case est-il pavable ? Paver un damier 4×4 privé d'un coin.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$: « un damier $2^n \times 2^n$ privé de n'importe laquelle de ses cases est pavable » est vraie (couper en quatre damiers $2^n \times 2^n$; un trimino au centre).
3. Combien de triminos faut-il pour un damier 32×32 privé d'une case ? En déduire, sans calcul, que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On numérote de 1 à 5 les lignes et les colonnes d'un damier 5×5 et l'on marque les 9 cases de ligne et de colonne impaires. a) Montrer qu'un trimino recouvre au plus une case marquée. b) Montrer par l'absurde que le damier 5×5 privé de la case (ligne 1, colonne 2) n'est pas pavable.

Exercice 60 Renforcer l'hypothèse ★★★

corrigé p. 63

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$, de sorte que $P_{n+1} = P_n \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et les comparer à 3 et à $3 - \frac{1}{n}$.
2. Pour prouver $P_n < 3$ par récurrence, un élève écrit : « si $P_n < 3$, alors $P_{n+1} < 3 \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)$ ». Pourquoi bloque-t-il ?

3. a) Pour $n \geq 1$, montrer que $\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n+1} \iff 3n - 1 \leq (n+1)^2$, puis que cette inégalité est vraie. b) Démontrer par récurrence que $P_n \leq 3 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. c) En déduire que $P_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $P_{10} \leq 2,9$.

25

Défis de concours

QCM : une seule réponse exacte, à **justifier** ; expliquer pourquoi les autres sont fausses.

Exercice 61 QCM de logique (concours de médecine) ★★★★★

corrigé p. 63

- Négation de « $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq M$ » (dire aussi laquelle des deux est vraie) :
 (A) $\forall M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x < M$ (B) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x < M$
 (C) $\exists M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x < M$ (D) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \leq M$
- $\overline{P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)}$ équivaut à : (A) P et $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ (B) $\overline{P}$ ou Q ou R (C) $P \Rightarrow (\overline{Q} \text{ et } \overline{R})$ (D) $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ et $\overline{R}$.
- Une seule est vraie (x, y réels) : (A) $\forall x, x^2 > 2x - 1$ (B) $\exists! x, x^2 = 2x$ (C) $\forall x, \exists y, y^2 = x + 1$
 (D) $\exists y, \forall x, x^2 + y \geq 2x$.
- « Pour être admis en salle de réveil, un patient doit avoir été opéré. » Avec A : « il est admis », O : « il a été opéré », cela signifie : (A) $A \Rightarrow O$ (B) $O \Rightarrow A$ (C) $\overline{A} \Rightarrow \overline{O}$ (D) $A \Leftrightarrow O$.
- P : « 209 est premier », Q : « $\sqrt{48} < 7$ », R : « $\frac{2}{7} \in \mathbb{D}$ ». Une seule est vraie : (A) $Q \Rightarrow P$
 (B) P ou R (C) $(P \Rightarrow R)$ et Q (D) $Q \Leftrightarrow (P \text{ ou } R)$.
- Une seule est vraie quelles que soient P et Q : (A) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ (B) $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow P$
 (C) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ (D) $(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$.

Exercice 62 Trois énigmes logiques ★★★★★

corrigé p. 64

- Le b cher renversé.** **Un seul** des élèves Youssef, Salma, Karim, Nadia a renversé un b cher. Youssef : « C'est Salma ou Nadia. » Salma : « Ce n'est ni moi ni Karim. » Karim : « C'est Youssef. » Nadia : « Ce n'est pas Youssef. » a) Avec y : « Youssef est coupable » (de même s, k, n), traduire les déclarations ; montrer qu'exactement un de Karim et Nadia dit vrai. b) Qui est coupable si un seul des quatre dit vrai ? c) Si un seul ment ? d) Les quatre peuvent-ils mentir ?
- Les deux gardiens.** Deux portes, dont une seule mène à la sortie, sont gardées par deux gardiens : l'un dit toujours vrai, l'autre ment toujours, et l'on ignore lequel. On pose **une** question à **un** gardien, qui répond oui ou non. a) Montrer que la question « La porte de gauche mène-t-elle à la sortie ? » ne permet pas de conclure. b) On demande : « Est-il vrai que (la porte de gauche mène à la sortie) $\Leftrightarrow$ (tu dis la vérité) ? » En étudiant les quatre cas, montrer que la réponse est « oui » si et seulement si la porte de gauche mène à la sortie.
- Les deux automates.** L'automate Alpha ment le lundi et le mardi, B ta le jeudi et le dimanche ; les autres jours, ils disent vrai. Un même jour, chacun déclare : « Hier, j'ai menti. » a) Montrer qu'un automate peut le déclarer un jour donné si et seulement si son comportement (mentir ou non) diffère de celui de la veille. b) Quel jour est-on ?

Exercice 63 Points entiers et parité (type ENSAM) ★★★★★

corrigé p. 64

Le plan est muni d'un repère ; un point est *entier* si ses deux coordonnées sont des entiers relatifs.

1. Soit $A(a, b)$ et $B(c, d)$ deux points entiers. Montrer que le milieu de $[AB]$ est entier si et seulement si a, c ont même parité et b, d ont même parité. Trouver quatre points entiers sans milieu entier deux à deux.
2. Montrer par l'absurde que, parmi cinq points entiers quelconques, il y en a toujours deux dont le milieu est entier (classer les points selon la parité de leurs coordonnées). Quel est le plus petit nombre de points entiers qui garantit l'existence de deux points de milieu entier ?
3. Un pion se déplace sur les points entiers comme le cavalier des échecs : de (x, y) , il saute en $(x \pm 1, y \pm 2)$ ou en $(x \pm 2, y \pm 1)$. Il part de $O(0, 0)$. a) Démontrer par récurrence qu'après k sauts, la somme des coordonnées du pion a la même parité que k . b) En déduire qu'après un nombre impair de sauts, le pion n'est pas en O . c) En combien de sauts, au minimum, atteint-il $(1, 0)$?

Exercice 64 Des multiples de 2^n écrits avec des 1 et des 2 ★★★★★

corrigé p. 65

1. Vérifier que 2, 12, 112 et 2112 sont divisibles respectivement par 2, 4, 8 et 16.
2. Soit $n \geq 1$ et N un entier de n chiffres, tous égaux à 1 ou à 2, divisible par 2^n : $N = 2^n q$ avec $q \in \mathbb{N}$. a) Montrer que $10^n + N = 2^n (5^n + q)$ et $2 \times 10^n + N = 2^n (2 \times 5^n + q)$. b) Selon la parité de q , montrer que l'un de ces deux nombres est divisible par 2^{n+1} .
3. En déduire par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, il existe un entier de n chiffres, tous égaux à 1 ou à 2, divisible par 2^n . Construire ceux de 5, 6 et 7 chiffres.
4. *Unicité.* Si un tel entier de $n+1$ chiffres est divisible par 2^{n+1} , ses n derniers chiffres forment un multiple de 2^n : pourquoi ? En déduire par récurrence que l'entier de la question 3 est unique.

Exercice 65 QCM de raisonnements (ENSA, ENSAM) ★★★★★

corrigé p. 65

1. Les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n > n^2 + n$ sont : (A) les $n \geq 5$ (B) 0 et les $n \geq 5$ (C) les $n \geq 4$ (D) tous.
2. Le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 7 est : (A) 4 (B) 1 (C) 2 (D) 6.
3. Nombre de $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 + 2n + 12$ soit un carré : (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) infini.
4. Nombre de solutions réelles de $|x - 1| + |x - 3| = 2$: (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) infini.
5. Un seul de ces nombres est rationnel : (A) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ (D) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.
6. $P(n)$: « 5 divise $6^n + 3$ ». (A) $P(0)$ est vraie. (B) $P(n)$ est vraie pour tout n . (C) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout n , mais $P(n)$ est toujours fausse. (D) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est fausse pour un n .

Exercice 66 Quand $x + \frac{1}{x}$ est un entier ★★★★★

corrigé p. 66

Soit $x \neq 0$ réel, $a = x + \frac{1}{x}$ et $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ ($u_0 = 2, u_1 = a$).

1. Montrer que $a^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ (a-t-on $x + \frac{1}{x} = 1$?), $u_2 = a^2 - 2$, $u_{n+1} = a u_n - u_{n-1}$; donner u_3 .
2. Si $a \in \mathbb{Z}$, montrer par récurrence que $P(n)$: « u_{n-1} et u_n sont entiers » est vraie pour $n \geq 1$.
3. Si $x + \frac{1}{x} = 3$, calculer $u_2, \dots, u_5$ sans x . Si $u_2 \in \mathbb{Z}$, a-t-on $a \in \mathbb{Z}$? (cas $a = \sqrt{5}$: u_2 ? u_3 ?)
4. Pour $a = 3$, montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que u_{3k} est pair et u_{3k+1}, u_{3k+2} impairs ; en déduire : u_n pair $\iff 3 \mid n$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

26 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

- a) Proposition **V** : $161 = 7 \times 23$. b) Proposition **F** : $(-3)^2 = 9$. c) Proposition **F** : $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18} \neq \sqrt{10}$. d) Pas une proposition (un ordre). e) Pas une proposition : sa valeur de vérité dépend de x (c'est une fonction propositionnelle, vraie seulement pour $x = 3$). f) Pas une proposition (une question). g) Proposition **F**. h) Proposition **F** : 6 est multiple de 6 mais pas de 4 (contre-exemple). i) Proposition **F** : $10^{-3} = 0,001 < 0,01 = 10^{-2}$.
- On calcule $n^2 + n$, puis on regarde s'il est multiple de 4 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 + n$	0	2	6	12	20	30	42	56
$P(n)$	V	F	F	V	V	F	F	V

- $Q(1, 5)$: $2 + 5 = 7$, **V** ; $Q(3, 1)$: $6 + 1 = 7$, **V** ; $Q(2, 2)$: $4 + 2 = 6 \neq 7$, **F**. $Q(x, y)$ vraie $\iff y = 7 - 2x$; il faut $y \geq 0$, donc $x \leq 3$: $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 1)$.

■ Corrigé de l'exercice 2

- P est **V** ($84 = 7 \times 12$) ; Q est **F** ($3^4 = 81 > 80$) ; R est **V** ($2,7^2 = 7,29 > 7$ et deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés). Donc : $\overline{Q}$: **V** ; P et Q : **F** (Q est fausse) ; P ou Q : **V** (P est vraie) ; $\overline{P}$ ou R : **V** (R est vraie) ; Q et R : **V** (Q et R est fausse) ; $(P$ ou $Q)$ et $\overline{R}$: **F** ($\overline{R}$ est fausse) ; $\overline{P}$ et $\overline{Q}$: **F** ($\overline{P}$ est fausse).
- « Et » exige les deux conditions. Amine ($13 < 14$) et Sara ($14 < 15$) ne sont pas admis, Omar non plus : seule Yasmine est admise. « Ou » en exige au moins une : Amine (maths), Sara (physique) et Yasmine ; pas Omar. **Loi de Morgan** : $M \geq 15$ et $P \geq 14 \iff \overline{M < 15 \text{ ou } P < 14}$ (M, P : notes de maths et de physique).

■ Corrigé de l'exercice 3

P	Q	$\overline{P}$	A	P ou Q	P et Q	B	C	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow \overline{P}$	D
V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	V

- On calcule colonne par colonne (une implication n'est fausse que dans le cas **V** $\Rightarrow$ **F** ; une équivalence est vraie quand les deux membres ont la même valeur) : voir le tableau.
- La colonne B ne contient que des **V** : B est une tautologie. La colonne C ne contient que des **F** : C est toujours fausse (P et $\overline{P}$ n'ont jamais la même valeur). Les colonnes A et P ou Q sont

identiques : $A \iff P \text{ ou } Q$; les colonnes D et $\bar{P}$ aussi : $D \iff \bar{P}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- a) Si $x = 2$, alors $x^2 - 3x + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$: $x = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. Réciproque fausse : $x = 1$ annule le trinôme. « $x = 2$ » est **suffisante, non nécessaire**.

b) Un nombre premier $n > 2$ n'est pas divisible par 2 (sinon 2 serait un diviseur autre que 1 et n) : il est impair ; donc $\Rightarrow$. Réciproque fausse : 9 est impair et non premier. **Suffisante, non nécessaire**.

c) $|x - 1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$: $\Leftrightarrow$, **nécessaire et suffisante**. d) $x^2 \geq 0$, avec $x^2 = 0 \iff x = 0$: $x \neq 0 \iff x^2 > 0$, **nécessaire et suffisante**.

e) Théorème de Pythagore ($\Rightarrow$) et sa réciproque ($\Leftarrow$) : $\Leftrightarrow$, **nécessaire et suffisante**. f) Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x + y > 0$: $x + y > 0 \Leftarrow (x > 0 \text{ et } y > 0)$; pas $\Rightarrow$: $x = 2, y = -1$. « $x + y > 0$ » est **nécessaire, non suffisante**.
- (I) est **V** : un entier qui se termine par 5 s'écrit $10q + 5 = 5(2q + 1)$. *Réciproque* : « si un entier est divisible par 5, alors il se termine par 5 » : **F** (10). *Contraposée* : « si un entier n'est pas divisible par 5, alors il ne se termine pas par 5 » : **V** (même valeur que (I)). *Négation* : « il existe un entier qui se termine par 5 et qui n'est pas divisible par 5 » : **F**.

■ Corrigé de l'exercice 5

- a) « Pour tout réel x , $(x - 2)^2 \geq 0$ » : **V** (un carré est positif). b) « Il existe un rationnel de carré 2 » : **F** : les seuls réels de carré 2 sont $\pm\sqrt{2}$, irrationnels (cours). c) « Il existe un entier naturel égal à son carré » : **V** (0). d) « Il en existe un seul » : **F** : $n^2 = n \iff n(n - 1) = 0 \iff n \in \{0, 1\}$, il y en a deux. e) « Tout réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue » : **V** : si $x \geq 0$, $|x| = x$; si $x < 0$, $|x| > 0 > x$. f) « Un réel est strictement supérieur à sa valeur absolue » : **F** : c'est la **négation** de e). g) **V** : on prend pour N le symétrique de M par rapport à O (N dépend de M). h) **F** : un tel N conviendrait pour $M = O$, donc $N = O$; mais pour $M \neq O$, O n'est pas le milieu de $[MO]$. **L'ordre des quantificateurs change le sens** : en h), le même N devrait servir pour tous les M .
- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: **V**. b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 50$: **F** ($7^2 = 49 < 50 < 64 = 8^2$). c) $\exists x \in]0, 1[, x^2 = \frac{1}{2}$: **V** ($x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$). d) $\exists x \in]-\infty, 0[, x = \frac{1}{x}$: **V** ($x = -1$).

■ Corrigé de l'exercice 6

- a) $x > 3$. b) Loi de Morgan : $x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$. c) $0 < x \leq 7$ signifie « $x > 0$ et $x \leq 7$ » : négation $x \leq 0 \text{ ou } x > 7$. d) Négation d'une implication : $4 \mid n \text{ et } n \text{ est impair}$.
- a) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 25 < 10x$. La proposition est vraie : $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \geq 0$. b) Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, 3n + 1 \neq 20$. C'est la négation qui est vraie : $3n = 19$ est impossible, 19 n'étant pas multiple de 3. c) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 = 9 \text{ et } x \neq 3)$. La négation est vraie : $x = -3$. d) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \leq x^2$. La proposition est vraie : pour x donné, $y = x^2 + 1$ convient.
- « Au moins un élève de la classe n'a lu aucun livre ce mois-ci. » 4. Pour $(x, y) = (1, -1)$, « $x > 0$ et $y > 0$ » est fausse ($y < 0$) : sa négation devrait être vraie ; or « $x \leq 0$ et $y \leq 0$ » est fausse ($x = 1$). Ce n'est donc pas la négation. Loi de Morgan : $x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0$.

■ Corrigé de l'exercice 7

1. a) $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 5 = 6$, $T_3 = 6 + 9 = 15$; et $1 \times 1 = 1$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 5 = 15$. b) Notons $\mathcal{P}(n)$: « $T_n = n(2n - 1)$ ».

Initialisation. $T_1 = 1 = 1 \times (2 \times 1 - 1)$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Le $(n+1)$ -ième terme est $4(n+1) - 3 = 4n + 1$, donc

$$T_{n+1} = T_n + (4n + 1) = 2n^2 - n + 4n + 1 = 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1) = (n+1)(2(n+1)-1) : \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = n(2n - 1)$. c) $4n - 3 = 397 \iff n = 100$: la somme vaut $T_{100} = 100 \times 199 = \boxed{19\,900}$.

2. Notons S_n la somme et $\mathcal{P}(n)$: « $S_n = n(n+1)^2$ ». **Initialisation.** $S_1 = 1 \times 4 = 4 = 1 \times 2^2$.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$. Le terme suivant est $(n+1)(3(n+1)+1) = (n+1)(3n+4)$, donc

$$S_{n+1} = n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4) = (n+1)(n^2 + n + 3n + 4) = (n+1)(n+2)^2 : \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 4 + 2 \times 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

■ Corrigé de l'exercice 8

1. $\mathcal{P}(n)$: « $4 \mid 3^{2n+1} + 1$ ». **Initialisation.** $3^1 + 1 = 4$. **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $3^{2n+1} + 1 = 4q$ ($q \in \mathbb{N}$). Alors $3^{2n+3} + 1 = 9 \times 3^{2n+1} + 1 = 9(3^{2n+1} + 1) - 8 = 4(9q - 2)$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \mid 3^{2n+1} + 1$.
2. $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geq n + 1$ ». **Initialisation.** $2^0 = 1 \geq 1$. **Hérédité.** Supposons $2^n \geq n + 1$ pour un entier $n \geq 0$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2$ (car $n \geq 0$): $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.
3. $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$, $u_2 = 11$, $u_3 = 19$ (et $2^2 + 3 = 7$, $2^3 + 3 = 11$, $2^4 + 3 = 19$). $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^{n+1} + 3$ ». **Initialisation.** $u_0 = 5 = 2^1 + 3$. **Hérédité.** Si $u_n = 2^{n+1} + 3$ pour un $n \geq 0$, alors $u_{n+1} = 2(2^{n+1} + 3) - 3 = 2^{n+2} + 3$. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 3$; $u_{10} = 2^{11} + 3 = \boxed{2051}$.

27

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

On note $X = (P \text{ et } Q) \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$, $G = (P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ et $H = (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Leftrightarrow \bar{Q}$	$P \text{ et } Q$	$\bar{P} \text{ et } \bar{Q}$	X
V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V

P	Q	R	$P \text{ ou } Q$	G	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	H
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

1. a) Table de gauche. b) La colonne de $P \Leftrightarrow \bar{Q}$ est, ligne par ligne, le contraire de celle de $P \Leftrightarrow Q$: $\boxed{P \Leftrightarrow \bar{Q} \iff (P \Leftrightarrow Q)}$. La colonne X est celle de $P \Leftrightarrow Q$: $\boxed{(P \Leftrightarrow Q) \iff X}$.
2. a) Table de droite: les colonnes G et H sont identiques, donc $G \Leftrightarrow H$ est une **tautologie**.

b) Avec P : « $x \leq -2$ », Q : « $x \geq 2$ », R : « $x^2 \geq 4$ », il suffit de démontrer les deux implications $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$ et $x \leq -2 \Rightarrow x^2 \geq 4$. Si $x \geq 2$: x et 2 sont positifs, donc $x^2 = x \times x \geq 2 \times 2 = 4$. Si $x \leq -2$: $-x \geq 2$, donc $x^2 = (-x)^2 \geq 4$.

3. Négation d'une implication et double négation : $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \text{ et } \overline{Q} \Leftrightarrow P \text{ et } \overline{Q}$. Loi de Morgan : $\overline{P \text{ ou } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$. La proposition équivaut donc à $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$, c'est-à-dire, d'après 1.b), à $\boxed{P \Leftrightarrow Q}$.

■ Corrigé de l'exercice 10

- $\overline{P_1} : \exists x \in \mathbb{R}, |x+1| > |x| + 1$; $\overline{P_2} : \forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+9}{n+1} \notin \mathbb{N}$;
 $\overline{P_3} : (\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+9}{n+1} \notin \mathbb{N}) \text{ ou } (\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \neq m \text{ et } \frac{2n+9}{n+1} \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{2m+9}{m+1} \in \mathbb{N})$;
 $\overline{P_4} : \exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 2ab$; $\overline{P_5} : \forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 2ab$;
 $\overline{P_6} : \exists x \in \mathbb{R}, (x^2 > x \text{ et } x \leq 1)$;
 $\overline{P_7} : (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + |x| \neq 0) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y \text{ et } x^2 + |x| = 0 \text{ et } y^2 + |y| = 0)$.
- P_1 est **V** : les deux membres sont positifs et $(|x| + 1)^2 - (x + 1)^2 = 2(|x| - x) \geq 0$. P_2 est **V** : $n = 0$ donne $9 \in \mathbb{N}$. P_3 est **F** : $n = 0$ et $n = 6$ conviennent (question 3). P_4 est **V** : pour a donné, $b = a$ convient. P_5 est **F** : pour tout b , le réel $a = b + 1$ donne $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = 1 \neq 0$: $\overline{P_5}$ est vraie. P_6 est **F** : $x = -1$ vérifie $x^2 = 1 > -1 = x$ et $x \leq 1$. P_7 est **V** : $x = 0$ convient ; et si $x^2 + |x| = 0$, une somme de deux réels positifs étant nulle, $x^2 = 0$, donc $x = 0$.
- a) $2 + \frac{7}{n+1} = \frac{2(n+1)+7}{n+1} = \frac{2n+9}{n+1}$. Donc $\frac{2n+9}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{7}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 \text{ divise } 7 \Leftrightarrow n+1 \in \{1, 7\}$: $\boxed{n \in \{0, 6\}}$ (valeurs 9 et 3).
 b) Avec $t = |x| \geq 0$, $x^2 = t^2$: $t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ($t = -2 < 0$ est exclu) ; $|x| = 1$: $\boxed{x \in \{-1, 1\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 11

- a) **Raisonnons par contraposée** : montrons « si $3 \nmid n$, alors $3 \nmid n^2$ ». Si $3 \nmid n$, alors $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) : $(3k+1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ et $(3k+2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$; dans les deux cas n^2 a pour reste 1 dans la division par 3 : $3 \nmid n^2$. Par contraposée, $\boxed{3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n}$.
 b) **Raisonnons par l'absurde** : supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ sans diviseur commun autre que 1. Alors $p^2 = 3q^2$, donc $3 \mid p^2$, et $3 \mid p$ par a) : $p = 3p'$. Il vient $9p'^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3p'^2$: $3 \mid q^2$, donc $3 \mid q$. Ainsi 3 divise p et q : contradiction. Donc $\boxed{\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}}$.
- a) **Raisonnons par l'absurde** : supposons $\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$ avec $x > 0$. En élevant au carré : $x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$, d'où $x = 0$: contradiction avec $x > 0$. Donc $\sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1$.
 b) **Raisonnons par l'absurde** : supposons $a^2 + b^2 = 1$ et $a + b > \sqrt{2}$. Les deux membres étant positifs, $(a + b)^2 > 2$, soit $1 + 2ab > 2$, donc $2ab > 1$. Alors $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 1 - 2ab < 0$: impossible. Donc $\boxed{a + b \leq \sqrt{2}}$ (égalité pour $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$).
- a) **Disjonction des cas**. Si $x \geq 0$: $x^2 + \frac{1}{4} - |x| = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Si $x < 0$: $x^2 + \frac{1}{4} - |x| = x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Donc $|x| \leq x^2 + \frac{1}{4}$ pour tout réel x , avec égalité si et seulement si $\boxed{x = \pm \frac{1}{2}}$.
 b) Si $x \geq 0$: $x^2 = 4x \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$ (tous deux ≥ 0). Si $x < 0$: $-x^2 = 4x \Leftrightarrow x(x + 4) = 0$; seul -4 est < 0 . $\boxed{S = \{-4, 0, 4\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. Notons $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{n}{2^n}$ et $\mathcal{P}(n)$: « $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ ». **Initialisation.** $S_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$.
Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$: $S_{n+1} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$; comme $\frac{n+2}{2^n} > 0$, $\boxed{S_n < 2}$.
2. $\mathcal{P}(n)$: « $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ ». **Initialisation.** $2 + 3 = 5$. **Hérédité.** Supposons $2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 5q$ ($q \in \mathbb{N}$) pour un $n \geq 0$. Alors

$$2^{2n+3} + 3^{2n+3} = 4 \times 2^{2n+1} + 9 \times 3^{2n+1} = 4(2^{2n+1} + 3^{2n+1}) + 5 \times 3^{2n+1} = 5(4q + 3^{2n+1}).$$
Conclusion. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$.
3. Notons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et $\mathcal{P}(n)$: « $H_n \leq \frac{n+1}{2}$ ». **Initialisation.** $H_1 = 1 = \frac{2}{2}$. **Hérédité.** Supposons $H_n \leq \frac{n+1}{2}$ pour un $n \geq 1$. Comme $n+1 \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$, donc $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}$.
Conclusion. l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **Égalité :** $H_1 = 1$ et $H_2 = \frac{3}{2}$ conviennent ; pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$ rend l'inégalité stricte à partir de $n = 3$: égalité $\iff \boxed{n \in \{1, 2\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. a) **Deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés.** $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = 10 + 2\sqrt{21}$ et $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = 10 + 2\sqrt{16} = 18$; or $\sqrt{21} > \sqrt{16}$: $\boxed{\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{2} + \sqrt{8}}$.
 b) Pour $x \geq 1$, les deux membres sont positifs ; donc

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \leq 2\sqrt{x} \iff 2x + 2\sqrt{x^2-1} \leq 4x \iff \sqrt{x^2-1} \leq x \iff x^2-1 \leq x^2 \iff -1 \leq 0,$$
 ce qui est vrai (à l'avant-dernière étape, les deux membres sont positifs). L'égalité exigerait $x^2-1 = x^2$: **jamais d'égalité.**
2. a) Erreur : $A^2 = B^2 \iff (A = B \text{ ou } A = -B)$. Ici : $x-1 = 2x+1$ ($x = -2$) ou $x-1 = -2x-1$ ($x = 0$) : $\boxed{S = \{-2, 0\}}$.
 b) Erreur : multiplier par x ne conserve le sens que si $x > 0$. Si $x > 0$: $\frac{1}{x} < 2 \iff 1 < 2x \iff x > \frac{1}{2}$. Si $x < 0$: $\frac{1}{x} < 0 < 2$, toujours vrai. $\boxed{S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[}$.
 c) Deux erreurs : diviser par x fait perdre $x = 0$, et $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$. Correctement : $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0$: $\boxed{S = \{-2, 0, 2\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. $n^2 + n = n(n+1)$. **Disjonction des cas :** si $n = 3k$, $n(n+1) = 3k(3k+1)$ est multiple de 3 ; si $n = 3k+1$, $(3k+1)(3k+2) = 3(3k^2 + 3k) + 2$ ne l'est pas ; si $n = 3k+2$, $(3k+2)(3k+3) = 3(3k+2)(k+1)$ l'est. Donc $3 \mid n^2 + n \iff (3 \mid n \text{ ou } 3 \mid n+1)$.
 a) **Suffisante, non nécessaire** ($n = 2 : 3 \mid 6$ mais $3 \nmid 2$). b) **Nécessaire et suffisante.** c) **Ni l'un ni l'autre :** $n = 1$ est impair et $3 \nmid 2$; $n = 2$ n'est pas impair et $3 \mid 6$.
2. Si $a = b = 0$, alors $a+b = 0$, $|a| + |b| = 0$ et $ab = 0$: les trois conditions sont **nécessaires**. $a+b = 0$ n'est pas suffisante ($a = 1, b = -1$) ; $ab = 0$ non plus ($a = 0, b = 1$). $|a| + |b| = 0$ est suffisante : $|a|$ et $|b|$ sont positifs de somme nulle, donc nuls. $\boxed{|a| + |b| = 0 \text{ est nécessaire et suffisante.}}$
3. $M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = 5 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ (distance, puis carrés de réels positifs) : c) est **nécessaire et suffisante**. a) $3^2 + 4^2 = 25$: $(4, 6) \in \mathcal{C}$; **suffisante, non nécessaire** ($(6, 2) \in \mathcal{C}$). b) Si $M \in \mathcal{C}$, $(x-1)^2 \leq 25$, donc $|x-1| \leq 5$: **nécessaire** ; non suffisante : $\Omega(1, 2)$ vérifie $|1-1| \leq 5$ sans être sur $\mathcal{C}$.

■ Corrigé de l'exercice 15

a) **Faux** : $n = 1, 2, 3$ donnent 3, 7, 13, premiers, mais $n = 4$ donne $21 = 3 \times 7$. b) **Faux** : $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ sont irrationnels (si $1 \pm \sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \pm(r - 1) \in \mathbb{Q}$), et leur somme vaut 2. c) **Faux** : $6 \mid 2 \times 3$, mais $6 \nmid 2$ et $6 \nmid 3$ (c'est vrai si a est premier). d) **Vrai** : si $d \geq 1$ divise n et $n + 1$, il divise leur différence 1, donc $d = 1$. e) **Faux** : $n = 2 : 4 \mid 4$ mais $4 \nmid 2$. f) **Faux** : deux lampes identiques montées en dérivation aux bornes d'un générateur sont soumises à la même tension et traversées par des courants de même intensité, sans être en série. g) **Vrai** : le rectangle 3×6 a pour aire 18 et pour périmètre $2(3+6) = 18$ (plus généralement $ab = 2(a+b) \iff (a-2)(b-2) = 4$).

■ Corrigé de l'exercice 16

- $\forall x \in I, \forall y \in I, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$; négation : $\exists x \in I, \exists y \in I, (x \leq y \text{ et } f(x) > f(y))$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$; négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$. c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(a)$; négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > f(a)$.
 - $\exists x \in I, f(x) = 0$; négation : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
- $(x-3)^2 - 5 = x^2 - 6x + 4$. On applique les négations du 1. : $0 \leq 3$ dans $[0, 6]$ et $f(0) = 4 > f(3) = -5$: **f n'est pas croissante** sur $[0, 6]$; $f(-1) = 11 \neq f(1) = -1$: **f n'est pas paire**. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x = |a| + 7$: $x - 3 = |a| + 4 > 0$ et $|a - 3| \leq |a| + 3 < |a| + 4$, donc $(x - 3)^2 > (a - 3)^2$ et $f(x) > f(a)$: **f n'admet de maximum en aucun réel**. (En revanche $f(x) \geq -5 = f(3)$: minimum en 3.) Enfin $f(x) = 0 \iff (x - 3)^2 = 5 \iff x = 3 \pm \sqrt{5}$, et $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$ donne $3 - \sqrt{5} \in [0, 1]$: **f s'annule sur $[0, 1]$** .

28

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- Le déterminant du système est $1 \times a - 2 \times 2 = a - 4$. Si $a \neq 4$: une unique solution. Si $a = 4$: la première équation équivaut à $2x + 4y = 6$; la seconde s'écrit $2x + 4y = b$: si $b \neq 6$, elles sont incompatibles (**aucune** solution) ; si $b = 6$, elles sont équivalentes (**une infinité** : $(3 - 2y, y)$, $y \in \mathbb{R}$).
- A est **F** ; négation : $\exists a, \exists b, (S_{a,b})$ n'a aucune solution : vraie avec $(a, b) = (4, 0)$.
B est **V** : pour tout $a, b = 6$ convient $((3, 0)$ est solution, car $3 + 0 = 3$ et $6 + 0 = 6$). Négation : $\exists a, \forall b, (S_{a,b})$ n'a aucune solution.
C est **V** : $a = 0 \neq 4$ donne une unique solution pour tout b . Négation : $\forall a, \exists b, (S_{a,b})$ n'a pas une unique solution.
D est **F** ; négation : $\exists b, \forall a, (S_{a,b})$ a au moins une solution : vraie avec $b = 6$ (comme pour B).
E est **F** ; négation : $\forall b, \exists a, (S_{a,b})$ n'a pas une unique solution : vraie avec $a = 4$.
- D'après 1. : $\forall b, (S_{a,b})$ a une solution $\iff a \neq 4$: **tous les réels $a \neq 4$** . $\forall a, (S_{a,b})$ a une solution $\iff (a = 4 \text{ compris}) b = 6$: **$b = 6$** . On retrouve la négation de D : « $\exists b, \forall a, (S_{a,b})$ a une solution » est vraie.

■ Corrigé de l'exercice 18

- Disjonction des cas**. $n = 3k$: $N = 9k^2 + 3k + 1 = 3(3k^2 + k) + 1$; $n = 3k + 1$: $N = 9k^2 + 9k + 3 = 3(3k^2 + 3k + 1)$; $n = 3k + 2$: $N = 9k^2 + 15k + 7 = 3(3k^2 + 5k + 2) + 1$. Seul le cas $n = 3k + 1$ donne un multiple de 3 : **$3 \mid N \iff n = 3k + 1$** .
 - Si $n = 3k + 1$: $N = 9(k^2 + k) + 3$, de reste $r = 3$: $9 \nmid N$. Dans les autres cas, $3 \nmid N$, donc $9 \nmid N$. Ainsi **9 ne divise jamais N**. c) $2026 = 3 \times 675 + 1$: $2026^2 + 2026 + 1 = 4\,106\,703$ est **divisible par**

3 ($= 3 \times 1\,368\,901$), pas par 9.

2. Si $x \leq 0$: $|x^2 - 1| \geq 0 \geq 2x$, pas de solution ; donc $x > 0$. Cas $x \geq 1$: $x^2 - 1 \geq 0$ et l'inéquation devient $x^2 - 2x - 1 < 0 \iff 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$: on garde $[1, 1 + \sqrt{2}[$. Cas $0 < x < 1$: elle devient $1 - x^2 < 2x \iff x^2 + 2x - 1 > 0 \iff x < -1 - \sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2} - 1$: on garde $]\sqrt{2} - 1, 1[$.

$$S =]\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1[.$$

■ Corrigé de l'exercice 19

1. a) **Raisonnons par contraposée** : montrons « si $x^3 + 5x = 6$, alors $x = 1$ ». En développant, $(x - 1)(x^2 + x + 6) = x^3 + 5x - 6$, et $x^2 + x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0$. Donc $x^3 + 5x = 6 \Rightarrow x - 1 = 0$: c'est démontré.
- b) La négation de « $x \neq y$ et $x + y \neq 0$ » est « $x = y$ ou $x + y = 0$ » (Morgan). **Raisonnons par contraposée** : montrons « si $x^2 = y^2$, alors $x = y$ ou $x = -y$ ». Or $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$; si $x^2 = y^2$, ce produit est nul, donc $x - y = 0$ ou $x + y = 0$: c'est démontré. Par contraposée, $(x \neq y \text{ et } x + y \neq 0) \Rightarrow x^2 \neq y^2$.
2. a) **Raisonnons par l'absurde** : supposons $x^2 = ax + b$ pour tout réel x . Avec $x = 0$: $b = 0$; avec $x = 1$: $a + b = 1$, donc $a = 1$; avec $x = -1$: $1 = -a + b = -1$: contradiction.
- b) **Par l'absurde** : avec $x = 0$: $c = 0$; $x = 1$: $a + b = 1$; $x = -1$: $a - b = 1$; d'où $a = 1$, $b = 0$, et $|x| = x^2$ pour tout x ; or $x = 2$ donne $2 = 4$: contradiction.
3. **Raisonnons par l'absurde** : supposons $r = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = r + r\sqrt{2}$, soit $\sqrt{2}(1 - r) = r$. Si $r = 1$, on obtient $0 = 1$: impossible ; donc $r \neq 1$ et $\sqrt{2} = \frac{r}{1-r} \in \mathbb{Q}$: contradiction avec $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Contrôle : $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.)

■ Corrigé de l'exercice 20

1. Amine : $a \neq 1$ (négation : $a = 1$) ; Basma : $c = 1$ (négation : $c \neq 1$) ; Chadi : $d > b$ (négation : $d < b$, car $d \neq b$) ; Douae : $a = d - 1$ (négation : $a \neq d - 1$).
2. *Toutes vraies*. $c = 1$, donc a, b, d valent 2, 3, 4, avec $d = a + 1$ et $d > b$. Si $(a, d) = (2, 3)$, alors $b = 4 > d$: exclu. Si $(a, d) = (3, 4)$, alors $b = 2 < d$: convient. Ordre unique : Chadi, Basma, Amine, Douae.
- Toutes fausses*. $a = 1$ (et $c \neq 1$ en découle), $d < b$, $d \neq a + 1 = 2$: donc $d \in \{3, 4\}$ et $d < b \leq 4$ imposent $d = 3$, $b = 4$, puis $c = 2$. Ordre unique : Amine, Chadi, Douae, Basma.
3. **Non** : Basma, Amine, Douae, Chadi (seule Basma se trompe) et Chadi, Amine, Basma, Douae (seule Douae se trompe) conviennent tous deux ; l'énumération des 24 ordres en donne 5.

■ Corrigé de l'exercice 21

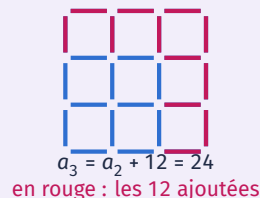
P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	E	$Q \Leftrightarrow R$	F
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V	F

1. Table ci-contre : les colonnes E et F sont identiques ; $((P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R))$: l'équivalence est **associative**.
2. E est vraie aux lignes 1, 4, 6, 7, qui comptent 0 ou 2 propositions fausses, et fausse aux lignes 2, 3, 5, 8, qui en comptent 1 ou 3 : E est vraie $\iff$ le nombre de propositions fausses est **pair**.

3. Avec $X = P \Leftrightarrow Q$ et la loi appliquée à X et R : $(\bar{P} \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \bar{X} \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \overline{X \Leftrightarrow R} = \bar{E}$. De même, $\overline{P \Leftrightarrow Q} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \bar{Q})$ (exercice 9) donne $(P \Leftrightarrow \bar{Q}) \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \bar{E}$, et $X \Leftrightarrow \bar{R} \Leftrightarrow \overline{X \Leftrightarrow R} = \bar{E}$. Dans les trois cas, E change de valeur (en 2. : la parité du nombre de « faux » change).

■ Corrigé de l'exercice 22

1. a) $a_3 = 24$ (figure : 3×3). Le quadrillage $n \times n$ compte $n + 1$ lignes horizontales de n allumettes et autant de colonnes verticales. Pour passer à $(n+1) \times (n+1)$, on ajoute une allumette à chacune des $n + 1$ lignes horizontales et une nouvelle ligne de $n + 1$ allumettes, soit $2(n + 1)$; de même verticalement : $a_{n+1} = a_n + 4(n + 1)$.



- b) $\mathcal{P}(n)$: « $a_n = 2n(n + 1)$ ». **Initialisation.** $a_1 = 4 = 2 \times 1 \times 2$. **Hérédité.** Si $a_n = 2n(n + 1)$ pour un $n \geq 1$, alors $a_{n+1} = 2n(n + 1) + 4(n + 1) = 2(n + 1)(n + 2)$. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2n(n + 1)$.
- c) $a_{10} = 2 \times 10 \times 11 = 220$. Il faut $n(n + 1) \leq 500$: $21 \times 22 = 462 \leq 500 < 506 = 22 \times 23$: au plus un quadrillage 21×21 (924 allumettes).
2. $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$, $u_4 = \frac{4}{5}$: conjecture $u_n = \frac{n}{n+1}$. $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n = \frac{n}{n+1}$ ».
- Initialisation.** $u_0 = 0 = \frac{0}{1}$. **Hérédité.** Si $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour un $n \geq 0$, alors $u_n < 1$, donc $u_n \neq 2$ et u_{n+1} existe : $u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2-n} = \frac{n+1}{n+2}$. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. $\mathcal{P}(n)$: « $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ». **Initialisation.** $11^2 + 12 = 121 + 12 = 133$. **Hérédité.** Supposons $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133q$ ($q \in \mathbb{N}$) pour un $n \geq 0$. Alors $11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \times 11^{n+2} + 144 \times 12^{2n+1} = 11(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \times 12^{2n+1} = 133(11q + 12^{2n+1})$. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$. Avec $n = 2026$: $133 = 7 \times 19$ divise $11^{2028} + 12^{4053}$, donc 7 et 19 aussi.
2. **L'hérédité doit être vraie pour tout $n \geq 1$;** or elle est fausse pour $n = 1$: les groupes $\{c_1\}$ et $\{c_2\}$ n'ont aucun crayon commun (l'argument « c_2 est commun » suppose $n \geq 2$). Ainsi $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ n'est pas démontrée — et $\mathcal{P}(2)$ est bien fausse.

29

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. (B) : « $\forall$ patient, $\exists$ vaccin reçu » se nie en « $\exists$ patient, $\forall$ vaccin, non reçu ».
2. (A) : $|x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$, donc $|x| \leq 3$ et $x^2 \leq 9$: nécessaire. Non suffisante : $x = -2$ vérifie $x^2 = 4 \leq 9$, mais $|-2 - 1| = 3 > 2$.
3. (C) : P et $\bar{Q} \Leftrightarrow \bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ (négation d'une implication), et une proposition s'implique elle-même. (A) est fausse pour P **F**, Q **V** ; (B) pour P , Q **F** ; (D) pour P **F**, Q **V**.
4. (A) : **Initialisation.** $8^0 + 6 = 7$; **Hérédité.** si $8^n + 6 = 7q$, alors $8^{n+1} + 6 = 8(8^n + 6) - 42 = 7(8q - 6)$; **Conclusion.** vraie pour tout n ((B), (C), (D) sont donc fausses).
5. (B) : **astuce de QCM : tester de petites valeurs.** $n = 1$ (somme 2) élimine (A) et (D) ; $n = 2$ (somme 7) élimine (C) (10). Preuve par récurrence : $\frac{3n^2+n}{2} + (3n+2) = \frac{3n^2+7n+4}{2} = \frac{3(n+1)^2+(n+1)}{2}$.

6. (C) : l'implication n'est fausse que si n est pair et non multiple de 3 : 50 pairs, dont 16 multiples de 6, soit 34 cas faux ; $100 - 34 = 66$.

■ Corrigé de l'exercice 25

- (C) : pour y donné, $x^2 - yx - 1 = 0$ a pour discriminant $y^2 + 4 > 0$: $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ convient. (A) est fausse ($x = -1$) ; (B) aussi ($x = y + 1$ contredit) ; (D) aussi : $|x|^2 = |x| \iff |x| \in \{0, 1\}$, soit trois réels $-1, 0, 1$.
- (D) : avec $t = |x|$, $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0$, donc $|x| \in \{1, 2\}$: $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
- (B) : $u_1 = 3$; (A) et (D) donnent $u_0 = 3$, (C) donne $u_2 = 6 \neq 9$. Récurrence : $u_0 = 0 = 3(1 - 1)$, et si $u_n = 3(2^n - 1)$, $u_{n+1} = 6(2^n - 1) + 3 = 3(2^{n+1} - 1)$.
- (D) : l'équivalence est vraie quand les deux sont vraies ($12 \mid n$: 8 entiers) ou toutes deux fausses : 25 multiples de 4, 16 de 6, 8 des deux, d'où $25 + 16 - 8 = 33$ multiples de 4 ou de 6 et 67 ni l'un ni l'autre ; $8 + 67 = 75$.
- (C) : « $\exists !$ » signifie « il existe une solution et il n'en existe pas deux distinctes » ; sa négation (Morgan) est « aucune solution ou au moins deux solutions distinctes ».

■ Corrigé de l'exercice 26

- Chaque pièce retournée change N de $+1$ ou -1 ; deux pièces le changent de $-2, 0$ ou $+2$, un nombre pair. $\mathcal{P}(k)$: « N_k est pair ». **Initialisation.** $N_0 = 0$. **Hérédité.** si N_k est pair, $N_{k+1} = N_k + \delta$ avec $\delta \in \{-2, 0, 2\}$ est pair. **Conclusion.** N_k est pair pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - Par l'absurde** : si l'on obtenait neuf « piles » après k coups, on aurait $N_k = 9$, impair : contradiction. **Impossible.** c) Si n est impair, le même argument montre que c'est impossible ; si n est pair, on retourne les pièces deux par deux ($\frac{n}{2}$ coups). Donc c'est possible **si et seulement si n est pair**.
- Une pièce finit côté « pile » si et seulement si elle a été retournée un nombre impair de fois, donc au moins une fois. En k coups, on effectue $3k$ retournements, au moins un par pièce : $3k \geq 10$, d'où $k \geq 4$. Quatre coups suffisent (pièces numérotées de 1 à 10) : $\{1, 2, 10\}$, $\{3, 4, 10\}$, $\{5, 6, 10\}$, $\{7, 8, 9\}$: la pièce 10 est retournée 3 fois, les autres une fois.

■ Corrigé de l'exercice 27

- Initialisation.** $n = 0$: parmi $2^0 = 1$ entier, le nombre est connu sans question. **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Parmi 2^{n+1} entiers, on forme deux moitiés G_1, G_2 de 2^n entiers et l'on demande : « ton nombre est-il dans G_1 ? ». Après la réponse, il reste 2^n nombres possibles, et n questions suffisent par $\mathcal{P}(n)$: en tout $n + 1$. **Conclusion.** $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation.** $n = 0$: sans question, les (au moins) 2 entiers restent possibles. **Hérédité.** Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie et prenons une stratégie à $n + 1$ questions et un groupe G d'au moins $2^{n+1} + 1$ entiers. La première question partage G en O (réponse « oui ») et N (réponse « non »). **Par l'absurde**, si O et N avaient chacun au plus 2^n éléments, G en aurait au plus 2^{n+1} : contradiction. L'un d'eux, disons O , a donc au moins $2^n + 1$ éléments. Si Imane choisit dans O , les n questions suivantes forment une stratégie à n questions pour le groupe O : par $\mathcal{Q}(n)$, un choix dans O laisse à la fin au moins deux nombres possibles. **Conclusion.** $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n .
- $2^9 = 512 < 1000 \leq 1024 = 2^{10}$. Avec 10 questions : $\mathcal{P}(10)$, en complétant 1, ..., 1000 par 24 entiers fictifs. Avec 9 questions : $1000 \geq 2^9 + 1$, et $\mathcal{Q}(9)$ montre l'échec possible. Minimum : $\boxed{10}$. $\mathcal{P}(n)$: « $\exists$ stratégie, $\forall$ choix, on trouve » ; $\mathcal{Q}(n)$: « $\forall$ stratégie, $\exists$ choix, on ne trouve pas » : c'est exactement la négation de la forme « $\exists$ stratégie $\forall$ choix ».

■ Corrigé de l'exercice 28

1. Entre t_n et t_{n+1} , Achille parcourt d_n à 10 m/s : durée $\frac{d_n}{10}$, d'où $t_{n+1} = t_n + \frac{d_n}{10}$; pendant ce temps la tortue avance de $1 \times \frac{d_n}{10}$: $d_{n+1} = \frac{d_n}{10}$.

$\mathcal{P}(n)$: « $d_n = \frac{100}{10^n}$ et $t_n = \frac{100}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ ». **Initialisation.** $d_0 = 100$ et $t_0 = 0$. **Hérédité.** Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $d_{n+1} = \frac{100}{10^{n+1}}$ et

$$t_{n+1} = \frac{100}{9} - \frac{100}{9 \times 10^n} + \frac{10}{10^n} = \frac{100}{9} - \frac{10}{9 \times 10^n} = \frac{100}{9} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right).$$

Conclusion. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. « $\forall n \in \mathbb{N}, x_A(t_n) < x_T(t_n)$ » et « $\forall t \in [0, +\infty[, x_A(t) < x_T(t)$ ». La première est **vraie** : $d_n = \frac{100}{10^n} > 0$.
3. $x_A(t) = 10t$, $x_T(t) = 100 + t$; $x_A(t) = x_T(t) \iff t = \frac{100}{9} \approx 11,1$ s : Achille rattrape la tortue, puis la dépasse. **Erreur de Zénon** : tous les instants $t_n = \frac{100}{9} - \frac{100}{9 \times 10^n}$ sont $< \frac{100}{9}$; « $\forall n, \dots$ à l'instant t_n » ne parle que de ces instants et n'entraîne pas « $\forall t \geq 0$ » ($t = 12$ n'est aucun t_n).
 $t_n > 11,1 \iff 1 - 10^{-n} > 0,999 \iff 10^{-n} < 10^{-3} \iff \boxed{n \geq 4}$ ($t_3 = 11,1$ exactement).

■ Corrigé de l'exercice 29

1. Les trois lignes contiennent chacune des neuf nombres une fois : $3S = 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, donc $\boxed{S = 15}$.
2. Les quatre droites qui passent par le centre (ligne et colonne du milieu, deux diagonales) ont une somme totale $4S = 60$; elles couvrent chaque case une fois, sauf le centre, compté 4 fois : $60 = 45 + 3c$, d'où $\boxed{c = 5}$.
3. **Par l'absurde**, supposons 1 dans un coin. Sur sa diagonale, $1 + 5 + x = 15$ donne $x = 9$ dans le coin opposé. La ligne et la colonne de ce coin exigent chacune deux nombres de somme 14 pris parmi 2, 3, 4, 6, 7, 8 : seul le couple $\{6, 8\}$ convient, et il en faudrait deux distincts : contradiction.
4. Donc 1 est au milieu d'un bord ; la ligne passant par 1 et le centre donne 9 au milieu du bord opposé. Les deux coins du bord de 1 ont pour somme 14 : ce sont 6 et 8 ; tout le reste est alors imposé par les diagonales et les sommes (carré ci-contre). 4 places pour 1, 2 ordres pour 6 et 8 : $\boxed{8 \text{ carrés magiques}}$ (les rotations et symétries de celui-ci).

6	1	8
7	5	3
2	9	4

■ Corrigé de l'exercice 30

1. Si Ali dit la vérité, sa phrase « Badr ment » est vraie : B est fausse ; s'il ment, sa phrase est fausse : B est vraie. Donc $A \iff \bar{B}$. De même $B \iff \bar{C}$ et $C \iff (\bar{A} \text{ et } \bar{B})$.
2. On note $E_1 = A \iff \bar{B}$, $E_2 = B \iff \bar{C}$, $X = \bar{A}$ et $\bar{B}$ et $E_3 = C \iff X$ (table ci-contre). Une seule ligne rend les trois équivalences vraies : A **F**, B **V**, C **F** : $\boxed{\text{seul Badr dit la vérité.}}$

A	B	C	E_1	E_2	X	E_3	$E_1 \text{ et } E_2 \text{ et } E_3$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F	F

3. a) De $B \iff \bar{C}$ on tire, en niant les deux membres, $\bar{B} \iff C$; avec $A \iff \bar{B}$: $\boxed{A \iff C}$.
- b) **Raisonnons par l'absurde** : supposons que Chama dit la vérité (C vraie). Alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ est vraie, donc A est fausse ; mais $A \iff C$ donne A vraie : contradiction. Donc C est fausse, puis A est fausse ($A \iff C$) et B est vraie ($B \iff \bar{C}$). **Contrôle** : Ali ment (« Badr ment » est faux), Badr dit vrai, Chama ment (Badr ne ment pas). Seul Badr dit la vérité.

4. a) Pour $k < n$, P_k dit « P_{k+1} ment » : $p_k \Leftrightarrow \overline{p_{k+1}}$, soit $p_{k+1} \Leftrightarrow \overline{p_k}$. Soit $\mathcal{H}(k)$: « $p_k \Leftrightarrow p_1$ si k est impair, $p_k \Leftrightarrow \overline{p_1}$ si k est pair ».

Initialisation. $\mathcal{H}(1)$: $p_1 \Leftrightarrow p_1$. **Hérédité.** Supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie pour un $k \leq n-1$. Si k est impair, $p_{k+1} \Leftrightarrow \overline{p_k} \Leftrightarrow \overline{p_1}$, avec $k+1$ pair ; si k est pair, $p_{k+1} \Leftrightarrow \overline{p_k} \Leftrightarrow \overline{\overline{p_1}} \Leftrightarrow p_1$, avec $k+1$ impair : $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie. **Conclusion.** $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour $1 \leq k \leq n$.

b) **Raisonnons par l'absurde** : si P_n disait vrai, tous les autres mentiraient, en particulier P_{n-1} et P_{n-2} ($n \geq 3$). Mais la phrase de P_{n-2} , « P_{n-1} ment », serait vraie : P_{n-2} dirait vrai. Contradiction : P_n ment.

c) p_k et p_n ont la même valeur si k et n ont la même parité (par a)), des valeurs contraires sinon. Comme p_n est fausse : P_k dit vrai $\Leftrightarrow n-k$ est impair. **Cohérence** : pour $k < n$, « P_{k+1} ment » est vraie $\Leftrightarrow n-k-1$ pair $\Leftrightarrow n-k$ impair $\Leftrightarrow P_k$ dit vrai ; la phrase de P_n est fausse car P_{n-1} dit vrai, et P_n ment bien. Pour $n=3$, seul P_2 (Badr) dit vrai. Pour $n=2026$: k impair, de 1 à 2025 : 1013 personnes.

d) Si P_n disait vrai, P_{n-1} dirait vrai, donc « P_n ment » serait vrai : contradiction. Donc P_n ment, et a) donne **la même répartition** ; elle est cohérente, car la phrase de P_n est fausse (P_{n-2} ment).

30

Corrigés : connecteurs et tables

■ Corrigé de l'exercice 31

1. $259 = 7 \times 37$ n'est pas premier : P est **fausse**. $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$: Q est **vraie**. Les nombres $\sqrt{90}$ et $9,5$ étant positifs, $\sqrt{90} > 9,5 \Leftrightarrow 90 > 9,5^2 = 90,25$, ce qui est faux : R est **fausse**. Avec P **F**, Q **V**, R **F**, on calcule chaque connecteur :

$\overline{P}$	P et Q	P ou Q	$\overline{Q}$ ou R	$\overline{P}$ et $\overline{R}$	$\overline{P}$ ou $\overline{R}$	$(P$ ou $Q)$ et $\overline{R}$	$(Q$ et $R)$ ou P
V	F	V	F	V	V	V	F

2. On nie un « et » en « ou », et un « ou » en « et » (lois de Morgan).
 a) $x < -1$ ou $x \geq 4$. b) $|x| > 2 \Leftrightarrow (x < -2$ ou $x > 2)$; sa négation est $x \geq -2$ et $x \leq 2$, c'est-à-dire $-2 \leq x \leq 2$.
 c) « **Le mouvement du mobile n'est pas rectiligne ou sa vitesse n'est pas constante.** » (au moins l'un des deux).
 d) « **La lampe L_1 ne brille pas et la lampe L_2 ne brille pas** », c'est-à-dire : aucune des deux lampes ne brille.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. On remplit colonne par colonne, de gauche à droite :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	A	P ou $\overline{Q}$	B	P et Q	C	P ou Q	D
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F

2. Les colonnes de A et de B sont identiques : $A \Leftrightarrow B$ (en effet P ou $\overline{Q} \Leftrightarrow \overline{P}$ et Q , par Morgan et double négation). La colonne de C ne contient que des **V** : C est une **tautologie** ; celle de D ne contient que des **F** : D est **toujours fausse**.
 Explication (Morgan) : $C \Leftrightarrow (P$ et $Q)$ ou $\overline{P}$ et $\overline{Q}$: une proposition **ou** sa négation est toujours vraie ; $D \Leftrightarrow (P$ ou $Q)$ et $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$: une proposition **et** sa négation est toujours fausse.

3. a)

P	Q	R	P ou Q	X	Q et R	Y
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

b) Les colonnes de X et de Y diffèrent aux lignes 2 et 4 : X et Y **ne sont pas équivalentes**. Elles diffèrent exactement lorsque P est vraie et R fausse (X est alors fausse et Y vraie).

À retenir : quand on mélange « et » et « ou », on ne peut pas déplacer les parenthèses ; il faut toujours les écrire.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. a) Distributivité (on met Q « en facteur ») : $(P \text{ ou } Q) \text{ et } (\bar{P} \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{P}) \text{ ou } Q$. Or P et $\bar{P}$ est toujours fausse, et « (faux) ou Q » a la valeur de Q : $\Leftrightarrow Q$.

b) Morgan et double négation : $P \text{ et } \bar{Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ ou } Q$. Puis, par distributivité : $(\bar{P} \text{ ou } Q) \text{ et } P \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } P) \text{ ou } (Q \text{ et } P)$, et $\bar{P}$ et P est toujours fausse : $\Leftrightarrow P \text{ et } Q$.

c) Distributivité de « ou » sur « et » : $P \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } Q) \Leftrightarrow (P \text{ ou } \bar{P}) \text{ et } (P \text{ ou } Q)$, et $P \text{ ou } \bar{P}$ est toujours vraie : $\Leftrightarrow P \text{ ou } Q$.

d) Morgan deux fois, et double négation : $(P \text{ ou } Q) \text{ et } \bar{\bar{R}} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ ou } \bar{Q} \text{ ou } \bar{\bar{R}} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q}) \text{ ou } R$.

2.

P	Q	$\bar{Q}$	$P \text{ et } \bar{Q}$	$\bar{P} \text{ et } \bar{Q}$	$\bar{P} \text{ et } \bar{Q} \text{ et } P$	$P \text{ et } Q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F

Les deux dernières colonnes sont identiques : l'équivalence b) est vérifiée.

3. a) Avec P : « $x^2 \geq 1$ » (donc $\bar{P}$: « $x^2 < 1$ ») et Q : « $x \geq 5$ », c'est $(P \text{ ou } Q) \text{ et } (\bar{P} \text{ ou } Q) \Leftrightarrow Q$ (1.a) : $x \geq 5$, $S = [5, +\infty[$.

b) Avec P : « $x \geq -1$ » et Q : « $x < 3$ » (donc $\bar{Q}$: « $x \geq 3$ »), c'est $\bar{P} \text{ et } \bar{Q} \text{ et } P \Leftrightarrow P \text{ et } Q$ (1.b) : $-1 \leq x < 3$, $S = [-1, 3[$.

c) Avec P : « $x \leq 0$ » (donc $\bar{P}$: « $x > 0$ ») et Q : « $x^2 < 4$ », c'est $P \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } Q) \Leftrightarrow P \text{ ou } Q$ (1.c) : « $x \leq 0$ ou $-2 < x < 2$ », soit $x < 2$: $S =]-\infty, 2[$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. Dans (a), K_1 est en série avec le bloc (K_2 en dérivation avec K_3) : $L_a \Leftrightarrow K_1 \text{ et } (K_2 \text{ ou } K_3)$. Dans (b), la branche (K_1 en série avec K_2) est en dérivation avec K_3 : $L_b \Leftrightarrow (K_1 \text{ et } K_2) \text{ ou } K_3$.

K_1	K_2	K_3	$K_2 \text{ ou } K_3$	L_a	$K_1 \text{ et } K_2$	L_b
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F

Les colonnes diffèrent aux lignes 5 et 7 seulement : K_1 ouvert et K_3 fermé (K_2 quelconque). Alors L_b brille (le courant passe par K_3) alors que L_a est éteinte (K_1 ouvert coupe tout le circuit (a)). Dans les six autres cas, les deux lampes ont le même état.

2. $L_c \iff (K_1 \text{ et } K_2) \text{ ou } (K'_1 \text{ et } K_3)$, et $K'_1 \iff K_1$. Par distributivité (on met K_1 en facteur) :
 $L_c \iff (K_1 \text{ et } K_2) \text{ ou } (K_1 \text{ et } K_3) \iff K_1 \text{ et } (K_2 \text{ ou } K_3) \iff \boxed{L_a}$.

Intérêt : le circuit (a) fait exactement le même travail avec trois interrupteurs au lieu de quatre (moins cher, moins de pannes).

3. $L_d \iff K_1 \text{ et } (K'_1 \text{ ou } K_2) \iff K_1 \text{ et } (K_1 \text{ ou } K_2)$. *Disjonction des cas.* Si K_1 est vraie, $K_1 \text{ ou } K_2$ l'est aussi, et L_d est vraie ; si K_1 est fausse, L_d est fausse. Donc $\boxed{L_d \iff K_1}$ (loi d'absorption).
 L'interrupteur K_2 **ne sert à rien** : quand K_1 est fermé, K'_1 l'est aussi et le courant passe déjà ; quand K_1 est ouvert, rien ne passe. On peut supprimer K_2 et K'_1 .

■ Corrigé de l'exercice 35

1. Les trois lignes où A est vraie donnent : $M_1 = S \text{ et } \bar{P} \text{ et } T$, $M_2 = S \text{ et } \bar{P} \text{ et } \bar{T}$, $M_3 = \bar{S} \text{ et } \bar{P} \text{ et } T$. Un « et » n'est vrai que si chacun de ses termes l'est : M_1 n'est vraie que lorsque S, P, T ont exactement les valeurs de sa ligne ; de même pour M_2 et M_3 . Donc $M_1 \text{ ou } M_2 \text{ ou } M_3$ est vraie exactement sur ces trois lignes, comme A : les colonnes coïncident et $\boxed{A \iff M_1 \text{ ou } M_2 \text{ ou } M_3}$.
2. Par distributivité, $M_1 \text{ ou } M_2 \iff (S \text{ et } \bar{P}) \text{ et } (T \text{ ou } \bar{T}) \iff S \text{ et } \bar{P}$, puisque $T \text{ ou } \bar{T}$ est toujours vraie. Puis

$$A \iff (S \text{ et } \bar{P}) \text{ ou } (\bar{S} \text{ et } \bar{P} \text{ et } T) \iff \bar{P} \text{ et } (S \text{ ou } (\bar{S} \text{ et } T)) \iff \boxed{\bar{P} \text{ et } (S \text{ ou } T)},$$

la dernière étape étant la loi $S \text{ ou } (\bar{S} \text{ et } T) \iff S \text{ ou } T$ (exercice 33, 1.c). **Le programme :** « le robot arrose s'il ne pleut pas et si le sol est sec ou qu'il fait plus de 30 °C ».

Négation (Morgan deux fois) : $\bar{A} \iff P \text{ ou } \overline{S \text{ ou } T} \iff \boxed{P \text{ ou } (\bar{S} \text{ et } \bar{T})}$: le robot n'arrose pas s'il pleut, ou si le sol n'est pas sec et que la température ne dépasse pas 30 °C.

3. La nouvelle règle interdit d'arroser quand $S \text{ et } T$ est vraie : le robot arrose si A est vraie **et** $S \text{ et } T$ fausse, d'où $A' = A \text{ et } \overline{S \text{ et } T}$. Par Morgan, $\overline{S \text{ et } T} \iff \bar{S} \text{ ou } \bar{T}$, donc $A' \iff \bar{P} \text{ et } (S \text{ ou } T) \text{ et } (\bar{S} \text{ ou } \bar{T})$. On développe :

$$(S \text{ ou } T) \text{ et } (\bar{S} \text{ ou } \bar{T}) \iff (S \text{ et } \bar{S}) \text{ ou } (S \text{ et } \bar{T}) \text{ ou } (T \text{ et } \bar{S}) \text{ ou } (T \text{ et } \bar{T}) \iff (S \text{ et } \bar{T}) \text{ ou } (\bar{S} \text{ et } T)$$

car $S \text{ et } \bar{S}$ et $T \text{ et } \bar{T}$ sont toujours fausses. D'où $A' \iff \bar{P} \text{ et } ((S \text{ et } \bar{T}) \text{ ou } (\bar{S} \text{ et } T))$: il ne pleut pas et **une seule** des deux propositions S, T est vraie. Cas (S, P, T) : (V, F, F) et (F, F, V) ; le robot arrose dans $\boxed{2 \text{ cas sur } 8}$ (la ligne (V, F, V) a disparu).

■ Corrigé de l'exercice 36

1. *Sens* $\Leftarrow$. Le produit de deux réels de même signe et non nuls est strictement positif. *Sens* $\Rightarrow$. Si $ab > 0$, alors $a \neq 0$; si $a > 0$, alors $b = \frac{ab}{a} > 0$; si $a < 0$, alors $b = \frac{ab}{a} < 0$. D'où l'équivalence.
2. Deux propositions équivalentes ont des négations équivalentes. À gauche, $\overline{ab > 0} \iff ab \leq 0$. À droite, par Morgan, puis en développant (distributivité) :

$$\overline{(a > 0 \text{ et } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ et } b < 0)} \iff (a \leq 0 \text{ ou } b \leq 0) \text{ et } (a \geq 0 \text{ ou } b \geq 0)$$

$$\iff (a \leq 0 \text{ et } a \geq 0) \text{ ou } (a \leq 0 \text{ et } b \geq 0) \text{ ou } (b \leq 0 \text{ et } a \geq 0) \text{ ou } (b \leq 0 \text{ et } b \geq 0).$$

Le premier terme est « $a = 0$ », le dernier « $b = 0$ » ; or le cas $a = 0$ est déjà contenu dans les termes du milieu (selon que $b \geq 0$ ou $b \leq 0$), de même pour $b = 0$. Il reste :

$$\boxed{ab \leq 0 \iff ((a \geq 0 \text{ et } b \leq 0) \text{ ou } (a \leq 0 \text{ et } b \geq 0))}.$$

3. a) $(3x - 2)(x + 4) > 0 \iff (x > \frac{2}{3} \text{ et } x > -4) \text{ ou } (x < \frac{2}{3} \text{ et } x < -4) \iff x > \frac{2}{3} \text{ ou } x < -4 :$

$$S =]-\infty, -4[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[.$$

b) $(5 - x)(2x + 3) \leq 0 \iff (x \leq 5 \text{ et } x \leq -\frac{3}{2}) \text{ ou } (x \geq 5 \text{ et } x \geq -\frac{3}{2}) \iff x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } x \geq 5 :$

$$S =]-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [5, +\infty[.$$

4. a) Les réels étant non nuls, $\bar{P}$ signifie $a < 0$, etc. On applique deux fois la règle des signes à $abc = (ab) \times c$:

P	Q	R	$ab > 0$	$abc > 0$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

« $abc > 0$ » est vraie sur les lignes 1, 4, 6, 7, où le nombre de propositions vraies parmi P, Q, R est 3, 1, 1, 1 ; elle est fausse sur les autres lignes, où ce nombre vaut 2, 2, 2 ou 0.

Conclusion : $abc > 0$ si et seulement si un **nombre impair** de facteurs sont positifs (autrement dit, un nombre pair de facteurs sont négatifs).

- b) Un « et » par ligne vraie :

$$abc > 0 \iff (P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (P \text{ et } \bar{Q} \text{ et } \bar{R}) \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } Q \text{ et } \bar{R}) \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } \bar{Q} \text{ et } R).$$

- c) Le produit est nul en 0, 3, -2 : on suppose $x \notin \{-2, 0, 3\}$ et l'on prend $a = x, b = x - 3, c = x + 2$, soit P : « $x > 0$ », Q : « $x > 3$ », R : « $x > -2$ ». Premier terme : $x > 3$. Deuxième : $x > 0$ et $x < -2$, impossible. Troisième : $x < 0$ et $x > 3$, impossible. Quatrième : $x < 0$ et $x < 3$ et $x > -2$, soit $-2 < x < 0$. $S =]-2, 0[\cup]3, +\infty[.$

31

Corrigés : quantificateurs

■ Corrigé de l'exercice 37

- a) « Pour tout réel $x, x^2 + 8x + 17 > 0$. » **Vraie** : $x^2 + 8x + 17 = (x + 4)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

b) « Il existe un réel x tel que $5x^2 + 2 = 3x$. » **Fausse** : $5x^2 - 3x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$.

c) « Il existe un unique réel x tel que $11 - 4x = 23$. » **Vraie** : $11 - 4x = 23 \iff -4x = 12 \iff x = -3$, une seule solution.

d) « Il existe un entier naturel n tel que $5n + 2$ soit un multiple de 9. » **Vraie** : pour $n = 5$, $5n + 2 = 27 = 9 \times 3$.

e) « Pour tout réel $x, \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$. » **Vraie** : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc son inverse est inférieur ou égal à 1.

f) « Pour tout réel $x, (2x)^2 = 2x^2$. » **Fausse** : pour $x = 1, (2x)^2 = 4 \neq 2 = 2x^2$ (en fait $(2x)^2 = 4x^2$).

g) « Il existe un réel $x > 0$ tel que $\sqrt{x} > x$. » **Vraie** : pour $x = \frac{1}{4}, \sqrt{x} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

h) « Pour tout réel a , il existe un réel b tel que $a + b = ab$. » **Fausse** : pour $a = 1$, il faudrait $1 + b = b$, soit $1 = 0$. (Pour $a \neq 1, b = \frac{a}{a-1}$ convient : le seul contre-exemple est $a = 1$.)

i) « Il existe un réel b tel que, pour tout réel $a, a^2 - 2a + b > 0$. » **Vraie** : $b = 2$ convient, car $a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 > 0$.
- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$: **fausse**, car pour $x = \frac{1}{2}, x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

b) $\exists! n \in \mathbb{N}, n^2 = 3n + 10$: **vraie** : $n^2 - 3n - 10 = (n - 5)(n + 2) = 0 \iff (n = 5 \text{ ou } n = -2)$, et seul 5 est un entier naturel.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \neq y \text{ et } x^2 = y^2)$: **vraie** avec $x = 1, y = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 38

- $\exists x \in \mathbb{R}, |x - 3| \leq 0$: la **négation est vraie** ($x = 3$), donc la proposition est fausse.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 4 \neq 0$: la **négation est vraie**, car $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$.
 - $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n + m \neq 12$: la **négation est vraie** : pour $n = 13$, $n + m \geq 13$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
 - $\exists x \in \mathbb{R}, (x < -1 \text{ et } x^2 \leq 1)$: c'est la **proposition qui est vraie** : si $x < -1$, alors $-x > 1 > 0$, et en multipliant membre à membre ces inégalités positives, $x^2 = (-x)^2 > 1$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y^2 + 1$: c'est la **proposition qui est vraie**, avec $x = 1$: $y^2 + 1 \geq 1$ pour tout réel y .
- « À chaque instant, les deux mobiles sont à des endroits différents. »
 - « Il existe un matin où aucun élève de la classe n'arrive avant 8 h. »
 - « Il existe un entier naturel n supérieur ou égal à tous les nombres premiers. » (C'est la proposition initiale qui est vraie : il y a une infinité de nombres premiers.)
- L'erreur** : on ne nie pas le domaine ! On remplace « $\forall x \in [0, +\infty[$ » par « $\exists x \in [0, +\infty[$ » et l'on nie la propriété (d'ailleurs $\sqrt{x}$ n'a pas de sens pour $x < 0$). $\bar{P}$: $\exists x \in [0, +\infty[, \sqrt{x} > x + 1$.
 Pour $x \geq 0$, posons $t = \sqrt{x} \geq 0$: $x + 1 - \sqrt{x} = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Donc $\sqrt{x} < x + 1$ pour tout $x \geq 0$: **P est vraie**, sa négation est fausse.

■ Corrigé de l'exercice 39

- Le tableau ci-contre se lit ligne par ligne : la ligne de a indique les multiples de a dans E , la colonne de b indique les diviseurs de b dans E . Par exemple, $4 \mid 12$ mais $4 \nmid 6$.

$a \backslash b$	2	3	4	6	12
2	V	F	V	V	V
3	F	V	F	V	V
4	F	F	V	F	V
6	F	F	F	V	V
12	F	F	F	F	V

- P_1 : « chaque élément de E divise un autre élément de E » : **fausse** (12 ne divise que 12). P_2 : « un élément de E est multiple de tous les éléments de E » : **vraie** ($b = 12$, colonne pleine de V). P_3 : « un élément de E divise tous les éléments de E » : **fausse** (aucune ligne pleine de V). P_4 : « chaque élément de E est divisible par un autre élément de E » : **fausse** (2 et 3 n'ont pas d'autre diviseur dans E). P_5 : « un et un seul élément de E est multiple de tous » : **vraie** (seule la colonne de 12 est pleine). P_6 : « si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $a = b$ » : **vraie** (pour des entiers naturels non nuls, $a \mid b$ entraîne $a \leq b$, et $b \mid a$ entraîne $b \leq a$). P_7 : « deux éléments quelconques ont un multiple commun dans E » : **vraie** ($c = 12$).
 L'ordre compte : P_2 (« $\exists b \forall a$ ») est vraie, alors que P_3 , où l'on a échangé les rôles de a et de b , est fausse.
- $\bar{P}_1$: $\exists a, \forall b, (b = a \text{ ou } a \nmid b)$: « un élément de E ne divise aucun autre élément de E » : **vraie** avec $a = 12$ ($12 \nmid 2, 12 \nmid 3, 12 \nmid 4, 12 \nmid 6$).
 $\bar{P}_3$: $\forall a, \exists b, a \nmid b$: « aucun élément de E ne divise tous les éléments de E » : **vraie** : $2 \nmid 3$, et $3, 4, 6, 12$ ne divisent pas 2.
- Un entier divisant tous les éléments de E divise 2 et 3 : c'est 1 (seul diviseur commun de 2 et 3). On ajoute donc $\boxed{1}$: P_3 devient vraie avec $a = 1$. Mais P_4 reste **fausse** : $b = 1$ n'a aucun diviseur $a \neq 1$ dans $E \cup \{1\}$.
 - Soit m le plus grand élément de F . S'il existait $b \in F$ tel que $b \neq m$ et $m \mid b$, on aurait $b = km$ avec k entier, $k \geq 1$ (car $b \geq 1$) et $k \neq 1$ (car $b \neq m$), donc $k \geq 2$ et $b \geq 2m > m$: c'est impossible, m étant le plus grand élément. Ainsi $a = m$ ne divise aucun autre élément de F : **la proposition est fausse**.

■ Corrigé de l'exercice 40

- $(t-3)^2 - 4 = t^2 - 6t + 9 - 4 = t^2 - 6t + 5 = x(t)$ ✓. $x(0) = 5$, $x(1) = 0$, $x(3) = -4$, $x(5) = 0$, $x(8) = 64 - 48 + 5 = 21$.
- a) $\exists t \in [0, 8]$, $x(t) = 0$: **vraie** ($t = 1$ et $t = 5$).
b) $\exists t \in [0, 8]$, $x(t) = 12$: $t^2 - 6t - 7 = 0 \iff (t-7)(t+1) = 0 \iff (t = 7 \text{ ou } t = -1)$; seul 7 est dans $[0, 8]$: **vraie**.
c) $\exists t \in [0, 8]$, $x(t) = 5$: $t^2 - 6t = 0 \iff t(t-6) = 0 \iff (t = 0 \text{ ou } t = 6)$: deux instants, **fausse**.
d) $\forall t \in [0, 8]$, $x(t) \geq -4$: **vraie**, car $(t-3)^2 \geq 0$.
e) $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0, 8]$, $x(t) \leq M$: **vraie** avec $M = 21$: pour $0 \leq t \leq 8$, $-3 \leq t-3 \leq 5$, donc $(t-3)^2 \leq 25$ et $x(t) \leq 21$.
f) $\forall t \in [0, 8]$, $|x(t)| < 10$: **fausse** : $|x(8)| = 21 \geq 10$.
g) $\forall a \in [-4, 21]$, $\exists t \in [0, 8]$, $x(t) = a$: **vraie**. Soit $a \in [-4, 21]$; alors $a + 4 \in [0, 25]$, et $t = 3 + \sqrt{a+4} \in [3, 8]$ convient : $x(t) = (\sqrt{a+4})^2 - 4 = a$.
- $\bar{d}$: $\exists t \in [0, 8]$, $x(t) < -4$: « à un instant au moins, l'abscisse est strictement inférieure à -4 » (fausse).
 $\bar{f}$: $\exists t \in [0, 8]$, $|x(t)| \geq 10$: « à un instant au moins, le mobile est à 10 m ou plus de O » (vraie).
- $|x(t)| < 5 \iff -5 < t^2 - 6t + 5 < 5 \iff (t^2 - 6t + 10 > 0 \text{ et } t(t-6) < 0)$. La première condition est toujours vraie ($t^2 - 6t + 10 = (t-3)^2 + 1$) ; la seconde équivaut à $0 < t < 6$. $t \in]0, 6[$.

■ Corrigé de l'exercice 41

- $x^2 - 2mx + 9 = (x-m)^2 + 9 - m^2$. Si $9 - m^2 > 0$, l'expression est minorée par $9 - m^2 > 0$: c'est vrai. Si $9 - m^2 \leq 0$, le réel $x = m$ donne $9 - m^2 \leq 0$: c'est faux. $m \in]-3, 3[$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2mx + 9 \leq 0$; pour $m = 3$, $x = 3$ convient ($9 - 18 + 9 = 0$).
- L'équation a une solution réelle si et seulement si $\Delta \geq 0$: $\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12 = (m-6)(m+2) \geq 0$. $m \in]-\infty, -2] \cup [6, +\infty[$.
- Si $m = 0$: $-4x + 2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$: une seule solution, c'est vrai. Si $m \neq 0$, l'équation est du second degré, de discriminant réduit $\Delta' = 4 - 2m$: une seule solution si et seulement si $\Delta' = 0$, soit $m = 2$ (alors $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$, solution 1). $m \in \{0, 2\}$.
- a) Nécessaire : $x = 2$ est dans $[0, +\infty[$ et donne $m - 4 \geq 0$. Suffisant : si $m \geq 4$, $(x-2)^2 + m - 4 \geq 0$ pour tout x . $m \in [4, +\infty[$.
b) Pour $x \geq 3$, $x-2 \geq 1 > 0$, donc $(x-2)^2 \geq 1$ et $x^2 - 4x + m \geq m - 3$, avec égalité pour $x = 3$. C'est vrai si et seulement si $m - 3 \geq 0$: $m \in [3, +\infty[$ (le domaine est plus petit, la condition sur m est plus faible).
- a) Si $m = 0$, $y = 0$ convient. Si $m \neq 0$, pour tout réel y , le réel $x = -\frac{y+1}{m}$ donne $mx + y = -1 < 0$: aucun y ne convient. $m = 0$.
b) Pour tout m et tout x , le réel $y = -mx$ donne $mx + y = 0 \geq 0$: c'est vrai pour tout réel m .
Commentaire : dans b), y peut dépendre de x ; dans a), un même y doit convenir pour tous les x . On a toujours a) $\Rightarrow$ b), mais pas la réciproque.

■ Corrigé de l'exercice 42

- (D_m) est bien une droite : $2m - 1$ et $m + 1$ ne sont jamais nuls ensemble, car $2m - 1 = 0$ donne $m = \frac{1}{2}$ et $m + 1 = \frac{3}{2}$.
a) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{R}$, $(2m-1)x + (m+1)y = 3m$. Or $(2m-1)x + (m+1)y - 3m = m(2x+y-3) + (y-x)$. Analyse. Si $M(x, y)$ est sur toutes les droites D_m : $m = 0$ donne $y - x = 0$, puis $m = 1$ donne $2x + y - 3 = 0$; d'où $3x = 3$, $x = y = 1$. Synthèse. Pour $x = y = 1$: $m(2 + 1 - 3) + 0 = 0$ pour tout

m ✓. La proposition est **vraie** : toutes les droites D_m passent par $A(1, 1)$, et c'est le seul point commun.

b) Non : elle dit seulement que *chaque* droite D_m contient au moins un point (qui pourrait dépendre de m). Elle est **vraie** (par exemple A convient pour tout m). « $\exists \forall$ » entraîne « $\forall \exists$ », mais pas l'inverse (voir 2.a).

2. a) Si $M(x, y)$ était sur toutes les droites Δ_m : $m = 0$ donne $y = 0$; $m = 1$ donne $y = 2x - 1$, d'où $x = \frac{1}{2}$; $m = -1$ donne $y = -2x - 1 = -2 \neq 0$: **contradiction**. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, y \neq 2mx - m^2$.

b) $M \in \Delta_m \iff m^2 - 2mx + y = 0 \iff m^2 - 2mx + x^2 = x^2 - y$, soit

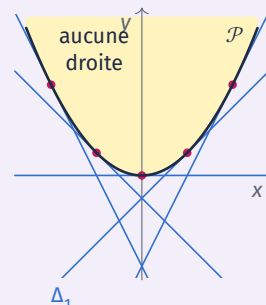
$$M \in \Delta_m \iff (m - x)^2 = x^2 - y.$$

On cherche donc le nombre de réels m vérifiant cette égalité ; on distingue trois cas.

- Si $y > x^2$: $x^2 - y < 0$, et aucun carré n'est négatif : **aucune** droite Δ_m ne passe par M .
- Si $y = x^2$: $(m - x)^2 = 0 \iff m = x$: **une seule** droite, Δ_x .
- Si $y < x^2$: $m = x \pm \sqrt{x^2 - y}$, **deux** valeurs, donc deux droites distinctes (de pentes $2m$ différentes).

Ainsi, il passe au moins une droite Δ_m par M si et seulement si $y \leq x^2$, et exactement une si et seulement si $y = x^2$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{P}$.

c) $x^2 = 2mx - m^2 \iff (x - m)^2 = 0 \iff x = m$: un seul point commun, (m, m^2) . Ainsi $\forall m \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, x^2 = 2mx - m^2$.



Les droites $\Delta_m, m \in \{-2, \dots, 2\}$: aucune n'entre dans la zone $y > x^2$.

32

Corrigés : implication

■ Corrigé de l'exercice 43

1. P est **vraie** ($7 \times 8 = 56$), Q est **fausse** ($121 = 11 \times 11$), R est **vraie** ($\frac{2}{3} = 0,666\dots > 0,6$). Une implication n'est fausse que dans le cas « **V** $\Rightarrow$ **F** » ; une équivalence est vraie quand les deux propositions ont la même valeur :

$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$Q \Rightarrow R$	$R \Rightarrow P$	$(P \text{ et } R) \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow R$	$P \Leftrightarrow R$	$P \Leftrightarrow Q$
F	V	V	V	F	V	V	F

2. a) **Implication vraie** : si $x \geq 3$, alors $x \geq 0$ et $x - 3 \geq 0$, donc $x^2 - 3x = x(x - 3) \geq 0$. **Réciproque** « si $x^2 \geq 3x$, alors $x \geq 3$ » : **fausse**, pour $x = 0$ ($0 \geq 0$ mais $0 < 3$). **Contraposée** « si $x^2 < 3x$, alors $x < 3$ » : **vraie**, comme l'implication.
- b) **Implication vraie** (tout point de la médiatrice de $[AB]$ est équidistant de A et de B). **Réciproque** « si $MA = MB$, alors M est sur la médiatrice de $[AB]$ » : **vraie** (propriété caractéristique de la médiatrice). **Contraposée** « si $MA \neq MB$, alors M n'est pas sur la médiatrice de $[AB]$ » : **vraie**. Ici, on a une **équivalence**.
- c) **Implication fausse** : deux voitures roulent dans le même sens à 90 km/h, l'une 100 m derrière l'autre : même sens et même vitesse à chaque instant, mais des positions toujours distantes de 100 m. **Réciproque** (« même position à chaque instant $\Rightarrow$ même sens et même vitesse à chaque instant ») : **vraie**, c'est le même mouvement. **Contraposée** (« si, à un instant au moins, les positions diffèrent, alors, à un instant au moins, les sens ou les vitesses diffèrent ») : **fausse**, même contre-exemple. Noter que « à chaque instant » se nie en « à un instant au moins ».

■ Corrigé de l'exercice 44

1. a) **Il suffit** : $x = -5 \Rightarrow x^2 = 25$ (ce n'est pas nécessaire : $x = 5$ convient aussi).
 b) **Il faut** : $4 \mid n \Rightarrow$ « le chiffre des unités de n est pair » (n est alors pair). Ce n'est pas suffisant : 6 se termine par 6, mais $4 \nmid 6$.
 c) **Il faut et il suffit** : $|x - 1| = 4 \Leftrightarrow (x - 1 = 4 \text{ ou } x - 1 = -4) \Leftrightarrow (x = 5 \text{ ou } x = -3)$.
 d) **Il faut et il suffit** : $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ (caractérisation vectorielle du parallélogramme).
 e) **Il faut** : « mouvement rectiligne uniforme » $\Rightarrow$ « trajectoire droite ». Ce n'est pas suffisant : une bille en chute libre a une trajectoire rectiligne, mais sa vitesse augmente.
2. a) $x > 5 \Rightarrow x > 2$, mais $x = 3$ vérifie $x > 2$ et pas $x > 5$: symbole $\Rightarrow$; « $x > 5$ » est une condition **suffisante** (non nécessaire) pour « $x > 2$ ».
 b) $x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$: symbole $\Leftrightarrow$; condition **nécessaire et suffisante**.
 c) $x = 3$: $x > 1$ mais $x^2 = 9 \geq 4$; $x = -1$: $x^2 = 1 < 4$ mais $x \leq 1$. **Aucune** implication : condition ni nécessaire ni suffisante.
 d) $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$, mais $x = 2$ vérifie $x^2 = 4$ et pas $x = -2$: symbole $\Leftarrow$; « $x^2 = 4$ » est une condition **nécessaire** (non suffisante) pour « $x = -2$ ».

■ Corrigé de l'exercice 45

1. **Contraposée** : « si A, B, C sont alignés, alors $3x - 2y + 1 = 0$ ». Supposons A, B, C alignés : les vecteurs $\vec{AB}(2, 3)$ et $\vec{AC}(x - 1, y - 2)$ sont colinéaires, donc $2(y - 2) - 3(x - 1) = 0$, soit $-3x + 2y - 1 = 0$, c'est-à-dire $3x - 2y + 1 = 0$. La contraposée est démontrée ; la propriété, qui lui est équivalente, est **vraie**.
2. **Contraposée** : « si $\frac{2x-5}{x+1} = \frac{2y-5}{y+1}$, alors $x = y$ ». Supposons l'égalité ; comme $x + 1 \neq 0$ et $y + 1 \neq 0$, on peut faire le produit en croix :

$$(2x - 5)(y + 1) = (2y - 5)(x + 1) \Leftrightarrow 2xy + 2x - 5y - 5 = 2xy + 2y - 5x - 5 \Leftrightarrow 7x = 7y \Leftrightarrow x = y.$$

La contraposée est vraie, donc la propriété aussi.

3. **Contraposée** : par Morgan, $1 < x < 2$ s'écrit « $x \leq 1$ ou $x \geq 2$ » : « si $x \leq 1$ ou $x \geq 2$, alors $x^2 + 2 \geq 3x$ ». Or $x^2 + 2 - 3x = (x - 1)(x - 2)$. Cas $x \leq 1$: $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 < 0$, donc le produit est positif ou nul. Cas $x \geq 2$: $x - 1 > 0$ et $x - 2 \geq 0$, même conclusion. Donc $x^2 + 2 \geq 3x$: la contraposée, donc la propriété, est vraie.

Réciproque « si $1 < x < 2$, alors $x^2 + 2 < 3x$ » : **vraie**, car $x - 1 > 0$ et $x - 2 < 0$ donnent $(x - 1)(x - 2) < 0$. Finalement $x^2 + 2 < 3x \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

■ Corrigé de l'exercice 46

1. a) $|2x + 1| < 7 \Leftrightarrow -7 < 2x + 1 < 7 \Leftrightarrow -8 < 2x < 6 \Leftrightarrow -4 < x < 3$: les deux implications sont vraies, $P \Leftrightarrow Q$.
 b) $Q \Rightarrow P$ est **vraie** : si $x \geq 1$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x + 2 > 0$, donc $(x - 1)(x + 2) \geq 0$. $P \Rightarrow Q$ est **fausse** : $x = -3$ donne $(-4) \times (-1) = 4 \geq 0$, mais $-3 < 1$. Conclusion : $Q \Rightarrow P$ seulement.
 c) Pour $x \neq 0$: $x + \frac{9}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 9 = 6x$ (on multiplie par $x \neq 0$) $\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Les deux sens sont vrais : $P \Leftrightarrow Q$.
 d) $P \Rightarrow Q$ est **vraie** : un losange est un parallélogramme, dont les diagonales ont le même milieu. $Q \Rightarrow P$ est **fausse** : avec $A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2)$, les diagonales ont le même milieu $(2, 1)$, mais $AB = 4 \neq BC = 2$: ce rectangle n'est pas un losange. Conclusion : $P \Rightarrow Q$ seulement (Q caractérise les parallélogrammes).

2. a) *Sens* $\Rightarrow$. Supposons $a+b = 2\sqrt{ab}$. Comme $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$ et $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$: $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = 0$, soit $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$. Donc $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, puis $a = b$.
Sens $\Leftarrow$. Si $a = b$, alors $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{a^2} = 2a = a + b$, car $a > 0$.
 Conclusion : $a + b = 2\sqrt{ab} \iff a = b$.
 b) *Sens* $\Rightarrow$. Si $|x-2| = |x+4|$, alors $(x-2)^2 = (x+4)^2$, soit $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 8x + 16$, d'où $-12x = 12$ et $x = -1$.
Sens $\Leftarrow$. Pour $x = -1$: $|-3| = 3 = |3|$ ✓. Conclusion : $|x-2| = |x+4| \iff x = -1$ (-1 est le milieu de 2 et de -4).

■ Corrigé de l'exercice 47

1. a) $P \Rightarrow B$ n'est fausse que si P est vraie et B fausse : la carte porte un nombre **pair** et son autre face n'est **pas bleue**.
 b) Il faut retourner $\boxed{\text{la carte 8 et la carte rouge}}$. *La carte 8* : P est vraie, il faut vérifier que B l'est. *La carte rouge* : $\bar{B}$ est vraie ; par contraposée ($\bar{B} \Rightarrow \bar{P}$), son nombre doit être impair : un nombre pair violerait la règle.
Inutile de retourner le 5 (P fausse : $P \Rightarrow B$ est vraie quelle que soit la couleur) et *la carte bleue* (B vraie : $P \Rightarrow B$ est vraie quel que soit le nombre ; la règle ne dit pas que les cartes bleues portent un nombre pair, ce serait la réciproque).
 2. a) (R1) : $M \Rightarrow B$; (R2) : $B \Rightarrow C$; (R3) : $C \Rightarrow \bar{E}$.
 b) Par transitivité, $M \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ donnent $M \Rightarrow C$; avec $C \Rightarrow \bar{E}$, on obtient $\boxed{M \Rightarrow \bar{E}}$: tout élève qui manipule ne mange pas dans la salle. Contraposée : $\boxed{E \Rightarrow \bar{M}}$: un élève qui mange dans la salle ne manipule pas.
 c) **Hamza** porte une blouse (B vraie) : par (R2), il a lu les consignes, puis, par (R3), il ne mange pas dans la salle. En revanche, on ne peut **rien dire** sur M : (R1) dit $M \Rightarrow B$, pas $B \Rightarrow M$ (la réciproque n'est pas garantie).
Rania mange dans la salle (E vraie). Par les contraposées $E \Rightarrow \bar{C}$ (de R3), $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$ (de R2) et $\bar{B} \Rightarrow \bar{M}$ (de R1) : Rania n'a pas lu les consignes, ne porte pas de blouse et ne manipule pas.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. a) $\Delta = 1 + 48 = 49$, racines $\frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{1+7}{4} = 2$: $2x^2 - x - 6 = 2(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right) = \boxed{(x-2)(2x+3)}$. Le coefficient de x^2 est positif : le trinôme est strictement négatif entre ses racines. $\boxed{S =]-\frac{3}{2}, 2[}$.
 b) « $0 \leq x \leq 1$ » est **suffisante** : tout réel de $[0, 1]$ est dans S . Elle n'est **pas nécessaire** : $\frac{3}{2}$ est solution, mais $\frac{3}{2} \notin [0, 1]$.
 « $x > -2$ » est **nécessaire** : toute solution vérifie $x > -\frac{3}{2} > -2$. Elle n'est **pas suffisante** : $x = 3 > -2$, mais $2 \times 9 - 3 - 6 = 9 > 0$.
 c) La condition est suffisante si et seulement si tout réel de $[a, a+2]$ est dans S , c'est-à-dire $-\frac{3}{2} < a$ et $a+2 < 2$. $\boxed{a \in]-\frac{3}{2}, 0[}$.
 d) La condition est nécessaire si et seulement si toute solution vérifie $|x| < b$, c'est-à-dire si $S =]-\frac{3}{2}, 2[$ est contenu dans $]-b, b[$: $-b \leq -\frac{3}{2}$ et $b \geq 2$, soit $\boxed{b \geq 2}$. Elle serait nécessaire et suffisante si $]-b, b[$ était égal à S , ce qui exigerait $b = \frac{3}{2}$ et $b = 2$: **impossible** (S n'est pas symétrique par rapport à 0).
 2. a) $\Delta' = m^2 - (m+2) = m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$. Deux solutions distinctes $\iff \Delta' > 0 \iff \boxed{m < -1 \text{ ou } m > 2}$.

b) $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$. En identifiant les coefficients avec ceux de $x^2 - 2mx + (m+2)$:

$$x_1 + x_2 = 2m \text{ et } x_1x_2 = m+2.$$

c) Deux réels sont strictement positifs si et seulement si leur produit et leur somme le sont (produit positif : même signe ; somme positive : ce signe est +). Donc (E_m) a deux solutions distinctes strictement positives si et seulement si $(m < -1 \text{ ou } m > 2)$, $2m > 0$ et $m+2 > 0$, c'est-à-dire $m > 2$. Exemple : $m = 3$ donne $x^2 - 6x + 5 = 0$, de solutions 1 et 5.

33

Corrigés : absurde et disjonction

■ Corrigé de l'exercice 49

1. a) *Disjonction des cas selon la parité de n* . Si $n = 2k$, le facteur n est pair. Si $n = 2k+1$, le facteur $7n+1 = 14k+8 = 2(7k+4)$ est pair. Dans les deux cas, A_n **est pair**.

b) *Disjonction des cas selon le reste de n dans la division par 3*. Si $n = 3k$, le facteur n est multiple de 3. Si $n = 3k+1$, le facteur $2n+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$ l'est. Si $n = 3k+2$, le facteur $7n+1 = 21k+15 = 3(7k+5)$ l'est. Dans les trois cas, 3 **divise** A_n .

c) Écrivons $A_n = 3b$ avec $b \in \mathbb{N}$. Si b était impair, $3b = 2b + b$ serait impair ; or A_n est pair : b est donc pair, $b = 2c$, et $A_n = 6c$: $6 \mid n(2n+1)(7n+1)$. Contrôle : $A_1 = 1 \times 3 \times 8 = 24 = 6 \times 4$ et $A_2 = 2 \times 5 \times 15 = 150 = 6 \times 25$.

2. a) On ajoute $-2x+m$ aux deux membres : $mx-m = 2x-3 \iff mx-2x = m-3 \iff (m-2)x = m-3$.

b) Cas $m = 2$: l'équation devient $0 \times x = -1$, impossible : $S = \emptyset$. Cas $m \neq 2$: on divise par $m-2 \neq 0$: $S = \left\{ \frac{m-3}{m-2} \right\}$.

c) Il faut $m \neq 2$ (sinon, pas de solution) et $\frac{m-3}{m-2} \geq 0$; d'après le tableau de signes ci-contre :

$m \in]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$. Contrôle : $m = 0$ donne

$x = \frac{3}{2} \geq 0$, et $m = \frac{5}{2}$ donne $x = -1 < 0$.

m	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$m-3$	-	-	0	+	
$m-2$	-	0	+	+	
$\frac{m-3}{m-2}$	+		-	0	+

■ Corrigé de l'exercice 50

1. *Raisonnons par l'absurde* : supposons qu'il existe deux réels x et y tels que $x+y = 2$ et $xy = 3$. Alors

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x+y)^2 - 4xy = 4 - 12 = -8 < 0,$$

ce qui est impossible, car un carré est positif. **Aucun couple ne convient** (x et y seraient les solutions de $t^2 - 2t + 3 = 0$, de discriminant $-8 < 0$).

2. *Raisonnons par l'absurde* : supposons $m^2 = 4k+2$, avec m entier et $k \in \mathbb{N}$. Alors $m^2 = 2(2k+1)$ est pair, donc m est pair : $m = 2p$ et $m^2 = 4p^2$. Ainsi $4p^2 = 4k+2$, soit $2(p^2 - k) = 1$: un nombre pair égal à 1, contradiction. **Aucun carré ne s'écrit** $4k+2$. Or $2026 = 4 \times 506 + 2$ et $2030 = 4 \times 507 + 2$: **2026 et 2030 ne sont pas des carrés**.

3. a) *Supposons, par l'absurde, que $x \geq 2$* . Alors $x^3 \geq 8$ et $4x \geq 8$, donc $x^3 + 4x \geq 16 > 8$: contradiction. Donc $x < 2$. *Supposons que $x \leq 1$* : alors $x^3 \leq 1$ et $4x \leq 4$, donc $x^3 + 4x \leq 5 < 8$: contradiction. Donc $x > 1$.

b) De même, si $x \geq 1,4$: $x^3 + 4x \geq 1,4^3 + 5,6 = 2,744 + 5,6 = 8,344 > 8$; si $x \leq 1,3$: $x^3 + 4x \leq 2,197 + 5,2 = 7,397 < 8$. Deux contradictions : **$1,3 < x < 1,4$** (en fait $x \approx 1,365$).

■ Corrigé de l'exercice 51

1. a) Par équivalences, pour $x \geq 0$. On ajoute $\sqrt{x}$: $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} = 2 \iff \sqrt{x+8} = \sqrt{x} + 2$. Les deux membres sont positifs, donc égaux si et seulement si leurs carrés le sont :

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{x} + 2 \iff x+8 = x+4\sqrt{x}+4 \iff 4\sqrt{x} = 4 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1.$$

$S = \{1\}$ (contrôle : $\sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$ ✓). b) Pour deux réels positifs, $u > v \iff u^2 > v^2$; donc

$$\sqrt{x+8} - \sqrt{x} > 2 \iff x+8 > x+4\sqrt{x}+4 \iff \sqrt{x} < 1 \iff 0 \leq x < 1 : S = [0, 1[.$$

2. Par équivalences, pour $t \geq 0$: $x_2(t) > x_1(t) \iff t^2 - 3t - 4 > 0 \iff (t-4)(t+1) > 0 \iff t-4 > 0$, car on peut diviser par $t+1 > 0$ sans changer le sens. Donc $x_2(t) > x_1(t) \iff t > 4$: le second mobile est derrière le premier avant 4 s, devant après. De même, $x_1(t) = x_2(t) \iff (t-4)(t+1) = 0 \iff t = 4$ (car $t \geq 0$) : ils se rejoignent à $t = 4$ s, au point d'abscisse $x_1(4) = x_2(4) = 16$ m.
3. $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) = (x+y)^2 + (y-1)^2$. Une somme de deux carrés est nulle si et seulement si chacun est nul : l'équation équivaut à $x+y=0$ et $y=1$: $S = \{(-1, 1)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 52

1. **Faux.** Contre-exemple : $a = -1, b = 1$: $a < b$, mais $\frac{1}{a} = -1 < 1 = \frac{1}{b}$. Version corrigée : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$; si $a < b$ et $ab > 0$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse décroît sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, pas sur $\mathbb{R}^*$).
2. **Faux.** Contre-exemple : $n = 2$ donne $n^2 - 1 = 3$, qui est premier. Version corrigée : pour $n \geq 3$, $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, avec $2 \leq n-1 < n^2 - 1$: $n-1$ est un diviseur de $n^2 - 1$ autre que 1 et lui-même, donc $n^2 - 1$ n'est pas premier ($8 = 2 \times 4, 15 = 3 \times 5, \dots$).
3. **Faux.** Contre-exemple : $a = b = 1$: $a+b=2$ est pair, mais a et b sont impairs. Version corrigée, par l'absurde : supposons $a+b$ et ab pairs, et a impair. Alors $b = (a+b) - a$, différence d'un pair et d'un impair, est impair ; donc ab , produit de deux impairs, est impair : contradiction. Ainsi a est pair, et de même b (les rôles de a et b sont symétriques).
4. **Faux.** Contre-exemple : $2+3=5$ est premier. Version corrigée : si p et q sont premiers impairs, $p+q$ est pair (somme de deux impairs) et $p+q \geq 3+3=6$; un nombre pair différent de 2 est divisible par 2, donc n'est pas premier.

■ Corrigé de l'exercice 53

1. Raisonnons par l'absurde : supposons $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible. Alors $p^2 = 10q^2$ est pair, donc p est pair : $p = 2p'$. Il vient $4p'^2 = 10q^2$, soit $2p'^2 = 5q^2$: $5q^2$ est pair ; or $5q^2 = 4q^2 + q^2$ avec $4q^2$ pair, donc q^2 est pair, et q aussi. Ainsi p et q sont pairs : contradiction. $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$.
2. a) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$ et $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$.
- b) Par l'absurde : si $r = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ était rationnel, alors r^2 aussi, et $\sqrt{10} = \frac{7-r^2}{2}$ serait rationnel, contredisant 1. Donc $\sqrt{5} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde encore : si $s = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ était rationnel, comme $s \neq 0$, $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{3}{s}$ serait rationnel : contradiction. Donc $\sqrt{5} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{5} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- c) **Non** : $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ sont irrationnels, mais leur produit 3 est rationnel.

3. a) $\left(\frac{p}{q}\right)^3 - \frac{p}{q} - 1 = 0$; on multiplie par $q^3 \neq 0$: $p^3 - pq^2 - q^3 = 0$.

b) p et q ne sont pas tous deux pairs ; il reste trois cas.

p et q impairs : p^3, pq^2, q^3 sont impairs ; impair - impair = pair, puis pair - impair = impair.

p pair, q impair : p^3 et pq^2 sont pairs, q^3 est impair : pair - pair - impair = impair.

p impair, q pair : p^3 est impair, pq^2 et q^3 sont pairs : le résultat est impair.

Dans tous les cas, $p^3 - pq^2 - q^3$ est impair, donc non nul : contradiction avec a). **L'équation n'a aucune solution rationnelle.**

c) α est solution, donc $\boxed{\alpha \notin \mathbb{Q}}$: $\alpha \approx 1,3247$ est irrationnel (c'est le « nombre plastique »).

■ Corrigé de l'exercice 54

1. a) *Raisonnons par l'absurde* : supposons $a \leq 0$. Comme $abc > 0$, $a \neq 0$; donc $a < 0$. Alors $bc = \frac{abc}{a}$ est le quotient d'un nombre strictement positif par un nombre strictement négatif : $bc < 0$.

b) (H_2) s'écrit $a(b+c) + bc > 0$, donc $a(b+c) > -bc > 0$. Comme $a < 0$, la règle des signes impose $b+c < 0$.

c) Alors $a+b+c = a+(b+c) < 0$, ce qui contredit (H_1) . Donc $a > 0$. Les trois hypothèses ne changent pas si l'on échange les lettres : le même raisonnement donne $b > 0$ et $c > 0$.

$\boxed{a > 0, b > 0, c > 0}$.

2. Sans (H_1) : $(-1, -1, \frac{1}{4})$ vérifie $ab+bc+ca = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$ et $abc = \frac{1}{4} > 0$, mais $a+b+c = -\frac{7}{4}$.

Sans (H_2) : $(4, -1, -1)$ vérifie $a+b+c = 2 > 0$ et $abc = 4 > 0$, mais $ab+bc+ca = -4 + 1 - 4 = -7$.

Sans (H_3) : $(1, 1, -\frac{1}{4})$ vérifie $a+b+c = \frac{7}{4} > 0$ et $ab+bc+ca = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$, mais $abc = -\frac{1}{4}$.

3. $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$. Par identification des coefficients avec $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$: $a+b+c = 6 > 0$, $ab+bc+ca = 11 > 0$, $abc = 6 > 0$; d'après 1, a, b, c sont strictement positifs. Vérification : le polynôme vaut $1 - 6 + 11 - 6 = 0$ en 1, $8 - 24 + 22 - 6 = 0$ en 2 et $27 - 54 + 33 - 6 = 0$ en 3 ; un produit $(x-a)(x-b)(x-c)$ nul en 1, 2, 3 impose $\boxed{\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}}$.

34

Corrigés : récurrence

■ Corrigé de l'exercice 55

1. $S_1 = 1 \times 3 = 3$, $S_2 = 3 + 8 = 11$, $S_3 = 11 + 15 = 26$, $S_4 = 26 + 24 = 50$; et $\frac{1 \times 2 \times 9}{6} = 3$, $\frac{2 \times 3 \times 11}{6} = 11$, $\frac{3 \times 4 \times 13}{6} = 26$, $\frac{4 \times 5 \times 15}{6} = 50$ ✓.

2. a) On ajoute le terme suivant : $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+3)$.

b) $P(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ ». Initialisation. $S_1 = 3 = \frac{1 \times 2 \times 9}{6}$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$. D'après a) :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3) = \frac{(n+1)[n(2n+7) + 6(n+3)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 13n + 18)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}, \end{aligned}$$

qui est la formule au rang $n + 1$, car $2(n + 1) + 7 = 2n + 9$. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $S_{20} = \frac{20 \times 21 \times 47}{6} = \boxed{3290}$. Comme $k(k + 2) = k^2 + 2k$, on a $S_n = (1^2 + \dots + n^2) + 2(1 + \dots + n)$, d'où

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = S_n - 2 \times \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(2n + 7 - 6)}{6} = \boxed{\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 56

1. a) $u_0 = 0$, $u_1 = 5 - 4 - 1 = 0$, $u_2 = 25 - 9 = 16$, $u_3 = 125 - 13 = 112 = 16 \times 7$.

b) $u_{n+1} = 5 \times 5^n - 4n - 5 = 5(5^n - 4n - 1) + 20n + 5 - 4n - 5 = 5u_n + 16n$.

c) $P(n)$: « 16 divise u_n ». *Initialisation.* $u_0 = 0 = 16 \times 0$. *Hérédité.* Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $u_n = 16q$ avec $q \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 5 \times 16q + 16n = 16(5q + n)$: $P(n + 1)$ est vraie. *Conclusion.* 16 divise $5^n - 4n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $P(n)$: « 17 divise $v_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ». *Initialisation.* $v_0 = 15 + 2 = 17$.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $v_n = 17q$ avec $q \in \mathbb{N}$. Alors

$$v_{n+1} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 25 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1} = 25v_n - 17 \times 2^{3n+1} = 17(25q - 2^{3n+1}).$$

Conclusion. 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par exemple $v_1 = 391 = 17 \times 23$).

■ Corrigé de l'exercice 57

1. a) $1 \geq 1$, $4 \geq 4$, $16 \geq 13$, $64 \geq 28$ ✓. b) Pour $n = 0$, $3n(3n - 2) = 0$; pour $n \geq 1$, $3n > 0$ et $3n - 2 > 0$: dans tous les cas, $3n(3n - 2) \geq 0$.

$P(n)$: « $4^n \geq 3n^2 + 1$ ». *Initialisation.* $4^0 = 1 \geq 1$. *Hérédité.* Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors $4^{n+1} = 4 \times 4^n \geq 12n^2 + 4$, et $12n^2 + 4 - (3(n + 1)^2 + 1) = 9n^2 - 6n = 3n(3n - 2) \geq 0$; donc $4^{n+1} \geq 3(n + 1)^2 + 1$. *Conclusion.* $4^n \geq 3n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Même récurrence avec « $>$ » à partir de $n = 2$ ($16 > 13$, et $4^{n+1} > 12n^2 + 4 \geq 3(n + 1)^2 + 1$). Égalité si et seulement si $n = 0$ ou $n = 1$.

2. a) $n = 1$: $5 < 7$; $n = 2$: $25 = 25$; $n = 3$: $125 > 91$.

b) $P(n)$: « $5^n > 3^n + 4^n$ ». *Initialisation.* $125 > 91$. *Hérédité.* Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 3$. Alors $5^{n+1} = 5 \times 5^n > 5 \times 3^n + 5 \times 4^n > 3 \times 3^n + 4 \times 4^n = 3^{n+1} + 4^{n+1}$. *Conclusion.* $5^n > 3^n + 4^n$ pour tout $n \geq 3$.

c) D'après a) et b), $3^n + 4^n = 5^n \iff \boxed{n = 2}$: $3^2 + 4^2 = 5^2$, donc (réciproque de Pythagore) le triangle de côtés 3, 4, 5 est rectangle.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. a) $u_1 = 2 \times 2 - 0 + 1 = 5$, $u_2 = 10 - 1 + 1 = 10$, $u_3 = 20 - 2 + 1 = 19$, $u_4 = 38 - 3 + 1 = 36$; et $u_n - n$ vaut 2, 4, 8, 16, 32 pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) On conjecture $P(n)$: « $u_n = 2^{n+1} + n$ ». *Initialisation.* $u_0 = 2 = 2^1 + 0$. *Hérédité.* Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors $u_{n+1} = 2(2^{n+1} + n) - n + 1 = 2^{n+2} + n + 1$: c'est $P(n + 1)$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + n$. c) $u_{10} = 2^{11} + 10 = \boxed{2058}$.

2. a) $a_2 = 1 + 2 + 1 = 4$, $a_3 = 4 + 4 + 1 = 9$, $a_4 = 9 + 6 + 1 = 16$.

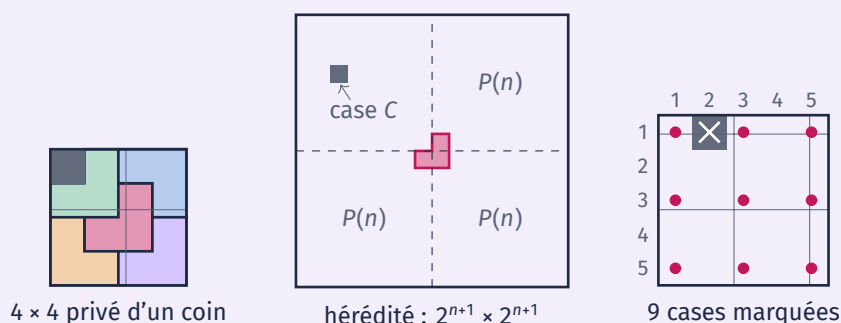
b) On conjecture $Q(n)$: « $a_n = n^2$ ». *Initialisation.* $a_1 = 1 = 1^2$. *Hérédité.* Supposons $Q(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$. Alors $\sqrt{a_n} = \sqrt{n^2} = n$ (car $n \geq 0$), et $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + 1 = (\sqrt{a_n} + 1)^2 = (n + 1)^2$: c'est $Q(n + 1)$. *Conclusion.* Pour tout $n \geq 1$, $a_n = n^2$ (en particulier $a_n \geq 0$, et la suite est bien définie).

■ Corrigé de l'exercice 59

1. Un carré 2×2 privé d'une case est exactement un trimino. Pavage du 4×4 privé d'un coin : figure de gauche (5 triminos).

2. $P(n)$: « un damier $2^n \times 2^n$ privé de n'importe laquelle de ses cases est pavable ». *Initialisation.* $P(1)$: question 1.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$, et considérons un damier $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ privé d'une case C . On le coupe en quatre damiers $2^n \times 2^n$; C est dans l'un d'eux. Les quatre cases centrales appartiennent chacune à un quart : on pose un trimino sur les trois cases centrales qui ne sont pas dans le quart de C (figure du milieu). Chaque quart est alors un damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case (la case C , ou une case couverte par le trimino central) : d'après $P(n)$, il est pavable. Avec le trimino central, le grand damier est pavé. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



3. Il y a $1024 - 1 = 1023$ cases et chaque trimino en couvre 3 : il faut $\frac{1023}{3} = 341$ triminos. Plus généralement, un pavage du damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case (il en existe d'après 2) utilise t triminos, avec $3t = 4^n - 1$: donc 3 **divise** $4^n - 1$.

4. a) Un trimino est contenu dans un carré de 2×2 cases, formé de deux lignes consécutives (une seule est impaire) et de deux colonnes consécutives (une seule est impaire) : ce carré contient exactement une case marquée, donc le trimino en recouvre au plus une.

b) *Raisonnons par l'absurde* : supposons ce damier pavable. Il reste 24 cases, donc 8 triminos, qui recouvrent au plus 8 cases marquées. Or la case retirée (ligne 1, colonne 2) n'est pas marquée : les 9 cases marquées sont toutes à recouvrir. Contradiction : **ce damier n'est pas pavable** (figure de droite). (On peut vérifier que le damier 5×5 privé d'une case est pavable exactement lorsque la case retirée est marquée.)

■ Corrigé de l'exercice 60

1. $P_1 = 2$, $P_2 = 2 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$, $P_3 = \frac{9}{4} \times \frac{28}{27} = \frac{7}{3}$; et $3 - \frac{1}{n}$ vaut $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}$: ici $P_n \leq 3 - \frac{1}{n} < 3$.
2. On obtient seulement $P_{n+1} < 3 \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)$, nombre **supérieur** à 3 : on ne peut pas en déduire $P_{n+1} < 3$. L'hypothèse « $P_n < 3$ » ne laisse aucune marge ; il faut une propriété plus forte.
3. a) Pour $n \geq 1$: $\left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) = 3 - \frac{1}{n} + \frac{3n-1}{n(n+1)^3}$. Donc l'inégalité demandée équivaut à

$$\frac{3n-1}{n(n+1)^3} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \iff 3n-1 \leq (n+1)^2 \quad (\text{on multiplie par } n(n+1)^3 > 0).$$

Et $(n+1)^2 - (3n-1) = n^2 - n + 2 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$: l'inégalité est vraie.

b) $Q(n)$: « $P_n \leq 3 - \frac{1}{n}$ ». *Initialisation.* $P_1 = 2 = 3 - 1$. *Hérédité.* Supposons $Q(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$. Comme $1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 0$: $P_{n+1} = P_n \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \leq \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n+1}$ d'après a). *Conclusion.* $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $P_n \leq 3 - \frac{1}{n} < 3$: $\boxed{P_n < 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\boxed{P_{10} \leq 2,9}$ (en fait $P_{10} \approx 2,42$). On a démontré **plus** pour pouvoir démontrer **moins** : c'est « renforcer l'hypothèse de récurrence ».

35

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

Réponses : 1 (B), 2 (A), 3 (D), 4 (A), 5 (C), 6 (D).

1. (B). On échange $\exists$ et $\forall$ et l'on nie la propriété finale (« $\geq$ » devient « $<$ »). (A) ne change pas $\forall x$; (C) ne change pas $\exists M$; (D) remplace « $\geq$ » par « $\leq$ », qui n'en est pas la négation. Comme $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$ pour tout x , la proposition est **vraie** (avec $M = -1$) : sa négation (B) est fausse.
2. (A). $\overline{P \Rightarrow S} \iff P \text{ et } \overline{S}$, avec $S = Q \text{ ou } R$, et $\overline{Q \text{ ou } R} \iff \overline{Q} \text{ et } \overline{R}$ (Morgan). (B) est l'implication elle-même. Pour P, Q, R fausses, la négation est fausse alors que (C) et (D) sont vraies : elles ne lui sont pas équivalentes.
3. (D). Avec $y = 1$: $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ pour tout x . (A) est fausse pour $x = 1$ ($1 > 1$ est faux) ; (B) est fausse : $x^2 = 2x \iff x \in \{0, 2\}$, deux solutions ; (C) est fausse pour $x = -2$ ($y^2 = -1$ est impossible).
4. (A). « Il faut O pour A » : O est une condition *nécessaire* de A , soit $A \Rightarrow O$. (B) est la réciproque ; (C) est la contraposée de (B), donc équivaut à (B) ; (D) exige en plus la réciproque.
5. (C). P est fausse ($209 = 11 \times 19$) ; Q est vraie ($48 < 49$, et deux positifs sont rangés comme leurs carrés) ; R est fausse : si $\frac{2}{7} = \frac{a}{10^k}$, alors $7a = 2^{k+1} \times 5^k$, et le nombre premier 7 diviserait $2^{k+1} \times 5^k$, impossible (unicité de la décomposition en facteurs premiers). Alors (A) : **V** $\Rightarrow$ **F** est fausse ; (B) : **F** ou **F** est fausse ; (C) : (**F** $\Rightarrow$ **F**) et **V** est vraie ; (D) : **V** $\Leftrightarrow$ **F** est fausse.
6. (D) (*modus ponens*). Pour qu'elle soit fausse, il faudrait Q fausse avec P et $P \Rightarrow Q$ vraies ; or P vraie et Q fausse rendent $P \Rightarrow Q$ fausse : impossible. Pour P fausse et Q vraie, (A), (B) et (C) sont fausses : (A) donne **V** $\Rightarrow$ **F**, (B) donne **V** $\Rightarrow$ **F**, (C) donne **V** $\Leftrightarrow$ **F**.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. a) Youssef : s ou n ; Salma : $\bar{s}$ et $\bar{k}$; Karim : y ; Nadia : $\bar{y}$. Les déclarations de Karim (y) et de Nadia ($\bar{y}$) sont contraires : **exactement l'une des deux est vraie**.

b) Un seul dit vrai : c'est Karim ou Nadia ; donc Youssef et Salma mentent : $\bar{s}$ et $\bar{n}$ (Youssef), et s ou k (Salma), donc k . Coupable : **Karim**. Vérification : y est fausse, seule Nadia dit vrai ✓.

c) Un seul ment : c'est Karim ou Nadia ; donc Youssef et Salma disent vrai : s ou n et $\bar{s}$ et $\bar{k}$, donc n . Coupable : **Nadia**. Vérification : y est fausse, seul Karim ment ✓. d) **Non** : Karim ou Nadia dit vrai.

2. Notons G : « la porte de gauche mène à la sortie » et V : « le gardien interrogé dit la vérité ».

a) Le gardien répond « oui » si V et G sont vraies, mais aussi si V et G sont fausses (le menteur affirme le faux) : un « oui » est compatible avec une sortie à gauche comme à droite. **On ne peut rien conclure**.

b) *Disjonction des quatre cas* (tableau) : le véridique répond la valeur de vérité de $G \Leftrightarrow V$, le menteur le contraire. Dans les quatre cas, la réponse est « oui » exactement quand G est vraie :

V	G	$G \Leftrightarrow V$	réponse
V	V	V	oui
V	F	F	non
F	V	F	oui
F	F	V	non

réponse « oui » $\Leftrightarrow$ la sortie est à gauche. On sort à gauche sur un « oui », à droite sur un « non ».

3. a) Notons H : « l'automate a dit vrai hier » et V : « il dit vrai aujourd'hui ». La déclaration est $\bar{H}$. S'il dit vrai, elle est vraie ; s'il ment, elle est fausse : il peut la prononcer si et seulement si $V \Leftrightarrow \bar{H}$, c'est-à-dire si V et H ont des valeurs **différentes** : son comportement a changé depuis la veille.

b) Dans le tableau (**V** : dit vrai, **F** : ment), on encadre les jours où le comportement change. Alpha : lundi et mercredi ; Bêta : dimanche, lundi, jeudi et vendredi. Le seul jour commun est **lundi**.

	sam	dim	lun	mar	mer	jeu	ven
Alpha	V	V	F	F	V	V	V
Bêta	V	F	V	V	V	F	V

■ Corrigé de l'exercice 63

1. Le milieu est $I\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. Or $\frac{a+c}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+c$ pair $\Leftrightarrow a$ et c ont même parité (pair + pair et impair + impair sont pairs, pair + impair est impair) ; de même pour b et d . D'où l'équivalence. Les points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ ont des couples de parités tous différents : deux d'entre eux diffèrent par la parité d'une coordonnée, et leur milieu n'est pas entier.

2. Le type d'un point entier est le couple des parités de ses coordonnées : (pair, pair), (pair, impair), (impair, pair) ou (impair, impair), soit 4 types. *Raisonnons par l'absurde* : supposons cinq points entiers dont deux quelconques n'ont pas un milieu entier. D'après 1, ils sont de types deux à deux différents : il faudrait au moins 5 types, or il n'y en a que 4. Contradiction. Avec 4 points, la question 1 montre que c'est impossible à garantir : le minimum est **5**.

3. a) $P(k)$: « après k sauts, la somme s_k des coordonnées a la même parité que k ». *Initialisation*. $s_0 = 0$, comme $k = 0$, est pair. *Hérédité*. Supposons $P(k)$ vraie pour un entier $k \geq 0$. Un saut ajoute à la somme des coordonnées $\pm 1 \pm 2$ ou $\pm 2 \pm 1$, c'est-à-dire -3 , -1 , 1 ou 3 : un nombre impair. Donc s_{k+1} n'a pas la parité de s_k , comme $k+1$ n'a pas celle de k : $P(k+1)$ est vraie. *Conclusion*. $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- b) En O , la somme 0 est paire, alors qu'après un nombre impair de sauts elle est impaire : le pion n'est pas en O .
- c) La somme $1 + 0 = 1$ est impaire : il faut un nombre impair de sauts. Un saut ne suffit pas, car $(1, 0)$ n'est pas de la forme $(\pm 1, \pm 2)$ ou $(\pm 2, \pm 1)$; trois suffisent : $(0, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, -1) \rightarrow (1, 0)$.
Minimum : 3 sauts.

■ Corrigé de l'exercice 64

- $2 = 2 \times 1$, $12 = 4 \times 3$, $112 = 8 \times 14$, $2112 = 16 \times 132$.
- a) $10^n = 2^n \times 5^n$, donc $10^n + N = 2^n \times 5^n + 2^n q = 2^n (5^n + q)$, et de même $2 \times 10^n + N = 2^n (2 \times 5^n + q)$.
b) 5^n est impair. Si q est impair, $5^n + q$ est pair, $5^n + q = 2q'$, et $10^n + N = 2^{n+1}q'$. Si q est pair, $2 \times 5^n + q$ est pair, et $2 \times 10^n + N$ est divisible par 2^{n+1} . Ces deux nombres s'écrivent en plaçant un 1 ou un 2 devant les n chiffres de N : ils ont $n + 1$ chiffres égaux à 1 ou à 2.
- $P(n)$: « il existe un entier de n chiffres égaux à 1 ou à 2, divisible par 2^n ». *Initialisation.* 2 convient pour $n = 1$. *Hérédité.* Si $P(n)$ est vraie pour un $n \geq 1$, la question 2 fournit un tel entier à $n + 1$ chiffres. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
À partir de $2112 = 16 \times 132$ (q pair) : $22112 = 32 \times 691$ (q impair), puis $122112 = 64 \times 1908$ (q pair), puis $2122112 = 128 \times 16579$: 22112, 122112, 2122112.
- Soit $M = d \times 10^n + N$ ($d \in \{1, 2\}$, N formé des n derniers chiffres) divisible par 2^{n+1} , donc par 2^n ; comme 2^n divise 10^n , il divise $N = M - d \times 10^n$.
 $U(n)$: « il existe un **seul** entier de n chiffres égaux à 1 ou à 2 divisible par 2^n ». *Initialisation.* Parmi 1 et 2, seul 2 convient. *Hérédité.* Supposons $U(n)$ vraie pour un $n \geq 1$, et soit $N_n = 2^n q$ cet entier. Si M convient au rang $n + 1$, ses n derniers chiffres forment un entier divisible par 2^n , donc égal à N_n : $M = 2^n (5^n + q)$ ou $M = 2^n (2 \times 5^n + q)$. Or $5^n + q$ et $2 \times 5^n + q$ diffèrent de 5^n , impair : un seul des deux est pair. Donc un seul M convient. *Conclusion.* L'entier est unique pour tout $n \geq 1$.

■ Corrigé de l'exercice 65

Réponses : 1 (B), 2 (C), 3 (B), 4 (D), 5 (C), 6 (C).

- (B). $n = 0$: $1 > 0$ V ; $n = 1, 2, 3, 4$: $2 > 2, 4 > 6, 8 > 12, 16 > 20$ sont fausses ; $n = 5$: $32 > 30$ V. *Récurrence* pour $n \geq 5$: si $2^n > n^2 + n$, alors $2^{n+1} > 2n^2 + 2n$, et $2n^2 + 2n - [(n+1)^2 + (n+1)] = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) \geq 0$; donc $2^{n+1} > (n+1)^2 + (n+1)$. Le piège est $n = 0$.
- (C). *Récurrence* : 7 divise $2^{3k} - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, car $2^0 - 1 = 0$ et $2^{3k+3} - 1 = 8(2^{3k} - 1) + 7$. Avec $k = 33$: $2^{99} = 7q + 1$, donc $2^{100} = 7 \times 2q + 2$, avec $0 \leq 2 < 7$: le reste est 2.
- (B). $n^2 + 2n + 12 = (n+1)^2 + 11$. Pour $n \geq 5$, $11 < 2n + 3$, donc $(n+1)^2 < n^2 + 2n + 12 < (n+2)^2$; s'il valait m^2 , l'entier m serait strictement entre $n+1$ et $n+2$: absurde. Pour $n \leq 4$: 12, 15, 20, 27, 36 : seul $n = 4$ convient ($36 = 6^2$).
- (D). *Disjonction des cas.* Si $x < 1$: $4 - 2x = 2 \iff x = 1$, exclu. Si $1 \leq x \leq 3$: $(x-1) + (3-x) = 2$ est toujours vrai. Si $x > 3$: $2x - 4 = 2 \iff x = 3$, exclu. Donc $S = [1, 3]$: une infinité de solutions.
- (C) : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$. (A) : $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; s'il était rationnel, $\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3}$ le serait. (B) : exercice 53. (D) : $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2} > 0$, donc $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$, irrationnel (sinon $\sqrt{2} = (1+\sqrt{2}) - 1$ serait rationnel).

6. (C). $6^0 + 3 = 4$: (A) est fausse. Si $6^n + 3 = 5q$, alors $6^{n+1} + 3 = 6(6^n + 3) - 15 = 5(6q - 3)$: l'hérédité est vraie, (D) est fausse. Mais 5 divise $6^n - 1$ (récurrence : $6^0 - 1 = 0$ et $6^{n+1} - 1 = 6(6^n - 1) + 5$), donc $6^n + 3 = (6^n - 1) + 4$ a pour reste 4 : $P(n)$ est **toujours fausse**. Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

■ Corrigé de l'exercice 66

- $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = a^2 - 4$. Un carré étant positif, $a^2 \geq 4$, soit $|a| \geq 2$. Par l'absurde, $x + \frac{1}{x} = 1$ donnerait $|a| = 1 < 2$: **aucun réel x ne convient**.
 $u_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$. Pour $n \geq 1$: $a u_n = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}} = u_{n+1} + u_{n-1}$, d'où $u_{n+1} = a u_n - u_{n-1}$ et $u_3 = a(a^2 - 2) - a = a^3 - 3a$.
- Initialisation.** $u_0 = 2$ et $u_1 = a$ sont entiers : $P(1)$ est vraie. **Hérédité.** Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$: u_{n-1} et u_n sont entiers. Alors $u_{n+1} = a u_n - u_{n-1}$ est entier (sommes et produits d'entiers) : u_n et u_{n+1} sont entiers, $P(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$: **si $x + \frac{1}{x}$ est entier, alors $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier pour tout n** . (On a fait porter la récurrence sur deux termes consécutifs, car u_{n+1} dépend de u_n et de u_{n-1} .)
- Pour $a = 3$: $u_2 = 9 - 2 = 7$, $u_3 = 3 \times 7 - 2 = 19$, $u_4 = 3 \times 19 - 7 = 49$, $u_5 = 3 \times 49 - 19 = 123$.
Non. Pour $a = \sqrt{5} \geq 2$, le réel $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ convient : $\frac{1}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$. Alors $u_2 = 5 - 2 = 3$ est entier, mais $a = \sqrt{5}$ ne l'est pas (et $u_3 = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ non plus).
- $Q(k)$: « u_{3k} est pair, u_{3k+1} et u_{3k+2} sont impairs ». **Initialisation.** $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 7$. **Hérédité.** Supposons $Q(k)$ vraie pour un entier $k \geq 0$. Avec $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$: $u_{3k+3} = 3u_{3k+2} - u_{3k+1}$ est impair - impair, donc pair ; $u_{3k+4} = 3u_{3k+3} - u_{3k+2}$ est pair - impair, donc impair ; $u_{3k+5} = 3u_{3k+4} - u_{3k+3}$ est impair - pair, donc impair. **Conclusion.** $Q(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Tout entier n s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$: $u_n \text{ pair} \iff 3 \mid n$ (par exemple $u_3 = 18$ et $u_6 = 322$).

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Calculs et nombres

- ① (a) 3^2 ; (b) $\frac{2}{3}$. $9^2 = 3^4$,
 $27^3 = 3^9$;
 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{9}{4} \times \frac{8}{27}$.
- ② (a) $4\sqrt{3}$; (b) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
 $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$;
 $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$.
- ③ (a) 4000 ; (b) $(x+5)^2$,
 $S = \{-5\}$.
 $(1001 - 999)(1001 + 999)$;
un carré est nul
seulement si $x + 5 = 0$.
- ④ (a) Pair ; impair. (b) 0 ou 9.
 $a = 2k + 1$, $b = 2p + 1$;
 $a + b = 2(k + p + 1)$,
 $ab = 2(2kp + k + p) + 1$;
 $4 + \square + 5$ multiple de 9 :
405, 495.

Bloc 2 · Inégalités et intervalles

- ⑤ (a) $I = [-3, 2[$, $J =]0, 5]$;
(b) $]0, 2[$ et $[-3, 5]$.
Crochet tourné vers
l'extérieur : borne exclue ;
n : dans les deux, u : dans
l'un au moins.
- ⑥ (a) 1 ; (b) $S = \{-2 ; 3\}$.
 $1 < \sqrt{3} < 2$: $2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$;
 $2x - 1 = 5$ ou -5 .
- ⑦ (a) $2 \leq x - y \leq 5$;
(b) $-6 \leq xy \leq -1$.
 $1 \leq -y \leq 2$, on additionne ;
 $1 \leq x \times (-y) \leq 6$ (nombres
positifs).
- ⑧ (a) $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$;
(b) $(x-3)^2 + 1$. Nombres
positifs, carrés : $20 > 18$;
 $(x-3)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Bloc 3 · Bon sens logique

- ⑨ (a) Elle n'est pas restée
dans le noir ; (b) non.
(a) Sinon, elle n'en
fabriquerait pas. (b) Il
peut lui manquer de l'eau,
du CO_2 ...
- ⑩ (a) 3, 9, 15 ; (b) tous sauf
1, 9, 15. « Ou » garde 2,
premier et pair.
- ⑪ 8 : diviseurs 1, 2, 4, 8,
mais $8 = 2 \times 2 \times 2$. Un seul
suffit (27 aussi).
- ⑫ (a) « Au moins un tube
n'est pas propre. » (b) « Il
coûte moins de 50 DH ou
plus de 80 DH. » Et non
« aucun tube... ».

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 4 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 43**, p. 32. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 11), méthodes et pièges compris. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 31 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 11 en lecture rapide), puis les sections 12 à 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Calculs et nombres

Relis : les sections 7, 8 et 11 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 23,
exercice 13, p. 25, **exercice 49**,
p. 34 et **exercice 56**, p. 36.

Bloc 2 · Inégalités et intervalles

Relis : les sections 2, 4, 7 et 8 du cours.
Fais : **exercice 4**, p. 23,
exercice 33, p. 29, **exercice 46**,
p. 33 et **exercice 51**, p. 34.

Bloc 3 · Bon sens logique

Relis : les sections 2, 3, 6 et 9 du cours.
Fais : **exercice 2**, p. 23,
exercice 6, p. 24, **exercice 38**,
p. 31 et **exercice 44**, p. 33.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Connecteurs et tables de vérité	31 à 36	/ 6	
Thème B · Quantificateurs	37 à 42	/ 6	
Thème C · Implication et contraposée	43 à 48	/ 6	
Thème D · Absurde et disjonction des cas	49 à 54	/ 6	
Thème E · Raisonnement par récurrence	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Généralités sur les fonctions

Maths Olympiad