

Chapitre 2

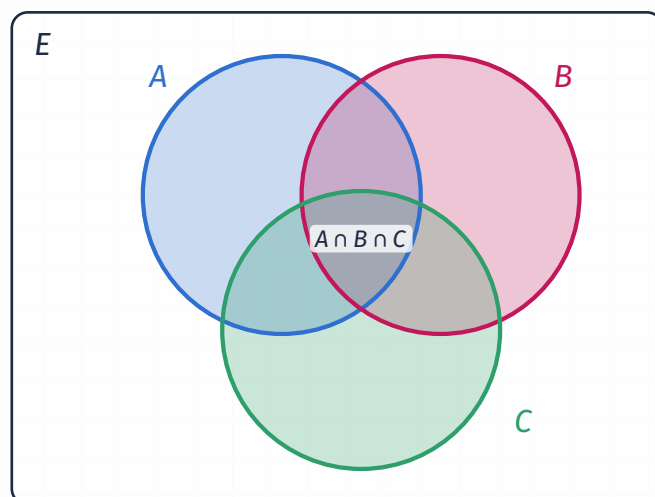
Les ensembles

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$$

*Défi de concours*Résoudre $A \Delta X = B$
d'inconnue $X \subset E$ *Réunion, intersection, complémentaire : tout se voit sur un dessin*

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	18 Niveau 4 · Concours	27
1 Ensembles et éléments	5	19 Décrire un ensemble	29
2 Inclusion et égalité	6	20 Inclusion et égalité	31
3 L'ensemble des parties	7	21 Réunion et intersection	32
4 Intersection et réunion	9	22 Complémentaire et différence	34
5 Complémentaire, lois de Morgan	10	23 Parties et produit cartésien	35
6 Différence, différence symétrique	11	24 Défis de concours	37
7 Le produit cartésien	12	25 Corrigés du niveau 1	39
8 Ensembles de points, intervalles	13	26 Corrigés du niveau 2	41
9 Compter les éléments	15	27 Corrigés du niveau 3	44
10 Méthodes de démonstration	16	28 Corrigés du niveau 4	46
11 Pour aller plus loin	18	29 Corrigés : décrire un ensemble	49
12 Les pièges classiques	20	30 Corrigés : inclusion et égalité	52
13 Les astuces des concours	20	31 Corrigés : réunion et intersection	55
14 L'essentiel du chapitre en une page	22	32 Corrigés : complémentaire	58
15 Niveau 1 · Bases	23	33 Corrigés : parties et produits	61
16 Niveau 2 · Bac	24	34 Corrigés : défis de concours	64
17 Niveau 3 · Approfondissement	26	Corrigé du test d'entrée	68

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Décrire un ensemble, Inclusion et égalité, Réunion et intersection, Complémentaire et différence, Parties et produit cartésien, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|---|
| ☐ passer de l'extension à la compréhension ; | ☐ calculer $A \setminus B$ et $A \Delta B$; |
| ☐ utiliser $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ sans les confondre ; | ☐ dresser une table d'appartenance ; |
| ☐ montrer une inclusion (« Soit $x \in A...$ ») ; | ☐ manipuler couples et produit cartésien ; |
| ☐ montrer une égalité par double inclusion ; | ☐ dessiner un ensemble de points du plan ; |
| ☐ lister les parties d'un ensemble (2^n parties) ; | ☐ compter avec $\text{card}(A \cup B)$, $\text{card}(E \times F)$; |
| ☐ calculer $\cap$, $\cup$ (ensembles finis, intervalles) ; | ☐ réfuter avec un contre-exemple (Venn) ; |
| ☐ utiliser le complémentaire et Morgan ; | ☐ résoudre une équation ensembliste simple. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant d'ouvrir le cours, fais le point : les blocs 1 et 2 vérifient les bases du tronc commun dont le chapitre a besoin (nombres, intervalles, équations), le bloc 3 tes acquis du **chapitre 1 « Notions de logique »**. Aucune question ne demande le cours de ce chapitre. Corrigé et orientation : **page 68**.

Bloc 1 · Nombres et intervalles

___ / 4

① **Ensembles de nombres** Donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auquel appartient chaque nombre : $a = \frac{-44}{4}$, $b = \frac{9}{20}$, $c = \frac{4}{15}$, $d = \sqrt{2} \times \sqrt{98}$, $e = 1 + \sqrt{2}$.

② **Intervalles** On pose $I =]-8; 5]$ et $J =]-2; +\infty[$. Écrire $I \cap J$ et $I \cup J$ sous la forme d'un intervalle.

③ **Valeur absolue** (a) Résoudre $|4 - x| < 3$.
(b) Trouver a et r tels que :
 $x \in [-5; 3] \iff |x - a| \leq r$.

④ **Diviseurs et multiples** Lister les diviseurs positifs de 63. Lesquels sont des nombres premiers ? Lesquels sont des multiples de 3 ?

Bloc 2 · Équations et inéquations

___ / 4

⑤ **Second degré** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - x - 3 = 0$, puis factoriser le trinôme $2x^2 - x - 3$.

⑥ **Système** Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 2x + 9 > 1 \\ 5 - 3x \geq 2 \end{cases}$$
et écrire l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

⑦ **Inéquation** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leq x + 12$.

⑧ **Valeur interdite** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 3$ et (b) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Bloc 3 · Logique (chapitre 1)

___ / 4

⑨ **« Et », « ou »** Compléter (x, y réels) :
(a) $xy = 0 \iff x = 0 \dots y = 0$;
(b) $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0 \dots y = 0$;
(c) $|x| \leq 4 \iff x \geq -4 \dots x \leq 4$.

⑩ **Négation** Écrire la négation de P :
« $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ ». Laquelle est vraie : P ou sa négation ?

⑪ **Contraposée** Soient x et y deux réels. Écrire la contraposée de : « si $x \neq y$, alors $(x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$ », puis la démontrer.

⑫ **Récurrence** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
 $3^n \geq 2n + 1$.

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 68**.

 Bloc 1
___ / 4

+

 Bloc 2
___ / 4

+

 Bloc 3
___ / 4

=

 Mon score
___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Ensembles et éléments

Les entiers pairs, les solutions d'une équation, les points d'une droite, les élèves d'une classe : les mathématiques manipulent sans cesse des **collections d'objets**. La notion d'ensemble fournit le **vocabulaire** commun à tous les chapitres, comme la logique en fournit la grammaire.

Définition : ensemble, élément, appartenance

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**, **bien déterminée** : pour tout objet x , on doit pouvoir décider si x est un élément de l'ensemble E ou non. On écrit $x \in E$ (« x **appartient** à E ») ou $x \notin E$ (« x n'appartient pas à E »). Deux ensembles sont **égaux** lorsqu'ils ont exactement les **mêmes éléments**.

« Les grands nombres » ne forment pas un ensemble (1000 est-il grand ?) ; « les entiers supérieurs à 1000 » en forment un.

Définition : ensemble défini en extension, en compréhension

- **En extension** : on donne la **liste** des éléments entre accolades, $\{a, b, c\}$. L'ordre et les répétitions ne comptent pas : $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 3\}$. On écrit « ... » quand la suite est claire : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- **En compréhension** : on donne une **propriété caractéristique**. $\{x \in E / P(x)\}$ (ou $\{x \in E \mid P(x)\}$) se lit « ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ » : il contient les x de E pour lesquels $P(x)$ est vraie, et eux seuls. Variante : $\{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ est « l'ensemble des nombres de la forme $2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ » (les entiers pairs).

Exemple : passer de la compréhension à l'extension, et inversement

en compréhension	en extension	pourquoi
$\{n \in \mathbb{N} / n \text{ divise } 28\}$	$\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$	$28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$
$\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2x + 8\}$	$\{-2, 4\}$	$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$
$\{n \in \mathbb{Z} / -3 < 2n \leq 5\}$	$\{-1, 0, 1, 2\}$	$-\frac{3}{2} < n \leq \frac{5}{2}$ et n entier
$\{x \in \mathbb{Q} / x^2 = 2\}$	$\emptyset$ (aucun élément)	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (chapitre 1)
$\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2\}$	$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$	même condition, mais x est pris dans $\mathbb{R}$

Inversement : $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}, k \leq 4\} = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ impair et } n < 10\}$;
 $\{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\} = \{5k / k \in \mathbb{Z}\}$; $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*, n \leq 4\}$.

Définition : ensemble vide, singleton, paire

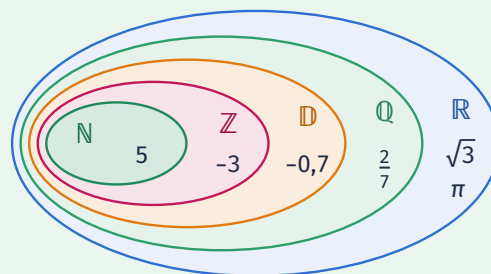
L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui n'a **aucun** élément. Un ensemble à un seul élément $\{a\}$ est un **singleton** ; un ensemble $\{a, b\}$ à deux éléments ($a \neq b$) est une **paire**.

Attention : $\{\emptyset\}$ n'est pas vide : c'est un singleton, dont l'unique élément est l'ensemble vide (une boîte qui contient une boîte vide n'est pas vide). De même, $x \in \{a\} \iff x = a$, mais le nombre a et l'ensemble $\{a\}$ sont deux objets différents.

Les ensembles de nombres.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: entiers naturels ;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: entiers relatifs ;
- $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$: décimaux ;
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$: rationnels ;
- $\mathbb{R}$: nombres réels (les abscisses des points d'une droite graduée).

$-0,7 = \frac{-7}{10} \in \mathbb{D}$ mais $-0,7 \notin \mathbb{Z}$; $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{2}{7} \notin \mathbb{D}$ (7 ne divise aucun 2×10^n) ; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$. Une étoile enlève 0 : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{R}^*$; un signe garde les positifs ou les négatifs : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (le symbole $\subset$ est défini à la section 2)

Remarque. Un peu d'histoire. L'Allemand **Georg Cantor** (1845–1918) crée la théorie des ensembles entre 1874 et 1897, en étudiant les ensembles **infinis** : il démontre que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont « aussi nombreux », mais que $\mathbb{R}$ est « strictement plus gros » : il y a **plusieurs infinis** ! Ses idées choquent d'abord ; Hilbert dira : « Nul ne nous chassera du paradis que Cantor a créé. » En 1901, l'Anglais **Bertrand Russell** découvre un paradoxe : « l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes » ne peut pas exister (section 11). Depuis, on prend toujours les éléments dans un ensemble E déjà connu : $\{x \in E \mid P(x)\}$.

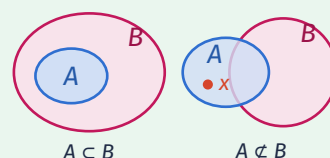
2

Inclusion et égalité**Définition : inclusion**

On dit que A est **inclus** dans B , et on écrit $A \subset B$, lorsque **tout** élément de A est un élément de B :

$$A \subset B \iff \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

On dit aussi que A est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de B , ou que B **contient** A .



Négation. D'après le chapitre 1 ($\overline{P \Rightarrow Q} \iff P \text{ et } \overline{Q}$) : $A \not\subset B \iff \exists x, (x \in A \text{ et } x \notin B)$: **un seul** élément de A hors de B suffit.

Exemples. $\{2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $[1, 2] \subset [0, 3[$; $\{1, 5\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$ (à cause de 5) ; $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$ (à cause de $\frac{2}{7}$).

Théorème

Pour tous ensembles A, B, C :

- $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$;
- **transitivité** : si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$;
- **double inclusion** : $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

Démonstration. • « $x \in \emptyset$ » est toujours fausse, donc « $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ » est toujours vraie (le faux implique n'importe quoi) : $\emptyset \subset A$. • Soit $x \in A$; comme $A \subset B$, $x \in B$; comme $B \subset C$, $x \in C$. • $A = B$ signifie $\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$, et une équivalence est la conjonction de deux implications. $\square$

Méthode : Comment montrer une inclusion $A \subset B$

1. On écrit « **Soit** $x \in A$. » (x quelconque, on ne choisit rien). 2. On **traduit** : x vérifie la propriété qui définit A . 3. On en déduit, par des implications, que x vérifie la propriété qui définit B . 4. On conclut : « donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$. »

Pour montrer que $A \not\subset B$: on **exhibe** un élément de A qui n'appartient pas à B .

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| < 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 4x\}$: montrer que $A \subset B$, mais $B \not\subset A$

$A \subset B$. Soit $x \in A$. Alors $|x - 1| < 1$, soit $-1 < x - 1 < 1$, donc $0 < x < 2$. Ainsi $x > 0$ et $x - 4 < -2 < 0$, donc $x(x - 4) < 0$, c'est-à-dire $x^2 < 4x$: $x \in B$. On a montré que $A \subset B$.

$B \not\subset A$. $3 \in B$ car $3^2 = 9 < 12 = 4 \times 3$, mais $3 \notin A$ car $|3 - 1| = 2 \geq 1$. Donc $A \neq B$ (en fait $A =]0, 2[$ et $B =]0, 4[$).

Méthode : Comment montrer une égalité $A = B$: la double inclusion

On montre $A \subset B$ (« Soit $x \in A...$ ») **puis** $B \subset A$ (« Soit $x \in B...$ ») : les deux paragraphes sont **indispensables**. On conclut : « Par double inclusion, $A = B$. » (Autres méthodes : section 10.)

Exemple : double inclusion : $\{6k / k \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} / 2 \mid n \text{ et } 3 \mid n\}$

Notons A et B ces deux ensembles.

$A \subset B$. Soit $n \in A$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k$. Alors $n = 2 \times (3k)$ et $n = 3 \times (2k)$: $2 \mid n$ et $3 \mid n$, donc $n \in B$.

$B \subset A$. Soit $n \in B$: il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 2a$ et $n = 3b$. L'astuce : $a = 3a - 2a = 3a - 3b = 3(a - b)$. Donc $n = 2a = 6(a - b)$ avec $a - b \in \mathbb{Z}$: $n \in A$.

Conclusion. Par double inclusion, $A = B$: les entiers divisibles par 2 et par 3 sont exactement les multiples de 6.

Attention, piège ! ne pas confondre $\in$ et $\subset$

« $\in$ » relie un **élément** à un ensemble ; « $\subset$ » relie **deux ensembles**. Soit $E = \{1, 2, \{3\}\}$: ses trois éléments sont 1, 2 et l'ensemble $\{3\}$.

vrai				faux			
$1 \in E$	$\{1\} \subset E$	$\{3\} \in E$	$\{\{3\}\} \subset E$	$\{1\} \in E$	$3 \in E$	$\{3\} \subset E$	$\emptyset \in E$

On a aussi $\emptyset \subset E$ (toujours vrai). **Règle** : $a \in E \iff \{a\} \subset E$.

3

L'ensemble des parties

Définition : ensemble des parties

Soit E un ensemble. Les parties de E forment un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$: $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$, autrement dit

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

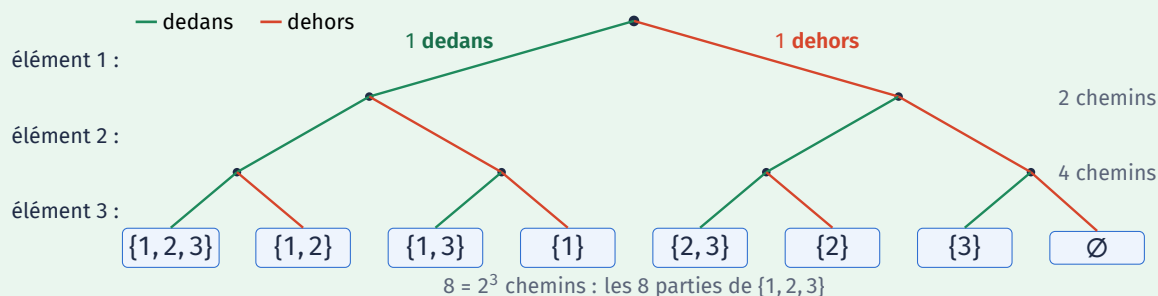
En particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$, **toujours**. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des **ensembles**.

Exemples. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (1 élément : $\emptyset$ a une partie, lui-même) ; $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$; $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;

$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (8 éléments).

Méthode : lister toutes les parties sans en oublier : l'arbre

On prend les éléments de E un par un et, pour chacun, on décide : **dedans** ou **dehors**. Chaque chemin de l'arbre donne une partie, et chaque partie correspond à un seul chemin.



Théorème

Si E est un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$), alors $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « tout ensemble à n éléments a exactement 2^n parties ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $E = \emptyset$, dont la seule partie est $\emptyset$; il y a $1 = 2^0$ partie : $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, et montrons $P(n + 1)$. Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments ; choisissons $a \in E$ et posons $E' = E \setminus \{a\}$, qui a n éléments. Les parties de E se rangent en deux familles sans partie commune :

- celles qui **ne contiennent pas** a : ce sont exactement les parties de E' ; il y en a 2^n (hypothèse de récurrence) ;
- celles qui **contiennent** a : chacune s'écrit d'une seule façon $X \cup \{a\}$ avec $X \subset E'$ (on enlève a pour trouver X), et chaque $X \subset E'$ en donne une ; il y en a donc autant que de parties de E' : 2^n .

Au total, E a $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ parties : $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, un ensemble à n éléments a 2^n parties. (Dans l'arbre, chaque nouvel élément **double** le nombre de chemins.) $\square$

Exemples. $\{1, 2, \dots, 10\}$ a $2^{10} = 1024$ parties. $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ a 2 éléments, donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$ en a $2^2 = 4$: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

Propriété

Pour tous ensembles A et B : $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

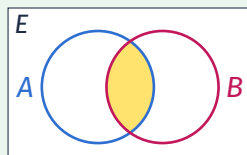
Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $X \in \mathcal{P}(A)$: $X \subset A$ et $A \subset B$, donc $X \subset B$ (transitivité), c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(B)$.
 ($\Leftarrow$) $A \in \mathcal{P}(A)$, donc $A \in \mathcal{P}(B)$, c'est-à-dire $A \subset B$. $\square$

4 Intersection et réunion

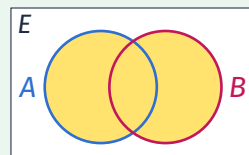
Définition : intersection, réunion

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

- L'**intersection** de A et B (lire « A inter B ») : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$: les éléments **communs**.
- La **réunion** de A et B (lire « A union B ») : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$: les éléments **d'au moins un** des deux (« ou » inclusif).



$A \cap B$



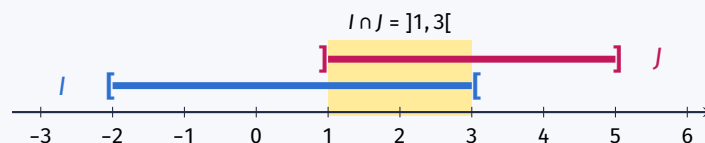
$A \cup B$



$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exemple : des diviseurs, puis des intervalles

- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 30\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$:
 $A \cap B = \{1, 2, 5, 10\}$ (les diviseurs communs, c'est-à-dire ceux de 10, le PGCD) et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 30\}$.
- $I = [-2, 3[$ et $J =]1, 5]$: $I \cap J =]1, 3[$ et $I \cup J = [-2, 5]$ (on lit sur la droite graduée : à gauche de 1, seul I compte ; à droite de 3, seul J).



Théorème (règles de calcul)

Pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E :

nom	avec $\cap$	avec $\cup$
commutativité	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
associativité	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
idempotence, $\emptyset$ et E	$A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap E = A$	$A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup E = E$
distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
absorption	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
encadrement	$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$	$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

plus grande, plus petite partie

$$(C \subset A \text{ et } C \subset B) \iff C \subset A \cap B$$

$$(A \subset C \text{ et } B \subset C) \iff A \cup B \subset C$$

Démonstrations par la logique. Chaque règle traduit une loi logique du chapitre 1 (« et », « ou » sont commutatifs, associatifs, distributifs l'un sur l'autre). Par exemple, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Absorption, par double inclusion. $A \cap (A \cup B) \subset A$ (encadrement) ; et $A \subset A$, $A \subset A \cup B$, donc $A \subset A \cap (A \cup B)$. De même $A \cup (A \cap B) \supset A$, et $A \subset A$, $A \cap B \subset A$ donnent $A \cup (A \cap B) \subset A$.

Grâce à l'associativité, on écrit sans parenthèses $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (éléments d'**au moins un** des A_i) et $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ (éléments de **tous** les A_i).

Définition : ensembles disjoints

A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$: ils n'ont aucun élément commun.

Les entiers pairs et les entiers impairs sont disjoints ; $[0, 1[$ et $[1, 2]$ sont disjoints ; $[0, 1]$ et $[1, 2]$ ne le sont pas (ils ont 1 en commun). « Disjoints » ne veut pas dire « différents » : $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$ sont différents mais pas disjoints.

5

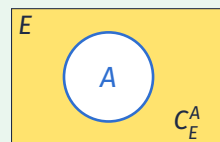
Complémentaire, lois de Morgan

Définition : complémentaire d'une partie

Soit A une partie d'un ensemble E . Le **complémentaire de A dans E** est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}.$$

Quand E est sous-entendu, on le note aussi $\bar{A}$ (lire « A barre »).



Exemples. • $E = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ (les nombres premiers) : $C_E^A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$. • Dans $E = \mathbb{R}$, le complémentaire de $] -\infty, 2]$ est $]2, +\infty[$. • $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des **irrationnels** ($\sqrt{2}$, π , ...). • $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{Z} / n < 0\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$, alors que $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ contient aussi $\frac{1}{2}$, $-\pi$... : **le complémentaire dépend de l'ensemble de référence E .**

Théorème

Pour toutes parties A et B de E :

$$\bullet \bar{\bar{A}} = A ; \quad C_E^{\emptyset} = E ; \quad C_E^E = \emptyset ; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset ; \quad A \cup \bar{A} = E ;$$

$$\bullet \text{ le passage au complémentaire renverse les inclusions : } A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A} ;$$

$$\bullet \text{ lois de Morgan : } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Démonstration. • Pour $x \in E$: $x \in \bar{\bar{A}} \iff \overline{x \notin A} \iff x \in A$ (double négation) ; « $x \in A$ et $x \notin A$ » est toujours fausse (non-contradiction) et « $x \in A$ ou $x \notin A$ » toujours vraie (tiers exclu).

• ($\Rightarrow$) Supposons $A \subset B$. Soit $x \in \bar{B}$. Si l'on avait $x \in A$, on aurait $x \in B$: impossible. Donc $x \notin A$,

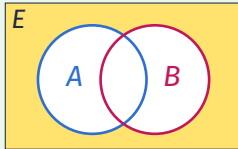
soit $x \in \bar{A}$ (c'est la **contraposée** de « $x \in A \Rightarrow x \in B$ »). ($\Leftarrow$) On applique ($\Rightarrow$) à $\bar{B} \subset \bar{A}$: $\bar{\bar{A}} \subset \bar{\bar{B}}$, c'est-à-dire $A \subset B$.

• Pour tout $x \in E$, avec les lois de Morgan logiques :

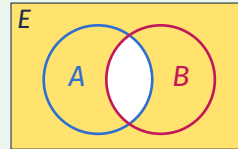
$$x \in \overline{A \cap B} \iff \overline{x \in A \text{ et } x \in B} \iff (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \iff x \in \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$x \in \overline{A \cup B} \iff \overline{x \in A \text{ ou } x \in B} \iff (x \notin A \text{ et } x \notin B) \iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

□



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ (ni dans A, ni dans B)}$$



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ (hors de A ou hors de B)}$$

Exemple : $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

$A = [-3, 3]$, $B =]1, +\infty[$, donc $\bar{A} =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ et $\bar{B} =]-\infty, 1]$. Par les lois de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} =]-\infty, 1] \cup]3, +\infty[\quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} =]-\infty, -3[.$$

Contrôle direct : $A \cap B =]1, 3]$ et $A \cup B = [-3, +\infty[$; on retrouve bien leurs complémentaires.

En mots. Dans $E = \mathbb{N}$, les multiples de 10 forment $M = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ pair et } 5 \mid n\}$; donc $\bar{M} = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ impair ou } 5 \nmid n\}$.

6

Différence, différence symétrique

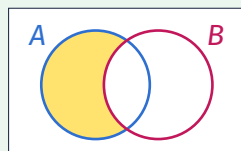
Définition : différence, différence symétrique

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

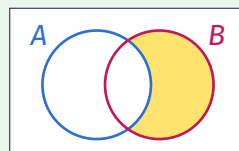
- La **différence** « A privé de B » (ou « A moins B ») : $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$, donc

$$A \setminus B = A \cap C_E^B. \text{ En particulier } C_E^A = E \setminus A.$$

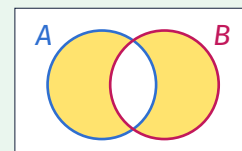
- La **différence symétrique** : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: les éléments qui sont dans **un et un seul** des deux ensembles.



$$A \setminus B$$



$$B \setminus A$$



$$A \Delta B$$

Exemples. • $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$: $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{7, 8\}$, $A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$.

• $[0, 4] \setminus]1, 2] = [0, 1] \cup]2, 4]$ (attention aux crochets : 1 reste, 2 part).

• $] -\infty, 3] \Delta [1, +\infty[=] -\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ (les réels qui sont dans un seul des deux intervalles).

Définition : table d'appartenance

Pour comparer des ensembles construits à partir de A et B , on étudie les **quatre cas** possibles pour un élément x de E : on note 1 si x appartient à l'ensemble, 0 sinon. C'est la table de vérité des propositions « $x \in A$ », « $x \in B$ » ; deux ensembles sont **égaux** lorsque leurs colonnes sont **identiques** (8 lignes avec trois ensembles).

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A}$	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$A \Delta B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0

Théorème

Pour toutes parties A, B, C de E :

- $A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B$; $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; en général $A \setminus B \neq B \setminus A$;
- $A \Delta B = B \Delta A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
- $A \Delta \emptyset = A$; $A \Delta A = \emptyset$; $A \Delta E = \bar{A}$; $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$;
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Démonstration. • $A \setminus B = \emptyset \iff \forall x, \overline{x \in A \text{ et } x \notin B} \iff \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff A \subset B$. Ensuite $A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \cup (A \setminus B) = A \setminus B$ (Morgan, puis distributivité). Enfin $\{1\} \setminus \{2\} = \{1\} \neq \{2\} = \{2\} \setminus \{1\}$.

• $A \Delta B = B \Delta A$ car la réunion est commutative ; l'autre égalité est lue dans la table (colonnes surlignées).

• $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$; $A \Delta A = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$; $A \Delta E = \emptyset \cup (E \setminus A) = \bar{A}$; enfin $A \Delta B = \emptyset \iff (A \setminus B = \emptyset \text{ et } B \setminus A = \emptyset) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A) \iff A = B$.

• Par le calcul, avec Morgan : $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (car $A = A \cap A$) ; de même pour l'autre. $\square$

7

Le produit cartésien**Définition : couple, produit cartésien**

- Avec deux objets a et b , on forme le **couple** (a, b) : a est sa **première** composante, b sa **seconde** ; l'ordre compte :

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \text{ et } b = b')$$

- Le **produit cartésien** de E par F est l'ensemble de tous les couples dont la première composante est dans E et la seconde dans F : $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$. On note $E^2 = E \times E$. De même avec des **triplets** : $E \times F \times G = \{(x, y, z) \mid x \in E, y \in F, z \in G\}$, $E^3 = E \times E \times E$.

Couple ou paire ? $(1, 2) \neq (2, 1)$, alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$; $(3, 3)$ est un couple, alors que $\{3, 3\} = \{3\}$.

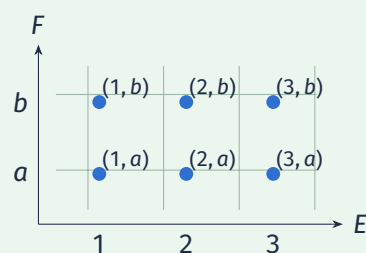
Égalité de couples : $(x + y, x - 2y) = (7, 1) \iff (x + y = 7 \text{ et } x - 2y = 1) \iff (x, y) = (5, 2)$ (en soustrayant : $3y = 6$).

Exemple. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$:

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

($3 \times 2 = 6$ couples). On le représente par un **tableau à double entrée** ou par un **quadrillage** : E sur l'axe horizontal, F sur l'axe vertical, un point par couple. $F \times E$ contient $(a, 1)$, qui n'est pas dans $E \times F$: $E \times F \neq F \times E$.

$y \setminus x$	1	2	3
b	(1, b)	(2, b)	(3, b)
a	(1, a)	(2, a)	(3, a)



le quadrillage de $E \times F$: 6 points

Dans le plan. Muni d'un repère, le plan s'identifie à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: le point $M(x, y)$ correspond au couple (x, y) . Ainsi $[1, 4] \times [1, 3]$ est un **rectangle** plein, $\mathbb{R} \times \{2\}$ la droite d'équation $y = 2$, et $\{1\} \times \mathbb{R}$ la droite d'équation $x = 1$.

Théorème

Soit A, C deux parties de E et B, D deux parties de F .

- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
- $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$ et $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$;
- $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$, mais l'égalité est **fausse** en général ;
- $A \times B = \emptyset \iff (A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset)$.

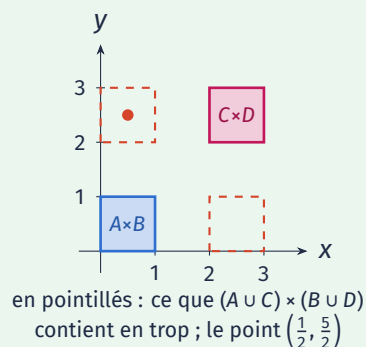
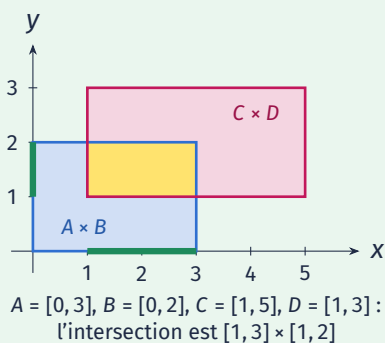
Démonstration. • Pour tout couple (x, y) , en réordonnant les « et » (commutativité, associativité) :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \iff (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D). \end{aligned}$$

• De même : $(x, y) \in A \times (B \cup D) \iff x \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in D) \iff (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in D)$ (distributivité).

• Si $(x, y) \in A \times B$, alors $x \in A \subset A \cup C$ et $y \in B \subset B \cup D$; de même pour $C \times D$. **Contre-exemple** à l'égalité : $A = B = [0, 1]$ et $C = D = [2, 3]$: le point $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est dans $(A \cup C) \times (B \cup D)$, mais ni dans $A \times B$ ($\frac{5}{2} \notin B$), ni dans $C \times D$ ($\frac{1}{2} \notin C$) (figure de droite). Version finie : $A = B = \{0\}$, $C = D = \{1\}$ donnent $\{(0, 0), (1, 1)\}$ d'un côté et $\{0, 1\}^2$, qui a 4 éléments, de l'autre.

• Si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, on choisit $a \in A$, $b \in B$, et $(a, b) \in A \times B$; si $A = \emptyset$ (ou $B = \emptyset$), aucun couple ne convient (contraposée). $\square$



8

Ensembles de points, intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ ($a < b$ réels) sont des ensembles définis en compréhension ; du côté de $\pm\infty$, le crochet est toujours **ouvert**, et $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

intervalle	ensemble des réels x tels que	intervalle	ensemble des réels x tels que
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	$]a, b[$	$a < x < b$
$[a, b[$	$a \leq x < b$	$]a, b]$	$a < x \leq b$
$[a, +\infty[$	$x \geq a$	$]a, +\infty[$	$x > a$
$] -\infty, b]$	$x \leq b$	$] -\infty, b[$	$x < b$

Distance et valeur absolue

Pour tous réels a et $r > 0$: $|x - a| \leq r \iff x \in [a - r, a + r]$ et, par passage au complémentaire, $|x - a| > r \iff x \in]-\infty, a - r[\cup]a + r, +\infty[$.

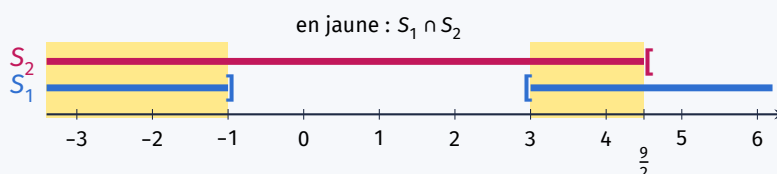
Par exemple $\{x \in \mathbb{R} / |2x - 3| < 5\} =]-1, 4[: -5 < 2x - 3 < 5 \iff -2 < 2x < 8 \iff -1 < x < 4$.

Méthode : ensemble des solutions d'un système

« et » entre deux conditions $\rightarrow$ **intersection** des ensembles de solutions ; « ou » $\rightarrow$ **réunion**. On résout chaque condition, puis on lit le résultat sur une droite graduée (ou dans un tableau).

Exemple : $S = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x - 3 \geq 0 \text{ et } 2x - 9 < 0\}$

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3 : S_1 =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$. $2x - 9 < 0 \iff x < \frac{9}{2} : S_2 =]-\infty, \frac{9}{2}[$.



« et » : $S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, -1] \cup [3, \frac{9}{2}[$ (en jaune). Avec « ou » à la place de « et » : $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$ (le « trou » $] -1, 3[$ de S_1 est couvert par S_2).

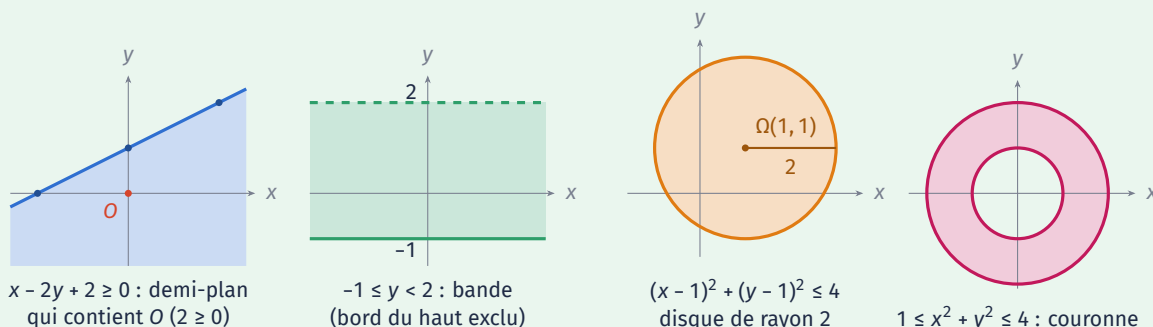
Dans le plan. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un ensemble de points peut être décrit par une condition sur les coordonnées (x, y) de M :

- $\{M(x, y) / ax + by + c = 0\}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est une **droite** ; $\{M(x, y) / ax + by + c \geq 0\}$ est un **demi-plan** limité par cette droite (avec « > », la droite est exclue : on la trace en pointillés) ;
- $\{M(x, y) / \alpha \leq y \leq \beta\}$ est une **bande** horizontale, $\{M(x, y) / \alpha \leq x \leq \beta\}$ une bande verticale ;
- $\{M(x, y) / (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$ ($r > 0$) est le **disque** de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r , car $\Omega M^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$; avec « = », c'est le **cercle**.

Méthode : quel demi-plan ?

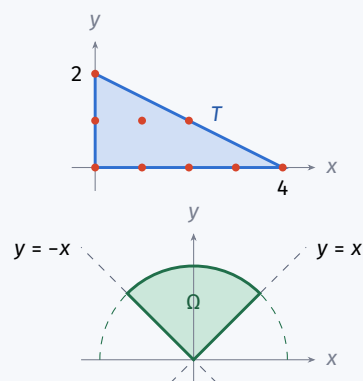
On trace la droite, puis on **teste un point** qui n'est pas dessus (souvent O) : s'il vérifie l'inégalité, c'est son côté ; sinon, c'est l'autre. Plusieurs conditions reliées par « et » : on

superpose les régions (intersection).



Exemple : deux régions définies par plusieurs conditions

1. $T = \{M(x, y) / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + 2y \leq 4\}$: intersection de trois demi-plans. La droite $x + 2y = 4$ coupe les axes en $(4, 0)$ et $(0, 2)$, et O vérifie $0 \leq 4$: T est le **triangle** plein de sommets $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 2)$. Ses points à coordonnées **entières** : 5 sur la ligne $y = 0$ ($x = 0, \dots, 4$), 3 sur $y = 1$ ($x \leq 2$), 1 sur $y = 2$: 9 en tout.
2. $\Omega = \{M(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } y \geq |x|\}$. $y \geq |x| \iff (y \geq x \text{ et } y \geq -x)$: c'est l'intersection de deux demi-plans, limités par les droites $y = x$ et $y = -x$, du côté du point $(0, 1)$. Avec le disque de centre O et de rayon 2, on obtient un **secteur** d'angle droit, dont les coins sur le cercle sont $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (car $x^2 + x^2 = 4$).
3. $\{M(x, y) / |x| \leq 2 \text{ et } |y| \leq 1\} = [-2, 2] \times [-1, 1]$: un **rectangle** (section 7).



9 Compter les éléments

Définition : cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble E est **fini** lorsqu'il a un nombre fini n d'éléments ; ce nombre est le **cardinal** de E , noté $\text{card}(E)$ (ou $\text{card } E$). $\text{card}(\emptyset) = 0$, $\text{card}(\{a\}) = 1$.

Exemples. $\text{card}\{n \in \mathbb{N} / n^2 < 50\} = 8$ (ce sont 0, 1, ..., 7, car $7^2 = 49 < 50 \leq 64 = 8^2$) ; $\text{card}\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2x + 8\} = 2$; si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ (section 3). $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $[0, 1]$ sont infinis.

Théorème

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E , et F un ensemble fini.

- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ (de même pour plusieurs ensembles deux à deux disjoints) ;
- $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$; si $A \subset B$, alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ et $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A)$;
- **formule du crible** : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$;

- **produit :** $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$, et $\text{card}(E^2) = \text{card}(E)^2$.

Démonstration. • Si A et B sont disjoints, en comptant les éléments de A puis ceux de B , on ne compte aucun élément deux fois. • E est la réunion des ensembles disjoints A et $\bar{A}$; si $A \subset B$, B est la réunion des ensembles disjoints A et $B \setminus A$.

• $A \cup B$ est la réunion des ensembles disjoints $A \setminus B$ et B , et A est la réunion des ensembles disjoints $A \setminus B$ et $A \cap B$. Donc $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$, puis $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. **Idée :** dans $\text{card}(A) + \text{card}(B)$, les éléments de $A \cap B$ sont comptés **deux fois** ; on les retire une fois.

• Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\text{card}(F) = p$, alors $E \times F$ est la réunion des n ensembles disjoints $\{x_1\} \times F, \dots, \{x_n\} \times F$, qui ont chacun p éléments : $n \times p$ en tout (le quadrillage a n colonnes de p points). □

Exemple : multiples de 4 ou de 6 entre 1 et 300

Dans $E = \{1, 2, \dots, 300\}$, soit A l'ensemble des multiples de 4 et B celui des multiples de 6. $\text{card}(A) = \frac{300}{4} = 75$, $\text{card}(B) = \frac{300}{6} = 50$. Un entier est multiple de 4 et de 6 si et seulement s'il est multiple de leur PPCM 12 : $\text{card}(A \cap B) = \frac{300}{12} = 25$. Donc $\text{card}(A \cup B) = 75 + 50 - 25 = 100$, et $\text{card}(\overline{A \cup B}) = 300 - 100 = 200$ entiers ne sont multiples ni de 4, ni de 6.

Produit : les points à coordonnées entières du rectangle $[1, 4] \times [0, 2]$ forment $\{1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2\}$: $4 \times 3 = 12$ points.

Formule du crible pour trois ensembles

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Démonstration. On applique la formule du crible à $A \cup B$ et C , avec la distributivité $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, puis encore deux fois (on utilise $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$) :

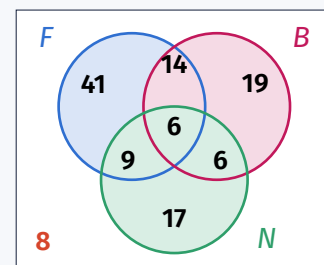
$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A \cup B) + \text{card}(C) - \text{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned} \quad \square$$

Exemple : un sondage

On interroge 120 lycéens : 70 pratiquent le football (F), 45 le basket (B), 38 la natation (N) ; 20 pratiquent football et basket, 15 football et natation, 12 basket et natation, et 6 les trois sports.

Méthode : on remplit le diagramme **du centre vers l'extérieur**. Centre : 6. Football et basket seulement : $20 - 6 = 14$; football et natation seulement : $15 - 6 = 9$; basket et natation seulement : $12 - 6 = 6$. Football seul : $70 - 14 - 9 - 6 = 41$; basket seul : $45 - 14 - 6 - 6 = 19$; natation seule : $38 - 9 - 6 - 6 = 17$.

Au moins un sport : $41 + 19 + 17 + 14 + 9 + 6 + 6 = 112$, ce que confirme la formule : $70 + 45 + 38 - 20 - 15 - 12 + 6 = 112$. **Aucun sport :** $120 - 112 = 8$; **un seul sport :** $41 + 19 + 17 = 77$.



10 Méthodes de démonstration

Dans toute la section, A , B , C sont des parties d'un ensemble E . Pour démontrer une égalité d'ensembles, on dispose de quatre outils ; pour réfuter, d'un seul.

Méthode : 1 · la double inclusion : $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

$\subset$: Soit $x \in A \cap (B \setminus C)$: $x \in A$, $x \in B$ et $x \notin C$. Alors $x \in A \cap B$, et $x \notin A \cap C$ (car $x \notin C$) : $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

$\supset$: Soit $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$: $x \in A$, $x \in B$, et $x \notin A \cap C$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin C$; comme $x \in A$, on a $x \notin C$. Donc $x \in B \setminus C$ et $x \in A \cap (B \setminus C)$.

Conclusion : par double inclusion, $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Méthode : 2 · les équivalences : $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

On écrit « Soit $x \in E$ » puis une chaîne d'équivalences, du premier ensemble au second :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin C \iff (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\ &\iff x \in A \setminus C \text{ ou } x \in B \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C). \end{aligned}$$

Attention : chaque « $\iff$ » doit être vrai dans les deux sens ; si une étape n'est qu'un « $\Rightarrow$ », la chaîne ne démontre qu'une **inclusion**.

Méthode : 3 · le calcul ensembliste : $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

On transforme un membre avec les règles des sections 4 à 6, en les **nommant** :

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \setminus B} \stackrel{\text{Morgan}}{=} A \cap (\overline{A} \cup B) \stackrel{\text{distributivité}}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

Méthode : 4 · la table d'appartenance : $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$

On remplit les 4 lignes (8 avec trois ensembles) et l'on compare les colonnes : elles sont identiques, donc les ensembles sont égaux. Méthode **mécanique et sûre**, idéale pour une identité compliquée ; elle sert aussi à **trouver** un contre-exemple (une ligne où les colonnes diffèrent).

A	B	$A \Delta B$	$A \cap B$	$(A \Delta B) \cup (A \cap B)$	$A \cup B$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Exemple : une implication entre ensembles : si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$

Supposons $A \cup B = A \cap B$. Alors $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, donc $A \subset B$; de même $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$. Par double inclusion, $A = B$. (La réciproque est évidente : si $A = B$, les deux membres valent A .)

Méthode : 5 · réfuter avec un contre-exemple

Une propriété « pour toutes parties A , B , C ... » est fausse dès qu'un **seul** choix de petits ensembles la met en défaut.

- « $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ » est **fausse** : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$ donnent $A \cup B = A \cup C = \{1, 2\}$, mais $B \neq C$ (on ne « simplifie » pas par A).
- « $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ » est **fausse** : sur un diagramme de Venn, la région $A \cap B \cap C$ est dans le premier ensemble, pas dans le second ; on y place un élément : $A = B = C = \{1\}$ donne $A \setminus (B \setminus C) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$, mais $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$.

★ **Astuce de concours : quelle méthode choisir ?**

si l'on doit...	alors on essaie...
montrer $A \subset B$	« Soit $x \in A$... donc $x \in B$ »
montrer $A = B$, ensembles définis par des propriétés (nombres, points)	la double inclusion, ou les équivalences si chaque étape est réversible
montrer une identité entre A, B, C quelconques	les équivalences, le calcul ensembliste, ou la table d'appartenance (la plus sûre)
montrer une implication (« si $A \cup B = \dots$, alors... »)	partir de l'hypothèse et enchaîner des inclusions
décider si une « loi » est vraie	un diagramme de Venn ; si une région diffère, un contre-exemple

11

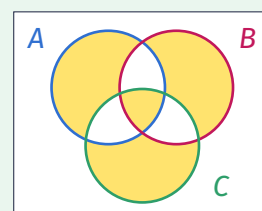
Pour aller plus loin

Théorème (associativité de la différence symétrique)

Pour toutes parties A, B, C de E : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$. On note simplement $A \Delta B \Delta C$: ce sont les éléments qui appartiennent à un nombre **impair** des trois ensembles (un seul, ou les trois).

Démonstration : table d'appartenance à 8 lignes ; les colonnes surlignées sont identiques.

A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) \Delta C$	$B \Delta C$	$A \Delta (B \Delta C)$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0



$A \Delta B \Delta C$ en jaune

Le 1 apparaît exactement sur les lignes qui contiennent un nombre impair de 1 parmi A, B, C .

Remarque. Pourquoi une table suffit-elle ? Deux ensembles X et Y sont égaux lorsque $\forall x \in E, (x \in X \iff x \in Y)$. Or, pour un élément x de E , l'appartenance de x à un ensemble construit avec $\cap, \cup, \setminus, \Delta$ ne dépend que des réponses aux questions « $x \in A$? », « $x \in B$? », « $x \in C$? ». La table passe en revue **toutes** les réponses possibles : elle démontre l'égalité

pour **toutes** les parties A, B, C de **tout** ensemble E .

Théorème (équations ensemblistes)

Soit A, B, C des parties de E ; on cherche les parties X de E qui vérifient l'équation.

- $A \cup X = B$ a des solutions si et seulement si $A \subset B$; ce sont alors les X tels que $B \setminus A \subset X \subset B$.
- $A \cap X = C$ a des solutions si et seulement si $C \subset A$; ce sont alors les X tels que $C \subset X \subset C \cup \bar{A}$.

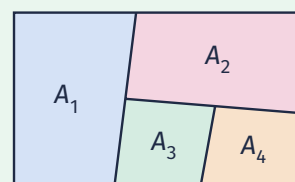
Démonstration (analyse-synthèse, chapitre 1) pour $A \cup X = B$. **Analyse.** Si $A \cup X = B$, alors $A \subset A \cup X = B$ et $X \subset A \cup X = B$; de plus, si $x \in B \setminus A$, alors $x \in A \cup X$ et $x \notin A$, donc $x \in X$: $B \setminus A \subset X$. **Synthèse.** Supposons $A \subset B$ et $B \setminus A \subset X \subset B$. Alors $A \cup X \subset B$; et si $x \in B$, soit $x \in A$, soit $x \in B \setminus A \subset X$: dans les deux cas $x \in A \cup X$. Donc $A \cup X = B$.

Pour $A \cap X = C$. Si $A \cap X = C$, alors $C \subset A$, $C \subset X$, et tout $x \in X$ qui est dans A est dans $A \cap X = C$: $X \subset C \cup \bar{A}$. Réciproquement, si $C \subset A$ et $C \subset X \subset C \cup \bar{A}$, alors $C = A \cap C \subset A \cap X \subset A \cap (C \cup \bar{A}) = (A \cap C) \cup \emptyset = C$. $\square$

Exemple. $E = \{1, \dots, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$: $A \subset B$ et $B \setminus A = \{3, 4\}$; les solutions de $A \cup X = B$ sont $\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$: $4 = 2^{\text{card}(A)}$ solutions (on ajoute à $\{3, 4\}$ une partie quelconque de A).

Définition : partition

Des parties $A_1, A_2, \dots, A_n$ de E forment une **partition** de E lorsque : **(1)** aucune n'est vide ; **(2)** elles sont **deux à deux disjointes** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) ; **(3)** leur réunion est E : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$. Chaque élément de E est alors dans **un et un seul** A_i , et si E est fini, $\text{card}(E) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_n)$.

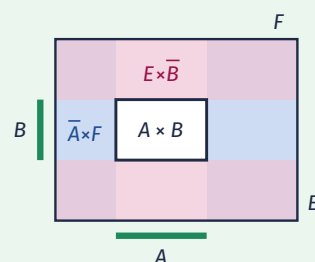


Exemples. • Les entiers pairs et les entiers impairs forment une partition de $\mathbb{Z}$; de même $\{3k / k \in \mathbb{Z}\}$, $\{3k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$, $\{3k + 2 / k \in \mathbb{Z}\}$ (selon le reste de la division par 3). • $\mathbb{R}_-, \{0\}, \mathbb{R}_+$ forment une partition de $\mathbb{R}$. • Si $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors A et $\bar{A}$ forment une partition de E . • $\{1, 4\}, \{2, 5, 6\}, \{3\}$ forment une partition de $\{1, \dots, 6\}$. **Contre-exemples** : $[0, 2]$ et $[2, 5]$ ne forment pas une partition de $[0, 5]$ (2 est dans les deux) ; $\{1, 2\}$ et $\{4\}$ ne forment pas une partition de $\{1, 2, 3, 4\}$ (3 est oublié). **Les 5 partitions de $\{1, 2, 3\}$** : $\{1, 2, 3\}$; $\{1\}, \{2, 3\}$; $\{2\}, \{1, 3\}$; $\{3\}, \{1, 2\}$; $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Produit cartésien et complémentaire

Pour $A \subset E$ et $B \subset F$: $C_{E \times F}^{A \times B} = (C_E^A \times F) \cup (E \times C_F^B)$.

Démonstration. Pour $(x, y) \in E \times F$, par Morgan : $(x, y) \notin A \times B \iff x \notin A \text{ et } y \notin B \iff (x \notin A \text{ ou } y \notin B)$. **Ce n'est pas** $C_E^A \times C_F^B$ (le « coin » en bas à gauche seulement) : les deux bandes de la figure **débordent**. $\square$



Le paradoxe de Russell expliqué. Supposons qu'existe l'ensemble $R = \{x / x \notin x\}$ des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes, et demandons-nous si $R \in R$. Si $R \in R$, alors R vérifie la propriété qui définit R : $R \notin R$, contradiction. Si $R \notin R$, alors R vérifie cette propriété, donc $R \in R$, contradiction. Les deux cas sont impossibles : **R n'existe pas**. (Version populaire : le barbier du village rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seuls ; qui rase le barbier ?) **La leçon** : on ne forme $\{x / P(x)\}$ qu'à l'intérieur d'un ensemble E déjà construit. Pour tout ensemble E , l'ensemble $R_E = \{x \in E / x \notin x\}$ existe, et le même raisonnement montre que $R_E \notin E$ (sinon $R_E \in R_E \iff R_E \notin R_E$) : **aucun ensemble ne contient tous les ensembles**.

12

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
$a \subset \{a\}$	$a \in \{a\}$ et $\{a\} \subset \{a, b\}$: un élément appartient , un ensemble est inclus
$\emptyset = \{\emptyset\}$ (« les deux sont vides »)	$\emptyset$ n'a aucun élément ; $\{\emptyset\}$ en a un : $\text{card}(\{\emptyset\}) = 1$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$ et $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
$1 \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$	les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles : $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$, $1 \notin \mathcal{P}(\{1, 2\})$
« le complémentaire de $\mathbb{N}$ est $\{\dots, -2, -1\}$ »	cela dépend de E : $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \{\dots, -2, -1\}$, mais $\frac{1}{2} \in C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$
$A \setminus B = B \setminus A$	$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$, mais $\{2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Morgan : le symbole se retourne)
$A \not\subset B$, donc $A \cap B = \emptyset$	$A \not\subset B$ veut dire : un élément de A hors de B : $\{1, 2\} \not\subset \{2, 3\}$, et pourtant $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$
pour montrer $A = B$, il suffit de montrer $A \subset B$	il faut les deux inclusions : $]0, 2[\subset]0, 4[$, et pourtant $]0, 2[\neq]0, 4[$
$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$	faux : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$; on ne simplifie pas par A
$(a, b) = \{a, b\}$	un couple est ordonné : $(1, 2) \neq (2, 1)$ mais $\{1, 2\} = \{2, 1\}$; $E \times F \neq F \times E$ en général
$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$	seulement « $\subset$ » : $\{(0, 0), (1, 1)\} \neq \{0, 1\}^2$; mais oui pour « $\cap$ »
$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$	faux : avec $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mais $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$	seulement si $A \cap B = \emptyset$; sinon on retire $\text{card}(A \cap B)$
le complémentaire de $[1, 2]$ dans $\mathbb{R}$ est $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$	c'est $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$: 1 et 2 sont dans $[1, 2]$, ils ne sont pas dans le complémentaire

13

Les astuces des concours

★ **Astuce de concours** : traduire en logique, puis calculer

$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A}$	$A \setminus B$	$A \Delta B$	$A \subset B$	$A = B$	$\emptyset$
« et »	« ou »	« non »	« et non »	« ou exclusif »	« $\Rightarrow$ »	« $\Leftrightarrow$ »	toujours faux

Toute loi logique du chapitre 1 donne une loi ensembliste (et inversement) : Morgan, distributivités, contraposée ($A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$)... Devant une égalité compliquée, on écrit « $x \in \dots$ » et on raisonne avec des propositions.

★ *Astuce de concours : cinq façons de dire $A \subset B$*

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \setminus B = \emptyset \iff \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Preuve express. Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ (car $A \subset A \cap B$) et $A \cup B = B$ (car $A \cup B \subset B$) ; si $A \cap B = A$, alors $A = A \cap B \subset B$; si $A \cup B = B$, alors $A \subset A \cup B = B$; $A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B$ (section 6) et $\overline{B} \subset \overline{A} \iff A \subset B$ (section 5). **Usage :** pour montrer $A \cap B = A$, il suffit souvent de montrer $A \subset B$, et inversement.

★ *Astuce de concours : Δ , le « ou exclusif » : une boussole*

$x \in A \Delta B$ si et seulement si les propositions « $x \in A$ » et « $x \in B$ » ont des valeurs de vérité **différentes**. En remplaçant les deux par leurs négations, on ne change rien : $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$; en n'en remplaçant qu'une, on obtient le contraire : $\overline{A} \Delta B = \overline{A \Delta B} = A \Delta \overline{B}$. Et $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$: la différence symétrique mesure « l'écart » entre A et B .

★ *Astuce de concours : un diagramme de Venn pour trouver un contre-exemple*

« $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$? » On colorie les deux membres sur un même dessin : la région $C \setminus A$ est dans le second, pas dans le premier. On y met **un** élément et on vide le reste : $A = B = \emptyset, C = \{1\}$ donnent $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ et $(A \cap B) \cup C = \{1\}$: c'est faux. (Seule l'inclusion $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$ est vraie.) **Réflexe :** tester $\emptyset, E$, des singletons, $A = B$.

★ *Astuce de concours : montrer qu'un ensemble est vide, ou un singleton*

Pour $\{x \in E / P(x)\} = \emptyset$, on raisonne par l'absurde : si x vérifie $P(x)$... contradiction. **Exemple :** en complétant les carrés, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 1$; donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0\} = \emptyset$ (une somme de carrés plus 1 n'est jamais nulle), alors que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0\} = \{(1, -2)\}$ est un singleton (une somme de deux carrés est nulle si et seulement si les deux sont nuls).

★ *Astuce de concours : compter en découpant : une partition*

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de E , alors $\text{card}(E) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_n)$: on remplace un comptage difficile par plusieurs comptages faciles. **Exemple :** les points à coordonnées entières du disque $\{M(x, y) / x^2 + y^2 \leq 5\}$. On les range selon la valeur de y , qui ne peut être que $-2, -1, 0, 1$ ou 2 (car $y^2 \leq 5$) : pour $y = \pm 2$, $x^2 \leq 1$ donne 3 points ; pour $y = \pm 1$, $x^2 \leq 4$ donne 5 points ; pour $y = 0$, $x^2 \leq 5$ donne 5 points. Total : $3 + 5 + 5 + 5 + 3 = 21$. **Et pour conclure une égalité :** si $A \subset B$, B fini et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, alors $A = B$ (car $\text{card}(B \setminus A) = 0$).

14

L'essentiel du chapitre en une page

Vocabulaire

$x \in E$: x appartient à E ; extension $\{a, b, c\}$;
compréhension $\{x \in E / P(x)\}$.

$\emptyset$: aucun élément ; $\{\emptyset\}$ en a un.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$A \subset B \iff \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \not\subset B \iff \exists x, (x \in A \text{ et } x \notin B)$

$A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$ (double inclusion)

$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$;

$\text{card}(E) = n \Rightarrow \text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

$a \in E \iff \{a\} \subset E \iff \{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

Opérations (A, B parties de E)

$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$

$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$

$x \in C_E^A = \bar{A} \iff x \in E \text{ et } x \notin A$

$A \setminus B = A \cap \bar{B} \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A}$	$A \setminus B$	$A \Delta B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0

Règles de calcul

$\cap$ et $\cup$: commutatives, associatives ;

$A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$

$\overline{\overline{A}} = A \quad A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cup \bar{A} = E$

Morgan : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \Delta \emptyset = A$; $A \Delta A = \emptyset$;

$A \Delta E = \bar{A}$; $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Produit cartésien

$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$ (l'ordre compte)

$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$, $E^2 = E \times E$

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

$(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ (pas =)

$A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$

$C_{E \times F}^{A \times B} = (C_E^A \times F) \cup (E \times C_F^B)$

Cardinaux (ensembles finis)

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$

$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C)$

$+ \text{card}(A \cap B \cap C)$

Dans le plan (repère orthonormé)

$ax + by + c = 0$: droite ; $ax + by + c \geq 0$:

demi-plan (tester O) ; $\alpha \leq x \leq \beta$: bande ;

$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$: disque.

« et » $\rightarrow$ intersection ; « ou » $\rightarrow$ réunion.

Méthodes

Inclusion : « Soit $x \in A$... donc $x \in B$. »

Égalité : double inclusion ; équivalences

$x \in A \iff \dots \iff x \in B$; calcul ensembliste ;
table d'appartenance.

Réfuter : un contre-exemple (trouvé sur un
diagramme de Venn).

À retenir pour les concours

$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \setminus B = \emptyset$

$A \cup B = A \cap B \iff A = B \quad A \Delta B = \emptyset \iff A = B$

$A \cup X = B$: solutions ssi $A \subset B$; $B \setminus A \subset X \subset B$.

$A \cap X = C$: solutions ssi $C \subset A$; $C \subset X \subset C \cup \bar{A}$.

Partition : parties non vides, deux à deux
disjointes, de réunion E .

Russell : aucun ensemble ne contient tous les
ensembles.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations : pour $A, B \subset E$, $\bar{A} = C_E^A$, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; $\mathcal{P}(E)$ ensemble des parties de E .

15

Niveau I • Bases

Exercice 1 Écrire un ensemble ★

corrigé p. 39

1. Écrire en extension : $A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 10\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 2\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 5x\}$; $D = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ divise } 15\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4 = 0\}$; $G = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 1\}$. Lesquels sont vides, des singletons, des paires ?
2. Écrire en compréhension : $\{2, 4, 6, 8, 10\}$; $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$; $\{-3, 3\}$; $\{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$.
3. Les ensembles $\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\}$, $\{-2, 2\}$ et $\{2, -2, 2\}$ sont-ils égaux ? Combien ont-ils d'éléments ?

Exercice 2 Élément ou partie ? ★

corrigé p. 39

1. Compléter par $\in$ ou $\notin$: $-7 \dots \mathbb{N}$; $-7 \dots \mathbb{Z}$; $\frac{12}{5} \dots \mathbb{D}$; $\frac{2}{3} \dots \mathbb{D}$; $(\sqrt{3})^2 \dots \mathbb{N}$; $-\sqrt{16} \dots \mathbb{Z}$; $\pi \dots \mathbb{Q}$.
Compléter par $\subset$ ou $\not\subset$: $\{-1, 0, 1\} \dots \mathbb{N}$; $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} \dots \mathbb{D}$; $]0, 1[\dots \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \dots \mathbb{D}$.
2. Soit $E = \{\emptyset, 1, \{1, 3\}, \{2\}\}$. Vrai ou faux ? a) $1 \in E$ b) $\{1\} \subset E$ c) $\{1\} \in E$ d) $\{2\} \in E$ e) $\{2\} \subset E$ f) $\emptyset \in E$ g) $\emptyset \subset E$ h) $\{\emptyset\} \subset E$ i) $\{1, 3\} \subset E$ j) $\{\{1, 3\}, 1\} \subset E$ k) E a 4 éléments.

Exercice 3 Les parties d'un petit ensemble ★

corrigé p. 39

On pose $E = \{-1, 0, 1\}$.

1. Écrire $\mathcal{P}(E)$ en extension. Combien a-t-il d'éléments ? Combien de parties de E contiennent 0 ?
2. Trouver les parties X de E symétriques, c'est-à-dire telles que $\forall x \in X, -x \in X$.
3. Vrai ou faux ? a) $\{0\} \in \mathcal{P}(E)$ b) $0 \in \mathcal{P}(E)$ c) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$ d) $\{-1, 1\} \subset \mathcal{P}(E)$ e) $\{\{-1\}, \{1\}\} \subset \mathcal{P}(E)$ f) $E \in \mathcal{P}(E)$.
4. Combien de parties ont les ensembles $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\}$?

Exercice 4 Opérations sur des ensembles finis ★

corrigé p. 40

$E = \{1, 2, \dots, 12\}$; $A = \{n \in E / n \text{ divise } 12\}$, $B = \{n \in E / n \text{ est pair}\}$, $C = \{n \in E / n \geq 9\}$ (complémentaires pris dans E).

1. Écrire A , B et C en extension.
2. Déterminer : $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$, $\overline{A \cup B \cup C}$.
3. Vérifier que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
4. Montrer que $A \setminus B$, $A \cap B$ et $B \setminus A$ forment une partition de $A \cup B$.

Exercice 5 Opérations sur des intervalles ★

corrigé p. 40

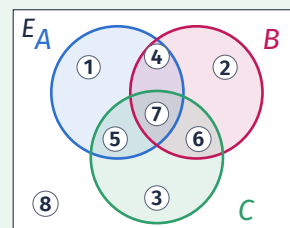
On pose $I = [-5, 2[$, $J =]-1, 4]$ et $K =]-\infty, -3]$.

1. Représenter I, J, K sur une droite graduée, puis écrire sous forme d'intervalle ou de réunion : $I \cap J$, $I \cup J$, $I \cap K$, $J \cap K$, $C_{\mathbb{R}}^I$, $I \setminus J$, $J \setminus I$, $I \Delta J$, $C_{\mathbb{R}}^{J \cup K}$.
2. Traduire avec « et », « ou », puis simplifier : $x \in I \cap J$; $x \notin J$; $x \in I \setminus K$. 3. Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion : $\{x \in \mathbb{R} / |x + 1| \leq 2\}$; $\{x \in \mathbb{R} / |x - 2| > 3\}$; $\{x \in \mathbb{R} / 3 - 2x \geq 7\}$.

Exercice 6 Lire un diagramme de Venn ★

corrigé p. 40

Le diagramme ci-contre partage E en huit régions numérotées de 1 à 8.



1. Quelles régions forment : $A \cap B$; $A \cup C$; $\bar{A}$; $B \setminus C$; $(A \cap B) \cup C$; $(A \cup B) \cap \bar{C}$; $A \Delta B$; $A \cup B \cup C$?
2. Écrire avec A, B, C et les opérations du cours l'ensemble formé : a) de la région 1 ; b) des régions 4, 5, 6, 7 ; c) des régions 2, 3, 6 ; d) des régions 1, 2, 3. Traduire b) et d) par une phrase.

Exercice 7 Premiers pas avec le produit cartésien ★

corrigé p. 40

On pose $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{-1, 1\}$.

1. Écrire $A \times B$ et $B \times A$ en extension. Sont-ils égaux ? Combien d'éléments ont $A \times B$ et $A \times B \times A$?
2. Représenter $A \times B$ dans un repère, puis écrire en extension $\{(x, y) \in A \times B / x + y = 1\}$ et $\{(x, y) \in A^2 / x < y\}$.
3. Déterminer les réels x et y tels que : a) $(2x - y, x + y) = (4, 5)$; b) $(x^2, y) = (4, x)$.

Exercice 8 Compter les éléments ★

corrigé p. 41

1. Dans une classe de 34 élèves, 20 sont inscrits au club de calcul mental, 15 au club de photographie et 6 aux deux clubs. Combien d'élèves sont inscrits à au moins un club ? à aucun ? au club de calcul mental seulement ?
2. A et B sont deux ensembles finis tels que $\text{card}(A) = 7$, $\text{card}(B) = 5$ et $\text{card}(A \cup B) = 10$. Calculer $\text{card}(A \cap B)$, $\text{card}(A \setminus B)$ et $\text{card}(B \setminus A)$.
3. Un menu est un couple (entrée, plat) : combien de menus avec 4 entrées et 3 plats ? Pour $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, combien d'éléments ont E^2 , $\{(x, y) \in E^2 / x \neq y\}$, $\{(x, y) \in E^2 / x < y\}$?

16

Niveau 2 · Bac**Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : décrire, puis opérer** ★★

corrigé p. 41

On pose $E = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, $A = \{n \in E / n \text{ divise } 36\}$, $B = \{n \in E / \frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}\}$, $C = \{n \in E / n^2 < 4n + 5\}$ et $D = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$.

1. Écrire A, B, C et D en extension (pour B , remarquer que $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$).
2. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \Delta C$, C_E^A , $C_E^{A \cup C}$ et $C_E^A \cap C_E^C$. Quelle loi du cours retrouve-t-on ?
3. A-t-on $D \subset E$? Déterminer $D \cap E$ et $D \cap A$. 4. Déterminer toutes les parties X de B telles que $X \cap C = \{1, 2\}$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : double inclusion et équivalences ★★

corrigé p. 41

1. Soit $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in [0, +\infty[, x = \frac{2t+3}{t+1}\right\}$. Montrer par double inclusion que $I =]2, 3]$.
2. Soit $J = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq |x + 3|\}$. Montrer par équivalences successives que $J = [-1, +\infty[$.
3. Soient $A, B, C \subset E$. Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cup (B \setminus A)$: a) par double inclusion ; b) par équivalences (« et », « ou », « non »).

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : complémentaire, différence, Morgan ★★

corrigé p. 42

1. Dans $E = \mathbb{R}$, on pose $A =]-\infty, 1]$ et $B = [-2, 3[$. Déterminer $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \Delta B$.
2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que : a) $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B$; b) $A \setminus B = \bar{B} \setminus \bar{A}$; c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. 3. Simplifier $F = \bar{A} \cup B \cup A \cup \bar{B}$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : produit cartésien ★★

corrigé p. 42

1. Déterminer les couples de réels (x, y) tels que : a) $(x - y, x^2 - y^2) = (2, 8)$; b) $(|x|, x + y) = (3, 1)$.
2. Dans un repère orthonormé, représenter $R_1 = [0, 2] \times [1, 3]$ et $R_2 = [1, 4] \times [0, 2]$. Écrire $R_1 \cap R_2$ comme un produit. A-t-on $R_1 \cup R_2 = [0, 4] \times [0, 3]$?
3. Soient $A, C \subset E$ et $B, D \subset F$. a) Montrer que si $A \times B \subset C \times D$, avec A et B non vides, alors $A \subset C$ et $B \subset D$. b) Le résultat subsiste-t-il si $A = \emptyset$? c) En déduire que si A et B sont deux parties non vides de E telles que $A \times B = B \times A$, alors $A = B$.

Exercice 13 Ensembles de points du plan ★★

corrigé p. 42

Dans un repère orthonormé, on pose $P_1 = \{M(x, y) \mid x + y \leq 3\}$, $P_2 = \{M(x, y) \mid y \geq x - 1\}$, $P_3 = \{M(x, y) \mid x \geq 0\}$ et $\mathcal{D} = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$.

1. Représenter $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$. Montrer que c'est un triangle ; donner ses sommets et son aire.
2. Montrer que $\mathcal{D}$ est un disque dont on précisera le centre et le rayon. Les points $K(2, 1)$, $L(0, 3)$, $N(1, 1)$ appartiennent-ils à $\mathcal{D}$?
3. A-t-on $T \subset \mathcal{D}$? $\mathcal{D} \subset P_3$? Colorier $T \cap \mathcal{D}$ sur la figure.

Exercice 14 Inéquations et intervalles ★★

corrigé p. 42

On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 > 0\}$ et $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+4} \geq 0\right\}$.

1. Écrire A , B et C comme intervalles ou réunions d'intervalles. Montrer que $B = C_{\mathbb{R}}^A$. 2. Déterminer $A \cap C$, $A \cup C$, $C_{\mathbb{R}}^C$, $A \setminus C$ et $A \Delta C$.
3. Sans nouveau calcul, résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $|2x + 1| \leq 5$ et $\frac{x-1}{x+4} \geq 0$; b) $|2x + 1| \leq 5$ ou $\frac{x-1}{x+4} \geq 0$; c) $x^2 + x - 6 > 0$ et $\frac{x-1}{x+4} < 0$.

Exercice 15 Tables d'appartenance ★★

corrigé p. 43

1. Avec une table à 4 lignes, montrer que : $(A \setminus B) \Delta B = A \cup B$; $(A \cup B) \setminus (A \Delta B) = A \cap B$; $(A \cap B) \Delta (A \cup B) = A \Delta B$.
2. Avec une table à 8 lignes, montrer que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
3. Comparer $A \cup (B \Delta C)$ et $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$; montrer qu'ils sont égaux si et seulement si $A = \emptyset$.

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 43

A, B, C sont des parties d'un ensemble E . Démontrer les affirmations vraies ; donner un contre-exemple pour les fausses.

- a) $A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$; b) $(A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = E) \Rightarrow B = \bar{A}$; c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
 d) $(A \setminus B) \cup B = A$; e) $(A \not\subset B \text{ et } B \not\subset C) \Rightarrow A \not\subset C$; f) $C \subset A \cup B \Rightarrow (C \subset A \text{ ou } C \subset B)$;
 g) $A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow A = B$; h) $(A \times A) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times (A \setminus B)$.

17

Niveau 3 · Approfondissement**Exercice 17** Compter des parties ★★★

corrigé p. 44

Soient n, p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$, $E = \{1, 2, \dots, n\}$ et $A = \{1, \dots, p\}$ ($A = \emptyset$ si $p = 0$).

- Montrer que $A \subset X \subset E$ si et seulement si $X = A \cup Y$ avec $Y \subset E \setminus A$, et qu'alors $Y = X \setminus A$. Combien de parties de E contiennent A ?
- Combien de parties X de E vérifient $X \cap A = \emptyset$? $X \cap A \neq \emptyset$?
- On suppose $n \geq 2$. Soit $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) l'ensemble des parties de E contenant 1 (resp. 2). Calculer $\text{card}(\mathcal{U})$, $\text{card}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$, puis le nombre de parties de E qui contiennent 1 ou 2.
- Pour $E = \{1, 2, \dots, 6\}$, combien de parties contiennent un nombre pair au moins ? 1 mais pas 2 ?

Exercice 18 Réunions égales, intersections égales ★★★

corrigé p. 44

A, B, C sont trois parties d'un ensemble E . Montrer que :

- $A \cup B = A \cup C \iff B \Delta C \subset A$;
- $A \cap B = A \cap C \iff A \cap (B \Delta C) = \emptyset$;
- $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \iff A \subset C$.

Exercice 19 La différence n'est pas associative ★★★

corrigé p. 44

A, B, C sont trois parties d'un ensemble E .

- Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$, puis que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- Exemple : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3, 4\}$. Calculer $(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \setminus C)$.
- Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ si et seulement si $A \cap C = \emptyset$.

Exercice 20 Des phrases aux ensembles ★★★

corrigé p. 45

Dans un lycée, on note S l'ensemble des élèves de Sciences Mathématiques, C celui des membres du club d'échecs, M celui des élèves ayant eu au moins 16 au dernier devoir, R celui des élèves souvent en retard. On sait que : (H1) tout membre du club a eu au moins 16 ; (H2) aucun élève souvent en retard n'a eu 16 ou plus ; (H3) tout élève de Sciences Mathématiques non membre du club est souvent en retard.

- Traduire (H1), (H2), (H3) par des relations entre ensembles.
- Montrer que $C \cap R = \emptyset$; traduire par une phrase.
- Montrer que $S \cap M = S \cap C$; traduire.
- Un élève de Sciences Mathématiques n'est pas souvent en retard : que peut-on en déduire ? (Montrer que $S \setminus R \subset C$.)
- Tout élève ayant eu au moins 16 est-il en Sciences Mathématiques ?

Exercice 21 Multiples et restes ★★★

corrigé p. 45

Pour $a \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (les multiples de a) et $a\mathbb{Z} + r = \{ak + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z} \iff b$ divise a . Comparer $12\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z}$.
- Montrer que $(3\mathbb{Z} + 1) \cap 2\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} + 4$. Écrire en extension $(3\mathbb{Z} + 1) \cap 2\mathbb{Z} \cap [-10, 20]$.

3. Montrer que $(4\mathbb{Z} + 1) \cap (6\mathbb{Z} + 2) = \emptyset$, puis que $(4\mathbb{Z} + 1) \cap (6\mathbb{Z} + 3) = 12\mathbb{Z} + 9$.

Exercice 22 Différence de deux produits ★★★

corrigé p. 45

A, C sont deux parties d'un ensemble E , et B, D deux parties d'un ensemble F .

1. Montrer que $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$.
2. Montrer que $(A \setminus C) \times (B \setminus D)$, $(A \setminus C) \times (B \cap D)$ et $(A \cap C) \times (B \setminus D)$ sont deux à deux disjoints et que leur réunion est $(A \times B) \setminus (C \times D)$.
3. Pour $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, $D = \{2, 3\}$, écrire $(A \times B) \setminus (C \times D)$ en extension.

Exercice 23 Le partage en zones ★★★

corrigé p. 46

Dans un repère orthonormé, trois écoles sont situées en $U(0, 0)$, $V(4, 0)$ et $W(0, 2)$. La zone de l'école U est $Z_U = \{M \mid MU \leq MV \text{ et } MU \leq MW\}$; on définit de même Z_V et Z_W .

1. Montrer que, pour $M(x, y)$: $MU \leq MV \iff x \leq 2$ et $MU \leq MW \iff y \leq 1$. Décrire Z_U à l'aide d'un produit cartésien.
2. Montrer que $Z_V = \{M(x, y) \mid x \geq 2 \text{ et } y \leq 2x - 3\}$ et $Z_W = \{M(x, y) \mid y \geq 1 \text{ et } y \geq 2x - 3\}$. Représenter les trois zones.
3. Montrer que $Z_U \cup Z_V \cup Z_W$ est le plan et que $Z_U \cap Z_V \cap Z_W = \{\Omega\}$ (à préciser). Partition ?

18

Niveau 4 · Concours

Exercice 24 Équations ensemblistes à deux conditions ★★★

corrigé p. 46

$A, B, C \subset E$; on cherche les parties X de E telles que $(\mathcal{S}) : A \cup X = B$ et $A \cap X = C$.

1. Montrer que si $(\mathcal{S})$ a une solution, alors $C \subset A \subset B$.
2. On suppose $C \subset A \subset B$. a) Analyse. Soit X une solution. Montrer que $X \setminus A = B \setminus A$, puis que $X = C \cup (B \setminus A)$. b) Synthèse. Conclure.
3. Application : $E = \{1, \dots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \dots, 7\}$, $C = \{2, 4\}$.
4. On cherche maintenant les parties X de E telles que $A \cup X = B \cap X$. Montrer que c'est équivalent à $A \subset X \subset B$. Combien y a-t-il de solutions avec les ensembles A et B de la question 3 ?

Exercice 25 Couples de parties emboîtées ★★★

corrigé p. 46

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ($E_0 = \emptyset$) et on note u_n le nombre de couples (X, Y) de parties de E_n tels que $X \subset Y$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 en écrivant tous les couples.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On classe les couples (X, Y) de parties de E_{n+1} tels que $X \subset Y$ selon que $n+1 \notin Y$, $n+1 \in Y \setminus X$ ou $n+1 \in X$. Montrer que chaque famille a u_n éléments, puis que $u_n = 3^n$.
3. Montrer de même qu'il y a 3^n couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \emptyset$, et 3^n tels que $X \cup Y = E_n$.
4. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E_n tels que $X \subset Y$ et $X \neq Y$? Cas $n = 3$?
5. Combien y a-t-il de triplets (X, Y, Z) tels que $X \subset Y \subset Z \subset E_n$?

Exercice 26 Parties sans entiers consécutifs ★★★

corrigé p. 47

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de parties de $E_n = \{1, \dots, n\}$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs ($\emptyset$ et les singletons conviennent ; $a_0 = 1$).

1. Écrire ces parties pour $n = 1, 2, 3, 4$. En déduire a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Montrer que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (selon que la partie contient $n+2$ ou non).
3. Calculer a_{10} . Combien de parties de E_{10} contiennent au moins deux entiers consécutifs ?

4. Montrer par récurrence double que $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27 Sondage : combien au minimum ? ★★★★★

corrigé p. 47

Dans un groupe G de 40 élèves, 32 sont membres du club de robotique, 30 du club de musique et 28 du club de théâtre ; on note R, M, T les ensembles des membres de ces clubs.

1. Montrer que, si X et Y sont deux parties d'un ensemble fini G , alors $\text{card}(X \cap Y) \geq \text{card}(X) + \text{card}(Y) - \text{card}(G)$. En déduire que $\text{card}(R \cap M) \geq 22$.
2. Montrer qu'au moins 10 élèves sont membres des trois clubs.
3. Montrer que ce minimum peut être atteint (diagramme de Venn). Au plus combien d'élèves peuvent être membres des trois clubs ?
4. On apprend que 2 élèves ne sont dans aucun club, que $\text{card}(R \cap M) = 24$ et $\text{card}(R \cap T) = \text{card}(M \cap T) = 22$. Combien d'élèves sont dans trois clubs ? deux exactement ? un seul ?

Exercice 28 Parties deux à deux non incluses ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Une famille $\mathcal{F}$ de parties de E est *sans inclusion* si $X \not\subset Y$ pour toutes parties $X \neq Y$ de $\mathcal{F}$.

1. Donner une famille sans inclusion de 4 parties, puis une de 6 parties. 2. Vérifier que chaque partie de E figure dans exactement une des six « chaînes » $\mathcal{C}_1 : \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset E$; $\mathcal{C}_2 : \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\}$; $\mathcal{C}_3 : \{3\} \subset \{3, 4\} \subset \{1, 3, 4\}$; $\mathcal{C}_4 : \{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\}$; $\mathcal{C}_5 : \{1, 3\}$; $\mathcal{C}_6 : \{2, 4\}$. En déduire qu'une famille sans inclusion a au plus 6 éléments.
3. Montrer que seule la famille des six paires est sans inclusion à 6 éléments (partir de $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$).
4. Quel est le nombre maximal d'éléments d'une famille sans inclusion de parties de $\{1, 2, 3\}$?

Exercice 29 La plus petite partie stable ★★★★★

corrigé p. 48

Une partie A de $\mathbb{N}^*$ est *stable* si $1 \in A$ et si : $\forall n \in A, (2n \in A \text{ et } n+3 \in A)$.

1. Vérifier que $S = \{n \in \mathbb{N}^* / 3 \text{ ne divise pas } n\}$ est stable.
2. Soit A une partie stable. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3k+1 \in A$ et $3k+2 \in A$. En déduire que $S \subset A$.
3. En déduire que S est la plus petite partie stable (stable et incluse dans toute partie stable). Que vaut $\mathbb{N}^* \setminus S$?
4. On remplace $n+3$ par $n+5$ dans la définition. Montrer que la plus petite partie stable est alors $T = \{n \in \mathbb{N}^* / 5 \text{ ne divise pas } n\} \setminus \{3\}$.

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 48

A, B, C sont des parties d'un ensemble E ; on rappelle que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

1. Montrer que $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.
2. En déduire, par le calcul (distributivité), que $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$. Traduire par une phrase l'appartenance à $(A \Delta B) \Delta C$.
3. En déduire que Δ est associative : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
4. Montrer que l'équation $A \Delta X = B$, d'inconnue $X \subset E$, a une unique solution : $X = A \Delta B$.
5. Application : $E = \{1, \dots, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$; résoudre $A \Delta X = B$.
6. a) Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$. b) Déterminer, selon A , les parties X de E telles que $X \Delta A = X \cap A$.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Décrire un ensemble

Un ensemble se décrit en extension (liste de ses éléments) ou en compréhension ($\{x \in E / P(x)\}$) ; pour passer de l'une à l'autre, on résout, on teste, on raisonne, sans oublier l'ensemble de référence E .

Exercice 31 Extension et compréhension ★

corrigé p. 49

1. Écrire en extension (lesquels sont vides ? lesquels sont des singletons ?) :

$$A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 < 40\}; B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 3x + 10\}; C = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ divise } 84 \text{ et } n \text{ est impair}\}; \\ D = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = 9x\}; F = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 5 = 0\}; G = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 9 = 6x\}.$$

2. Écrire en compréhension : $P = \{1, 8, 27, 64, 125\}$; $Q = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$; $R = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$; $S = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$.

3. Compléter par $\in$ ou $\notin$: $-1 \dots B$; $4 \dots C$; $\frac{9}{10} \dots R$; $1 \dots R$; $2026 \dots S$; $2027 \dots S$; $-3 \dots A$.

Exercice 32 Une équation, cinq ensembles de nombres ★

corrigé p. 49

On rappelle que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et qu'un décimal s'écrit $\frac{a}{10^k}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$; on admet que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)(4x-3)(3x+1)(x^2-5) = 0$. Écrire en extension l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, puis dans $\mathbb{R}$ (justifier que $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$). Comparer ces cinq ensembles.
2. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} \in \mathbb{D}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que n divise 10^k . b) En déduire en extension l'ensemble des entiers $n \in \{1, 2, \dots, 12\}$ tels que $\frac{1}{n} \in \mathbb{D}$.
3. Vrai ou faux ? a) $\mathbb{Z} \cap [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; b) $\{x \in \mathbb{D} / 3x = 1\} = \emptyset$; c) il existe un décimal strictement compris entre $\frac{1}{3}$ et $0,3334$; d) l'ensemble $\mathbb{D} \cap]0, 1[$ a un plus petit élément.

Exercice 33 Régions du plan ★★

corrigé p. 50

Le plan est muni d'un repère orthonormé ; un point est dit *entier* si ses deux coordonnées sont des entiers.

1. Montrer que $\Omega = \{M(x, y) / |x - y| \leq 1\}$ est la bande comprise entre deux droites parallèles que l'on précisera.
2. Soient $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 3)$, et T le triangle plein ABC (côtés et intérieur).

- a) Déterminer une équation de chacune des droites (AC) et (BC). b) Décrire T par un système de trois inéquations. c) Écrire en extension l'ensemble des points entiers de T ; combien sont-ils ?
3. Représenter Ω , T et $T \cap \Omega$ sur une même figure ; préciser les sommets de $T \cap \Omega$ et ses points entiers.

Exercice 34 En extension, mais en raisonnant ★★

corrigé p. 50

Écrire en extension chacun des ensembles suivants, en justifiant soigneusement chaque étape.

- $A = \{n \in \mathbb{Z} / n + 1 \text{ divise } n^2 + 3\}$ (calculer $n^2 + 3 - (n - 1)(n + 1)$).
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / xy = 2x + y\}$ (développer $(x - 1)(y - 2)$).
- $C = \{n \in \mathbb{N} / 2^n < n^2 + 10\}$ (montrer par récurrence que $2^n \geq n^2 + 10$ pour tout entier $n \geq 6$).

Exercice 35 L'ensemble des valeurs ★★★

corrigé p. 51

On note $V = \left\{ \frac{x}{x^2 + x + 1} / x \in \mathbb{R} \right\}$: $y \in V$ si et seulement s'il existe un réel x tel que $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$.

- Justifier que $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x .
- a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, écrire $y + 1$ et $\frac{1}{3} - y$ sous forme de quotients ; en déduire que $V \subset \left[-1, \frac{1}{3}\right]$.
b) Soit $y \in \left[-1, \frac{1}{3}\right]$. Montrer que l'équation $yx^2 + (y - 1)x + y = 0$, d'inconnue x , a au moins une solution réelle ; en déduire que $y \in V$.
c) Conclure. V a-t-il un plus grand élément ? un plus petit ? Écrire $V \cap \mathbb{Z}$ en extension.
- Montrer de même que $W = \left\{ \sqrt{x^2 + 1} - x / x \in \mathbb{R} \right\} =]0, +\infty[$.

Exercice 36 Une famille de droites ★★★

corrigé p. 51

Dans un repère orthonormé, on pose, pour tout réel m , $D_m = \{M(x, y) / (m + 1)x + (m - 1)y = 2m\}$; on note Δ la droite d'équation $x + y = 2$.

- Montrer que chaque D_m est une droite. Préciser D_0 , D_1 et D_{-1} .
- Déterminer l'ensemble F des points qui appartiennent à **toutes** les droites D_m .
- Montrer qu'un point $M \notin \Delta$ est sur une et une seule droite D_m , et qu'un point $M \in \Delta$, $M \notin F$, n'est sur aucune. En déduire l'ensemble G des points situés sur au moins une D_m . Δ est-elle une D_m ?
- Déterminer l'ensemble des réels m tels que D_m coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse positive ou nulle.

20 Inclusion et égalité

Pour montrer $A \subset B$: « Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$ » ; pour le réfuter, un élément de A hors de B suffit. Pour montrer $A = B$: double inclusion, ou équivalences $x \in A \iff \dots \iff x \in B$.

Exercice 37 Appartenance ou inclusion ? ★

corrigé p. 52

- Soit $E = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$. a) Combien E a-t-il d'éléments ? Écrire $\mathcal{P}(E)$ en extension.
b) Vrai ou faux ? $\{1\} \in E$; $\{1\} \subset E$; $\{\{1\}\} \subset E$; $\{\{\{1\}\}\} \in E$; $\{\{\{1\}\}\} \subset E$; $\emptyset \in E$; $\{1, \{\{1\}\}\} \subset E$; $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$; $1 \in \mathcal{P}(E)$.
c) Quels éléments de E sont aussi des parties de E ?
- Soit $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2x\}$. Remplacer les pointillés par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ (justifier ; parfois deux symboles conviennent) : $2 \dots A$; $\{0\} \dots A$; $A \dots \mathbb{N}$; $A \dots]0, +\infty[$; $A \dots \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{A\} \dots \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\emptyset \dots \mathcal{P}(A)$; $\{2\} \dots \mathcal{P}(A)$.

Exercice 38 Démontrer ou réfuter une inclusion ★

corrigé p. 52

Pour chacun des couples (A, B) suivants, dire si $A \subset B$ et si $B \subset A$ (démonstration ou contre-exemple).

- $A = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \leq x\}$ et $B =]-\infty, 1]$ (pour $A \subset B$, raisonner par contraposition).
- $A = \{6k + 3 / k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$.
- $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ divise } 18\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ divise } 24\}$.
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 4\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \leq 4\}$.

Exercice 39 Égalités par double inclusion ★★

corrigé p. 52

- a) Montrer que $\{3a + 5b / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}$ (remarquer que $1 = 2 \times 3 - 5$).
b) Montrer que $\{6a + 10b / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$.
- Dans un repère, on note $\mathcal{D} = \{M(1 + 2t, 3 - t) / t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{D}' = \{M(x, y) / x + 2y = 7\}$. Montrer que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
- Montrer que $\{a + b / a \in [0, 1] \text{ et } b \in [2, 3]\} = [2, 4]$, puis que $\{ab / a \in [1, 2] \text{ et } b \in [1, 3]\} = [1, 6]$.

Exercice 40 Parties d'une intersection, d'une réunion ★★

corrigé p. 53

A, B, C sont des ensembles. On utilisera librement (cours) : $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A$, et $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

- Exemple : $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c\}$ (a, b, c distincts). Écrire en extension $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$.
- Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, puis que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \iff A \cap B = \emptyset$.
- a) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
b) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$ (pour $\Rightarrow$: où est la partie $A \cup B$?).
- Montrer que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C) \iff (A \subset B \text{ ou } A \subset C)$.

Exercice 41 Inclusions et paramètre ★★★

corrigé p. 53

- Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $I_a = \{x \in \mathbb{R} / a - 1 \leq x \leq 2a + 1\}$, et l'on note $B = [-1, 5]$.
 - Pour quelles valeurs de a l'ensemble I_a est-il vide ?
 - Déterminer l'ensemble des réels a tels que $I_a \subset B$ (ne pas oublier le cas où I_a est vide).
 - Existe-t-il un réel a tel que $B \subset I_a$?
- Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $S_a = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - ax + 3 \leq 0\}$.
 - Pour quelles valeurs de a l'ensemble S_a est-il vide ? un singleton ?
 - Montrer que $[1, 3] \subset S_a \iff (1 \in S_a \text{ et } 3 \in S_a)$, puis déterminer l'ensemble des a tels que $[1, 3] \subset S_a$.
 - Déterminer l'ensemble des réels a tels que $S_a \subset [0, +\infty[$.

Exercice 42 Losange, disque et carré ★★★

corrigé p. 54

Dans un repère orthonormé, on pose, pour $r > 0$, $L_r = \{M(x, y) / |x| + |y| \leq r\}$, et l'on considère le disque $\mathcal{D} = \{M(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ et le carré plein $\mathcal{C} = \{M(x, y) / |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.

- Montrer que $|x| + |y| \leq r$ équivaut à : $x + y \leq r$, $x - y \leq r$, $-x + y \leq r$ et $-x - y \leq r$. En déduire que L_r est un carré plein dont on précisera les sommets. Représenter L_1 , $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ et L_2 sur une même figure.
- Démontrer les inclusions $L_1 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset L_2$. Les inclusions réciproques sont-elles vraies ?
- a) Montrer que $L_r \subset \mathcal{D} \iff r \leq 1$. b) Montrer que $(|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ pour tous réels x, y , puis que $\mathcal{D} \subset L_r \iff r \geq \sqrt{2}$. c) Pour quels réels $r > 0$ a-t-on $\mathcal{C} \subset L_r$?

21

Réunion et intersection

$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$, $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$: $\cap$ et $\cup$ ont les propriétés de « et » et de « ou ». Pour des intervalles, une droite graduée évite bien des erreurs.

Exercice 43 Trois parties d'un ensemble fini ★

corrigé p. 55

Soit $E = \{1, 2, \dots, 14\}$. On pose $A = \{n \in E / n \text{ est premier}\}$, $B = \{n \in E / n + 2 \text{ est premier}\}$ et $C = \{n \in E / |n - 6| \leq 3\}$.

- Écrire A , B et C en extension.
- Déterminer $A \cap B$ (que représentent ses éléments ?), $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $B \cup C$ et $A \cup B \cup C$.
- Vérifier sur cet exemple que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Comparer $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap C$: l'écriture « $A \cup B \cap C$ » a-t-elle un sens ?
- Placer les éléments de E dans un diagramme de Venn. Quels éléments n'appartiennent à aucun des trois ensembles ? à exactement un ? à exactement deux ?

Exercice 44 Intervalles et ensembles de solutions ★

corrigé p. 55

- Soient $I =]-3, 4]$, $J = [1, 7[$ et $K =]-\infty, 3[$. Écrire à l'aide d'intervalles : $I \cap J$, $I \cup J$, $I \cap K$, $I \cup K$, $J \cap K$, $J \cup K$, $I \cap J \cap K$ et $(I \cup J) \cap K$. Écrire $\mathbb{Z} \cap I \cap J$ en extension.
- On pose $S_1 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$ et $S_2 = \{x \in \mathbb{R} / |3x - 1| > 4\}$.
 - Écrire S_1 et S_2 à l'aide d'intervalles.
 - En déduire l'ensemble des réels x tels que « $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ et $|3x - 1| > 4$ », puis l'ensemble des réels x tels que « $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ ou $|3x - 1| > 4$ ».

c) Écrire en extension l'ensemble des solutions entières du système « $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ et $|3x - 1| > 4$ ».

Exercice 45 Calcul ensembliste ★★

corrigé p. 56

A, B, C sont des parties d'un ensemble E .

- À l'aide des distributivités, montrer que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
 - Traduire en français : à quelle condition un élément x de E appartient-il à cet ensemble ?
- Montrer que $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \iff A \subset B \cup C$.
 - Soit M l'ensemble du 1. En calculant $M \cap A$, montrer que $M = A \cup B \cup C$ si et seulement si $A \subset B \cup C$, $B \subset C \cup A$ et $C \subset A \cup B$. Donner un exemple avec A, B, C deux à deux distincts.
- On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et que $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$ (soit $x \in B$: distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$). Une seule de ces deux hypothèses suffirait-elle ?

Exercice 46 Ensembles de diviseurs ★★

corrigé p. 56

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

- Écrire en extension D_{45} , D_{75} , $D_{45} \cap D_{75}$ et $D_{45} \cup D_{75}$. Reconnaître $D_{45} \cap D_{75}$, puis comparer $D_{45} \cup D_{75}$ et D_{225} . Vérifier que $\text{card}(D_{45} \cup D_{75}) = \text{card}(D_{45}) + \text{card}(D_{75}) - \text{card}(D_{45} \cap D_{75})$.
- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $D_a \subset D_b \iff a$ divise b . En déduire que $D_a = D_b \iff a = b$.
- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $D_a \cup D_b = D_c$ si et seulement si a divise b ou b divise a . Retrouver ainsi un résultat de la question 1.

Exercice 47 Familles d'intervalles ★★★

corrigé p. 57

On admet que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (chapitre 1). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$ et $J_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$.

- Écrire $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ et $J_1 \cup J_2 \cup J_3$. Montrer que $I_{n+1} \subset I_n$ et $J_n \subset J_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $A = \{x \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in I_n\}$ l'ensemble des réels qui appartiennent à **tous** les I_n . Montrer que $A = [0, 2]$.
- Soit $B = \{x \in \mathbb{R} / \exists n \in \mathbb{N}^*, x \in J_n\}$ l'ensemble des réels qui appartiennent à **au moins un** J_n . Montrer que $B =]0, 3[$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $K_n =]n, n + 2[$. Montrer que tout réel appartient à au moins un K_n , puis déterminer l'ensemble des réels qui appartiennent à exactement un K_n .

Exercice 48 Parties stables par différence ★★★

corrigé p. 57

Une partie A de $\mathbb{Z}$ est dite *stable par différence* (dans cet exercice, on dira simplement *stable*) si elle est non vide et si : $\forall a \in A, \forall b \in A, a - b \in A$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $k\mathbb{Z} = \{kn / n \in \mathbb{Z}\}$.

- Soit A une partie stable. Montrer que $0 \in A$, puis que, pour tous $a, b \in A$: $-a \in A$ et $a + b \in A$.
- Montrer que $k\mathbb{Z}$ est stable pour tout $k \in \mathbb{N}$, mais que $\mathbb{N}$ et $\{-1, 0, 1\}$ ne le sont pas.
- Montrer que l'intersection de deux parties stables est stable. Écrire $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$ sous la forme $k\mathbb{Z}$ (double inclusion).

4. a) Montrer que $6\mathbb{Z} \cup 9\mathbb{Z}$ n'est pas stable. b) Soient A et B deux parties stables. Montrer que $A \cup B$ est stable si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$ (pour $\Rightarrow$, raisonner par l'absurde).

22

Complémentaire et différence

Complémentaire = **négation** ; $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ = « dans A **et pas** dans B » ; $A \Delta B$ = « **ou exclusif** ». Outils : équivalences, calcul ensembliste, tables d'appartenance. Sauf mention contraire, A, B, C sont des parties d'un ensemble E et $\overline{A} = C_E^A$.

Exercice 49 Reconstituer deux ensembles ★

corrigé p. 58

Soit $A, B \subset E = \{1, 2, \dots, 10\}$ telles que $C_E^{A \cup B} = \{8, 9, 10\}$, $A \setminus B = \{1, 4\}$ et $A \Delta B = \{1, 4, 5, 7\}$.

- Déterminer $B \setminus A$, $A \cup B$ et $A \cap B$ (régions d'un diagramme de Venn), puis A et B en extension.
- Déterminer $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$, puis vérifier sur cet exemple les deux lois de Morgan.
- Déterminer la partie X de E telle que $X \setminus A = \{8\}$ et $X \cap A = A \cap B$. Pourquoi est-elle unique ?

Exercice 50 Différences dans le plan ★

corrigé p. 58

Dans un repère orthonormé, $D = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ et $Q = \{M(x, y) \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ (complémentaires dans le plan).

- Décrire D et Q . Écrire par des conditions sur x et y : $\overline{Q}$, $D \setminus Q$, $Q \setminus D$ et $\overline{D \cup Q}$.
- Placer chacun des points $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, 2)$, $M_3(3, 3)$, $M_4(2, -2)$, $M_5(-3, -3)$, $M_6(3, 0)$ dans l'une des parties $D \cap Q$, $D \setminus Q$, $Q \setminus D$, $\overline{D \cup Q}$. Pourquoi tout point du plan est-il dans une seule de ces parties ?
- Représenter $D \Delta Q$ sur une figure.

Exercice 51 Morgan au travail ★★

corrigé p. 58

Démontrer par le calcul ensembliste ($X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$, lois de Morgan, distributivités) que :

- $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$;
- $A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$ et $A \Delta (A \cup B) = B \setminus A$;
- $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap C) \setminus B$;
- (règle du consensus) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)$ (écrire $B \cap C = (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$). Traduire ce résultat en logique pour trois propositions p, q, r .

Exercice 52 Tables d'appartenance ★★

corrigé p. 59

- Dresser la table d'appartenance (huit lignes) de $U = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$, de $V = (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ et de $W = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$. Conclure, puis traduire W par une phrase.
- a) Par un contre-exemple, montrer que $(A \cup B) \Delta C = (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$ est fautive en général.
b) Par une table d'appartenance, montrer que cette égalité est vraie si et seulement si $C \cap (A \Delta B) = \emptyset$.
- Montrer que $A \setminus B = A \Delta B \iff B \subset A$, puis que $A \Delta B = A \cup B \iff A \cap B = \emptyset$.

Exercice 53 Équations avec une différence ★★★

corrigé p. 59

- On pose $E = \{1, \dots, 7\}$, $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 6\}$. Trouver les parties X de E telles que : a) $A \setminus X = B$ (montrer que cela équivaut à $X \cap A = \{1, 5\}$) ; b) $X \setminus A = B$; c) $X \setminus A = \{2, 7\}$ (combien ?).
- Cas général : $\text{card}(E) = n$, A et B sont des parties de E , $\text{card}(A) = p$.
 - Montrer que l'équation $A \setminus X = B$, d'inconnue $X \subset E$, a une solution si et seulement si $B \subset A$; donner alors ses solutions et leur nombre.
 - Même travail pour l'équation $X \setminus A = B$ (trouver la condition). Contrôler avec la question 1.

Exercice 54 Une distance entre ensembles ★★★

corrigé p. 60

E est fini ; pour $A, B \subset E$, $d(A, B) = \text{card}(A \Delta B)$ (éléments qui sont dans une seule des deux parties).

- Avec $E = \{1, \dots, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ et $C = \{1, 5, 6\}$, calculer $d(A, B)$, $d(B, C)$ et $d(A, C)$.
- Montrer que $d(A, B) = 0 \iff A = B$, $d(B, A) = d(A, B)$, $d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$ et $d(A, \bar{A}) = \text{card}(E)$.
- On pose $M = (A \Delta B) \cap (B \Delta C)$. a) Par une table d'appartenance, montrer que $M = ((A \cap C) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C))$ et que $(A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ est la réunion des parties disjointes $A \Delta C$ et M . b) En déduire que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C) + 2 \text{card}(M)$.
c) En déduire l'inégalité triangulaire $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, avec égalité si et seulement si $A \cap C \subset B \subset A \cup C$.
- Si $E = \{1, \dots, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$, combien de $B \subset E$ vérifient $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$?

23**Parties et produit cartésien**

Une partie de E est un **élément** de $\mathcal{P}(E)$; un couple est **ordonné** ; $A \times B$ se représente par un quadrillage (A en abscisse, B en ordonnée). Une **partition** de E est une famille de parties non vides, deux à deux disjointes, de réunion E .

Exercice 55 Les parties de $\{1, 3, 5, 8\}$ ★

corrigé p. 61

On pose $E = \{1, 3, 5, 8\}$. Pour $X \subset E$, on note $s(X)$ la somme des éléments de X , avec $s(\emptyset) = 0$.

- Combien $\mathcal{P}(E)$ a-t-il d'éléments ? Écrire les parties de E à trois éléments. Pourquoi y en a-t-il autant que de singletons ?
- a) Montrer que $s(\bar{X}) = 17 - s(X)$ pour toute partie X de E . b) Écrire les parties X telles que $s(X) = 8$, puis, sans nouveau calcul, celles telles que $s(X) = 9$. c) Existe-t-il X tel que $s(X) = s(\bar{X})$?
- Écrire toutes les parties X de E telles que : $\forall x \in X, \forall y \in \bar{X}, x < y$.

Exercice 56 Couples et quadrillage ★

corrigé p. 61

- Déterminer les réels x, y tels que : a) $(x - 1, y + 2) = (y, 2x)$; b) $(x + y, xy) = (5, 6)$. Combien de couples obtient-on en b) ? de paires $\{x, y\}$?
- On pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. a) Combien $A \times B$ a-t-il d'éléments ? Le représenter par un quadrillage.
b) Écrire en extension $C = \{(x, y) \in A \times B / x + 2y = 5\}$ et $D = \{(x, y) \in A \times B / y < x - 1\}$, et les placer.

c) En déduire $C \cap D$, $\text{card}(C \cup D)$ et le complémentaire de D dans $A \times B$.

Exercice 57 Calculs avec des produits ★★

corrigé p. 62

A, B, C sont des parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times C$.
2. Montrer que $(A \times B) \Delta (A \times C) = A \times (B \Delta C)$.
3. a) Montrer que $(A \times B) \cup (B \times A) \subset (A \cup B)^2$. b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $A = B$.
4. On prend $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$. Représenter $A \times B$ et $B \times A$ sur un même quadrillage, puis calculer $\text{card}((A \times B) \cup (B \times A))$ et $\text{card}((A \cup B)^2)$.

Exercice 58 Partitions ★★

corrigé p. 62

1. Dans $E = \{1, \dots, 12\}$, soit A l'ensemble des multiples de 4, B celui des impairs, C celui des pairs non multiples de 4 et D celui des pairs. Les écrire en extension. $\{A, B, C\}$ est-elle une partition de E ? Et $\{A, B, D\}$?
2. Montrer que les intervalles $I_n = [n, n + 1[$ ($n \in \mathbb{Z}$) forment une partition de $\mathbb{R}$ (utiliser la partie entière $E(x)$).
3. a) Écrire toutes les partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux parties.
b) Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). Montrer que toute partition de E en deux parties est de la forme $\{X, \bar{X}\}$ avec $X \neq \emptyset$ et $X \neq E$, et qu'elle s'obtient ainsi à partir d'exactly deux parties X . En déduire qu'il y a $2^{n-1} - 1$ partitions de E en deux parties.

Exercice 59 Parties d'un produit ★★★

corrigé p. 63

A et B sont deux ensembles finis, avec $\text{card}(A) = n$ et $\text{card}(B) = m$.

1. Exprimer $\text{card}(\mathcal{P}(A \times B))$ et $\text{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$ en fonction de n et m . Pour quels couples (n, m) ces deux nombres sont-ils égaux ? (Remarquer que $nm - n - m + 1 = (n - 1)(m - 1)$.)
2. Soit $X, X' \subset A$ et $Y, Y' \subset B$, toutes non vides. Montrer que $X \times Y = X' \times Y'$ implique $X = X'$ et $Y = Y'$. Que vaut $X \times Y$ si $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$?
3. Une partie de $A \times B$ est *rectangulaire* si elle s'écrit $X \times Y$ ($X \subset A, Y \subset B$). Montrer que $A \times B$ a exactement $(2^n - 1)(2^m - 1) + 1$ parties rectangulaires.
4. Si $A = B = \{1, 2\}$: combien $A \times B$ a-t-il de parties ? de parties rectangulaires ? Écrire les autres.

Exercice 60 Reconnaître un produit ★★★

corrigé p. 63

Soit $P \subset E \times F$, $P_1 = \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in P\}$ et $P_2 = \{y \in F \mid \exists x \in E, (x, y) \in P\}$ (les « ombres » de P sur les axes).

1. Montrer que $P \subset P_1 \times P_2$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes : (i) il existe $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $P = A \times B$; (ii) $P = P_1 \times P_2$; (iii) pour tous couples (a, b) et (a', b') de P , le couple (a, b') appartient à P .
3. Ces parties de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des produits de deux parties de $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ? a) $\{(x, y) \mid xy > 0\}$; b) $\{(x, y) \mid y \geq x^2\}$; c) $\{(x, y) \mid (x-1)(y+2) = 0\}$; d) $\{(x, y) \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0 \text{ et } |y| \geq 1\}$.

24

Défis de concours

Ensembles, logique et récurrence ; les résultats du cours (Morgan, associativité de Δ , 2^n parties, $\text{card}(A \cup B)$) sont admis.

Exercice 61 Parties et sommes ★★★★★

corrigé p. 64

Pour $X \subset \mathbb{N}^*$ finie, $s(X)$ est la somme de ses éléments ($s(\emptyset) = 0$) ; $E_n = \{1, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) et $E_0 = \emptyset$.

- Soit $n \geq 1$ et $X \subset E_n$. a) Montrer que X et $X \Delta \{1\}$ sont distinctes, de cardinaux de parités différentes. b) Vérifier que $(X \Delta \{1\}) \Delta \{1\} = X$. En regroupant les parties de E_n par paires $\{X, X \Delta \{1\}\}$, montrer que E_n a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k, c_k sont les nombres de parties X de E_{3k} dont la somme $s(X)$ a pour reste 0, 1, 2 dans la division par 3. a) Calculer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$ (lister les parties de $\{1, 2, 3\}$). b) Toute partie Z de E_{3k+3} s'écrit de façon unique $Z = X \cup T$ avec $X \subset E_{3k}$ et $T \subset \{3k+1, 3k+2, 3k+3\}$. En étudiant le reste de $s(T)$, montrer que $a_{k+1} = 4a_k + 2b_k + 2c_k$, $b_{k+1} = 2a_k + 4b_k + 2c_k$, $c_{k+1} = 2a_k + 2b_k + 4c_k$. c) Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_k = \frac{8^k + 2^{k+1}}{3}$ et $b_k = c_k = \frac{8^k - 2^k}{3}$. d) Combien de parties de $\{1, \dots, 9\}$ ont une somme multiple de 3 ? Et de $\{1, \dots, 12\}$?

Exercice 62 Les atomes d'une famille ★★★★★

corrigé p. 64

Soit $n \geq 1$ et $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble E . Pour $I \subset \{1, \dots, n\}$, l'atome associé à I est $T_I = \{x \in E \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, (x \in A_i \iff i \in I)\}$.

- Pour $n = 2$, écrire $T_\emptyset, T_{\{1\}}, T_{\{2\}}, T_{\{1,2\}}$ à l'aide de A_1, A_2 , de n et du complémentaire.
- a) Pour $x \in E$, on pose $I(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x \in A_i\}$. Montrer que $x \in T_I \iff I = I(x)$. b) En déduire que $T_I \cap T_J = \emptyset$ si $I \neq J$, que tout élément de E est dans un atome, et que les atomes non vides forment une partition de E . Combien y a-t-il d'atomes au plus ?
- Une partie de E est *constructible* si elle est la réunion de certains atomes (la réunion d'aucun atome étant $\emptyset$). a) Montrer que chaque A_i est constructible. b) Montrer que si X et Y sont constructibles, alors $\bar{X}, X \cup Y$ et $X \cap Y$ le sont. c) En déduire (récurrence sur le nombre d'opérations) que toute partie obtenue à partir des A_i par $\cup, \cap$ et complémentaire est constructible ; il y en a au plus 2^{2^n} .
- a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$: déterminer les atomes, montrer que les 16 parties de E s'obtiennent et écrire $\{4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}$ à l'aide de A_1 et A_2 . b) $E = \{1, \dots, 8\}$: trouver A_1, A_2, A_3 à partir desquelles on obtient les 256 parties de E .

Exercice 63 Familles intersectantes ★★★★★

corrigé p. 65

Soit $n \geq 1$ et $E = \{1, \dots, n\}$. Une famille $\mathcal{F}$ de parties de E (une partie de $\mathcal{P}(E)$) est *intersectante* si $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{F}, X \cap Y \neq \emptyset$.

- Écrire la négation de « $\mathcal{F}$ est intersectante ». Si elle l'est, montrer que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et que $X, \bar{X}$ ne sont jamais tous deux dans $\mathcal{F}$.
- Montrer que les 2^n parties de E se répartissent en 2^{n-1} paires $\{X, \bar{X}\}$. En déduire qu'une famille intersectante a au plus 2^{n-1} éléments.

- Montrer que les familles suivantes sont intersectantes et ont 2^{n-1} éléments : a) $\mathcal{F}_1 = \{X \subset E \mid 1 \in X\}$; b) si $n = 2p + 1$ est impair, $\mathcal{M} = \{X \subset E \mid \text{card}(X) \geq p + 1\}$.
- Soit $\mathcal{F}$ intersectante à 2^{n-1} éléments. a) Montrer que, pour tout $Y \subset E$, une seule des parties $Y, \bar{Y}$ est dans $\mathcal{F}$. b) En déduire, par l'absurde, que si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subset Y \subset E$, alors $Y \in \mathcal{F}$.
- Pour $n = 3$, déterminer toutes les familles intersectantes à 4 éléments.

Exercice 64 Bon ordre et descente infinie ★★★★★

corrigé p. 66

- Bon ordre.** Soit $A \subset \mathbb{N}$ sans plus petit élément, et $P(n)$: « aucun des entiers $0, \dots, n$ n'est dans A ». a) Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. b) En déduire que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. c) Et pour $]0, 1]$?
- Descente infinie.** On veut montrer que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ n'a aucune solution $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Par l'absurde, on suppose $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \exists (y, z) \in (\mathbb{N}^*)^2, x^3 + 2y^3 = 4z^3\}$ non vide ; on note m son plus petit élément et (y, z) un couple associé.
a) Montrer que m est pair (le cube d'un entier impair est impair), puis, en posant $m = 2a$, que y est pair, et, en posant $y = 2b$, que z est pair.
b) En posant $z = 2c$, montrer que $a \in A$. Conclure.

Exercice 65 Le triangle de Sierpinski ★★★★★

corrigé p. 66

Pour $X \subset \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$, on pose $X+a = \{y \in \mathbb{Z} \mid y-a \in X\}$ (on décale de a) et $2X = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in X, y = 2x\}$ (on double). On définit $X_0 = \{0\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n \Delta (X_n + 1)$.

- Vérifier que $X_1 = \{0, 1\}$ et $X_2 = \{0, 2\}$, puis calculer X_3, X_4, X_5, X_6 et X_7 .
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n \subset \{0, 1, \dots, n\}$, $0 \in X_n$ et $n \in X_n$.
- a) Montrer que $(X \Delta Y) + a = (X + a) \Delta (Y + a)$ et $(X + 1) + 1 = X + 2$. b) En déduire que $X_{n+2} = X_n \Delta (X_n + 2)$.
- a) Montrer que $2(X \Delta Y) = 2X \Delta 2Y$ et $2X + 2 = 2(X + 1)$. b) Montrer par récurrence que $X_{2n} = 2X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. c) En déduire que X_{2n+1} est la réunion des parties disjointes $2X_n$ et $2X_n + 1$.
- Soit $u_n = \text{card}(X_n)$. Montrer que $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = 2u_n$; calculer $u_{2^m}, u_{2^{m-1}}$ ($m \in \mathbb{N}$) et u_{2026} .

Exercice 66 Ensembles sans somme ★★★★★

corrigé p. 67

Une partie A de $\mathbb{N}^*$ est *sans somme* si $\forall x \in A, \forall y \in A, x + y \notin A$ (x et y pouvant être égaux).

- Nier « A est sans somme ». $\{1, 4, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{2, 3, 7\}$ sont-elles sans somme ? Montrer que les impairs de $\{1, \dots, 2n\}$ et $\{n + 1, \dots, 2n\}$ sont sans somme, à n éléments.
- Soit $A \subset \{1, \dots, 2n\}$ sans somme, non vide, m son plus grand élément, $A' = A \setminus \{m\}$ et $B = \{b \in \mathbb{N}^* \mid m - b \in A'\}$. a) Montrer que $B \subset \{1, \dots, m - 1\}$ et $\text{card}(B) = \text{card}(A')$. b) Montrer que $A' \cap B = \emptyset$. c) En déduire que $2 \text{card}(A) - 2 \leq m - 1$, puis que $\text{card}(A) \leq n$. Quel est le plus grand cardinal d'une partie sans somme de $\{1, \dots, 2n\}$?
- a) Trouver une partition de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux parties sans somme. b) Montrer que c'est la seule (supposer $1 \in A_1$ et raisonner de proche en proche). c) Montrer que $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ n'a aucune partition en deux parties sans somme.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

1. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ (car $3^2 = 9 \leq 10 < 16 = 4^2$) ; $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$; $x^2 = 5x \iff x(x-5) = 0$, donc $C = \{0, 5\}$; $D = \{1, 3, 5, 15\}$; $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, donc $F = \emptyset$; $G = \{0\}$ (seul entier de $] -1, 1[$). F est **vide**, G est un **singleton**, C est une **paire**.
2. $\{2k / k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$; $\{k^2 / k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 6\}$; $\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 9\}$ (ou $\{x \in \mathbb{R} / |x| = 3\}$) ; on passe d'un élément au suivant en ajoutant 4, et $3 = 4 \times 0 + 3$: $\{4k + 3 / k \in \mathbb{Z}\}$.
3. $x^2 = 4 \iff (x = 2 \text{ ou } x = -2)$: les trois ensembles ont exactement les mêmes éléments, -2 et 2. Ils sont **égaux** (ni l'ordre ni les répétitions ne comptent) : **2 éléments**.

■ Corrigé de l'exercice 2

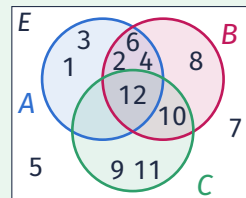
1. $-7 \notin \mathbb{N}$; $-7 \in \mathbb{Z}$; $\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4 \in \mathbb{D}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ (si $\frac{2}{3} = \frac{a}{10^k}$, alors $3a = 2 \times 10^k = 2^{k+1}5^k$, et 3 diviserait $2^{k+1}5^k$: impossible) ; $(\sqrt{3})^2 = 3 \in \mathbb{N}$; $-\sqrt{16} = -4 \in \mathbb{Z}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$ (admis).
 $\{-1, 0, 1\} \not\subset \mathbb{N}$ (car $-1 \notin \mathbb{N}$) ; $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} \subset \mathbb{D}$ (0,5 et 0,25) ; $]0, 1[\not\subset \mathbb{Q}$ ($\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0, 1[$ est irrationnel) ; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ ($n = \frac{n}{10^0}$).
2. E a quatre éléments : $\emptyset, 1, \{1, 3\}$ et $\{2\}$. a) **V**. b) **V** : l'unique élément de $\{1\}$, à savoir 1, appartient à E . c) **F** : $\{1\}$ n'est aucun des quatre éléments. d) **V**. e) **F** : $2 \notin E$. f) **V**. g) **V** (le vide est inclus dans tout ensemble). h) **V** : $\emptyset \in E$. i) **F** : $3 \notin E$. j) **V** : $\{1, 3\} \in E$ et $1 \in E$. k) **V**.

■ Corrigé de l'exercice 3

1. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, E\}$: **8 = 2³** éléments. Parties contenant 0 : $\{0\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, E$, soit **4**.
2. Si X est symétrique : $1 \in X \Rightarrow -1 \in X$ et $-1 \in X \Rightarrow 1 \in X$; donc -1 et 1 sont tous deux dans X ou tous deux hors de X , tandis que 0 (qui vérifie $-0 = 0$) est libre. Parties symétriques : **$\emptyset, \{0\}, \{-1, 1\}, E$** .
3. a) **V** ($\{0\} \subset E$). b) **F** : 0 est un élément de E , pas une partie de E . c) **V** : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$. d) **F** : -1 n'est pas une partie de E , donc $-1 \notin \mathcal{P}(E)$. e) **V** : $\{-1\}$ et $\{1\}$ sont des parties de E . f) **V** ($E \subset E$).
4. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $2^5 =$ **32** parties ; $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ et $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$: **1** partie ($2^0 = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 4

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $C = \{9, 10, 11, 12\}$ (diagramme ci-dessous).
2. $A \cap B = \{2, 4, 6, 12\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $\bar{A} = \{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $A \setminus B = \{1, 3\}$; $B \setminus A = \{8, 10\}$; $A \Delta B = \{1, 3, 8, 10\}$; $(A \cup B) \cap C = \{10, 12\}$; $A \cap B \cap C = \{12\}$; $\overline{A \cup B \cup C} = \{5, 7\}$.
3. $\text{card}(A \cup B) = 8$ et $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 6 + 6 - 4 = 8$ ✓.
4. Les ensembles $\{1, 3\}$, $\{2, 4, 6, 12\}$, $\{8, 10\}$ sont non vides et deux à deux disjoints (un élément de $A \setminus B$ n'est pas dans B , etc.) ; leur réunion est $A \cup B$, car un élément de $A \cup B$ est dans A et B , ou dans A seulement, ou dans B seulement : c'est une **partition** de $A \cup B$.



■ Corrigé de l'exercice 5



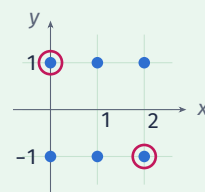
1. On lit sur la droite graduée (point plein : borne comprise, point creux : borne exclue) : $I \cap J =]-1, 2[$; $I \cup J = [-5, 4]$; $I \cap K = [-5, -3]$; $J \cap K = \emptyset$ (J et K sont disjoints); $C_{\mathbb{R}}^I =]-\infty, -5[\cup [2, +\infty[$; $I \setminus J = [-5, -1]$; $J \setminus I = [2, 4]$; $I \Delta J = [-5, -1] \cup [2, 4]$; $J \cup K =]-\infty, -3] \cup]-1, 4]$, donc $C_{\mathbb{R}}^{J \cup K} =]-3, -1] \cup]4, +\infty[$.
2. $x \in I \cap J \iff (-5 \leq x < 2 \text{ et } -1 < x \leq 4) \iff -1 < x < 2$. $x \notin J \iff (x > -1 \text{ et } x \leq 4) \iff (x \leq -1 \text{ ou } x > 4)$ (Morgan). $x \in I \setminus K \iff (-5 \leq x < 2 \text{ et } x > -3) \iff -3 < x < 2$; $I \setminus K =]-3, 2[$.
3. $|x + 1| \leq 2 \iff -2 \leq x + 1 \leq 2 \iff x \in [-3, 1]$; $|x - 2| > 3 \iff (x - 2 > 3 \text{ ou } x - 2 < -3) \iff x \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$; $3 - 2x \geq 7 \iff -2x \geq 4 \iff x \in]-\infty, -2]$.

■ Corrigé de l'exercice 6

1. $A \cap B$: régions 4, 7; $A \cup C$: 1, 3, 4, 5, 6, 7; $\bar{A}$: 2, 3, 6, 8; $B \setminus C$: 2, 4; $(A \cap B) \cup C$: 3, 4, 5, 6, 7; $(A \cup B) \cap \bar{C}$: 1, 2, 4; $A \Delta B$: 1, 2, 5, 6; $\overline{A \cup B \cup C}$: 8.
2. a) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = A \setminus (B \cup C)$ (« seulement dans A »). b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$: les éléments qui appartiennent à **au moins deux** des trois ensembles. c) $(B \cup C) \setminus A$. d) $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$: les éléments qui appartiennent à **exactement un** des trois ensembles.

■ Corrigé de l'exercice 7

1. $A \times B = \{(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$;
 $B \times A = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$.
 Ils ne sont **pas égaux** : $(0, -1) \in A \times B$, mais $(0, -1) \notin B \times A$ car $0 \notin B$.
 $\text{card}(A \times B) = 3 \times 2 = 6$ et $\text{card}(A \times B \times A) = 3 \times 2 \times 3 = 18$.
2. Figure ci-contre (les deux couples entourés vérifient $x + y = 1$) : $\{(0, 1), (2, -1)\}$; dans A^2 , $x < y$: $\{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.
3. Deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales. a) $2x - y = 4$ et $x + y = 5$; en ajoutant, $3x = 9$: $(x, y) = (3, 2)$.
 b) $x^2 = 4$ et $y = x$: $(x, y) = (2, 2)$ ou $(-2, -2)$.



■ Corrigé de l'exercice 8

- Notons K (calcul mental) et P (photographie) : $\text{card}(K \cup P) = 20 + 15 - 6 = 29$ élèves dans au moins un club ; $34 - 29 = 5$ dans aucun ; $\text{card}(K \setminus P) = 20 - 6 = 14$.
- $\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B) = 7 + 5 - 10 = 2$; $\text{card}(A \setminus B) = 7 - 2 = 5$; $\text{card}(B \setminus A) = 5 - 2 = 3$ ($5 + 2 + 3 = 10$ ✓).
- $4 \times 3 = 12$ menus. $\text{card}(E^2) = 5^2 = 25$; les couples (x, x) sont au nombre de 5, donc $25 - 5 = 20$ couples vérifient $x \neq y$; pour $x < y$: $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$ (selon $x = 1, \dots, 5$).

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 : $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$. Comme $\frac{6}{n+1} > 0$: $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1} \in \mathbb{N} \iff \frac{6}{n+1} \in \mathbb{N} \iff (n+1) \mid 6 \iff n+1 \in \{1, 2, 3, 6\}$: $B = \{0, 1, 2, 5\}$.
 $n^2 - 4n - 5 = (n-5)(n+1) < 0 \iff -1 < n < 5$: $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $\Delta = 49 - 24 = 25$, racines $\frac{7 \pm 5}{4}$:
 $D = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$.
- $A \cap B = \{1, 2\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$; $B \cap C = \{0, 1, 2\}$; $B \Delta C = \{3, 4, 5\}$; $C_E^A = \{0, 5, 7, 8, 10, 11\}$; $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$, d'où $C_E^{A \cup C} = \{5, 7, 8, 10, 11\}$; $C_E^C = \{5, 6, \dots, 12\}$ et $C_E^A \cap C_E^C = \{5, 7, 8, 10, 11\}$. On retrouve la **loi de Morgan** $C_E^{A \cup C} = C_E^A \cap C_E^C$.
- $\frac{1}{2} \in D$ et $\frac{1}{2} \notin E$: $D \not\subset E$. $D \cap E = \{3\}$ et $D \cap A = \{3\}$.
- $X \subset B$, donc $X \cap C = X \cap (B \cap C) = X \cap \{0, 1, 2\}$: il faut $1 \in X$, $2 \in X$ et $0 \notin X$; 5 est libre.
 $X = \{1, 2\}$ ou $X = \{1, 2, 5\}$.

■ Corrigé de l'exercice 10

- Raisonnons par double inclusion.** Pour $t \geq 0$: $\frac{2t+3}{t+1} = 2 + \frac{1}{t+1}$.
 $\subset$: soit $x \in I$: $x = 2 + \frac{1}{t+1}$ avec $t \geq 0$. Alors $t+1 \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{t+1} \leq 1$ et $2 < x \leq 3$: $x \in]2, 3]$.
 $\supset$: soit $x \in]2, 3]$. Cherchons $t \geq 0$ tel que $\frac{2t+3}{t+1} = x$: $2t+3 = xt+x \iff t(x-2) = 3-x \iff t = \frac{3-x}{x-2}$ (car $x \neq 2$). Ce réel vérifie $t \geq 0$ ($3-x \geq 0$ et $x-2 > 0$) : donc $x \in I$. Conclusion : $I =]2, 3]$.
- Les deux membres sont positifs, et deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés :
 $|x-1| \leq |x+3| \iff (x-1)^2 \leq (x+3)^2 \iff x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 6x + 9 \iff -8 \leq 8x \iff x \geq -1$.
Donc $J = [-1, +\infty[$. *Interprétation* : la distance de x à 1 est inférieure ou égale à sa distance à -3 exactement quand x est à droite du milieu -1.
- a) **Double inclusion.** $\subset$: soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap C)$: $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap C$. Si $x \in A$, alors $x \notin C$ (sinon $x \in A \cap C$), donc $x \in A \setminus C$. Si $x \notin A$, comme $x \in A \cup B$, $x \in B$, donc $x \in B \setminus A$. Dans les deux cas, $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus A)$.
 $\supset$: si $x \in A \setminus C$: $x \in A \subset A \cup B$ et $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Si $x \in B \setminus A$: $x \in A \cup B$ et $x \notin A$, donc $x \notin A \cap C$. Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap C)$.
b) **Par équivalences.** Notons a, b, c les propositions « $x \in A$ », « $x \in B$ », « $x \in C$ ». Par Morgan, puis distributivité :

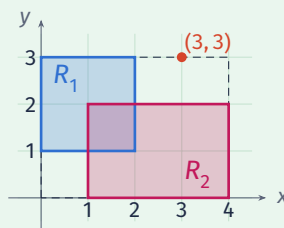
$$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap C) \iff (a \text{ ou } b) \text{ et } (\bar{a} \text{ ou } \bar{c}) \iff (a \text{ et } \bar{c}) \text{ ou } (b \text{ et } \bar{a}) \text{ ou } (b \text{ et } \bar{c})$$
(le terme a et $\bar{a}$ est faux). Or b et $\bar{c}$ entraîne $(a \text{ et } \bar{c})$ ou $(b \text{ et } \bar{a})$ (selon que a est vraie ou fausse) : ce terme peut être supprimé. Il reste $(a \text{ et } \bar{c})$ ou $(b \text{ et } \bar{a})$, c'est-à-dire $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus A)$.

■ Corrigé de l'exercice 11

- $\bar{A} =]1, +\infty[$; $\bar{B} =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$; $A \cap B = [-2, 1]$; $\overline{A \cap B} =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[= \bar{A} \cup \bar{B}$ (Morgan ✓);
 $A \setminus B = A \cap \bar{B} =]-\infty, -2[$; $B \setminus A = B \cap \bar{A} =]1, 3[$; $A \Delta B =]-\infty, -2[\cup]1, 3[$.
- a) **Par équivalences**: $x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \iff (x \notin A \text{ ou } x \in B) \iff x \in \bar{A} \cup B$.
 b) **Par le calcul**: $B \setminus A = B \cap \bar{A} = \bar{B} \cap A = A \setminus B$.
 c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap E = A \cup B$ (distributivité); $A \cap (B \setminus A) = A \cap B \cap \bar{A} = \emptyset$, car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- Par Morgan, $\overline{\bar{A} \cup B} = A \cap \bar{B} = A \setminus B$ et $\overline{A \cup \bar{B}} = \bar{A} \cap B = B \setminus A$: $F = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$.

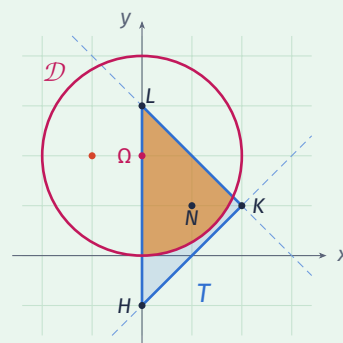
■ Corrigé de l'exercice 12

- a) $x - y = 2$ et $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 8$, donc $x + y = 4$:
 $(x, y) = (3, 1)$. b) $|x| = 3$ et $x + y = 1$: $x = 3, y = -2$ ou $x = -3, y = 4$: $(3, -2)$ et $(-3, 4)$.
- Figure ci-contre. Par la propriété du cours: $R_1 \cap R_2 = ([0, 2] \cap [1, 4]) \times ([1, 3] \cap [0, 2]) = [1, 2] \times [1, 2]$. **Non**: le point $(3, 3)$ appartient à $[0, 4] \times [0, 3]$, mais pas à R_1 (abscisse $3 \notin [0, 2]$) ni à R_2 (ordonnée $3 \notin [0, 2]$).
- a) Soit $a \in A$. Comme $B \neq \emptyset$, on choisit $b \in B$: $(a, b) \in A \times B \subset C \times D$, donc $a \in C$. Ainsi $A \subset C$. De même, $A \neq \emptyset$: on fixe $a_0 \in A$; pour tout $b \in B$, $(a_0, b) \in C \times D$ donne $b \in D$: $B \subset D$.
 b) **Non**: $A = \emptyset, B = \{1\}, C = D = \emptyset$: $A \times B = \emptyset \subset C \times D$, mais $B \not\subset D$.
 c) $A \times B = B \times A$ donne $A \times B \subset B \times A$; d'après a) (avec $C = B$ et $D = A$): $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$.



■ Corrigé de l'exercice 13

- Les droites $x + y = 3$, $y = x - 1$ et $x = 0$ se coupent deux à deux en $K(2, 1)$ (car $x + (x - 1) = 3$), $L(0, 3)$ et $H(0, -1)$. Le point $(1, 1)$ vérifie strictement les trois inéquations: T est formé des points situés, par rapport à chaque droite, du même côté que $(1, 1)$: c'est le **triangle** de sommets $L(0, 3)$, $K(2, 1)$, $H(0, -1)$. Base $LH = 4$ (sur l'axe des ordonnées), hauteur 2: aire $\frac{4 \times 2}{2} = 4$.
- $x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \iff x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \iff \Omega M \leq 2$, avec $\Omega(0, 2)$: $\mathcal{D}$ est le **disque de centre $\Omega(0, 2)$ et de rayon 2**. K : $4 + 1 - 4 = 1 > 0$, donc $K \notin \mathcal{D}$; L : $9 - 12 = -3 \leq 0$, $L \in \mathcal{D}$; N : $1 + 1 - 4 = -2 \leq 0$, $N \in \mathcal{D}$.
- $K \in T$ mais $K \notin \mathcal{D}$: $T \not\subset \mathcal{D}$. Le point $(-1, 2)$ est dans $\mathcal{D}$ ($1 + 4 - 8 = -3 \leq 0$) mais son abscisse est négative: $\mathcal{D} \not\subset P_3$. $T \cap \mathcal{D}$ est colorié ci-contre (en orange).



■ Corrigé de l'exercice 14

- $|2x + 1| \leq 5 \iff -5 \leq 2x + 1 \leq 5 \iff -3 \leq x \leq 2$: $A = [-3, 2]$. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) > 0 \iff (x < -3 \text{ ou } x > 2)$: $B =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[= C_{\mathbb{R}}^A$. Le quotient est défini pour $x \neq -4$ et a le signe de $(x - 1)(x + 4)$: $C =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$.
- $A \cap C = [1, 2]$; $A \cup C =]-\infty, -4[\cup [-3, +\infty[$; $C_{\mathbb{R}}^C = [-4, 1[$; $A \setminus C = A \cap C_{\mathbb{R}}^C = [-3, 1[$; $A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) =]-\infty, -4[\cup [-3, 1[\cup]2, +\infty[$.

3. a) « et » correspond à l'intersection : $S = A \cap C = [1, 2]$. b) « ou » correspond à la réunion : $S = A \cup C$.
- c) **Piège** : « $\frac{x-1}{x+4} < 0$ » n'est pas la négation de « $\frac{x-1}{x+4} \geq 0$ » sur $\mathbb{R}$, car le quotient n'est pas défini en -4 ; ses solutions forment $C_{\mathbb{R}}^C \setminus \{-4\} =]-4, 1[$. D'où $S = B \cap]-4, 1[=]-4, -3[$.

■ Corrigé de l'exercice 15

A	B	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \Delta B$	$A \cup B$	$A \Delta B$	$(A \cup B) \setminus (A \Delta B)$	$A \cap B$	$(A \cap B) \Delta (A \cup B)$
1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

A	B	C	$B \Delta C$	$A \cap (B \Delta C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \Delta (A \cap C)$	$A \cup (B \Delta C)$	$(A \cup B) \Delta (A \cup C)$
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Dans la première table, les colonnes 4 et 5 sont identiques : $(A \setminus B) \Delta B = A \cup B$; les colonnes 7 et 8 : $(A \cup B) \setminus (A \Delta B) = A \cap B$; les colonnes 9 et 6 : $(A \cap B) \Delta (A \cup B) = A \Delta B$.
- Dans la seconde table, les colonnes « $A \cap (B \Delta C)$ » et « $(A \cap B) \Delta (A \cap C)$ » sont identiques : l'égalité est démontrée.
- Les deux dernières colonnes diffèrent exactement sur les quatre premières lignes, celles où $x \in A$: alors $x \in A \cup (B \Delta C)$, mais $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, donc $x \notin (A \cup B) \Delta (A \cup C)$. Sur les lignes où $x \notin A$, les deux colonnes valent $B \Delta C$. Donc les deux ensembles sont égaux si et seulement si aucun élément de E n'est dans A : $A = \emptyset$. (En fait, $(A \cup B) \Delta (A \cup C) = (B \Delta C) \setminus A$.)

■ Corrigé de l'exercice 16

- a) **Vrai** : soit $x \in A \setminus C$; $x \in A \subset B$ et $x \notin C$, donc $x \in B \setminus C$.
- b) **Vrai** (double inclusion) : si $x \in B$, alors $x \notin A$ (sinon $x \in A \cap B = \emptyset$), donc $x \in \bar{A}$; si $x \in \bar{A}$, alors $x \in E = A \cup B$ et $x \notin A$, donc $x \in B$. Ainsi $B = \bar{A}$.
- c) **Faux** : $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$: $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$, mais $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$. (La bonne formule est $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.)
- d) **Faux** : $A = \emptyset$, $B = \{1\}$: $(A \setminus B) \cup B = \{1\} \neq A$. (En fait $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$, égal à A si et seulement si $B \subset A$.)
- e) **Faux** : $A = C = \{1\}$, $B = \{2\}$: $A \not\subset B$ et $B \not\subset C$, et pourtant $A \subset C$.
- f) **Faux** : $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$: $C \subset A \cup B$, mais $C \not\subset A$ et $C \not\subset B$.
- g) **Vrai, par l'absurde** : s'il existait $x \in A \setminus B$, on aurait $x \in B \setminus A$, donc $x \in B$ et $x \notin B$: absurde. Donc $A \setminus B = \emptyset$, c'est-à-dire $A \subset B$; puis $B \setminus A = A \setminus B = \emptyset$, c'est-à-dire $B \subset A$. Ainsi $A = B$.
- h) **Faux** : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$: $(1, 2) \in A \times A$ et $(1, 2) \notin B \times B$ ($2 \notin B$), donc $(1, 2)$ est dans le premier membre ; mais $(A \setminus B) \times (A \setminus B) = \{(2, 2)\}$.

27

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

1. Si $A \subset X \subset E$, posons $Y = X \setminus A$: $Y \subset E \setminus A$ et $X = (X \cap A) \cup (X \setminus A) = A \cup Y$. Réciproquement, si $X = A \cup Y$ avec $Y \subset E \setminus A$, alors $A \subset X$ et, comme $Y \cap A = \emptyset$, $X \setminus A = Y$. Les parties de E contenant A sont donc les $A \cup Y$, Y décrivant les parties de $E \setminus A$, deux Y distincts donnant deux X distincts ($Y = X \setminus A$) : il y en a autant que de parties de $E \setminus A$, qui a $n - p$ éléments, soit 2^{n-p} .
2. $X \cap A = \emptyset \iff X \subset E \setminus A$: 2^{n-p} parties. Les autres parties de E rencontrent A : $2^n - 2^{n-p}$.
3. $\mathcal{U}$ est l'ensemble des parties contenant $\{1\}$: d'après 1 (avec $p = 1$), $\text{card}(\mathcal{U}) = 2^{n-1}$. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est l'ensemble des parties contenant $\{1, 2\}$: 2^{n-2} éléments. Formule du cours : $\text{card}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-2} = 3 \times 2^{n-2}$. (Pour $n = 2$: $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ ✓.)
4. Les parties sans nombre pair sont les parties de $\{1, 3, 5\}$: $2^3 = 8$; donc $2^6 - 8 = 56$ parties contiennent au moins un nombre pair. Les parties contenant 1 mais pas 2 s'écrivent $\{1\} \cup Y$ avec $Y \subset \{3, 4, 5, 6\}$: $2^4 = 16$.

■ Corrigé de l'exercice 18

1. ($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cup C$. Soit $x \in B \Delta C$, par exemple $x \in B \setminus C$: $x \in B \subset A \cup B = A \cup C$ et $x \notin C$, donc $x \in A$; même raisonnement si $x \in C \setminus B$ (B et C jouent des rôles symétriques). Donc $B \Delta C \subset A$.
($\Leftarrow$) Supposons $B \Delta C \subset A$, et soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup C$. Sinon, $x \in B$ et $x \notin B \Delta C$ (inclus dans A) ; si l'on avait $x \notin C$, on aurait $x \in B \setminus C \subset B \Delta C$: donc $x \in C$. Ainsi $A \cup B \subset A \cup C$, et de même $A \cup C \subset A \cup B$.
2. ($\Rightarrow$) Supposons $A \cap B = A \cap C$ et, **par l'absurde**, $x \in A \cap (B \Delta C)$, par exemple $x \in B \setminus C$: $x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$: contradiction (de même si $x \in C \setminus B$).
($\Leftarrow$) Si $A \cap (B \Delta C) = \emptyset$, soit $x \in A \cap B$: si $x \notin C$, alors $x \in A \cap (B \setminus C) \subset A \cap (B \Delta C)$, impossible ; donc $x \in A \cap C$. Ainsi $A \cap B \subset A \cap C$, et de même l'inclusion inverse. Variante : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (exercice 15) et $X \Delta Y = \emptyset \iff X = Y$ (cours).
3. ($\Rightarrow$) $A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$. ($\Leftarrow$) Si $A \subset C$, alors $A \cap C = A$ et, par distributivité, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$.

■ Corrigé de l'exercice 19

1. **Par équivalences.** $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff (x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \iff (x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)) \iff x \in A \setminus (B \cup C)$.
 $x \in A \setminus (B \setminus C) \iff (x \in A \text{ et } \overline{(x \in B \text{ et } x \notin C)}) \iff (x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \in C)) \iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$, c'est-à-dire $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2. $(A \setminus B) \setminus C = \{1, 3\} \setminus \{3, 4\} = \{1\}$; $B \setminus C = \{2\}$, donc $A \setminus (B \setminus C) = \{1, 3\}$. Les résultats diffèrent : la différence **n'est pas associative**.
3. ($\Rightarrow$) **Par contraposée** : si $A \cap C \neq \emptyset$, soit $x \in A \cap C$; d'après 1, $x \in A \setminus (B \setminus C)$, mais $x \in C$, donc $x \notin (A \setminus B) \setminus C$: les deux ensembles sont différents.
($\Leftarrow$) Si $A \cap C = \emptyset$: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup \emptyset = A \setminus B$, et $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus B$ puisqu'aucun élément de A n'est dans C : égalité.

■ Corrigé de l'exercice 20

1. (H1) : $C \subset M$; (H2) : $R \cap M = \emptyset$; (H3) : $S \setminus C \subset R$.
2. $C \cap R \subset M \cap R$ (car $C \subset M$) et $M \cap R = \emptyset$: $C \cap R = \emptyset$: aucun membre du club d'échecs n'est souvent en retard.
3. **Double inclusion.** $S \cap C \subset S \cap M$ d'après (H1). Soit $x \in S \cap M$; **par l'absurde**, si $x \notin C$, alors $x \in S \setminus C \subset R$ (H3), donc $x \in R \cap M = \emptyset$ (H2) : absurde. Donc $x \in S \cap C$. $S \cap M = S \cap C$: un élève de Sciences Mathématiques a eu au moins 16 si et seulement s'il est membre du club d'échecs.
4. Pour $x \in S$, (H3) s'écrit « $x \notin C \Rightarrow x \in R$ » ; sa **contraposée** est « $x \notin R \Rightarrow x \in C$ » : $S \setminus R \subset C$. L'élève est membre du club d'échecs, donc (H1) il a eu au moins 16.
5. **Non** : rien n'empêche un membre du club d'être hors de Sciences Mathématiques. Exemple avec trois élèves : $e_1 \in S \cap C \cap M$; $e_2 \in C \cap M$, $e_2 \notin S$; $e_3 \in S \cap R$, $e_3 \notin C \cup M$. Alors $C = M = \{e_1, e_2\}$, $R = \{e_3\}$, $S \setminus C = \{e_3\}$: (H1), (H2), (H3) sont vérifiées, et pourtant $e_2 \in M \setminus S$.

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $(\Rightarrow) a = a \times 1 \in a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$: $a = bk$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $b \mid a$. $(\Leftarrow)$ Si $a = bm$, tout multiple ak de a s'écrit $b(mk) \in b\mathbb{Z}$: $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$.
 $4 \mid 12$ et $6 \mid 12$: $12\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$ et $12\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$; $6 \nmid 4$ et $4 \nmid 6$: $4\mathbb{Z} \not\subset 6\mathbb{Z}$ et $6\mathbb{Z} \not\subset 4\mathbb{Z}$ (par exemple $4 \notin 6\mathbb{Z}$ et $6 \notin 4\mathbb{Z}$).
2. **Double inclusion.** $\subset$: soit $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) pair. Si k était pair, $k = 2m$, alors $n = 6m + 1$ serait impair : donc k est impair, $k = 2m + 1$, et $n = 6m + 4 \in 6\mathbb{Z} + 4$. $\supset$: $6m + 4 = 3(2m + 1) + 1 = 2(3m + 2)$. Donc $(3\mathbb{Z} + 1) \cap 2\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} + 4$.
 Dans $[-10, 20]$: $-10 \leq 6m + 4 \leq 20 \iff -\frac{7}{3} \leq m \leq \frac{8}{3} \iff m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$: $\{-8, -2, 4, 10, 16\}$.
3. $4k + 1 = 2(2k) + 1$ est impair et $6m + 2 = 2(3m + 1)$ est pair : aucun entier n'est dans les deux ensembles, $(4\mathbb{Z} + 1) \cap (6\mathbb{Z} + 2) = \emptyset$.
 $\supset$: $12j + 9 = 4(3j + 2) + 1 = 6(2j + 1) + 3$. $\subset$: si $n = 4k + 1 = 6m + 3$, alors $4k = 6m + 2$, soit $2k = 3m + 1$: $3m + 1$ est pair, donc m est impair (m pair donnerait $3m + 1$ impair) ; $m = 2j + 1$ et $n = 6(2j + 1) + 3 = 12j + 9$. $(4\mathbb{Z} + 1) \cap (6\mathbb{Z} + 3) = 12\mathbb{Z} + 9$.

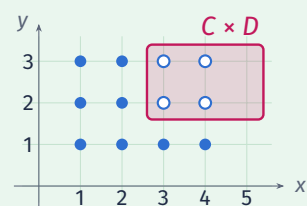
■ Corrigé de l'exercice 22

1. Pour $x \in E$ et $y \in F$:

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (A \times B) \setminus (C \times D) &\iff (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } \overline{(x \in C \text{ et } y \in D)} \\
 &\iff x \in A \text{ et } y \in B \text{ et } (x \notin C \text{ ou } y \notin D) \\
 &\iff (x \in A \setminus C \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in B \setminus D) \\
 &\iff (x, y) \in ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D)).
 \end{aligned}$$

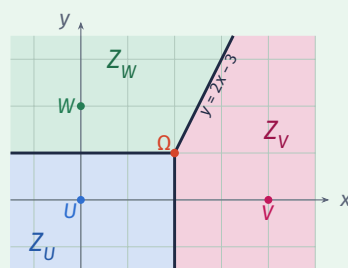
2. Soit $(x, y) \in A \times B$. Selon que $x \in C$ ou non, et que $y \in D$ ou non, il appartient à un et un seul des quatre ensembles $(A \setminus C) \times (B \setminus D)$, $(A \setminus C) \times (B \cap D)$, $(A \cap C) \times (B \setminus D)$, $(A \cap C) \times (B \cap D)$: ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est $A \times B$. Le dernier est $(A \times B) \cap (C \times D)$ (cours) ; en l'ôtant, il reste $(A \times B) \setminus (C \times D)$, réunion des trois premiers, deux à deux disjoints.

3. Sur le quadrillage ci-contre, on ôte les points de $A \times B$ situés dans le cadre rouge $C \times D$ (cercles creux) : $(A \times B) \setminus (C \times D) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$, soit **8 couples**. Avec 2 : $A \setminus C = \{1, 2\}$, $B \setminus D = \{1\}$, $A \cap C = \{3, 4\}$, $B \cap D = \{2, 3\}$, et $2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ ✓ (c'est aussi $12 - 2 \times 2$).



■ Corrigé de l'exercice 23

- Les distances sont positives, donc comparées par leurs carrés : $MU \leq MV \iff x^2 + y^2 \leq (x-4)^2 + y^2 \iff 0 \leq -8x + 16 \iff \boxed{x \leq 2}$. De même $MU \leq MW \iff x^2 + y^2 \leq x^2 + (y-2)^2 \iff 0 \leq -4y + 4 \iff \boxed{y \leq 1}$. Donc Z_U est l'ensemble des points dont le couple de coordonnées appartient à $\boxed{]-\infty, 2] \times]-\infty, 1]}$.
- $MV \leq MU \iff x \geq 2$ (question 1), et $MV \leq MW \iff (x-4)^2 + y^2 \leq x^2 + (y-2)^2 \iff -8x + 16 \leq -4y + 4 \iff y \leq 2x - 3$: d'où Z_V . De même, $MW \leq MU \iff y \geq 1$ et $MW \leq MV \iff y \geq 2x - 3$: d'où Z_W . Les trois zones sont représentées ci-contre.
- Pour tout point M , l'une des trois distances MU, MV, MW est la plus petite : M est dans la zone de l'école correspondante, donc $Z_U \cup Z_V \cup Z_W$ est le plan tout entier. Un point des trois zones vérifie $x \leq 2, x \geq 2, y \leq 1$ et $y \geq 1$, donc $(x, y) = (2, 1)$; réciproquement, $(2, 1)$ vérifie $y \leq 2x - 3$ et $y \geq 2x - 3$ ($2 \times 2 - 3 = 1$) : $\boxed{\Omega(2, 1)}$ ($\Omega U = \Omega V = \Omega W = \sqrt{5}$: c'est le centre du cercle passant par U, V, W). Ce **n'est pas une partition** : les zones ne sont pas disjointes (Ω est dans les trois, et la demi-droite $\{M(2, y) / y \leq 1\}$ est incluse dans $Z_U \cap Z_V$).



28

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- Si X est solution : $C = A \cap X \subset A$ et $A \subset A \cup X = B$: $\boxed{C \subset A \subset B}$ est une condition nécessaire.
- a) *Analyse*. Les éléments de X qui ne sont pas dans A sont exactement les éléments de $A \cup X$ qui ne sont pas dans A : $X \setminus A = (A \cup X) \setminus A = B \setminus A$. Alors $X = (X \cap A) \cup (X \setminus A) = C \cup (B \setminus A)$: si une solution existe, c'est celle-ci.
b) *Synthèse*. Posons $X_0 = C \cup (B \setminus A)$. Comme $C \subset A$: $A \cup X_0 = A \cup (B \setminus A) = A \cup B = B$ (exercice 11 et $A \subset B$). Et $A \cap X_0 = (A \cap C) \cup (A \cap (B \setminus A)) = C \cup \emptyset = C$. **Conclusion** : (S) a une solution si et seulement si $C \subset A \subset B$, et elle est alors **unique** : $\boxed{X = C \cup (B \setminus A)}$.
- $C \subset A \subset B$ ✓ et $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$: $\boxed{X = \{2, 4, 5, 6, 7\}}$ (vérification : $A \cup X = \{1, \dots, 7\} = B$ et $A \cap X = \{2, 4\} = C$).
- Si $A \cup X = B \cap X$: $A \subset A \cup X = B \cap X \subset X$ et $X \subset A \cup X = B \cap X \subset B$, donc $A \subset X \subset B$. Réciproquement, si $A \subset X \subset B$: $A \cup X = X = B \cap X$. Avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, \dots, 7\}$: $X = A \cup Y$ avec $Y \subset B \setminus A = \{5, 6, 7\}$ (même raisonnement qu'à l'exercice 17) : $2^3 = \boxed{8}$ solutions.

■ Corrigé de l'exercice 25

- $u_0 = 1$ (le couple $(\emptyset, \emptyset)$) ; $u_1 = 3$: $(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \{1\})$; $u_2 = 9$: $(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, E_2), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, E_2), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, E_2), (E_2, E_2)$.
- Famille 1** ($n+1 \notin Y$, donc $n+1 \notin X$) : ce sont exactement les couples de parties de E_n tels que $X \subset Y$: u_n couples. **Famille 2** ($n+1 \in Y \setminus X$) : $Y = Y' \cup \{n+1\}$ avec $Y' = Y \setminus \{n+1\} \subset E_n$ et $X \subset Y'$; chaque couple (X, Y') de parties de E_n tel que $X \subset Y'$ donne le couple $(X, Y' \cup \{n+1\})$ de la famille, deux couples distincts en donnant deux distincts, et on les obtient tous : u_n couples. **Famille 3** ($n+1 \in X$) : de même avec $(X' \cup \{n+1\}, Y' \cup \{n+1\}), X' \subset Y' \subset E_n$: u_n couples. Les trois familles sont disjointes et recouvrent tous les cas : $u_{n+1} = 3u_n$.

Initialisation. $u_0 = 1 = 3^0$. **Hérédité.** si $u_n = 3^n$ pour un entier $n \geq 0$, alors $u_{n+1} = 3u_n = 3^{n+1}$.

Conclusion. $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $X \cap Y = \emptyset$, l'élément $n+1$ est dans X seulement, dans Y seulement, ou dans aucun des deux : le nombre v_n de ces couples vérifie $v_{n+1} = 3v_n$ et $v_0 = 1$, d'où $v_n = 3^n$ (récurrence). Pour $X \cup Y = E_n$, l'élément $n+1$ est dans X seulement, dans Y seulement, ou dans les deux : $w_{n+1} = 3w_n$ et $w_0 = 1$ (car $\emptyset \cup \emptyset = E_0$), d'où $w_n = 3^n$.
- Parmi les 3^n couples tels que $X \subset Y$, ceux tels que $X = Y$ sont les couples (X, X) , au nombre de 2^n : $3^n - 2^n$; pour $n = 3$: $27 - 8 = 19$.
- L'élément $n+1$ a quatre positions possibles (hors de Z , dans $Z \setminus Y$, dans $Y \setminus X$, dans X) : $t_{n+1} = 4t_n$ et $t_0 = 1$, d'où 4^n triplets.

■ Corrigé de l'exercice 26

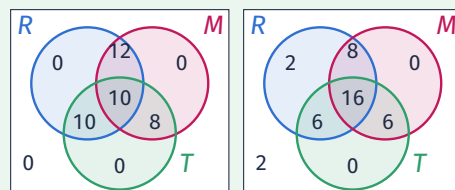
- $n = 1$: $\emptyset, \{1\}$; $n = 2$: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$; $n = 3$: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$; $n = 4$: les cinq précédentes, puis $\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$. $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8$.
- Soit $X \subset E_{n+2}$ sans entiers consécutifs. Si $n+2 \notin X$: X est une partie de E_{n+1} sans entiers consécutifs : a_{n+1} possibilités. Si $n+2 \in X$: alors $n+1 \notin X$, et $X' = X \setminus \{n+2\}$ est une partie de E_n sans entiers consécutifs ; réciproquement, pour une telle partie X' , $X' \cup \{n+2\}$ convient (les éléments de X' sont $\leq n$) : a_n possibilités. Donc $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
- $a_5 = 13, a_6 = 21, a_7 = 34, a_8 = 55, a_9 = 89, a_{10} = 144$. Les autres parties de E_{10} contiennent deux entiers consécutifs : $2^{10} - 144 = 880$.
- $H(n)$: « $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ». **Initialisation.** $a_0 = 1 \geq 1$ et $a_1 = 2 \geq \frac{3}{2}$: $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.
Hérédité. (récurrence double) supposons $H(n)$ et $H(n+1)$ vraies pour un entier $n \geq 0$ et montrons $H(n+2)$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{5}{2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}, \quad \text{car } \frac{5}{2} = \frac{10}{4} \geq \frac{9}{4}.$$

Conclusion. $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ Corrigé de l'exercice 27

- $X \cup Y \subset G$, donc $\text{card}(X \cup Y) \leq \text{card}(G)$, et $\text{card}(X \cap Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y) - \text{card}(X \cup Y) \geq \text{card}(X) + \text{card}(Y) - \text{card}(G)$. Ainsi $\text{card}(R \cap M) \geq 32 + 30 - 40 = 22$.
- Avec $X = R \cap M$ et $Y = T$: $\text{card}(R \cap M \cap T) \geq \text{card}(R \cap M) + \text{card}(T) - 40 \geq 22 + 28 - 40 = 10$.
- Répartition (Venn de gauche) : 12 élèves dans R et M seulement, 10 dans R et T seulement, 8 dans M et T seulement, 10 dans les trois, aucun dans un seul club ni sans club : R : $12 + 10 + 10 = 32$, M : $12 + 8 + 10 = 30$, T : $10 + 8 + 10 = 28$, total 40 ✓.
Maximum : $R \cap M \cap T \subset T$, donc au plus 28, valeur atteinte si $T \subset M \subset R$ (28 dans les trois clubs, 2 dans R et M seulement, 2 dans R seulement, 8 sans club).
- $\text{card}(R \cup M \cup T) = 40 - 2 = 38$ et, par la formule du crible (cours) : $38 = 32 + 30 + 28 - 24 - 22 - 22 + t$, d'où $t = 16$ élèves dans les trois clubs. Exactement deux clubs : $(24 - 16) + (22 - 16) + (22 - 16) = 20$; un seul : $38 - 16 - 20 = 2$ (Venn de droite).



■ Corrigé de l'exercice 28

1. Les quatre singletons $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$; les six paires $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ (deux paires distinctes ne sont pas incluses l'une dans l'autre, puisqu'elles ont le même nombre d'éléments).
2. Les chaînes contiennent $5 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 16 = 2^4$ parties, toutes distinctes : $\emptyset, E$, les 4 singletons, les 6 paires et les 4 parties à trois éléments apparaissent chacune une fois ; donc chaque partie de E est dans exactement une chaîne. Dans une chaîne, de deux parties, l'une est incluse dans l'autre : une famille sans inclusion contient **au plus une** partie de chaque chaîne. Si elle en contenait 7, deux seraient dans la même chaîne (principe des tiroirs) : elle a **au plus** $\boxed{6}$ éléments.
3. Une famille sans inclusion à 6 éléments contient exactement une partie de chaque chaîne, donc $\{1, 3\}$ ($\mathcal{C}_5$) et $\{2, 4\}$ ($\mathcal{C}_6$). Dans $\mathcal{C}_1$, $\emptyset$ et $\{1\}$ sont inclus dans $\{1, 3\}$, et $\{1, 2, 3\}$, E le contiennent : il reste $\{1, 2\}$. Dans $\mathcal{C}_2$: $\{2\} \subset \{2, 4\} \subset \{2, 3, 4\}$: il reste $\{2, 3\}$. Dans $\mathcal{C}_3$: $\{3\} \subset \{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$: il reste $\{3, 4\}$. Dans $\mathcal{C}_4$: $\{4\} \subset \{2, 4\} \subset \{1, 2, 4\}$: il reste $\{1, 4\}$. La famille est donc celle des six paires, qui convient (question 1).
4. Les trois chaînes $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2\} \subset \{2, 3\}$, $\{3\} \subset \{1, 3\}$ contiennent chacune des 8 parties de $\{1, 2, 3\}$ une fois : une famille sans inclusion a au plus 3 éléments, et les trois paires conviennent : maximum $\boxed{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 29

1. $3 \nmid 1$, donc $1 \in S$. Soit $n \in S$. Si 3 divisait $2n$, le nombre premier 3, qui ne divise pas 2, diviserait n : impossible ; donc $2n \in S$. Si 3 divisait $n + 3$, il diviserait $(n + 3) - 3 = n$: impossible ; donc $n + 3 \in S$. S est stable.
2. $H(k)$: « $3k + 1 \in A$ et $3k + 2 \in A$ ». **Initialisation.** $1 \in A$ et $2 = 2 \times 1 \in A$. **Hérédité.** si $H(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 0$: $3(k + 1) + 1 = (3k + 1) + 3 \in A$ et $3(k + 1) + 2 = (3k + 2) + 3 \in A$, car A est stable. **Conclusion.** $H(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in S$: son reste dans la division par 3 est 1 ou 2, donc $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$: $n \in A$. Ainsi $S \subset A$.
3. S est stable (question 1) et incluse dans toute partie stable (question 2) : c'est la **plus petite** partie stable. $\boxed{\mathbb{N}^* \setminus S = \{3, 6, 9, \dots\}}$, l'ensemble des multiples non nuls de 3.
4. T est stable : $1 \in T$; si $n \in T$, le nombre premier 5 ne divise ni 2 ni n , donc pas $2n$, et $2n \neq 3$ ($2n$ est pair) : $2n \in T$; $5 \nmid n + 5$ (sinon $5 \mid n$) et $n + 5 \geq 6$: $n + 5 \in T$.
 T est incluse dans toute partie stable A : $1, 2, 4, 8 \in A$ (doublements successifs), puis, par récurrence sur k comme en 2, $5k + 1, 5k + 2, 5k + 4, 5k + 8 \in A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in T$, de reste $r \neq 0$ dans la division par 5 : si $r \in \{1, 2, 4\}$, $n = 5k + r \in A$; si $r = 3$, $n = 5k + 3$ avec $k \geq 1$ (car $n \neq 3$), et $n = 5(k - 1) + 8 \in A$. Donc $\boxed{T}$ est la plus petite partie stable. On note que 3 n'est ni de la forme $2m$ ni de la forme $m + 5$ ($m \in \mathbb{N}^*$) : il ne peut pas être « atteint ».

■ Corrigé de l'exercice 30

1. **Par le calcul.** Par Morgan : $\overline{A \Delta B} = \overline{A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B} = (\overline{A \cap \overline{B}}) \cap (\overline{\overline{A} \cap B}) = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$. En développant (distributivité) : $(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$, car $\overline{A} \cap A = B \cap \overline{B} = \emptyset$.
2. Avec $X = A \Delta B$: $X \Delta C = (X \cap \overline{C}) \cup (\overline{X} \cap C)$, donc, d'après 1 et par distributivité :

$$(A \Delta B) \Delta C = \left[((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C} \right] \cup \left[((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) \cap C \right]$$

$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Un élément appartient à $(A \Delta B) \Delta C$ si et seulement s'il appartient à exactement une des trois parties, ou aux trois (à un nombre impair d'entre elles).

- Notons $S(A, B, C)$ le second membre. Échanger les rôles de A, B, C ne fait que permuter ses quatre termes : $S(B, C, A) = S(A, B, C)$. Comme Δ est commutative : $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A = S(B, C, A) = S(A, B, C) = (A \Delta B) \Delta C$: Δ est **associative**.
- Analyse. Si $A \Delta X = B$, alors $A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B$; or, par associativité, $A \Delta (A \Delta X) = (A \Delta A) \Delta X = \emptyset \Delta X = X$ (cours : $A \Delta A = \emptyset$ et $\emptyset \Delta X = X$). Donc $X = A \Delta B$. Synthèse. $A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = \emptyset \Delta B = B$. L'équation a une **unique** solution : $X = A \Delta B$.
- $X = A \Delta B = \{1, 2, 3\} \cup \{6, 7\} = \{1, 2, 3, 6, 7\}$; vérification : $A \Delta X = \{4, 5\} \cup \{6, 7\} = B$ ✓.
- a) Si $A \Delta B = A \Delta C = D$, alors B et C sont solutions de l'équation $A \Delta X = D$, qui n'en a qu'une (question 4) : $B = C$.
b) Un élément de $X \cap A$ est dans X et dans A , donc pas dans $X \Delta A$: $(X \Delta A) \cap (X \cap A) = \emptyset$. Si $X \Delta A = X \cap A = Y$, alors $Y = Y \cap Y = \emptyset$: $X \cap A = \emptyset$ et $X \Delta A = \emptyset$, donc $X = A$ (question 4 avec $B = \emptyset$), puis $A = X \cap A = \emptyset$. **Conclusion** : si $A \neq \emptyset$, l'équation n'a **aucune** solution ; si $A = \emptyset$, elle s'écrit $X = \emptyset$: **unique** solution $X = \emptyset$.

29 Corrigés : décrire un ensemble

■ Corrigé de l'exercice 31

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < 40 \iff n \leq 6$ (car $6^2 = 36 < 40 < 49 = 7^2$) : $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2) < 0 \iff -2 < x < 5$, et l'on garde les entiers : $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
Les diviseurs de $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84 ; on garde les impairs : $C = \{1, 3, 7, 21\}$.
 $x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$: $D = \{-3, 0, 3\}$. Pour F : $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, $F = \emptyset$. Pour G : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, $G = \{3\}$.
Seul F est vide ; seul G est un singleton.
- $P = \{n^3 / n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$; $Q = \{3k / k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$; $R = \left\{ \frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
 $S = \{3k + 2 / k \in \mathbb{N}\}$: S est l'ensemble des entiers naturels de reste 2 dans la division par 3.
- $-1 \in B$; $4 \notin C$ (4 est pair) ; $\frac{9}{10} \in R$ ($n = 9$) ; $1 \notin R$ ($\frac{n}{n+1} = 1$ donnerait $n = n+1$) ; $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $2026 \notin S$; $2027 = 3 \times 675 + 2 \in S$; $-3 \notin A$: bien que $(-3)^2 < 40$, les éléments de A sont des entiers naturels.

■ Corrigé de l'exercice 32

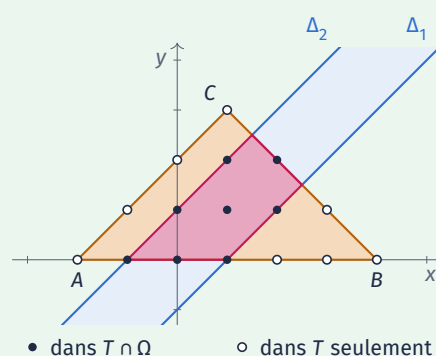
- Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est : $x = -2$, $x = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{1}{3}$, ou $x^2 = 5$, soit $x = \pm\sqrt{5}$.
Par l'absurde, si $-\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, alors $10^k = -3a$ et 3 diviserait $10^k = 2^k \times 5^k$, ce qui contredit l'unicité de la décomposition en facteurs premiers : $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. En revanche $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} \in \mathbb{D}$, et $\pm\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. D'où :
 $S_{\mathbb{N}} = \emptyset$, $S_{\mathbb{Z}} = \{-2\}$, $S_{\mathbb{D}} = \left\{-2, \frac{3}{4}\right\}$, $S_{\mathbb{Q}} = \left\{-2, -\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right\}$, $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{5}, -2, -\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \sqrt{5}\right\}$.

Chacun est l'intersection de $S_{\mathbb{R}}$ avec l'ensemble de nombres correspondant : $S_{\mathbb{N}} \subset S_{\mathbb{Z}} \subset S_{\mathbb{D}} \subset S_{\mathbb{Q}} \subset S_{\mathbb{R}}$, toutes les inclusions étant strictes, à l'image de $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. a) Si $\frac{1}{n} = \frac{a}{10^k}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$), alors $na = 10^k$: n divise 10^k . Réciproquement, si $10^k = na$ avec $a \in \mathbb{N}$, alors $\frac{1}{n} = \frac{a}{10^k} \in \mathbb{D}$.
 b) Si n divise $10^k = 2^k \times 5^k$, ses seuls facteurs premiers possibles sont 2 et 5 ; inversement, $2^\alpha \times 5^\beta$ divise 10^k dès que $k \geq \alpha$ et $k \geq \beta$. On élimine donc 3, 6, 9, 12 (multiples de 3), 7 et 11 : $\{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ (par exemple $\frac{1}{8} = 0,125$).
3. a) **Vrai** : $2 < \sqrt{5} < 3$, car $4 < 5 < 9$. b) **Vrai** : $3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (même raisonnement qu'au 1). c) **Vrai** : 0,33335 convient, car $0,33335 < 0,3334$ et $3 \times 0,33335 = 1,00005 > 1$. d) **Faux** : si d était le plus petit élément de $\mathbb{D} \cap]0, 1[$, alors $\frac{d}{10}$ serait un décimal de $]0, 1[$ strictement inférieur à d : contradiction.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $|x - y| \leq 1 \iff -1 \leq x - y \leq 1 \iff x - 1 \leq y \leq x + 1$: M est sur ou au-dessus de Δ_1 : $y = x - 1$, et sur ou au-dessous de Δ_2 : $y = x + 1$. Ces droites ont le même coefficient directeur 1 : elles sont parallèles, et Ω est la bande fermée qu'elles délimitent (en bleu).
2. a) (AC) a pour coefficient directeur $\frac{3-0}{1-(-2)} = 1$ et passe par A : $y = x + 2$. (BC) a pour coefficient directeur $\frac{3-0}{1-4} = -1$: $x + y = 4$. Enfin (AB) est l'axe $y = 0$.



- b) Le triangle plein est l'intersection des trois demi-plans limités par ses côtés et contenant chacun le sommet opposé : C vérifie $y \geq 0$, B vérifie $y \leq x + 2$ ($0 \leq 6$) et A vérifie $x + y \leq 4$ ($-2 \leq 4$). Donc $T = \{M(x, y) / y \geq 0, y \leq x + 2, x + y \leq 4\}$.
- c) Si $M(x, y)$ est un point entier de T , l'addition de $y \leq x + 2$ et $y \leq 4 - x$ donne $2y \leq 6$: $y \in \{0, 1, 2, 3\}$, et $y - 2 \leq x \leq 4 - y$. Ligne par ligne :
 $\{(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (1, 3)\}$: $7 + 5 + 3 + 1 = 16$ points.
3. Comme $y \leq x + 1$ entraîne $y \leq x + 2$, $T \cap \Omega = \{M(x, y) / y \geq 0, x - 1 \leq y \leq x + 1, x + y \leq 4\}$ (en rose). Ses sommets sont les intersections de $y = 0$ avec Δ_2 et Δ_1 , puis de $x + y = 4$ avec Δ_1 et Δ_2 : $(-1, 0), (1, 0), (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$; c'est un trapèze (deux côtés portés par Δ_1 et Δ_2). Ses points entiers sont ceux de 2 c) qui vérifient $|x - y| \leq 1$: $(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)$, soit 8 points ((1, 3) est exclu : $|1 - 3| = 2$).

■ Corrigé de l'exercice 34

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 3 = (n - 1)(n + 1) + 4$. Comme $n + 1$ divise $(n - 1)(n + 1)$, il divise $n^2 + 3$ si et seulement s'il divise la différence 4 (si d divise u , alors d divise $u + v \iff d$ divise v). Les diviseurs de 4 dans $\mathbb{Z}$ sont $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; donc $n + 1 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ et $A = \{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$.
 Contrôle : pour $n = -5$, -4 divise 28 ; pour $n = 3$, 4 divise 12.

- Pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : xy = 2x + y \iff xy - 2x - y + 2 = 2 \iff (x-1)(y-2) = 2$. Les entiers $x-1$ et $y-2$ ont pour produit 2 : $(x-1, y-2) \in \{(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)\}$. Donc $B = \{(2, 4), (3, 3), (0, 0), (-1, 1)\}$.
- Pour $n = 0, 1, \dots, 5 : 2^n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ et $n^2 + 10 = 10, 11, 14, 19, 26, 35$: ces six entiers sont dans C.

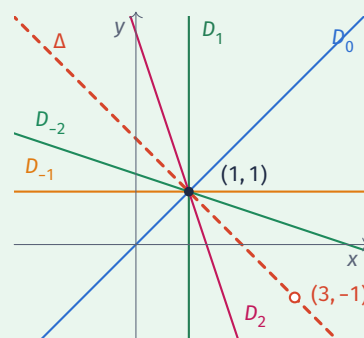
Notons $\mathcal{P}(n) : \ll 2^n \geq n^2 + 10 \gg$, pour $n \geq 6$. *Initialisation.* $2^6 = 64 \geq 46$. *Hérédité.* Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un entier $n \geq 6$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2 + 20$, et $2n^2 + 20 - ((n+1)^2 + 10) = n^2 - 2n + 9 = (n-1)^2 + 8 > 0$: donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2 + 10$. *Conclusion.* $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 6$: aucun entier $n \geq 6$ n'est dans C, et $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

■ Corrigé de l'exercice 35

- $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$: le quotient est défini pour tout réel x .
- a) $y + 1 = \frac{x + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + x + 1} \geq 0$ et $\frac{1}{3} - y = \frac{x^2 + x + 1 - 3x}{3(x^2 + x + 1)} = \frac{(x-1)^2}{3(x^2 + x + 1)} \geq 0$.
Donc $-1 \leq y \leq \frac{1}{3}$: tout élément de V est dans $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$, c'est-à-dire $V \subset \left[-1, \frac{1}{3}\right]$.
b) Si $y = 0$, $x = 0$ est solution. Si $y \neq 0$, l'équation est du second degré, de discriminant $\Delta = (y-1)^2 - 4y^2 = (y-1-2y)(y-1+2y) = (1+y)(1-3y)$, positif ou nul car $1+y \geq 0$ et $1-3y \geq 0$: elle a une solution réelle x . Dans les deux cas, $yx^2 + (y-1)x + y = 0$ s'écrit $y(x^2 + x + 1) = x$, soit $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ (car $x^2 + x + 1 \neq 0$) : $y \in V$.
c) Par double inclusion, $V = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$. Le plus grand élément est $\frac{1}{3}$ (atteint pour $x = 1$), le plus petit est -1 (atteint pour $x = -1$). $V \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$.
- $W \subset]0, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, donc $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$.
 $]0, +\infty[\subset W$. Soit $y > 0$; cherchons x tel que $\sqrt{x^2 + 1} = x + y$. *Analyse* : en élevant au carré, $x^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2$, d'où $x = \frac{1-y^2}{2y}$. *Synthèse* : pour ce x , $x+y = \frac{1+y^2}{2y} > 0$ et $x^2 + 1 = \frac{(1-y^2)^2 + 4y^2}{4y^2} = \frac{(1+y^2)^2}{4y^2}$, donc $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1+y^2}{2y} = x + y$, soit $\sqrt{x^2 + 1} - x = y : y \in W$. *Conclusion* : $W =]0, +\infty[$ (W n'a pas de plus petit élément).

■ Corrigé de l'exercice 36

- Les coefficients $m+1$ et $m-1$ ne sont jamais nuls ensemble (il faudrait $m = -1$ et $m = 1$) : D_m est une droite. $D_0 : y = x$, $D_1 : x = 1$ ($2x = 2$), $D_{-1} : y = 1$ ($-2y = -2$).
- Analyse.* Un point de toutes les D_m est en particulier sur D_1 et D_{-1} : c'est $(1, 1)$. *Synthèse.* $(m+1) \times 1 + (m-1) \times 1 = 2m$ pour tout m : $(1, 1)$ est sur toutes les D_m . $F = \{(1, 1)\}$.



- Pour $M(x, y) : M \in D_m \iff (m+1)x + (m-1)y = 2m \iff m(x+y-2) = y-x$ (*).
Si $M \notin \Delta$, alors $x+y-2 \neq 0$ et (*) a une unique solution $m = \frac{y-x}{x+y-2}$: M est sur **une et une seule** droite D_m . Si $M \in \Delta$, (*) s'écrit $0 = y-x$: si $x \neq y$, aucun m ne convient, et M n'est sur aucune

D_m (c'est le cas de $M \in \Delta$, $M \neq (1, 1)$, car $x = y$ et $x + y = 2$ donnent $(1, 1)$). Ainsi G est le plan privé des points de Δ autres que $(1, 1)$: $G = \{M(x, y) / x + y \neq 2\} \cup \{(1, 1)\}$.

Δ n'est pas l'une des D_m : le point $(3, -1)$ de Δ n'est sur aucune d'elles. Les D_m sont exactement les droites passant par $(1, 1)$, sauf Δ (figure : $D_0, D_{\pm 1}, D_{\pm 2}$ et Δ en pointillés).

4. Avec $y = 0$: $(m + 1)x = 2m$. Si $m = -1$, on obtient $0 = -2$: D_{-1} est parallèle à l'axe des abscisses. Sinon, $x = \frac{2m}{m+1}$, et $\frac{2m}{m+1} \geq 0$ si et seulement si m et $m + 1$ sont de même signe (ou $m = 0$) : $m \in]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.

30

Corrigés : inclusion et égalité

■ Corrigé de l'exercice 37

1. a) E a trois éléments : le nombre 1, l'ensemble $\{1\}$ et l'ensemble $\{\{1\}\}$. Donc $\mathcal{P}(E)$ en a $2^3 = 8$:

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \{\{1\}\}\}, \{\{1\}, \{\{1\}\}\}, E\}.$$

b) $\{1\} \in E$: V. $\{1\} \subset E$: V ($1 \in E$). $\{\{1\}\} \subset E$: V ($\{1\} \in E$). $\{\{\{1\}\}\} \in E$: F (ce n'est aucun des trois éléments). $\{\{\{1\}\}\} \subset E$: V ($\{\{1\}\} \in E$). $\emptyset \in E$: F. $\{1, \{\{1\}\}\} \subset E$: V. $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$: V (car $\{1\} \subset E$). $1 \in \mathcal{P}(E)$: F (les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles).

c) Un élément X de E est une partie de E lorsque c'est un ensemble dont tous les éléments sont dans E : c'est le cas de $\{1\}$ et $\{\{1\}\}$ (car $1 \in E$ et $\{1\} \in E$), pas du nombre 1.

2. $A = \{0, 2\}$ ($x^2 - 2x = x(x - 2)$). $2 \in A$; $\{0\} \subset A$ (mais $\{0\} \notin A$) ; $A \subset \mathbb{N}$; $A \not\subset]0, +\infty[$ ($0 \in A$) ;

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ car $A \subset \mathbb{N}$; $\{A\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ car $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (mais $\{A\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$, car $A \notin \mathbb{N}$) ;

$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ et $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$ (les deux conviennent) ; $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$ (mais $\{2\} \not\subset \mathcal{P}(A)$, car $2 \notin \mathcal{P}(A)$).

■ Corrigé de l'exercice 38

1. $A \subset B$, par contraposition : montrons que $x \notin B \Rightarrow x \notin A$. Si $x > 1$, alors $x > 0$ et $x^2 > 1$, d'où $x^3 = x \times x^2 > x$: $x \notin A$. $B \not\subset A$: $x = -\frac{1}{2} \in B$, mais $x^3 = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2} = x$, donc $x \notin A$. $A \subset B$, $B \not\subset A$.

(En fait $x^3 - x = (x + 1)x(x - 1)$ et $A =]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.)

2. $A \subset B$: $6k + 3 = 3(2k + 1)$ avec $2k + 1 \in \mathbb{Z}$. $B \not\subset A$: $0 = 3 \times 0 \in B$, mais $0 \notin A$, car $6k + 3 = 2(3k + 1) + 1$ est impair. $A \subset B$, $B \not\subset A$.

3. $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. $9 \in A$ et $9 \notin B$; $4 \in B$ et $4 \notin A$. $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

4. $A \subset B$: soit $(x, y) \in A$; alors $y = 4 - x$ et $xy = 4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 \leq 4$: $(x, y) \in B$. $B \not\subset A$: $(0, 0) \in B$ ($0 \leq 4$), mais $0 + 0 \neq 4$. $A \subset B$, $B \not\subset A$.

■ Corrigé de l'exercice 39

1. a) $\subset$: pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $3a + 5b \in \mathbb{Z}$. $\supset$: soit $n \in \mathbb{Z}$; $n = n(2 \times 3 - 5) = 3 \times (2n) + 5 \times (-n)$, avec $2n$ et $-n$ entiers. Donc $\{3a + 5b / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}$.

b) $\subset$: $6a + 10b = 2(3a + 5b)$ et $3a + 5b \in \mathbb{Z}$. $\supset$: $2k = 2(3 \times 2k - 5k) = 6 \times (2k) + 10 \times (-k)$. D'où l'égalité.

2. $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$: pour $t \in \mathbb{R}$, $x = 1 + 2t$ et $y = 3 - t$ vérifient $x + 2y = 1 + 2t + 6 - 2t = 7$.

$\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$: soit $M(x, y)$ tel que $x + 2y = 7$. Posons $t = 3 - y$; alors $3 - t = y$ et $1 + 2t = 7 - 2y = x$: M est le point de paramètre t . $\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{D}'}$ ($\mathcal{D}$ est la droite passant par $(1, 3)$, de vecteur directeur $(2, -1)$).

3. $\subset$: $0 \leq a \leq 1$ et $2 \leq b \leq 3$ donnent $2 \leq a + b \leq 4$. $\supset$: soit $s \in [2, 4]$. Si $s \leq 3$: $s = 0 + s$ avec $0 \in [0, 1]$, $s \in [2, 3]$; si $s > 3$: $s = (s - 3) + 3$ avec $s - 3 \in]0, 1]$. $\boxed{= [2, 4]}$.

$\subset$: $1 \leq a \leq 2$ et $1 \leq b \leq 3$ (nombres positifs) donnent $1 \leq ab \leq 6$. $\supset$: soit $p \in [1, 6]$. Si $p \leq 3$: $p = 1 \times p$; si $p > 3$: $p = \frac{p}{3} \times 3$ avec $\frac{p}{3} \in]1, 2]$. $\boxed{= [1, 6]}$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, $\boxed{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{b\}\} = \mathcal{P}(\{b\}) = \mathcal{P}(A \cap B)}$;

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ (6 éléments), $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ (8 éléments). Ici $\boxed{\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)}$.

2. On raisonne par équivalences : $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \iff X \subset A \cap B \iff (X \subset A \text{ et } X \subset B) \iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. (La deuxième équivalence : si $X \subset A \cap B$, alors $X \subset A$ et $X \subset B$ car $A \cap B$ est inclus dans chacun ; réciproquement, tout $x \in X$ est dans A et dans B .)

Ainsi $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$. Si $A \cap B = \emptyset$, cet ensemble est $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, soit $x \in A \cap B$: $\{x\} \in \mathcal{P}(A \cap B)$ et $\{x\} \neq \emptyset$, donc $\mathcal{P}(A \cap B) \neq \{\emptyset\}$. $\boxed{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \iff A \cap B = \emptyset}$.

3. a) Si $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, alors $X \subset A$ ou $X \subset B$; dans les deux cas $X \subset A \cup B$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

b) $\Leftarrow$: si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ et $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, donc $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$; de même si $B \subset A$.

$\Rightarrow$: supposons l'égalité. $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, donc $A \cup B \subset A$ ou $A \cup B \subset B$. Dans le premier cas, $B \subset A \cup B \subset A$; dans le second, $A \subset A \cup B \subset B$. $\boxed{\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \iff (A \subset B \text{ ou } B \subset A)}$.

4. $\Leftarrow$: si $A \subset B$, alors $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$; de même si $A \subset C$.

$\Rightarrow$: $A \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$, donc $A \in \mathcal{P}(B)$ ou $A \in \mathcal{P}(C)$, c'est-à-dire $A \subset B$ ou $A \subset C$. (Avec 3 a), on retrouve le 3 b) en remplaçant A, B, C par $A \cup B, A, B$.)

■ Corrigé de l'exercice 41

1. a) $I_a = \emptyset \iff a - 1 > 2a + 1 \iff \boxed{a < -2}$.

b) Si $a < -2$: $I_a = \emptyset \subset B$. Si $a \geq -2$: $I_a = [a - 1, 2a + 1]$ n'est pas vide ; si $I_a \subset B$, ses extrémités sont dans B , et réciproquement, si $-1 \leq a - 1$ et $2a + 1 \leq 5$, tout $x \in I_a$ vérifie $-1 \leq a - 1 \leq x \leq 2a + 1 \leq 5$. Donc $I_a \subset B \iff (a \geq 0 \text{ et } a \leq 2)$. $\boxed{\{a \in \mathbb{R} / I_a \subset B\} =]-\infty, -2[\cup [0, 2]}$.

c) Si $B \subset I_a$, alors $-1 \in I_a$ et $5 \in I_a$: $a - 1 \leq -1$ et $5 \leq 2a + 1$, soit $a \leq 0$ et $a \geq 2$: impossible. **Aucun** réel a ne convient.

2. a) Le discriminant est $a^2 - 12$. Si $|a| < 2\sqrt{3}$, il est négatif : $x^2 - ax + 3 > 0$ pour tout x et $\boxed{S_a = \emptyset}$.

Si $a = \pm 2\sqrt{3}$: $x^2 - ax + 3 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ et $S_a = \left\{\frac{a}{2}\right\}$ est un **singleton** ($\{\sqrt{3}\}$ ou $\{-\sqrt{3}\}$). Si $|a| > 2\sqrt{3}$: $S_a = [x_1, x_2]$, où $x_1 < x_2$ sont les racines.

b) $\Rightarrow$: 1 et 3 sont dans $[1, 3]$. $\Leftarrow$: si $1 \in S_a$ et $3 \in S_a$, S_a a au moins deux éléments, donc $S_a = [x_1, x_2]$ avec $x_1 \leq 1$ et $3 \leq x_2$, d'où $[1, 3] \subset S_a$.

Or $1 \in S_a \iff 4 - a \leq 0 \iff a \geq 4$, et $3 \in S_a \iff 12 - 3a \leq 0 \iff a \geq 4$.
 $[1, 3] \subset S_a \iff a \in [4, +\infty[$ (pour $a = 4$, $S_4 = [1, 3]$).

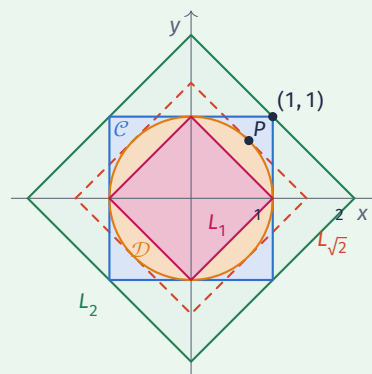
c) Si $|a| < 2\sqrt{3}$: $S_a = \emptyset \subset [0, +\infty[$. Si $a = 2\sqrt{3}$: $S_a = \{\sqrt{3}\}$ convient ; si $a = -2\sqrt{3}$: $S_a = \{-\sqrt{3}\}$ ne convient pas. Si $|a| > 2\sqrt{3}$: $x_1 x_2 = 3 > 0$, les racines ont le même signe, celui de leur somme a ; elles sont positives si $a > 2\sqrt{3}$ (cela convient), négatives si $a < -2\sqrt{3}$ (cela ne convient pas).

$S_a \subset [0, +\infty[\iff a \in]-2\sqrt{3}, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 42

1. Chacune des quatre sommes $\pm x \pm y$ est inférieure ou égale à $|x| + |y|$ (car $\pm x \leq |x|$ et $\pm y \leq |y|$), et l'une d'elles lui est égale (celle où l'on prend les bons signes). Donc $|x| + |y|$ est la plus grande des quatre, et $|x| + |y| \leq r$ si et seulement si les quatre sommes sont inférieures ou égales à r .

L_r est donc l'intersection de quatre demi-plans limités par les droites $x+y = r$, $x-y = r$, $-x+y = r$, $-x-y = r$, qui se coupent en $(r, 0)$, $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$: ses diagonales ont même milieu O , même longueur $2r$ et sont perpendiculaires. L_r est le **carré plein** de sommets $(\pm r, 0)$, $(0, \pm r)$.



2. $L_1 \subset \mathcal{D}$: si $|x| + |y| \leq 1$, alors $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2 \leq 1$. $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$: si $x^2 + y^2 \leq 1$, alors $x^2 \leq 1$ et $y^2 \leq 1$, soit $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. $\mathcal{C} \subset L_2$: $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ donnent $|x| + |y| \leq 2$.
 Aucune réciproque n'est vraie : $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathcal{D}$ mais $|x| + |y| = \sqrt{2} > 1$; $(1, 1) \in \mathcal{C}$ mais $1 + 1 > 1$; $(2, 0) \in L_2$ mais $2 > 1$.

3. a) Si $r \leq 1$: $|x| + |y| \leq r$ entraîne $|x| + |y| \leq 1$, donc $L_r \subset L_1 \subset \mathcal{D}$. Si $r > 1$: $(r, 0) \in L_r$ mais $r^2 > 1$, donc $L_r \not\subset \mathcal{D}$. $L_r \subset \mathcal{D} \iff r \leq 1$.

b) $2(x^2 + y^2) - (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$. Si $r \geq \sqrt{2}$ et $M \in \mathcal{D}$: $(|x| + |y|)^2 \leq 2$, donc $|x| + |y| \leq \sqrt{2} \leq r$: $\mathcal{D} \subset L_r$. Si $r < \sqrt{2}$: $P \in \mathcal{D}$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$) mais $P \notin L_r$ ($\sqrt{2} > r$).

$\mathcal{D} \subset L_r \iff r \geq \sqrt{2}$: le carré $L_{\sqrt{2}}$ (en pointillés) est le plus petit L_r contenant le disque ; il le touche en quatre points, dont P .

- c) Si $r \geq 2$: $\mathcal{C} \subset L_2 \subset L_r$. Si $r < 2$: $(1, 1) \in \mathcal{C}$ et $(1, 1) \notin L_r$. $\mathcal{C} \subset L_r \iff r \geq 2$.

31

Corrigés : réunion et intersection

■ Corrigé de l'exercice 43

1. $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

 $n + 2$ doit être un nombre premier entre 3 et 16 : $n + 2 \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$, d'où $B = \{1, 3, 5, 9, 11\}$.

$$-3 \leq n - 6 \leq 3 \iff 3 \leq n \leq 9 :$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

- 2.
- $A \cap B = \{3, 5, 11\}$
- : les
- n
- tels que
- n
- et
- $n + 2$
- sont premiers (premiers « jumeaux » 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13) ;

$$A \cap C = \{3, 5, 7\} ; B \cap C = \{3, 5, 9\} ; A \cap B \cap C = \{3, 5\} ;$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} ;$$

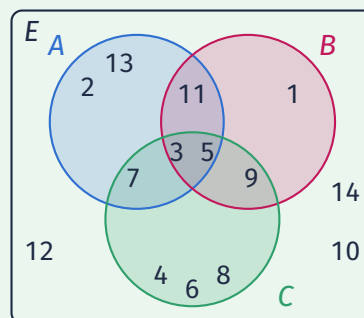
$$B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\} ;$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}.$$

- 3.
- $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$
- , donc
- $A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 11\}$
- ; et
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 5, 11\} \cup \{3, 5, 7\} = \{3, 5, 7, 11\}$
- :
- égalité**
- (distributivité).

 $A \cup (B \cap C) = A \cup \{3, 5, 9\} = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, alors que $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$: ces ensembles sont **différents** (2 est dans le premier, pas dans le second). L'écriture « $A \cup B \cap C$ » n'a donc **pas de sens** : les parenthèses sont indispensables.

4. Diagramme ci-dessus. Aucun des trois :
- $\{10, 12, 14\}$
- . Exactement un :
- $\{1, 2, 4, 6, 8, 13\}$
- (A seul : 2, 13 ; B seul : 1 ; C seul : 4, 6, 8). Exactement deux :
- $\{7, 9, 11\}$
- . Les trois : 3 et 5. Contrôle :
- $3 + 6 + 3 + 2 = 14$
- .



■ Corrigé de l'exercice 44

1. Sur une droite graduée :
- $I \cap J = [1, 4]$
- ;
- $I \cup J =]-3, 7[$
- ;
- $I \cap K =]-3, 3[$
- ;
- $I \cup K =]-\infty, 4]$
- ;
- $J \cap K = [1, 3[$
- ;
- $J \cup K =]-\infty, 7[$
- ;

$$I \cap J \cap K = (I \cap J) \cap K = [1, 3[; (I \cup J) \cap K =]-3, 7[\cap]-\infty, 3[=]-3, 3[; \mathbb{Z} \cap I \cap J = \mathbb{Z} \cap [1, 4] = \{1, 2, 3, 4\}.$$

2. a)
- $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) \leq 0 \iff -3 \leq x \leq 5$
- :
- $S_1 = [-3, 5]$
- .

$$|3x - 1| > 4 \iff (3x - 1 > 4 \text{ ou } 3x - 1 < -4) \iff \left(x > \frac{5}{3} \text{ ou } x < -1\right) : S_2 =]-\infty, -1[\cup \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[.$$

b) « et » correspond à l'intersection ; par distributivité :

$$S_1 \cap S_2 = ([-3, 5] \cap]-\infty, -1[) \cup \left([-3, 5] \cap \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[\right) = [-3, -1[\cup \left]\frac{5}{3}, 5\right[.$$

« ou » correspond à la réunion : si $x \notin S_2$, alors $-1 \leq x \leq \frac{5}{3}$, donc $x \in S_1$. Tout réel est dans S_1 ou dans S_2 : $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$.

$$c) \mathbb{Z} \cap S_1 \cap S_2 = \{-3, -2, 2, 3, 4, 5\} \text{ (-1 et 1 sont exclus : } |3x - 1| \text{ vaut 4 et 2)}.$$

■ Corrigé de l'exercice 45

- a) Par distributivité de $\cup$ sur $\cap$: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$. Puis, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$: $(A \cup (B \cap C)) \cap (B \cup C) = (A \cap (B \cup C)) \cup ((B \cap C) \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$, car $B \cap C \subset B \cup C$, d'où $(B \cap C) \cap (B \cup C) = B \cap C$.

b) x appartient à cet ensemble si et seulement s'il appartient à **au moins deux** des trois ensembles A, B, C (forme de droite) ; de façon équivalente, dans chaque paire d'ensembles, l'un au moins contient x (forme de gauche) : c'est un « vote à la majorité ».
- a) Par distributivité, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$, et $A \cap (B \cup C) = A \iff A \subset B \cup C$ (cours : $X \cap Y = X \iff X \subset Y$).

b) $M \cap A = (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, car $A \cap B \cap C \subset A \cap B$.

$\Rightarrow$: si $M = A \cup B \cup C$, alors $M \cap A = A$, soit $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A$, donc $A \subset B \cup C$ d'après a) ; de même (les rôles de A, B, C sont symétriques) $B \subset C \cup A$ et $C \subset A \cup B$.

$\Leftarrow$: on a toujours $M \subset A \cup B \cup C$. Si les trois inclusions sont vraies, a) donne $A = (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset M$, et de même $B \subset M, C \subset M$; donc $A \cup B \cup C \subset M$, d'où l'égalité.

Exemple : $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 1\} : M = \{1, 2, 3\} = A \cup B \cup C$. (L'égalité signifie qu'aucun élément n'est dans un seul des trois ensembles.)
- Soit $x \in B$. Si $x \in A : x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$. Si $x \notin A : x \in A \cup B = A \cup C$ et $x \notin A$, donc $x \in C$. Ainsi $B \subset C$; les hypothèses étant symétriques en B et C , on a aussi $C \subset B$: $B = C$.

Une seule hypothèse ne suffit pas : si $A = E$, on a $A \cup B = A \cup C = E$ quels que soient B et C ; si $A = \emptyset$, on a $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ quels que soient B et C . Il suffit alors de prendre $B = \emptyset$ et $C = E$ (avec $E \neq \emptyset$).

■ Corrigé de l'exercice 46

- $45 = 3^2 \times 5$ et $75 = 3 \times 5^2$: $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, $D_{75} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$,
 $D_{45} \cap D_{75} = \{1, 3, 5, 15\} = D_{15}$ (15 est le PGCD de 45 et 75) ; $D_{45} \cup D_{75} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75\}$.
 $225 = 3^2 \times 5^2$ et $D_{225} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225\}$: $D_{45} \cup D_{75} \subset D_{225}$, mais 225 manque ; l'inclusion est stricte. Enfin $\text{card}(D_{45} \cup D_{75}) = 8 = 6 + 6 - 4$.
- $\Rightarrow$: $a \in D_a \subset D_b$, donc a divise b . $\Leftarrow$: si a divise b , tout diviseur d de a divise b (si $a = dk$ et $b = al$, alors $b = d(kl)$) : $D_a \subset D_b$.

Par double inclusion, $D_a = D_b \iff (a \mid b \text{ et } b \mid a) \iff a = b$ (pour des entiers naturels non nuls, $a \mid b$ entraîne $a \leq b$).
- $\Leftarrow$: si a divise b , alors $D_a \subset D_b$ et $D_a \cup D_b = D_b$: $c = b$ convient ; de même $c = a$ si b divise a .

$\Rightarrow$: supposons $D_a \cup D_b = D_c$. Comme $c \in D_c$, on a $c \in D_a$ ou $c \in D_b$. Si $c \in D_a$: $c \mid a$, et $a \in D_a \subset D_c$ donne $a \mid c$, donc $c = a$; alors $D_b \subset D_c = D_a$, et b divise a d'après 2. Si $c \in D_b$, on obtient de même que a divise b .

Comme $45 \nmid 75$ et $75 \nmid 45$, $D_{45} \cup D_{75}$ n'est l'ensemble des diviseurs d'**aucun** entier (en particulier pas de 225).

■ Corrigé de l'exercice 47

$$1. I_1 = [-1, 3], I_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right], I_3 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right] : I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_3 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]. J_1 = [1, 2], J_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right], J_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right] : J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right].$$

Comme $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} : -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ et $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n}$, donc $I_{n+1} \subset I_n$; de même $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ et $3 - \frac{1}{n+1} < 3 - \frac{1}{n}$, donc $J_n \subset J_{n+1}$.

$$2. [0, 2] \subset A : \text{si } 0 \leq x \leq 2, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < 0 \leq x \leq 2 < 2 + \frac{1}{n} : x \in I_n.$$

$A \subset [0, 2]$, par contraposition : soit $x \notin [0, 2]$. Si $x < 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < -x$ ($\varepsilon = -x > 0$), c'est-à-dire $x < -\frac{1}{n} : x \notin I_n$. Si $x > 2$, il existe n tel que $\frac{1}{n} < x - 2$, soit $x > 2 + \frac{1}{n} : x \notin I_n$. Dans les deux cas, $x \notin A$. $A = [0, 2]$.

$$3. B \subset]0, 3[: \text{si } x \in J_n, \text{ alors } 0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n} < 3.$$

$]0, 3[\subset B$: soit $0 < x < 3$. Avec $\varepsilon = \min(x, 3 - x) > 0$, il existe n tel que $\frac{1}{n} < x$ et $\frac{1}{n} < 3 - x$, soit $\frac{1}{n} < x < 3 - \frac{1}{n} : x \in J_n$. $B =]0, 3[$ (0 et 3 ne sont dans aucun J_n).

$$4. x \in K_n \iff n < x < n+2 \iff x-2 < n < x : \text{il s'agit de compter les entiers de }]x-2, x[. \text{ Soit } k \text{ l'entier tel que } k \leq x < k+1.$$

Si $x \notin \mathbb{Z}$ ($k < x < k+1$) : k et $k-1$ conviennent ($k-1 < k < x$ et $x-2 < k-1$), mais aucun entier $n \geq k+1$ (car $n > x$) ni $n \leq k-2$ (car $n < x-2$) : x est dans exactement **deux** intervalles, K_{k-1} et K_k .

Si $x \in \mathbb{Z}$: les entiers n tels que $x-2 < n < x$ se réduisent à $x-1$: x est dans le seul K_{x-1} .

Tout réel est donc dans au moins un K_n , et l'ensemble des réels qui sont dans exactement un K_n est $\mathbb{Z}$.

■ Corrigé de l'exercice 48

$$1. A \text{ n'est pas vide : soit } a \in A ; \text{ alors } 0 = a - a \in A. \text{ Pour } a \in A : -a = 0 - a \in A. \text{ Pour } a, b \in A : -b \in A, \text{ donc } a + b = a - (-b) \in A.$$

$$2. 0 \in k\mathbb{Z}, \text{ et } kn - kp = k(n - p) \in k\mathbb{Z} : k\mathbb{Z} \text{ est stable. } \mathbb{N} \text{ ne l'est pas : } 0 - 1 = -1 \notin \mathbb{N}. \{-1, 0, 1\} \text{ non plus : } 1 - (-1) = 2 \text{ n'y est pas.}$$

$$3. \text{ Soient } A, B \text{ stables. } 0 \in A \cap B \text{ (question 1), donc } A \cap B \neq \emptyset ; \text{ si } a, b \in A \cap B, \text{ alors } a - b \in A \text{ et } a - b \in B : A \cap B \text{ est stable.}$$

$$18\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} : 18m = 6(3m) = 9(2m). \quad 6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} \subset 18\mathbb{Z} : \text{si } n = 6p = 9q \text{ (} p, q \in \mathbb{Z} \text{), alors } 3n = 18p \text{ et } 2n = 18q, \text{ d'où } n = 3n - 2n = 18(p - q). \quad 6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}.$$

$$4. a) 9 \in 9\mathbb{Z} \text{ et } 6 \in 6\mathbb{Z}, \text{ mais } 9 - 6 = 3 \text{ n'est multiple ni de 6 ni de 9 : } 6\mathbb{Z} \cup 9\mathbb{Z} \text{ n'est pas stable.}$$

$$b) \Leftarrow : \text{si } A \subset B, \text{ alors } A \cup B = B \text{ est stable ; de même si } B \subset A.$$

$\Rightarrow$, par l'absurde : supposons $A \cup B$ stable, $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$. Il existe $a \in A$ tel que $a \notin B$, et $b \in B$ tel que $b \notin A$. Comme $a, b \in A \cup B$, stable, on a $a + b \in A \cup B$ (question 1). Si $a + b \in A$, alors $b = (a+b) - a \in A$ (A est stable) : contradiction. Si $a + b \in B$, alors $a = (a+b) - b \in B$: contradiction. Donc $A \cup B \text{ stable} \iff (A \subset B \text{ ou } B \subset A)$. On retrouve a) : $6\mathbb{Z} \not\subset 9\mathbb{Z}$ (6) et $9\mathbb{Z} \not\subset 6\mathbb{Z}$ (9).

32

Corrigés : complémentaire

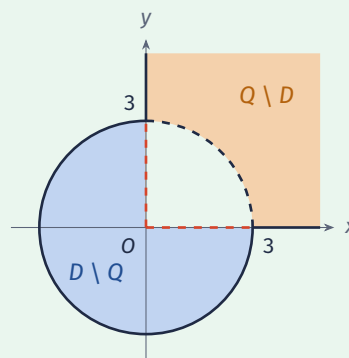
■ Corrigé de l'exercice 49

- Les quatre régions $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $\overline{A \cup B}$ d'un diagramme de Venn se partagent E (chaque élément est dans une seule région), et $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Donc $B \setminus A = (A \Delta B) \setminus (A \setminus B) = \boxed{\{5, 7\}}$, $A \cup B = C_E^{\{8,9,10\}} = \{1, \dots, 7\}$ et $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) = \boxed{\{2, 3, 6\}}$. Enfin $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$: $A = \boxed{\{1, 2, 3, 4, 6\}}$ et $B = \boxed{\{2, 3, 5, 6, 7\}}$ (les trois données se vérifient ✓).
- $\bar{A} = \{5, 7, 8, 9, 10\}$ et $\bar{B} = \{1, 4, 8, 9, 10\}$, d'où $\bar{A} \cap \bar{B} = \{8, 9, 10\} = \overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} = C_E^{\{2,3,6\}} = \overline{A \cap B}$: les deux lois de Morgan sont vérifiées.
- Tout élément de X est dans A ou n'y est pas : $X = (X \cap A) \cup (X \setminus A)$. Les deux morceaux sont imposés, donc X est unique : $X = \boxed{\{2, 3, 6, 8\}}$ (contrôle : $X \setminus A = \{8\}$ et $X \cap A = \{2, 3, 6\}$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 50

- $OM^2 = x^2 + y^2$, donc D est le **disque** de centre O et de rayon 3 (cercle compris) ; Q est le **quart de plan** $x \geq 0$, $y \geq 0$ (demi-axes compris). Le complémentaire traduit la négation, et la négation de « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » est « $x < 0$ ou $y < 0$ ». On écrit seulement les conditions sur $M(x, y)$: $\bar{Q}$: $x < 0$ ou $y < 0$; $D \setminus Q = D \cap \bar{Q}$: $x^2 + y^2 \leq 9$ et ($x < 0$ ou $y < 0$) ; $Q \setminus D$: $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 > 9$; $\overline{D \cup Q} = \bar{D} \cap \bar{Q}$: $x^2 + y^2 > 9$ et ($x < 0$ ou $y < 0$).
- Voir le tableau. Pour un point M , on répond à deux questions, « $M \in D$? » et « $M \in Q$? » ; chacune des quatre combinaisons de réponses correspond à une seule des quatre parties. Elles sont donc deux à deux disjointes et leur réunion est le plan : elles forment une **partition** du plan.
- $D \Delta Q = (D \setminus Q) \cup (Q \setminus D)$: le disque privé du quart de disque $D \cap Q$ (en bleu), plus la partie de Q extérieure au cercle (en orange). Les traits pointillés (quart de cercle et rayons sur les axes, qui sont dans $D \cap Q$) n'en font pas partie.

point	$x^2 + y^2$	$\in D$?	$\in Q$?	partie
$M_1(1, 2)$	5	oui	oui	$D \cap Q$
$M_2(-1, 2)$	5	oui	non	$D \setminus Q$
$M_3(3, 3)$	18	non	oui	$Q \setminus D$
$M_4(2, -2)$	8	oui	non	$D \setminus Q$
$M_5(-3, -3)$	18	non	non	$\overline{D \cup Q}$
$M_6(3, 0)$	9	oui	oui	$D \cap Q$



■ Corrigé de l'exercice 51

- Par Morgan, $\overline{A \setminus B} = A \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Donc $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \setminus B)} = (A \cup B) \cap (A \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup B$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$, en « factorisant » B), soit $\emptyset \cup B = \boxed{B}$.
- Comme $(A \cap B) \setminus A = \emptyset$: $A \Delta (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \boxed{A \setminus B}$.
Comme $A \setminus (A \cup B) = \emptyset$: $A \Delta (A \cup B) = (A \cup B) \cap \bar{A} = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = \boxed{B \setminus A}$.

$$3. (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup C) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) = \emptyset \cup ((A \cap C) \cap \bar{B}) = \boxed{(A \cap C) \setminus B}.$$

4. Comme $A \cup \bar{A} = E : B \cap C = (B \cap C) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$. Or $A \cap B \cap C \subset A \cap B$ et $\bar{A} \cap B \cap C \subset \bar{A} \cap C$, donc $B \cap C \subset (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)$; et si $X \subset Y$, alors $X \cup Y = Y$. D'où l'égalité. En logique, pour trois propositions p, q, r :

$$[(p \text{ et } q) \text{ ou } (\bar{p} \text{ et } r) \text{ ou } (q \text{ et } r)] \iff [(p \text{ et } q) \text{ ou } (\bar{p} \text{ et } r)] \quad (\text{le terme « } q \text{ et } r \text{ » est superflu}).$$

■ Corrigé de l'exercice 52

On note $L = (A \cup B) \Delta C$ et $R = (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$. Une seule table suffit (1 : l'élément appartient, 0 : il n'appartient pas).

A	B	C	A \ B	B \ C	C \ A	U	A Δ B	B Δ C	V	W	A ∪ B	L	A Δ C	R	C ∩ (A Δ B)
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Les colonnes U, V, W sont identiques : $\boxed{U = V = W}$. Elles ne valent 0 que sur les lignes 111 et 000 : W est l'ensemble des éléments qui appartiennent à **au moins une** des trois parties, **mais pas aux trois**.
- a) Avec $E = \{1\}$, $A = C = \{1\}$, $B = \emptyset$: $L = \{1\} \Delta \{1\} = \emptyset$, alors que $R = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$. L'égalité est fautive en général.
b) Les colonnes L et R diffèrent exactement sur les lignes 101 et 011 (en couleur), qui sont exactement les lignes où $C \cap (A \Delta B)$ vaut 1. Donc $L = R$ si et seulement si aucun élément de E ne se trouve dans ces lignes : $\boxed{L = R \iff C \cap (A \Delta B) = \emptyset}$. (On a toujours $L \subset R$.)
- Dans la table à deux parties (lignes 11, 10, 01, 00), $A \setminus B$ vaut 0, 1, 0, 0, $A \Delta B$ vaut 0, 1, 1, 0 et $A \cup B$ vaut 1, 1, 1, 0. Les colonnes $A \setminus B$ et $A \Delta B$ ne diffèrent que sur la ligne 01 ($x \notin A, x \in B$) : elles sont égales si et seulement si $B \setminus A = \emptyset$, c'est-à-dire $\boxed{B \subset A}$. De même, $A \Delta B$ et $A \cup B$ ne diffèrent que sur la ligne 11 : égalité si et seulement si $\boxed{A \cap B = \emptyset}$.

■ Corrigé de l'exercice 53

- a) $A \setminus X$ et B sont deux parties de A , et pour $x \in A$: $x \in A \setminus X \iff x \notin X$. Donc $A \setminus X = B$ signifie : pour tout $x \in A$, $x \in X \iff x \notin B$, soit $X \cap A = A \setminus B = \{1, 5\}$. Comme $X = (X \cap A) \cup (X \cap \bar{A})$, les solutions sont les $X = \{1, 5\} \cup Y$, où Y est une partie quelconque de $\bar{A} = \{2, 3, 7\}$: $\boxed{8 \text{ solutions}}$: $\{1, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
b) $X \setminus A \subset \bar{A}$, alors que $4 \in B$ et $4 \in A$: **aucune solution**.
c) $X \setminus A = X \cap \bar{A}$: l'équation impose $X \cap \bar{A} = \{2, 7\}$ et laisse $X \cap A$ libre : $X = \{2, 7\} \cup Y$ avec $Y \subset A$, soit $2^4 = \boxed{16 \text{ solutions}}$.
- a) *Condition nécessaire*. $A \setminus X \subset A$, donc s'il y a une solution, $B \subset A$.
Réciproquement, supposons $B \subset A$. Comme en 1.a, $A \setminus X = B \iff X \cap A = A \setminus B$. En écrivant $X = (X \cap A) \cup (X \cap \bar{A})$, les solutions sont les parties $\boxed{X = (A \setminus B) \cup Y}$ avec $Y \subset \bar{A}$ (par exemple

$X = A \setminus B$. Deux Y distincts donnent deux X distincts ($Y = X \cap \bar{A}$) et $\bar{A}$ a $n - p$ éléments : il y a 2^{n-p} solutions.

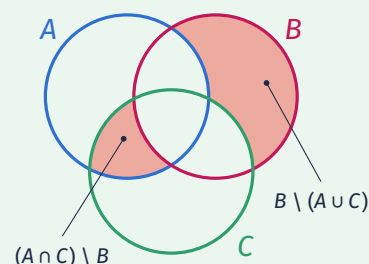
b) $X \setminus A = X \cap \bar{A} \subset \bar{A}$: il faut $B \subset \bar{A}$, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$. Si c'est le cas, $X \setminus A = B \iff X \cap \bar{A} = B$, et les solutions sont les $X = B \cup Y$ avec $Y \subset A$: 2^p solutions.

Contrôle ($n = 7, p = 4$) : $2^3 = 8$ solutions en 1.a ; en 1.b, $A \cap \{4, 6\} \neq \emptyset$; $2^4 = 16$ solutions en 1.c ✓.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $A \Delta B = \{1, 4, 5\}$, $B \Delta C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \Delta C = \{2, 3, 5, 6\}$: $d(A, B) = 3$, $d(B, C) = 5$, $d(A, C) = 4$ (et $4 \leq 3 + 5$).
2. $d(A, B) = 0 \iff A \Delta B = \emptyset \iff A = B$ (cours) ; $B \Delta A = A \Delta B$. Comme $x \notin A \iff x \in \bar{A}$, un élément est dans une seule des parties $\bar{A}, \bar{B}$ si et seulement s'il est dans une seule des parties A, B : $\bar{A} \Delta \bar{B} = A \Delta B$. Enfin tout élément est dans une seule des parties $A, \bar{A}$: $A \Delta \bar{A} = E$ et $d(A, \bar{A}) = \text{card}(E)$.
3. a) Table d'appartenance (à gauche) et diagramme de Venn de M (à droite) :

A	B	C	$A \Delta B$	$B \Delta C$	M	$A \Delta C$	$(A \Delta B) \cup (B \Delta C)$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0



M vaut 1 exactement sur les lignes 101 ($x \in A, x \notin B, x \in C$: $x \in (A \cap C) \setminus B$) et 010 ($x \in B, x \notin A \cup C$) : $M = ((A \cap C) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C))$. La dernière colonne vaut 1 exactement quand $A \Delta C$ ou M vaut 1, et ces deux colonnes ne valent jamais 1 en même temps : c'est la réunion des parties disjointes $A \Delta C$ et M .

b) On compte de deux façons les éléments de $(A \Delta B) \cup (B \Delta C)$: par la formule du cours, $d(A, B) + d(B, C) - \text{card}(M)$; par a) (réunion disjointe), $d(A, C) + \text{card}(M)$. D'où

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C) + 2 \text{card}(M).$$

c) Comme $\text{card}(M) \geq 0$, $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. Il y a égalité si et seulement si $M = \emptyset$, c'est-à-dire $(A \cap C) \setminus B = \emptyset$ et $B \setminus (A \cup C) = \emptyset$: $A \cap C \subset B \subset A \cup C$ (« B est entre A et C »).

4. Ici $A \cap C = \{3\}$ et $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$: d'après 3.c, $B = \{3\} \cup Y$ avec $Y \subset \{1, 2, 4\}$, soit 8 parties (par exemple $B = \{3\}$: $d(A, B) + d(B, C) = 2 + 1 = 3 = d(A, C)$ ✓).

33

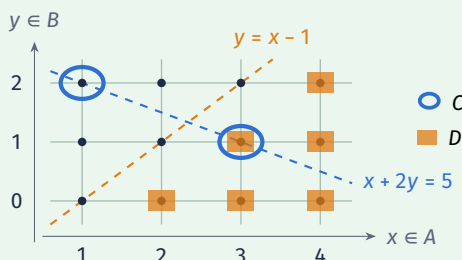
Corrigés : parties et produits

■ Corrigé de l'exercice 55

1. E a 4 éléments, donc $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^4 = 16$. Parties à trois éléments : $\{3, 5, 8\}, \{1, 5, 8\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 3, 5\}$. Chacune est E privé d'un élément, c'est-à-dire le complémentaire d'un singleton ; réciproquement, le complémentaire d'un singleton a trois éléments. En associant à chaque partie son complémentaire, on obtient autant de parties à trois éléments que de singletons : 4.
2. a) X et $\bar{X}$ sont disjointes et leur réunion est E : $s(X) + s(\bar{X}) = s(E) = 1 + 3 + 5 + 8 = 17$.
 b) Somme 8 : un seul élément, $\{8\}$; deux éléments, 3 + 5 (les autres sommes 4, 6, 9, 11, 13 ne conviennent pas) ; trois éléments, au moins $1 + 3 + 5 = 9$. Donc $\{8\}, \{3, 5\}$. Ensuite $s(X) = 9 \iff s(\bar{X}) = 8 \iff \bar{X} \in \{\{8\}, \{3, 5\}\}$: $\{1, 3, 5\}, \{1, 8\}$.
 c) $s(X) = s(\bar{X})$ donnerait $2s(X) = 17$: impossible, 17 est impair. **Non**.
3. Si X contient y et si $x < y$ ($x \in E$), alors $x \notin \bar{X}$ (sinon $y < x$ serait faux), donc $x \in X$: X est formée des plus petits éléments de E . Pour $X = \emptyset$ et $X = E$, la condition est vraie (un « pour tout » portant sur l'ensemble vide est vrai). Solutions : $\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, E$.

■ Corrigé de l'exercice 56

1. a) Deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes le sont : $x - 1 = y$ et $y + 2 = 2x$. En reportant, $x + 1 = 2x$: $(x, y) = (1, 0)$ (contrôle : $(0, 2) = (0, 2)$ ✓).
 b) Si $x + y = 5$ et $xy = 6$, alors $x^2 - 5x + 6 = x^2 - (x + y)x + xy = 0$, donc $x \in \{2, 3\}$ et $y = 5 - x$. Réciproquement, $(2, 3)$ et $(3, 2)$ conviennent : **deux couples**, mais **une seule paire** $\{2, 3\}$: dans un couple, l'ordre compte.
2. a) $\text{card}(A \times B) = 4 \times 3 = 12$ (quadrillage ci-dessous, A en abscisse et B en ordonnée).
 b) C : $x = 5 - 2y$ donne $5 \notin A$ pour $y = 0$, 3 pour $y = 1$, 1 pour $y = 2$: $C = \{(3, 1), (1, 2)\}$. D : entiers, $y < x - 1 \iff y \leq x - 2$: $D = \{(2, 0), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$.
 c) $C \cap D = \{(3, 1)\}$, $\text{card}(C \cup D) = 2 + 6 - 1 = 7$, et le complémentaire de D est l'ensemble des couples tels que $y \geq x - 1$: $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\}$ ($12 - 6 = 6$ couples).



■ Corrigé de l'exercice 57

1. Soit $(x, y) \in E^2$. On traduit avec « et », « ou », « non » :

$$(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \iff (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } y \notin C) \iff x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } y \in C,$$

car « $y \in C$ et $y \notin C$ » est impossible. C'est dire que $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$.

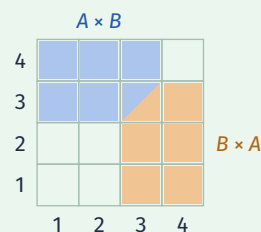
2. $(x, y) \in (A \times B) \Delta (A \times C)$ signifie qu'une seule des propositions « $x \in A$ et $y \in B$ », « $x \in A$ et $y \in C$ » est vraie. Si $x \notin A$, elles sont toutes deux fausses ; si $x \in A$, cela signifie qu'une seule des propositions $y \in B$, $y \in C$ est vraie. Donc $(x, y) \in (A \times B) \Delta (A \times C) \iff (x \in A \text{ et } y \in B \Delta C) \iff (x, y) \in A \times (B \Delta C)$.

3. a) Si $(x, y) \in A \times B$, alors $x \in A \subset A \cup B$ et $y \in B \subset A \cup B$, donc $(x, y) \in (A \cup B)^2$; de même pour $B \times A$.

b) Si $A = B$, les deux membres valent A^2 . Réciproquement, supposons l'égalité et, par l'absurde, $A \neq B$: il existe par exemple $a \in A \setminus B$ (le cas $a \in B \setminus A$ est symétrique). Alors $(a, a) \in (A \cup B)^2$, donc $(a, a) \in A \times B$ ou $(a, a) \in B \times A$; dans les deux cas $a \in B$: contradiction. Donc

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B)^2 \iff A = B.$$

4. Sur le quadrillage, $A \times B$ (en bleu) et $B \times A$ (en orange) ont 6 couples chacun, et $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = \{(3, 3)\}$ (cours). D'où $\text{card}((A \times B) \cup (B \times A)) = 6 + 6 - 1 = 11$, alors que $\text{card}((A \cup B)^2) = 4^2 = 16$: il manque $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$.



■ Corrigé de l'exercice 58

1. $A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $C = \{2, 6, 10\}$, $D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Un entier de E est impair, ou pair multiple de 4, ou pair non multiple de 4, et d'une seule de ces façons : A, B, C sont non vides, deux à deux disjointes, de réunion $E : \{A, B, C\}$ est une partition de E . En revanche $4 \in A \cap D : \{A, B, D\}$ n'est pas une partition (on a $A \subset D$).
2. Chaque I_n est non vide ($n \in I_n$). Soit $x \in \mathbb{R} : x \in I_n \iff n \leq x < n+1 \iff n = E(x)$, par définition de la partie entière. Ainsi x appartient à $I_{E(x)}$ (la réunion des I_n est $\mathbb{R}$), et à aucun autre : si $x \in I_n \cap I_m$, alors $n = E(x) = m$. Les I_n sont deux à deux disjointes : ils forment une partition de $\mathbb{R}$.
3. a) $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}, \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$: 7 partitions.
- b) Soit $\{X, Y\}$ une partition de E . Comme $X \cap Y = \emptyset$, $Y \subset \bar{X}$; comme $X \cup Y = E$, $\bar{X} \subset Y$. Donc $Y = \bar{X}$, avec $X \neq \emptyset$ et $\bar{X} \neq \emptyset$, soit $X \neq E$. Réciproquement, une telle partie X donne la partition $\{X, \bar{X}\}$. Cette partition s'obtient à partir de X et à partir de $\bar{X}$ (distinctes), et d'aucune autre partie. Les $2^n - 2$ parties autres que $\emptyset$ et E donnent donc $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$ partitions ($n = 4 : 7$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 59

1. $\text{card}(A \times B) = nm$, donc $\text{card}(\mathcal{P}(A \times B)) = 2^{nm}$; $\text{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) = 2^n \times 2^m = 2^{n+m}$. Comme $2^a = 2^b \iff a = b$: égalité $\iff nm = n + m \iff (n - 1)(m - 1) = 1$. Les entiers $n - 1$ et $m - 1$ sont supérieurs ou égaux à -1 et de produit 1 : ils valent tous deux 1 ou tous deux -1 : $(n, m) \in \{(0, 0), (2, 2)\}$.
2. Soit $x \in X$. Comme $Y \neq \emptyset$, on choisit $y \in Y$: $(x, y) \in X \times Y = X' \times Y'$, donc $x \in X'$. Ainsi $X \subset X'$, et de même $X' \subset X$ (avec $Y' \neq \emptyset$) : $X = X'$. On montre de même que $Y = Y'$. Si $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, alors $X \times Y = \emptyset$.
3. Les parties rectangulaires sont $\emptyset$ (obtenue dès que X ou Y est vide) et les $X \times Y$ avec $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$; celles-ci sont non vides et, d'après 2, deux couples $(X, Y) \neq (X', Y')$ donnent deux parties distinctes. Il y a $2^n - 1$ choix de X et $2^m - 1$ choix de Y , d'où $(2^n - 1)(2^m - 1) + 1$ parties rectangulaires.
4. $A \times B$ a 4 éléments, donc $2^4 = 16$ parties, dont $3 \times 3 + 1 = 10$ rectangulaires. Une partie rectangulaire a $\text{card}(X) \times \text{card}(Y) \in \{0, 1, 2, 4\}$ éléments : les 4 parties à trois éléments ne le sont pas. Celles à deux éléments sont $\{1\} \times \{1, 2\}$, $\{2\} \times \{1, 2\}$, $\{1, 2\} \times \{1\}$, $\{1, 2\} \times \{2\}$. Les $16 - 10 = 6$ parties non rectangulaires sont donc les « diagonales » $\{(1, 1), (2, 2)\}$, $\{(1, 2), (2, 1)\}$ et les quatre parties à trois éléments ($A \times B$ privé d'un couple).

■ Corrigé de l'exercice 60

1. Soit $(x, y) \in P$. Alors $x \in P_1$ (avec ce y) et $y \in P_2$ (avec ce x) : $(x, y) \in P_1 \times P_2$.
2. On montre (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).
 - (i) $\Rightarrow$ (iii) : si (a, b) et (a', b') sont dans $A \times B$, alors $a \in A$ et $b' \in B$, donc $(a, b') \in A \times B = P$.
 - (iii) $\Rightarrow$ (ii) : d'après 1, $P \subset P_1 \times P_2$. Soit $(x, y) \in P_1 \times P_2$: il existe y_0 tel que $(x, y_0) \in P$ et x_0 tel que $(x_0, y) \in P$. Par (iii), appliquée à (x, y_0) et (x_0, y) , on a $(x, y) \in P$. Donc $P_1 \times P_2 \subset P$, et $P = P_1 \times P_2$.
 - (ii) $\Rightarrow$ (i) : on prend $A = P_1$ et $B = P_2$.
3. On réfute (iii) par un contre-exemple, ou l'on écrit la partie comme un produit.
 - a) $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont dans la partie, mais pas $(1, -1)$ (produit -1) : **ce n'est pas un produit**.
 - b) $(1, 1)$ et $(0, 0)$ sont dans la partie ($1 \geq 1$, $0 \geq 0$), mais pas $(1, 0)$ ($0 \geq 1$ est faux) : **pas un produit**.
 - c) $(1, 5)$ et $(0, -2)$ sont dans la partie, mais pas $(0, 5)$ ($(-1) \times 7 \neq 0$) : **pas un produit** (réunion de deux droites).
 - d) $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 2$, et $|y| \geq 1 \iff (y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1)$: c'est le produit $[1, 2] \times (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$.

34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. a) Si $1 \in X$, alors $X \Delta \{1\} = X \setminus \{1\}$ a un élément de moins ; si $1 \notin X$, alors $X \Delta \{1\} = X \cup \{1\}$ a un élément de plus. Dans les deux cas, une seule des deux parties contient 1 (elles sont distinctes) et leurs cardinaux diffèrent de 1 (parités différentes).

b) Par associativité, $(X \Delta \{1\}) \Delta \{1\} = X \Delta (\{1\} \Delta \{1\}) = X \Delta \emptyset = X$: la partie associée à $X \Delta \{1\}$ est X . Les paires $\{X, X \Delta \{1\}\}$ forment donc une partition de $\mathcal{P}(E_n)$, et chacune contient une seule partie de cardinal pair. Il y a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair : 2^{n-1} de chaque sorte.

2. a) $E_0 = \emptyset$ n'a que la partie $\emptyset$, de somme 0 : $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$. Les parties de $\{1, 2, 3\}$ ont pour sommes : $\emptyset \rightarrow 0, \{1\} \rightarrow 1, \{2\} \rightarrow 2, \{3\} \rightarrow 3, \{1, 2\} \rightarrow 3, \{1, 3\} \rightarrow 4, \{2, 3\} \rightarrow 5, \{1, 2, 3\} \rightarrow 6$, de restes 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 0 : $a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = 2$.

b) X et T sont disjointes, donc $s(Z) = s(X) + s(T)$. Comme $3k+j$ et j ont le même reste par 3, les 8 parties T ont les restes des parties de $\{1, 2, 3\}$: 4 de reste 0, 2 de reste 1, 2 de reste 2. Le reste de $s(Z)$ est celui de la somme des restes de $s(X)$ et $s(T)$: il vaut 0 pour les couples de restes (0, 0), (1, 2), (2, 1), d'où $a_{k+1} = 4a_k + 2b_k + 2c_k$; 1 pour (1, 0), (0, 1), (2, 2), d'où b_{k+1} ; 2 pour (2, 0), (0, 2), (1, 1), d'où c_{k+1} .

c) $P(k)$: « $a_k = \frac{8^k + 2^{k+1}}{3}$ et $b_k = c_k = \frac{8^k - 2^k}{3}$ ». Initialisation. $\frac{1+2}{3} = 1 = a_0$ et $\frac{1-1}{3} = 0 = b_0 = c_0$.

Hérédité. Supposons que $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 0$ et montrons $P(k+1)$. Comme $b_k = c_k$:

$$a_{k+1} = 4a_k + 4b_k = \frac{4}{3} (2 \times 8^k + 2^k) = \frac{8^{k+1} + 2^{k+2}}{3},$$

$$b_{k+1} = c_{k+1} = 2a_k + 6b_k = \frac{2 \times 8^k + 2^{k+2} + 6 \times 8^k - 6 \times 2^k}{3} = \frac{8^{k+1} - 2^{k+1}}{3}.$$

Conclusion. $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ (contrôle : $a_k + b_k + c_k = 8^k = 2^{3k}$ ✓).

d) $k = 3$: $\frac{512+16}{3} = 176$ parties ; $k = 4$: $\frac{4096+32}{3} = 1376$ parties.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. $T_\emptyset = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, $T_{\{1\}} = A_1 \cap \overline{A_2}$, $T_{\{2\}} = \overline{A_1} \cap A_2$, $T_{\{1,2\}} = A_1 \cap A_2$: les quatre régions du diagramme de Venn.

2. a) $x \in T_I \iff \forall i, (x \in A_i \iff i \in I) \iff \forall i, (i \in I(x) \iff i \in I) \iff I = I(x)$.

b) Si $x \in T_I \cap T_J$, alors $I = I(x) = J$: deux atomes associés à $I \neq J$ sont disjoints. Tout $x \in E$ est dans l'atome $T_{I(x)}$. Les atomes non vides sont donc deux à deux disjoints, de réunion E : ils forment une partition de E . Il y a au plus autant d'atomes que de parties de $\{1, \dots, n\}$: 2^n .

3. a) Si $x \in A_i$, alors $x \in T_{I(x)}$ avec $i \in I(x)$; si $x \in T_I$ avec $i \in I$, alors $x \in A_i$. Donc A_i est la réunion des atomes T_I tels que $i \in I$.

b) Soit X la réunion des atomes d'une famille $\mathcal{A}$, et Y celle d'une famille $\mathcal{B}$. Comme les atomes forment une partition, $x \in X$ si et seulement si l'atome qui contient x est dans $\mathcal{A}$. Donc $\bar{X}$ est la réunion des atomes qui ne sont pas dans $\mathcal{A}$, $X \cup Y$ celle des atomes de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$, $X \cap Y$ celle des atomes de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$.

c) $R(k)$: « toute partie obtenue avec au plus k opérations est constructible ». *Initialisation.* Sans opération, on a les A_i , constructibles d'après a). *Hérédité.* Supposons $R(k)$ vraie pour un entier $k \geq 0$ et montrons $R(k+1)$: une partie obtenue avec au plus $k+1$ opérations est l'une des A_i , ou $\bar{X}$, $X \cup Y$ ou $X \cap Y$, où X, Y s'obtiennent avec au plus k opérations ; elle est constructible d'après b). *Conclusion.* $R(k)$ est vraie pour tout k . Une partie constructible est déterminée par une famille d'atomes, et l'ensemble des (au plus 2^n) atomes a au plus 2^{2^n} parties : au plus 2^{2^n} parties constructibles.

4. a) $T_{\{1,2\}} = \{1\}$, $T_{\{1\}} = \{2\}$, $T_{\{2\}} = \{3\}$, $T_{\emptyset} = \{4\}$: les atomes sont les singletons. Toute partie de E est une réunion de singletons, donc d'atomes, et chaque atome s'obtient (question 1) : les 16 parties s'obtiennent. Par exemple $\{4\} = \overline{A_1 \cup A_2}$, $\{2, 3\} = A_1 \Delta A_2$ et $\{1, 4\} = \overline{A_1 \Delta A_2}$.

b) Il suffit que les huit éléments aient des parties $I(x)$ distinctes (les atomes sont alors des singletons) : $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 2, 5, 6\}$, $A_3 = \{1, 3, 5, 7\}$ conviennent, car $I(1), \dots, I(8)$ sont $\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$.

Remarque. c'est la version ensembliste d'un fait de logique : toute proposition construite à partir de $p_1, \dots, p_n$ avec « et », « ou », « non » équivaut à une disjonction (« ou ») de conjonctions, une par ligne vraie de sa table de vérité ; chaque ligne correspond à un atome.

■ Corrigé de l'exercice 63

- Négation : $\exists X \in \mathcal{F}, \exists Y \in \mathcal{F}, X \cap Y = \emptyset$. Si $\emptyset \in \mathcal{F}$, alors $X = Y = \emptyset$ donne $X \cap Y = \emptyset$: $\mathcal{F}$ n'est pas intersectante. De même, $X \cap \bar{X} = \emptyset$ interdit d'avoir X et $\bar{X}$ dans $\mathcal{F}$.
- On a $X \neq \bar{X}$ (sinon $E = X \cup \bar{X} = X \cap \bar{X} = \emptyset$, alors que $n \geq 1$) et $\bar{\bar{X}} = X$: chaque partie appartient à une seule paire $\{X, \bar{X}\}$. Ces paires forment une partition de $\mathcal{P}(E)$ en $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ paires, et $\mathcal{F}$ contient au plus une partie de chaque paire : $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2^{n-1}$.
- a) Deux parties de $\mathcal{F}_1$ contiennent 1, donc se rencontrent. Ses éléments sont les $\{1\} \cup Z$ avec $Z \subset \{2, \dots, n\}$: il y en a 2^{n-1} . b) Si $X, Y \in \mathcal{M}$ étaient disjointes, on aurait $\text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y) \geq 2p + 2 > n$, alors que $X \cup Y \subset E$: absurde. Comme $\text{card}(X) + \text{card}(\bar{X}) = 2p + 1$, une seule des parties $X, \bar{X}$ a au moins $p+1$ éléments : $\mathcal{M}$ contient exactement une partie de chaque paire, soit 2^{n-1} éléments.
- a) $\mathcal{F}$ contient au plus une partie de chaque paire (question 1). Si une paire $\{Y, \bar{Y}\}$ n'en contenait aucune, $\mathcal{F}$ aurait au plus $2^{n-1} - 1$ éléments : donc chaque paire en contient exactement une.
b) Par l'absurde, supposons $X \in \mathcal{F}$, $X \subset Y$ et $Y \notin \mathcal{F}$. D'après a), $\bar{Y} \in \mathcal{F}$. Or $X \subset Y$ donne $X \cap \bar{Y} = \emptyset$: contradiction, car $\mathcal{F}$ est intersectante. Donc $Y \in \mathcal{F}$.
- Les paires sont $\{\emptyset, E\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$, et $E \in \mathcal{F}$ (car $\emptyset \notin \mathcal{F}$). Si $\mathcal{F}$ contient un singleton $\{i\}$, toute partie de $\mathcal{F}$ rencontre $\{i\}$, donc contient i : $\mathcal{F}$ est incluse dans $\{X \mid i \in X\}$, qui a 4 éléments, et lui est égale. Sinon, d'après 4.a, $\mathcal{F}$ contient $\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}$ et E : c'est $\mathcal{M}$ (3.b avec $p = 1$). Il y a donc 4 familles : les parties contenant 1, celles contenant 2, celles contenant 3, et $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. a) *Initialisation.* Si $0 \in A$, alors 0 serait le plus petit élément de A (tout entier naturel est ≥ 0) : donc $0 \notin A$, et $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$. Si $n+1 \in A$, tout élément de A , n'étant pas l'un des entiers $0, \dots, n$, serait $\geq n+1$: $n+1$ serait le plus petit élément de A , ce qui est exclu. Donc $n+1 \notin A$ et $P(n+1)$ est vraie. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout n , $P(n)$ donne $n \notin A$: $A = \emptyset$. Par contraposée, **toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.**

c) **Non** : si m était le plus petit élément de $]0, 1]$, alors $\frac{m}{2} \in]0, 1]$ et $\frac{m}{2} < m$: absurde. Le principe est propre à $\mathbb{N}$.

2. a) $m^3 = 4z^3 - 2y^3 = 2(2z^3 - y^3)$ est pair. Si m était impair, m^3 serait impair (produit d'impairs) : donc m est pair, $m = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Alors $8a^3 + 2y^3 = 4z^3$, soit $y^3 = 2(z^3 - 2a^3)$: y^3 est pair, donc y est pair, $y = 2b$. Alors $8a^3 + 16b^3 = 4z^3$, soit $z^3 = 2(a^3 + 2b^3)$: z est pair.
- b) Avec $z = 2c$: $8a^3 + 16b^3 = 32c^3$, soit $a^3 + 2b^3 = 4c^3$, avec $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Donc $a \in A$, alors que $a = \frac{m}{2} < m$: cela contredit la définition de m . Ainsi $A = \emptyset$: **l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ n'a aucune solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$** (une solution donnerait une suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels non nuls, d'où le nom de *descente infinie*).

■ Corrigé de l'exercice 65

1. On applique la définition ($X_n + 1$ s'obtient en ajoutant 1 à chaque élément de X_n) :

$$\begin{aligned} X_1 &= \{0\} \Delta \{1\} = \{0, 1\}, & X_2 &= \{0, 1\} \Delta \{1, 2\} = \{0, 2\}, & X_3 &= \{0, 2\} \Delta \{1, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \\ X_4 &= \{0, 1, 2, 3\} \Delta \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 4\}, & X_5 &= \{0, 4\} \Delta \{1, 5\} = \{0, 1, 4, 5\}, \\ X_6 &= \{0, 1, 4, 5\} \Delta \{1, 2, 5, 6\} = \{0, 2, 4, 6\}, & X_7 &= \{0, 2, 4, 6\} \Delta \{1, 3, 5, 7\} = \{0, 1, \dots, 7\}. \end{aligned}$$

2. $P(n)$: « $X_n \subset \{0, \dots, n\}$, $0 \in X_n$ et $n \in X_n$ ». *Initialisation.* $X_0 = \{0\}$. *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$. On a $X_n + 1 \subset \{1, \dots, n+1\}$, donc $X_{n+1} \subset X_n \cup (X_n + 1) \subset \{0, \dots, n+1\}$. Ensuite $0 \in X_n$ et $0 \notin X_n + 1$ (car $-1 \notin X_n$) : $0 \in X_{n+1}$. Enfin $n+1 \in X_n + 1$ (car $n \in X_n$) et $n+1 \notin X_n$: $n+1 \in X_{n+1}$. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a) $y \in (X \Delta Y) + a \iff y - a \in X \Delta Y \iff y - a$ est dans une seule des parties $X, Y \iff y$ est dans une seule des parties $X + a, Y + a \iff y \in (X + a) \Delta (Y + a)$. Et $y \in (X + 1) + 1 \iff y - 1 \in X + 1 \iff y - 2 \in X \iff y \in X + 2$.

b) Par a), $X_{n+1} + 1 = (X_n + 1) \Delta (X_n + 2)$. Par associativité et commutativité de Δ , et comme $Z \Delta Z = \emptyset$:

$$X_{n+2} = [X_n \Delta (X_n + 1)] \Delta [(X_n + 1) \Delta (X_n + 2)] = X_n \Delta \emptyset \Delta (X_n + 2) = X_n \Delta (X_n + 2).$$

4. a) $y \in 2X \iff (y \text{ pair et } \frac{y}{2} \in X)$. Donc $y \in 2(X \Delta Y) \iff y \text{ pair et } \frac{y}{2}$ est dans une seule des parties $X, Y \iff y$ est dans une seule des parties $2X, 2Y$ (un impair n'est dans aucune). Et $y \in 2X + 2 \iff (y - 2 \text{ pair et } \frac{y-2}{2} \in X) \iff (y \text{ pair et } \frac{y}{2} \in X + 1) \iff y \in 2(X + 1)$.

b) $Q(n)$: « $X_{2n} = 2X_n$ ». *Initialisation.* $X_0 = \{0\} = 2X_0$. *Hérédité.* Supposons que $Q(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $Q(n+1)$: par 3.b puis a),

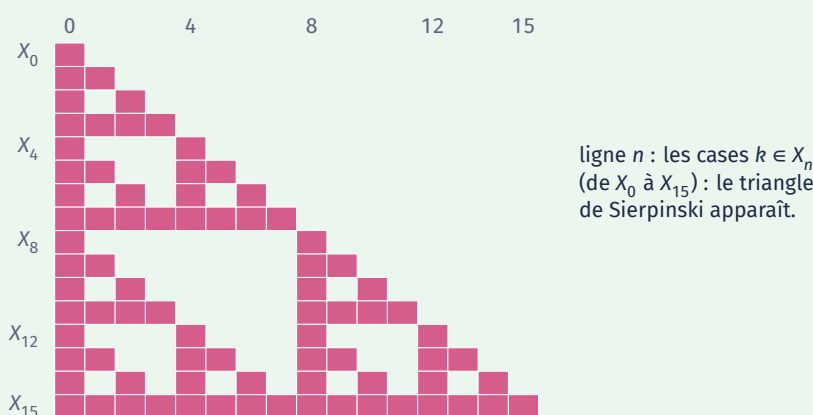
$$X_{2n+2} = X_{2n} \Delta (X_{2n} + 2) = 2X_n \Delta 2(X_n + 1) = 2(X_n \Delta (X_n + 1)) = 2X_{n+1}.$$

Conclusion. $X_{2n} = 2X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $X_{2n+1} = X_{2n} \Delta (X_{2n} + 1) = 2X_n \Delta (2X_n + 1)$. Les éléments de $2X_n$ sont pairs, ceux de $2X_n + 1$ impairs : ces parties sont disjointes, et leur différence symétrique est leur réunion.

5. Les éléments $2x$ ($x \in X_n$) sont deux à deux distincts, de même que les $2x + 1$: $\text{card}(2X_n) = \text{card}(2X_n + 1) = u_n$. D'où $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = 2u_n$ (réunion disjointe). Par récurrence sur m : $u_{2^0} = u_1 = 2$ et $u_{2^{m+1}} = u_{2^m}$, donc $u_{2^m} = 2$; $u_{2^0-1} = u_0 = 1$ et $2^{m+1} - 1 = 2(2^m - 1) + 1$ donne $u_{2^{m+1}-1} = 2u_{2^m-1}$, donc $u_{2^m-1} = 2^m$. Enfin

$$u_{2026} = u_{1013} = 2u_{506} = 2u_{253} = 4u_{126} = 4u_{63} = 4 \times 2^6 = \boxed{256}.$$



■ Corrigé de l'exercice 66

- Négation : $\exists x \in A, \exists y \in A, x + y \in A$. $\{1, 4, 7\}$: les sommes 2, 5, 8, 8, 11, 14 ne sont pas dans la partie : **sans somme**. $\{3, 4, 6\}$: $3 + 3 = 6$: **non**. $\{2, 3, 7\}$: 4, 5, 9, 6, 10, 14 : **sans somme**. La somme de deux impairs est paire : les n impairs $1, 3, \dots, 2n - 1$ forment une partie sans somme. Si $x, y \geq n + 1$, alors $x + y \geq 2n + 2 > 2n$: $\{n + 1, \dots, 2n\}$, à n éléments, est sans somme.
- a) $b \in B \iff m - b \in A'$. Les éléments de A' sont compris entre 1 et $m - 1$, donc $1 \leq m - b \leq m - 1$, soit $1 \leq b \leq m - 1$. Les éléments de B sont les $m - a$ ($a \in A'$), deux à deux distincts : $\text{card}(B) = \text{card}(A') = \text{card}(A) - 1$.
b) Par l'absurde, si $b \in A' \cap B$, alors $b \in A, m - b \in A$ et $b + (m - b) = m \in A$: contradiction, A est sans somme.
c) A' et B sont deux parties disjointes de $\{1, \dots, m - 1\}$: $\text{card}(A') + \text{card}(B) \leq m - 1$, soit $2 \text{card}(A) - 2 \leq m - 1 \leq 2n - 1$. Donc $\text{card}(A) \leq n + \frac{1}{2}$, et, $\text{card}(A)$ étant entier, $\boxed{\text{card}(A) \leq n}$. Avec la question 1, le plus grand cardinal possible est $\boxed{n}$.
- a) $\boxed{\{1, 4\}}$ et $\boxed{\{2, 3\}}$: sommes 2, 5, 8 d'une part, 4, 5, 6 d'autre part : aucune n'est dans la partie.
b) Soit $\{A_1, A_2\}$ une telle partition, avec $1 \in A_1$. Comme $1 + 1 = 2, 2 \notin A_1$, donc $2 \in A_2$. Comme $2 + 2 = 4, 4 \notin A_2$, donc $4 \in A_1$. Si $3 \in A_1$, alors $1 + 3 = 4 \in A_1$: impossible ; donc $3 \in A_2$. Ainsi $A_1 = \{1, 4\}$ et $A_2 = \{2, 3\}$: **la partition est unique**.
c) Par l'absurde, soit une telle partition de $\{1, \dots, 5\}$, avec $1 \in A_1$. Le raisonnement de b) (qui n'utilise que les entiers 1 à 4) donne $1, 4 \in A_1$ et $2, 3 \in A_2$. Alors $5 = 1 + 4$ interdit $5 \in A_1$, et $5 = 2 + 3$ interdit $5 \in A_2$: contradiction. **Aucune partition ne convient.**

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Nombres et intervalles

- ① $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{D}, c \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{N}, e \in \mathbb{R}$. $a = -11, b = 0,45, d = \sqrt{196} = 14$; $c = 0,2666 \dots$ n'est pas décimal ; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- ② $I \cap J =]-2; 5]$; $I \cup J =]-8; +\infty[$. Dessine I et J sur une droite graduée.
- ③ (a) $]1; 7[$; (b) $a = -1, r = 4$.
(a) $-3 < x - 4 < 3$.
(b) Centre et rayon de $[-5; 3]$.
- ④ 1, 3, 7, 9, 21, 63 ; premiers : 3 et 7 ; multiples de 3 : 3, 9, 21, 63. $63 = 3^2 \times 7$; 1 n'est pas premier.

Bloc 2 · Équations et inéquations

- ⑤ $S = \{-1; \frac{3}{2}\}$;
 $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$.
 $\Delta = 25, x = \frac{1 \pm 5}{4}$;
 $2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$.
- ⑥ $S =]-4; 1]$.
 $2x > -8 \iff x > -4$;
 $-3x \geq -3 \iff x \leq 1$
(diviser par -3 renverse l'ordre).
- ⑦ $S = [-3; 4]$.
 $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) \leq 0$: entre les racines.
- ⑧ (a) $S = \{2\}$; (b) $S = \emptyset$. Pour $x \neq 1$, le quotient vaut $x + 1$; en (b), $x = 1$ est interdit.

Bloc 3 · Logique (chapitre 1)

- ⑨ (a) ou ; (b) et ; (c) et. Un produit est nul si l'un des facteurs l'est ; une somme de carrés, si chaque carré l'est ;
 $|x| \leq 4 \iff -4 \leq x \leq 4$.
- ⑩ « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 4$ et $x \leq 2$ », vraie. $x = -3 : 9 > 4$ et $-3 \leq 2$. Donc P est fausse.
- ⑪ « Si $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$, alors $x = y$ ». En développant : $y - x = x - y$, d'où $x = y$.
- ⑫ Vrai pour $n = 0 : 3^0 = 1 \geq 1$.
Si $3^n \geq 2n + 1$, alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 6n + 3 \geq 2(n + 1) + 1$.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 4 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 37**, p. 31 et **exercice 43**, p. 32. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 10), méthodes et pièges compris. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 31 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 10 en lecture rapide), puis les sections 11 à 13. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Nombres et intervalles

Relis : les sections 1, 4 et 8 du cours.
Fais : **exercice 2**, p. 23, **exercice 5**, p. 24, **exercice 32**, p. 29 et **exercice 46**, p. 33.

Bloc 2 · Équations et inéquations

Relis : les sections 1 et 8 du cours.
Fais : **exercice 1**, p. 23, **exercice 14**, p. 25, **exercice 31**, p. 29 et **exercice 44**, p. 32.

Bloc 3 · Logique (chapitre 1)

Relis : les sections 2, 5, 10 et 13 du cours.
Fais : **exercice 10**, p. 25, **exercice 16**, p. 26, **exercice 38**, p. 31 et **exercice 50**, p. 34.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Décrire un ensemble	31 à 36	/ 6	
Thème B · Inclusion et égalité	37 à 42	/ 6	
Thème C · Réunion et intersection	43 à 48	/ 6	
Thème D · Complémentaire et différence	49 à 54	/ 6	
Thème E · Parties et produit cartésien	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Les applications

Maths Olympiad