

Chapitre 1

Notions de logique

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

$$\overline{P \Rightarrow Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$$

$$\overline{(\forall x, P(x))} \iff (\exists x, \overline{P(x)})$$

Défi de concours

 $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est-il un nombre rationnel ?

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

table de vérité

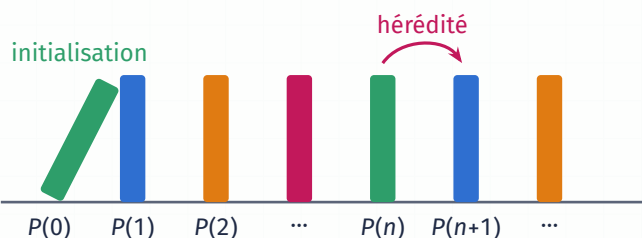


pour tout



il existe

$$P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$



Chaque domino fait tomber le suivant : c'est la récurrence

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	19 Niveau 4 · Concours	27
1 Propositions et valeurs de vérité	5	20 Propositions et connecteurs	29
2 Les connecteurs logiques	6	21 Quantificateurs et négations	31
3 Les lois logiques	7	22 Contraposée et absurde	32
4 Les quantificateurs	8	23 Cas par cas et équivalences	34
5 Nier une proposition	10	24 Raisonnement par récurrence	35
6 Équivalences successives	11	25 Défis de concours	37
7 La disjonction des cas	12	26 Corrigés du niveau 1	39
8 Le raisonnement par contraposée	13	27 Corrigés du niveau 2	41
9 Le raisonnement par l'absurde	14	28 Corrigés du niveau 3	44
10 Le contre-exemple	15	29 Corrigés du niveau 4	46
11 Le raisonnement par récurrence	16	30 Corrigés : connecteurs logiques	50
12 Pour aller plus loin	18	31 Corrigés : quantificateurs	53
13 Les pièges classiques	19	32 Corrigés : contraposée et absurde	56
14 Les astuces des concours	20	33 Corrigés : cas par cas	59
15 L'essentiel du chapitre en une page	22	34 Corrigés : récurrence	62
16 Niveau 1 · Bases	23	35 Corrigés : défis de concours	65
17 Niveau 2 · Bac	24	26 Corrigé du test d'entrée	68
18 Niveau 3 · Approfondissement	26		

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Propositions et connecteurs, Quantificateurs et négations, Contraposée et absurde, Cas par cas et équivalences, Raisonnement par récurrence, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|---|
| ☐ reconnaître une proposition, sa valeur de vérité ; | ☐ nier une proposition quantifiée ; |
| ☐ dresser une table de vérité ; | ☐ raisonner par équivalences successives ; |
| ☐ utiliser « et », « ou » inclusif, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$; | ☐ raisonner par disjonction des cas ; |
| ☐ distinguer condition nécessaire et suffisante ; | ☐ raisonner par contraposée ; |
| ☐ démontrer une loi logique (table ou calcul) ; | ☐ raisonner par l'absurde ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) ; |
| ☐ lire et écrire avec $\forall$, $\exists$, $\exists!$; | ☐ réfuter avec un contre-exemple ; |
| ☐ respecter l'ordre des quantificateurs ; | ☐ rédiger une récurrence (sommes Σ , divisibilité). |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant d'ouvrir le cours, fais le point : les blocs 1 et 2 vérifient les bases du tronc commun utiles au chapitre, le bloc 3 ton **bon sens logique**, en langage de tous les jours (aucune question ne demande le cours). Corrigé et orientation : **page 68**.

Bloc 1 • Calculs et nombres

___ / 4

① **Racines carrées** Simplifier $A = \sqrt{50} - \sqrt{18}$ et $B = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$. Lequel de ces deux nombres est un entier ?

② **Identités remarquables** Factoriser $E = (2x + 1)^2 - 9$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E = 0$.

③ **Valeur absolue** Écrire sous la forme d'un intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x - 2| \leq 3$.

④ **Encadrement** On sait que $-2 \leq x \leq 1$. Encadrer le nombre $3 - 2x$, puis le nombre x^2 .

Bloc 2 • Raisonner sur les entiers

___ / 4

⑤ **Parité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Parmi $(n + 1)^2 - n^2$, $2n^2 + 6n + 4$ et $n^2 + 1$, lequel est toujours pair ? toujours impair ? ni l'un ni l'autre ?

⑥ **Facteurs premiers** Décomposer 504 en produit de facteurs premiers, puis calculer $\text{PGCD}(504; 180)$.

⑦ **Nombres premiers** Parmi les nombres 87, 89 et 119, lesquels sont premiers ? Justifier.

⑧ **Division euclidienne** L'entier n a pour reste 3 dans la division euclidienne par 5. Quel est le reste de $2n + 7$ dans la division par 5 ?

Bloc 3 • Bon sens logique

___ / 4

⑨ **« Si... alors... »** On sait que : « si le téléphone de Sara est déchargé, alors elle ne répond pas ».
(a) Sara a répondu : que peux-tu en déduire ?
(b) Sara ne répond pas : son téléphone est-il forcément déchargé ?

⑩ **« Et », « ou »** Lister les entiers n de 1 à 20 tels que :
(a) n est multiple de 4 **et** multiple de 5 ;
(b) n est multiple de 4 **ou** multiple de 5 (au moins l'un des deux).

⑪ **Contre-exemple** Karim affirme : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(-1) = f(1)$, alors f est paire. » Donner une fonction qui prouve que Karim a tort.

⑫ **Dire le contraire** Écrire la phrase qui dit exactement le contraire de :
(a) « Tous les trains partent à l'heure. »
(b) « Ce test contient au moins une question facile. »

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 68**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1

Propositions et valeurs de vérité

Faire des mathématiques, c'est écrire des phrases et décider si elles sont vraies ou fausses. La logique fixe les **règles du jeu** : ce chapitre est la grammaire de tous les autres.

Définition : proposition, valeur de vérité

Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui est **soit vrai, soit faux**, jamais les deux à la fois. Sa **valeur de vérité** est notée **V** (vrai) ou **F** (faux).

Des propositions

proposition	valeur	pourquoi
« 2026 est pair »	V	$2026 = 2 \times 1013$
« $\sqrt{9} = -3$ »	F	$\sqrt{9} = 3$ (une racine est ≥ 0)
« $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ »	F	$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ (pas de fin)
« $2^{10} > 1000$ »	V	$2^{10} = 1024$
« $\pi < 3,14$ »	F	$\pi = 3,14159 \dots$

Des phrases qui ne sont pas des propositions

- « Résoudre $x^2 = 4$. » (un ordre) ; « 7 est-il premier ? » (une question) ;
- « $x + 1 = 5$ » : vrai si $x = 4$, faux sinon ; tant que x n'est pas fixé, on ne peut pas trancher ;
- « Cette phrase est fausse. » : si elle était vraie, elle serait fausse, et inversement (**paradoxe du menteur**).

Définition : fonction propositionnelle

Une **fonction propositionnelle** (ou prédicat) sur un ensemble E est un énoncé $P(x)$ qui contient une **variable** x et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace x par un élément de E . Elle peut dépendre de plusieurs variables : $Q(x, y)$, $R(n, m, p) \dots$

Exemple : trois fonctions propositionnelles

- Sur $\mathbb{R}$, $P(x)$: « $x^2 - 5x + 6 = 0$ ». $P(2)$ est vraie ($4 - 10 + 6 = 0$), $P(3)$ aussi ($9 - 15 + 6 = 0$), mais $P(4)$ est fausse ($16 - 20 + 6 = 2 \neq 0$).
- Sur $\mathbb{R}$, $Q(x, y)$: « $x + y = 1$ ». $Q(3, -2)$ est vraie, $Q(1, 1)$ est fausse.
- Sur $\mathbb{N}$, $A(n)$: « $2^n > n^2$ ». On teste les premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49
$A(n)$	V	V	F	F	F	V	V	V

Les tests ne suffisent pas pour conclure « pour tout $n \geq 5$ » : on le **démontrera** par récurrence (section 11).

Remarque. Un peu d'histoire. Le Grec **Aristote** (IV^e siècle av. J.-C.) fonde la logique : principe de **non-contradiction** (une proposition n'est jamais à la fois vraie et fausse), principe du **tiers exclu** (elle est vraie ou fausse, sans troisième possibilité), étude du **syllogisme** (« tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel »). En 1854, l'Anglais **George Boole** (*Les lois de la pensée*) transforme la logique en **calcul** : « vrai » devient 1, « faux » devient 0 (section 3) ; ce calcul « booléen » fait fonctionner tous nos ordinateurs. Les symboles $\exists$ et $\forall$ sont dus à Peano (1897) et à Gentzen (1935).

2 Les connecteurs logiques

À partir de propositions P et Q , on en fabrique de nouvelles avec des **connecteurs**. La valeur de vérité du résultat ne dépend que de celles de P et de Q : on la donne dans une **table de vérité**, qui passe en revue **tous** les cas possibles (2 lignes pour une proposition, 4 pour deux, 8 pour trois).

Définition : les cinq connecteurs

Soit P et Q deux propositions.

- La **négation** de P , notée $\bar{P}$ et lue « non P », est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.
- La **conjonction** « P et Q » est vraie lorsque P et Q sont **toutes les deux** vraies, et fausse sinon.
- La **disjonction** « P ou Q » est vraie lorsque **au moins une** des deux est vraie ; elle n'est fausse que si P et Q sont fausses.
- L'**implication** « $P \Rightarrow Q$ » est la proposition « $\bar{P}$ ou Q » : elle n'est fausse que dans **un seul** cas, lorsque P est vraie et Q est fausse.
- L'**équivalence** « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie lorsque P et Q ont la **même** valeur de vérité.

P	Q	$\bar{P}$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Notations internationales : $P \wedge Q$ pour « P et Q » et $P \vee Q$ pour « P ou Q » ; dans ce livret, on écrit « et », « ou » en toutes lettres.

Négation. La négation de « 6 divise 45 » est « 6 ne divise pas 45 » ($6 \nmid 45$), qui est vraie. La négation de « $x > 2$ » est « $x \leq 2$ » (et non « $x < 2$ » : on n'oublie pas le cas $x = 2$).

« et », « ou ». « 15 est un multiple de 3 et un multiple de 5 » est vraie ; « $\sqrt{2} < 1,5$ et $\pi < 3$ » est fausse (la seconde partie est fausse). En mathématiques, le « ou » est **inclusif** : « 12 est pair ou multiple de 3 » est vraie, bien que les deux le soient. Le « ou » du menu « fromage **ou** dessert » est **exclusif** (pas les deux) ; on l'écrirait « $(P \text{ ou } Q) \text{ et } \bar{P} \text{ et } \bar{Q}$ ». Ainsi, pour tout réel x , « $x \leq 0$ ou $x \geq 0$ » est vraie, même pour $x = 0$.

L'implication. « $P \Rightarrow Q$ » se lit « si P , alors Q » ou « P implique Q ». P est l'**hypothèse**, Q la **conclusion**, et l'implication $Q \Rightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.

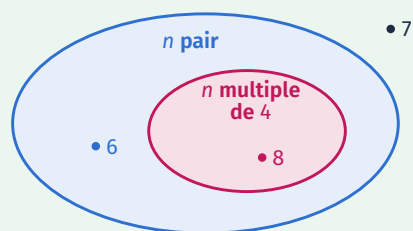
- **Pourquoi « le faux implique n'importe quoi » ?** Pense à la promesse « s'il pleut demain, je prends mon parapluie ». Elle n'est trahie que dans un cas : il pleut et je ne prends pas mon parapluie. S'il ne pleut pas, la promesse est tenue quoi que je fasse. De même, « $1 = 2 \Rightarrow 3 = 5$ » est **vraie** : l'hypothèse est fausse.
- Pour tout réel x , « $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ » est vraie (si $x = 3$, alors $x^2 = 9$; si $x \neq 3$, l'hypothèse est fausse). Sa réciproque « $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ » est fausse pour $x = -3$. **Une implication vraie peut avoir une réciproque fausse.**

Définition : condition nécessaire, condition suffisante

Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que :

- P est une **condition suffisante** pour Q : « pour que Q , il suffit que P » ;
- Q est une **condition nécessaire** pour P : « pour que P , il faut que Q ».

Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q : on dit « P **si et seulement si** Q ».



« n multiple de 4 $\Rightarrow$ n pair » :
le petit ovale est dans le grand

Pour un entier naturel n , il **suffit** que n soit multiple de 4 pour que n soit pair, et il **faut** que n soit pair pour qu'il soit multiple de 4 ; ce n'est pas une condition nécessaire et suffisante, car 6 est pair sans être multiple de 4 (la réciproque est fausse). En revanche, pour tout réel x : $x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -3)$.

3

Les lois logiques

Définition : tautologie, propositions équivalentes

Une **tautologie** (ou **loi logique**) est une proposition composée qui est vraie **quelles que soient** les valeurs de vérité des propositions qui la composent : sa colonne ne contient que des **V**. Deux propositions composées A et B sont **équivalentes** lorsque $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie, c'est-à-dire lorsque leurs colonnes sont identiques : on peut alors remplacer l'une par l'autre dans tout raisonnement.

Théorème (les lois logiques à connaître)

nom	tautologie (P, Q, R propositions quelconques)
tiers exclu	$P \text{ ou } \bar{P}$ (et non-contradiction : $\overline{P \text{ et } \bar{P}}$)
double négation	$\overline{\bar{P}} \Leftrightarrow P$
commutativité	$(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$ $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
associativité	$((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ et } R))$ (de même avec « ou »)
distributivités	$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$ $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$

lois de Morgan	$\overline{P \text{ et } Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}) \quad \overline{P \text{ ou } Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$
implication	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$
négation de l'implication	$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$
contraposée	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
double implication	$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$
transitivité	$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (\text{de même avec } \Leftrightarrow)$
raisonnement par cas	$((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$
modus ponens	$((P \Rightarrow Q) \text{ et } P) \Rightarrow Q \quad (\text{base de la déduction directe})$

Démonstrations par tables de vérité. On calcule les deux colonnes et on constate qu'elles sont **identiques** (cases surlignées) :

P	Q	P et Q	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

première loi de Morgan

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

la contraposée

Avec trois propositions, une table compte $2^3 = 8$ lignes, écrites dans un ordre fixe (**VVV**, **VVF**, **VFV**, **VFF**, **FVV**...) pour n'en oublier aucune : c'est ainsi qu'on vérifie les distributivités et l'associativité.

Démonstrations par le calcul. Une fois quelques lois établies, on en déduit d'autres **sans table**, en remplaçant une proposition par une proposition équivalente :

- **négation de l'implication** : $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \text{ ou } Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q}) \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$ (Morgan, puis double négation) ;
- **contraposée** : $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Leftrightarrow (\overline{\overline{Q} \text{ ou } \overline{P}}) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } \overline{P}) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$;
- **loi des cas** : $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((\overline{P} \text{ ou } R) \text{ et } (\overline{Q} \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((\overline{P} \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } R) \Leftrightarrow (\overline{P \text{ ou } Q} \text{ ou } R) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ (distributivité de « ou » sur « et », puis Morgan) ;
- **transitivité** : une implication n'est fausse que si son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse. Ici, il faudrait $P \Rightarrow R$ fausse, donc P vraie et R fausse ; alors si Q est vraie, $Q \Rightarrow R$ est fausse, et si Q est fausse, $P \Rightarrow Q$ est fausse : l'hypothèse est fausse dans les deux cas. Cette ligne est donc impossible, et l'implication est toujours vraie.
- **simplifier** : $((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } \overline{Q})) \Leftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ ou } \overline{Q})) \Leftrightarrow P$ (distributivité, puis tiers exclu).

Remarque. Le calcul de Boole. Codons **V** par 1 et **F** par 0. Alors $\overline{P} = 1 - P$, $P \text{ et } Q = PQ$ et $P \text{ ou } Q = P + Q - PQ$ (vérifie-le sur les 4 lignes). Une loi logique devient une identité algébrique : la première loi de Morgan s'écrit $1 - PQ = (1 - P) + (1 - Q) - (1 - P)(1 - Q)$, ce qui se vérifie en développant.

4

Les quantificateurs

Définition : les quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\exists!$

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble E .

- « $\forall x \in E, P(x)$ » se lit « **pour tout** x de E , $P(x)$ » (ou « quel que soit x ... »). Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **chaque** élément x de E . $\forall$ est le quantificateur **universel**.
- « $\exists x \in E, P(x)$ » se lit « **il existe** (au moins) un x de E tel que $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément de E . $\exists$ est le quantificateur **existentiel**.
- « $\exists! x \in E, P(x)$ » se lit « il existe un **unique** x de E tel que $P(x)$ » : $P(x)$ est vraie pour **exactement un** élément de E .

Exemple : lire et décider

proposition	valeur	justification
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$	V	soit $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$	F	pour $x = \frac{1}{2} : x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ (un contre-exemple suffit)
$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2n + 3$	V	$n = 3$ convient : $9 = 2 \times 3 + 3$
$\exists! n \in \mathbb{N}, n^2 = 2n + 3$	V	$n^2 - 2n - 3 = (n - 3)(n + 1) = 0 \iff n = 3$ ou $n = -1$, et $-1 \notin \mathbb{N}$
$\exists! n \in \mathbb{Z}, n^2 = 2n + 3$	F	il y a deux solutions dans $\mathbb{Z} : 3$ et -1

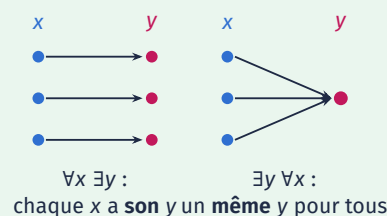
Méthode : établir la valeur de vérité d'une proposition quantifiée

« $\forall x \in E, P(x)$ » **vraie** : on écrit « **Soit** $x \in E$ » (x quelconque, sur lequel on ne choisit rien), puis on démontre $P(x)$. « $\exists x \in E, P(x)$ » **vraie** : on **exhibe** un élément x_0 de E et on vérifie $P(x_0)$. « $\forall$ » **fausse** : un seul **contre-exemple** suffit (section 10). « $\exists$ » **fausse** : on démontre que $P(x)$ est fausse pour **tout** x de E .

Variable muette. « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » et « $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 \geq 0$ » sont la même proposition : la lettre x est **muette** (on peut la remplacer par une autre lettre non utilisée), comme l'indice k d'une somme Σ (section 11). Une proposition quantifiée ne dépend plus de x , alors que $P(x)$ en dépend.

L'ordre des quantificateurs compte

Deux quantificateurs de **même** nature peuvent s'échanger : « $\forall x \forall y$ » $\iff$ « $\forall y \forall x$ », « $\exists x \exists y$ » $\iff$ « $\exists y \exists x$ ». Mais on ne peut **pas** échanger $\forall$ et $\exists$: dans « $\forall x \in E, \exists y \in F, \dots$ », y peut **dépendre** de x ; dans « $\exists y \in F, \forall x \in E, \dots$ », c'est le **même** y pour tous les x . Ainsi « $\exists y \forall x$ » entraîne « $\forall x \exists y$ », mais la réciproque est fausse.



- « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ » est **vraie** : soit $x \in \mathbb{R}$; le réel $y = x + 1$ convient. Ici y dépend de x .
- « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$ » est **fausse** : un tel y serait plus grand que tous les réels, en particulier que lui-même (prendre $x = y$ donne $y > y$).
- Dans $\mathbb{N}$: « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$ » est vraie, « $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geq n$ » est fausse (il n'y a pas de plus grand entier), mais « $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq n$ » est vraie ($m = 0$).

Quantificateurs et connecteurs

$$(\forall x \in E, (P(x) \text{ et } Q(x))) \iff ((\forall x \in E, P(x)) \text{ et } (\forall x \in E, Q(x)))$$

$$(\exists x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x))) \iff ((\exists x \in E, P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, Q(x)))$$

Mais « $\forall$ » ne se distribue **pas** sur « ou », et « $\exists$ » ne se distribue **pas** sur « et » : seules ces implications sont vraies :

$$((\forall x \in E, P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x)))$$

$$(\exists x \in E, (P(x) \text{ et } Q(x))) \Rightarrow ((\exists x \in E, P(x)) \text{ et } (\exists x \in E, Q(x)))$$

Contre-exemples aux réciproques : « $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$ » est vraie, mais « $(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0)$ » est fausse ; « $(\exists x \in \mathbb{R}, x > 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, x < 0)$ » est vraie, mais « $\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0 \text{ et } x < 0)$ » est fausse.

Exemple : traduire avec des quantificateurs (f est une fonction définie sur un intervalle I)

en français	en langage logique
f est majorée sur I	$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$
f est bornée sur I	$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$ (majorée et minorée)
f est paire ($I = \mathbb{R}$)	$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$
f est croissante sur I	$\forall a \in I, \forall b \in I, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
f est constante sur I	$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = c$
f admet un minimum en $a \in I$	$\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$

Attention à l'ordre : « $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ » est vraie pour **toute** fonction ($M = f(x)$ convient) : elle ne dit pas que f est majorée. Dans la définition, le majorant M est choisi **avant** x et ne dépend pas de x .

5

Nier une proposition

Négation des quantificateurs

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \iff (\exists x \in E, \overline{P(x)})$$

$$\overline{\exists x \in E, P(x)} \iff (\forall x \in E, \overline{P(x)})$$

Démonstration. « $\forall x \in E, P(x)$ » est fausse exactement lorsque $P(x)$ est fausse pour au moins un x de E , c'est-à-dire lorsque « $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ » est vraie. La seconde règle s'obtient en appliquant la première à $\overline{P(x)}$, puis la double négation.

Méthode : Comment nier une proposition

1. On lit la proposition **de gauche à droite**, sans rien déplacer. **2.** On change chaque $\forall$ en $\exists$ et chaque $\exists$ en $\forall$; **les ensembles** (« $\in \mathbb{R}$ », « $\in I$ »...) **et l'ordre ne changent pas**. **3.** On nie la fin (la partie sans quantificateur) grâce au tableau ci-dessous. **4.** On contrôle : l'une des deux propositions est vraie, l'autre fausse.

proposition	négation	proposition	négation
$a = b$	$a \neq b$	$P \text{ et } Q$	$\bar{P} \text{ ou } \bar{Q}$
$a < b$	$a \geq b$	$P \text{ ou } Q$	$\bar{P} \text{ et } \bar{Q}$
$a \leq b$	$a > b$	$P \Rightarrow Q$	$P \text{ et } \bar{Q}$ (pas une implication !)
$x \in E$	$x \notin E$	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \text{ et } \bar{Q}) \text{ ou } (Q \text{ et } \bar{P})$
$a \mid b$	$a \nmid b$	$\exists! x \in E, P(x)$	aucun x ne convient, ou au moins deux
n pair	n impair	$a \leq x \leq b$	$x < a \text{ ou } x > b$

Exemple : nier, puis décider

- P : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0$ ». $\bar{P}$: « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 \leq 0$ ». C'est P qui est vraie : $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$.
- P : « $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ premier} \Rightarrow n \text{ impair})$ ». $\bar{P}$: « $\exists n \in \mathbb{N}, (n \text{ premier et } n \text{ pair})$ » : elle est vraie avec $n = 2$, donc P est fausse.
- P : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ ». $\bar{P}$: « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (n > x \text{ ou } x \geq n + 1)$ ». P est vraie ($n = E(x)$, la partie entière de x : le plus grand entier $\leq x$), donc $\bar{P}$ est fausse.
- **Langage courant** : « Chaque jour de la semaine, il pleut à Ifrane » $\rightarrow$ « Il y a au moins un jour de la semaine où il ne pleut pas à Ifrane » (et non « il ne pleut jamais ») ; « Dans chaque classe du lycée, un élève joue aux échecs » $\rightarrow$ « Il existe une classe du lycée dans laquelle aucun élève ne joue aux échecs ».

Exemple : nier les propriétés d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

- f **majorée** : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$. f **non majorée** : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$: aussi grand que soit M , la fonction le dépasse. Par exemple $f(x) = x^2$ n'est pas majorée : soit $M \in \mathbb{R}$; pour $x = |M| + 1$, $f(x) = (|M| + 1)^2 \geq |M| + 1 > M$.
- f **croissante** : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$. f **non croissante** : $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (a \leq b \text{ et } f(a) > f(b))$. « Non croissante » ne veut **pas** dire « décroissante » : $x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ($f(-1) > f(0)$), ni décroissante ($f(0) < f(1)$).
- f **constante** : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$. f **non constante** : $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq c$, ce qui revient à : $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, f(a) \neq f(b)$.

6**Équivalences successives**

Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on peut enchaîner $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$: par **transitivité** de l'équivalence, $P \Leftrightarrow Q$. Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut la transformer par équivalences jusqu'à une proposition dont on sait qu'elle est vraie. Pour résoudre une équation, on la transforme jusqu'à « $x = \dots$ ».

Méthode : raisonner par équivalences successives : quand écrire $\Leftrightarrow$, quand écrire $\Rightarrow$

Chaque « $\Leftrightarrow$ » doit pouvoir se lire **dans les deux sens** ; s'il y a un seul « $\Rightarrow$ » dans la chaîne, elle ne démontre qu'une implication. « $\Leftrightarrow$ » ne remplace pas « donc ».

Opérations qui donnent $\Leftrightarrow$: ajouter un même nombre aux deux membres ; multiplier par un réel **non nul** (pour une inégalité : **positif**, ou négatif en changeant le sens) ; développer, factoriser ; $AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$; pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ et $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.

Opérations qui ne donnent que $\Rightarrow$: élever au carré deux membres de signe **inconnu** ($-3 \neq 3$ mais $9 = 9$) ; diviser par une expression qui peut **s'annuler** ou dont on ne connaît pas le **signe** ; « simplifier » par x . On écrit alors « $\Rightarrow$ », puis on **vérifie** chaque candidat à la fin.

Exemple : démontrer une inégalité : $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ pour tous réels x, y

Soit x et y deux réels. On multiplie par $2 > 0$, puis on regroupe :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

La dernière proposition est vraie (somme de carrés), donc la première aussi. **Bonus :** il y a égalité si et seulement si les trois carrés sont nuls, c'est-à-dire $x = y = 1$.

Exemple : les équivalences abusives : résoudre $\sqrt{x+2} = x$, puis $x^2 < 3x$

Faux : « $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ou } x=-1)$ ». Or $x = -1$ ne convient pas : $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. Le premier « $\Leftrightarrow$ » est faux : on a élevé au carré un membre, x , de signe inconnu.

Juste : une racine carrée est positive, et pour des nombres positifs, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$:

$$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } x+2 = x^2) \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } (x-2)(x+1) = 0) \Leftrightarrow x = 2.$$

Faux : « $x^2 < 3x \Leftrightarrow x < 3$ » (on a divisé par x) : pour $x = -1$, $x < 3$ mais $1 < -3$ est fausse.

Juste : $x^2 < 3x \Leftrightarrow x(x-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$ (entre ses racines 0 et 3, le trinôme est du signe opposé à celui de $a = 1$), donc $S =]0, 3[$.

7 La disjonction des cas

Principe de la disjonction des cas

Pour démontrer une proposition R , on peut séparer l'étude en plusieurs **cas** $C_1, C_2, \dots, C_k$ qui **couvrent toutes les possibilités** (la proposition « C_1 ou C_2 ou ... ou C_k » est vraie), et démontrer R dans chacun des cas. C'est la loi $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ de la section 3.

Méthode : choisir les cas

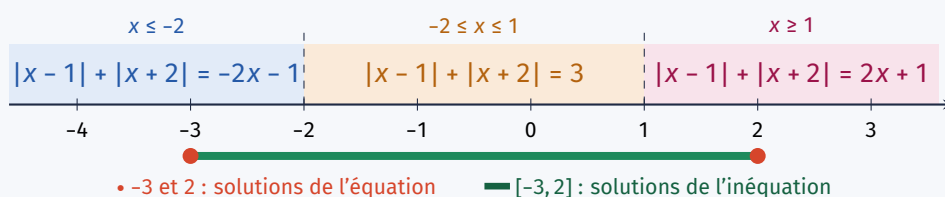
Parité : $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$. **Restes par 3 :** $n = 3k, 3k + 1$ ou $3k + 2$ (par $p : p$ cas). **Valeurs absolues :** on découpe $\mathbb{R}$ là où les expressions s'annulent. **Signe :** $x \geq 0$ ou $x < 0$. Les cas doivent couvrir **tout**.

Exemple : parité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair

Soit $n \in \mathbb{N}$. **1^{er} cas : n est pair**, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$: $n(n+1) = 2k(2k+1)$ est pair. **2^e cas : n est impair**, $n = 2k+1$: $n+1 = 2(k+1)$, donc $n(n+1) = 2(2k+1)(k+1)$ est pair. Les deux cas couvrent tous les entiers : $n(n+1)$ est toujours pair (le produit de deux entiers consécutifs est pair).

Exemple : valeurs absolues : résoudre $|x-1| + |x+2| = 5$, puis $|x-1| + |x+2| \leq 5$

Les expressions $x+2$ et $x-1$ s'annulent en -2 et en 1 : on découpe $\mathbb{R}$ en trois intervalles.



Cas $x \leq -2$: l'équation devient $-2x-1 = 5$, soit $x = -3$, qui vérifie bien $x \leq -2$: solution. **Cas $-2 \leq x \leq 1$:** elle devient $3 = 5$: aucune solution. **Cas $x \geq 1$:** $2x+1 = 5$, soit $x = 2 \geq 1$: solution. Les trois cas couvrent $\mathbb{R}$: $S = \{-3, 2\}$.

L'inéquation. Cas $x \leq -2$: $-2x-1 \leq 5 \iff x \geq -3$, d'où $[-3, -2]$; cas $-2 \leq x \leq 1$: $3 \leq 5$, tout l'intervalle $[-2, 1]$ convient ; cas $x \geq 1$: $2x+1 \leq 5 \iff x \leq 2$, d'où $[1, 2]$. Réunion : $S = [-3, 2]$.

Lecture géométrique : $|x-1| + |x+2|$ est la somme des distances de x à 1 et à -2 ; entre -2 et 1 , elle vaut toujours la longueur 3 du segment.

Exemple : restes : le carré d'un entier a pour reste 0 ou 1 dans la division par 3

Soit $n \in \mathbb{N}$; selon son reste dans la division euclidienne par 3 , il y a trois cas ($k \in \mathbb{N}$) :

- $n = 3k$: $n^2 = 9k^2 = 3 \times 3k^2$: reste 0 ;
- $n = 3k+1$: $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$: reste 1 ;
- $n = 3k+2$: $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$: reste 1 .

Le reste de n^2 n'est **jamais** 2 . **Conséquences :** $2027 = 3 \times 675 + 2$ n'est pas le carré d'un entier ; et si 3 divise n^2 , alors 3 divise n (sinon le reste de n^2 serait 1).

8

Le raisonnement par contraposée**Principe**

Les implications $P \Rightarrow Q$ et $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ sont équivalentes (section 3). Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on peut donc démontrer sa **contraposée** $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$. On annonce dès la première ligne : « **Raisonnons par contraposée : supposons $\bar{Q}$ et montrons $\bar{P}$.** »

Quand l'utiliser ? Lorsque l'hypothèse ou la conclusion est **négative** (« $\neq$ », « n'est pas », « ne divise pas ») : sa négation est **positive** (une égalité, une forme explicite comme $n = 2k+1$), beaucoup plus facile à exploiter.

Exemple : pour tout entier naturel n : si n^2 est pair, alors n est pair

Rédaction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par contraposée : supposons que n est impair et montrons que n^2 est impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$: n^2 est impair. Par contraposée, si n^2 est pair, alors n est pair.

Comme réciproquement n pair $\Rightarrow n^2$ pair (car $(2k)^2 = 2 \times 2k^2$), on a : $n^2 \text{ pair} \iff n \text{ pair}$ et de même $n^2 \text{ impair} \iff n \text{ impair}$.

Exemple : deux autres contraposées

1. Pour tous réels $x > 1$ et $y > 1$: si $x \neq y$, alors $x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$. Soit $x > 1$ et $y > 1$. Raisonnons par contraposée : supposons que $x^2 - 2x = y^2 - 2y$ et montrons que $x = y$. On a $(x^2 - y^2) - 2(x - y) = 0$, soit $(x - y)(x + y - 2) = 0$. Or $x + y - 2 > 0$ (car $x > 1$ et $y > 1$), donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$. (L'hypothèse « $x \neq y$ » est difficile à utiliser ; l'égalité de la contraposée se factorise.)

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair. Raisonnons par contraposée : supposons n impair, $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), et montrons que $8 \mid n^2 - 1$. $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$, et $k(k+1)$ est pair (section 7) : $k(k+1) = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$, donc $n^2 - 1 = 8m$. Par exemple $7^2 - 1 = 48 = 8 \times 6$.

Attention, piège ! contraposée ou réciproque ?

nom	énoncé (pour un entier naturel n)	valeur
implication $P \Rightarrow Q$	si n est multiple de 4, alors n est pair	V
contraposée $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$	si n est impair, alors n n'est pas multiple de 4	V
réciproque $Q \Rightarrow P$	si n est pair, alors n est multiple de 4	F ($n = 6$)
contraposée de la réciproque $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$	si n n'est pas multiple de 4, alors n est impair	F ($n = 6$)

Une implication et sa contraposée ont **toujours** la même valeur de vérité ; la réciproque peut avoir une valeur différente.

9

Le raisonnement par l'absurde**Principe**

Pour démontrer une proposition P , on suppose que $\bar{P}$ est vraie et on en déduit une **contradiction** : une proposition R et sa négation $\bar{R}$ à la fois (ou une absurdité comme $0 = 1$). Donc $\bar{P}$ est fausse : P est vraie. On annonce : « **Raisonnons par l'absurde et supposons que ...** ».

Justification : R et $\bar{R}$ est toujours fausse, donc « $\bar{P} \Rightarrow (R \text{ et } \bar{R})$ » équivaut à « $\bar{P}$ », c'est-à-dire à P .

Théorème

$\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{2} > 0$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction **irréductible** (le PGCD de p et q vaut 1). En élevant au carré : $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, et p est pair (section 8) : $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit

$q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair. Ainsi 2 divise p et q , alors que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible : c'est une contradiction. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Théorème (Euclide, vers 300 av. J.-C.)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers : $p_1, p_2, \dots, p_k$. Posons $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. Comme $N \geq 2$, N a au moins un diviseur premier p (section 12), et p est l'un des p_i . Alors p divise le produit $p_1 p_2 \dots p_k$ et divise N , donc il divise leur différence $N - p_1 p_2 \dots p_k = 1$: c'est impossible, car $p \geq 2$. Il y a donc une infinité de nombres premiers. $\square$

Remarque. Attention : N n'est pas forcément premier. Par exemple $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$. La preuve dit seulement que les diviseurs premiers de N sont « nouveaux ».

Exemple : « il n'existe pas » : aucun couple d'entiers naturels ne vérifie $m^2 - n^2 = 2$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m^2 - n^2 = 2$, soit $(m - n)(m + n) = 2$. Les entiers $m - n$ et $m + n$ ont la même parité (leur somme $2m$ est paire). S'ils sont tous deux impairs, leur produit est impair : il ne vaut pas 2. S'ils sont tous deux pairs, leur produit est divisible par 4 : il ne vaut pas 2. Dans les deux cas, contradiction.

Remarque. Contraposée ou absurde ? La contraposée démontre une **implication** $P \Rightarrow Q$: on suppose $\overline{Q}$ et l'on vise un but **connu**, $\overline{P}$. L'absurde démontre **n'importe quelle** proposition P (irrationalité, « il n'existe pas... ») : on suppose $\overline{P}$ et l'on cherche une contradiction **quelconque**.

10 Le contre-exemple

Principe

$\forall x \in E, P(x) \iff (\exists x \in E, \overline{P(x)})$: pour démontrer que « $\forall x \in E, P(x)$ » est **fausse**, il suffit d'exhiber **un seul** élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse : c'est un **contre-exemple**. Pour « $\forall x \in E, (A(x) \Rightarrow B(x))$ », un contre-exemple est un x_0 qui vérifie $A(x_0)$ mais pas $B(x_0)$.

Exemple : le polynôme d'Euler : $n^2 + n + 41$ est-il premier pour tout $n \in \mathbb{N}$?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	39
$n^2 + n + 41$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	...	1601

Pour $n = 0, 1, \dots, 39$, on obtient **toujours** un nombre premier (Euler, 1772). Pourtant la proposition est **fausse** : pour $n = 40$, $40^2 + 40 + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41 \times 41 = 1681$ n'est pas premier. **Quarante exemples ne prouvent rien** ; un seul contre-exemple suffit à conclure. (On l'a trouvé en cherchant n qui fait apparaître le facteur 41.)

Exemple : trois autres contre-exemples

- **Les nombres de Fermat.** $2^{2^n} + 1$ vaut 3, 5, 17, 257, 65537 pour $n = 0, \dots, 4$: tous premiers. Fermat (1640) pensait qu'ils l'étaient tous ; Euler (1732) a trouvé le contre-exemple $n = 5$: $2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$.
- « Si f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors fg est croissante sur $\mathbb{R}$ » est fausse : avec $f(x) = g(x) = x$, $(fg)(x) = x^2$, et $-1 \leq 0$ alors que $(fg)(-1) = 1 > (fg)(0) = 0$.

Méthode : trouver un contre-exemple

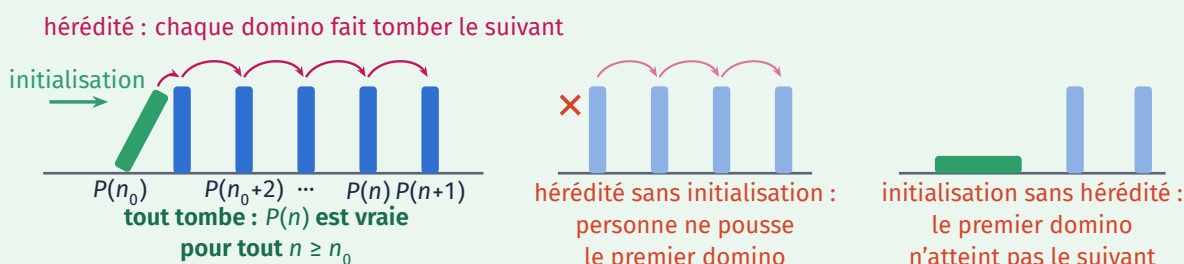
Tester les valeurs simples ($0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}$), les négatifs, les grandes valeurs, les cas d'égalité ; chercher **pourquoi** la propriété pourrait échouer (facteur commun, signe, division par 0) ; **vérifier** que le contre-exemple satisfait toutes les hypothèses. Un exemple suffit pour un « $\exists$ », mais ne prouve **jamais** un « $\forall$ ».

11

Le raisonnement par récurrence**Théorème (principe de récurrence)**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour les entiers $n \geq n_0$. Si

- **(initialisation)** $P(n_0)$ est vraie,
 - **(hérédité)** pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,
- alors $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.



Pourquoi ça marche. Si $P(n)$ était fausse pour un entier $n \geq n_0$, il y aurait un **plus petit** tel entier m . On a $m \neq n_0$ (initialisation), donc $m-1 \geq n_0$ et $P(m-1)$ est vraie ; l'hérédité donne alors $P(m)$ vraie : contradiction (raisonnement par l'absurde).

Méthode : Comment rédiger une récurrence

Pour tout entier $n \geq n_0$, notons $P(n)$ la proposition « ... ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Initialisation. Pour $n = n_0$: ... donc $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que « ... » [on écrit $P(n+1)$ en entier : c'est le but]. ... [calcul qui utilise l'hypothèse de récurrence] ... donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Conseils : signaler l'endroit où l'on utilise l'hypothèse de récurrence ; ne jamais écrire « supposons $P(n)$ vraie **pour tout** n » (c'est ce qu'on veut démontrer !) ; ne pas partir de $P(n+1)$ pour arriver à une égalité vraie.

Définition : le symbole Σ

Pour des entiers $m \leq n$ et des réels $a_m, \dots, a_n$: $\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ (« somme des a_k pour k allant de m à n »).

Elle compte $n - m + 1$ termes ; l'indice k est **muet** : $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{i=1}^n i^2$. **Règles :** $\Sigma(a_k + b_k) =$

$\Sigma a_k + \Sigma b_k$; $\Sigma \lambda a_k = \lambda \Sigma a_k$; $\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c$; et, pour l'hérédité, $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$.

Exemples : $\sum_{k=1}^4 k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$; $\sum_{k=0}^3 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$; $\sum_{k=2}^6 \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ (5 termes).

Les trois sommes usuelles

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Exemple : une somme avec Σ : rédaction complète pour $\sum_{k=1}^n k^2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$: « $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$ et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$, et montrons $P(n+1)$: « $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ». D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6},$$

et $n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (Par exemple $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$.)

Les deux autres sommes, même schéma. Initialisations : $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \times 2}{2}$ et $\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{q-1}{q-1}$. Hérédités (avec l'hypothèse de récurrence) :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ;$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

Par exemple $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047$. **L'astuce du jeune Gauss :** on écrit $S = 1 + 2 + \dots + n$

à l'endroit puis à l'envers ($S = n + \dots + 2 + 1$) ; en additionnant terme à terme, $2S = n(n+1)$: $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$.

Exemple : une inégalité à partir d'un rang : $2^n > n^2$ pour tout entier $n \geq 5$

Pour tout entier $n \geq 5$, notons $P(n)$: « $2^n > n^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$: $P(5)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 5$, et montrons $P(n+1)$: « $2^{n+1} > (n+1)^2$ ». D'après l'hypothèse de récurrence, $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$. Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 4^2 - 2 > 0$ car $n-1 \geq 4$. Donc $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$. (Le rang 5 est indispensable : $P(4)$ est fausse, car $2^4 = 4^2$; voir le tableau de la section 1.)

Exemple : une divisibilité : 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $3^1 + 2^2 = 7$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$, soit $3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$. Montrons $P(n+1)$: « $7 \mid 3^{2n+3} + 2^{n+3}$ ». On fait apparaître l'hypothèse :

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 9(7k - 2^{n+2}) + 2 \times 2^{n+2} = 63k - 7 \times 2^{n+2} = 7(9k - 2^{n+2}),$$

et $9k - 2^{n+2}$ est un entier : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ (par exemple $3^3 + 2^3 = 35 = 7 \times 5$).

Attention, piège ! l'hérédité seule ne suffit pas

Soit $P(n)$: « 3 divise $4^n + 1$ ». L'hérédité est vraie : si $4^n + 1 = 3k$, alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3 = 3(4k - 1)$. Mais $P(0)$ est fausse ($4^0 + 1 = 2$), et en fait $P(n)$ est fausse pour **tout** n : on montre de la même façon que $3 \mid 4^n - 1$, donc $4^n + 1 = (4^n - 1) + 2$ a pour reste 2 dans la division par 3. **Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien** ; et sans hérédité, des vérifications ne prouvent rien (section 10).

12 Pour aller plus loin

Récurrence double

Si $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies, et si pour tout entier $n \geq n_0$, $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. (On applique la récurrence ordinaire à « $P(n)$ et $P(n+1)$ ».)

Exemple : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: montrer que $u_n = 2^n + 1$

Initialisation. $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2^1 + 1$. **Hérédité.** Supposons que $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$ pour un entier $n \geq 0$, et montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2} + 1$: $u_{n+2} = 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+2} + 1$. **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Récurrence forte

Si $P(n_0)$ est vraie, et si pour tout entier $n \geq n_0$, $(P(n_0) \text{ et } P(n_0 + 1) \text{ et } \dots \text{ et } P(n)) \Rightarrow P(n + 1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. (Récurrence ordinaire sur « $P(n_0)$ et ... et $P(n)$ ».)

Exemple : théorème : tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier

Initialisation. 2 est premier : c'est un diviseur premier de 2. **Hérédité.** Soit $n \geq 2$; supposons que tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$ a un diviseur premier, et montrons-le pour $n + 1$. *Cas 1 :* $n + 1$ est premier ; il est son propre diviseur premier. *Cas 2 :* $n + 1$ n'est pas premier ; il s'écrit $n + 1 = ab$ avec $2 \leq a \leq n$. Par hypothèse, a a un diviseur premier p ; comme $p \mid a$ et $a \mid n + 1$, $p \mid n + 1$. **Conclusion.** Tout entier $n \geq 2$ a un diviseur premier. (Une récurrence ordinaire ne suffirait pas : $a \neq n$.)

Principe des tiroirs

Si l'on range $n + 1$ objets (ou plus) dans n tiroirs, au moins un tiroir contient au moins deux objets. Plus généralement, si l'on range plus de mn objets dans n tiroirs, un tiroir contient au moins $m + 1$ objets.

Démonstration (par l'absurde). Si chaque tiroir contenait au plus m objets, il y aurait au plus mn objets en tout : contradiction.

Exemple. Parmi 6 entiers naturels quelconques, il y en a deux dont la différence est divisible par 5 : les « tiroirs » sont les 5 restes possibles 0, 1, 2, 3, 4 dans la division par 5 ; deux des six entiers, $a = 5q + r$ et $b = 5q' + r$, ont le même reste r , et $a - b = 5(q - q')$.

L'analyse-synthèse. Pour trouver **tous** les objets qui vérifient une propriété (et souvent prouver l'existence **et** l'unicité) : **1. Analyse :** on suppose qu'un objet convient et on en déduit ce qu'il est **forcément** (conditions nécessaires) : unicité, ou liste de candidats. **2. Synthèse :** on vérifie que les candidats conviennent (conditions suffisantes) : existence.

Exemple : théorème : fonction paire plus fonction impaire

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon **unique** $f = g + h$, avec g paire et h impaire.

Analyse. Supposons $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Pour tout réel x : $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(x) - h(x)$. En additionnant puis en soustrayant : $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$: si g et h existent, elles sont **uniques**.

Synthèse. Définissons g et h par ces formules. Pour tout réel x : $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$ (g est paire), $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$ (h est impaire), et $g(x) + h(x) = f(x)$: elles **conviennent**.

Exemple : $f(x) = (x + 1)^2$ donne $g(x) = \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{2} = x^2 + 1$ et $h(x) = 2x$.

13

Les pièges classiques

X Faux	✓ Vrai
la négation de « P et Q » est « $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ »	c'est « $\bar{P}$ ou $\bar{Q}$ » (Morgan) : « n n'est pas multiple de 6 » $\Leftrightarrow$ « n est impair ou n'est pas multiple de 3 »
la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est « $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ »	c'est « P et $\bar{Q}$ » : la négation d'une implication n'est pas une implication

la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$ »	c'est « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$ » : un seul x suffit
la négation de « $\exists x > 0, x^2 = x + 1$ » est « $\forall x \leq 0, x^2 \neq x + 1$ »	c'est « $\forall x > 0, x^2 \neq x + 1$ » : on ne nie pas l'ensemble
« $\forall x \exists y$ » et « $\exists y \forall x$ », c'est la même chose	l'ordre compte : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ est vraie ; $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$ est fausse
en mathématiques, « ou » est exclusif	il est inclusif : « $2 \leq 2$ ou $2 \geq 2$ » est vraie
la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est la réciproque ; la contraposée est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
$a < b \iff a^2 < b^2$	vrai seulement si $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $-3 < 1$ mais $9 > 1$
$x^2 \leq 3x \iff x \leq 3$ (on a divisé par x)	$x^2 \leq 3x \iff x(x - 3) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 3$
« c'est vrai pour $n = 0, 1, \dots, 39$, donc pour tout n »	un exemple ne prouve jamais un « $\forall$ » : $n^2 + n + 41$ n'est pas premier pour $n = 40$
« l'hérédité est prouvée, donc $P(n)$ est vraie pour tout n »	sans initialisation, rien n'est prouvé : « $3 \mid 4^n + 1$ » est héréditaire mais toujours fausse
« supposons $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrons $P(n + 1)$ »	« supposons $P(n)$ vraie pour un entier n » (sinon, on suppose ce qu'on veut démontrer)
« f n'est pas croissante, donc f est décroissante »	$x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$
hérédité : « je pars de $P(n + 1)$, je transforme, j'arrive à $0 = 0$, donc $P(n + 1)$ est vraie »	c'est utiliser ce qu'on veut démontrer : on part d'un membre de $P(n + 1)$ et on le transforme, grâce à $P(n)$, jusqu'à l'autre membre

14

Les astuces des concours

★ **Astuce de concours : nier mécaniquement, en lisant de gauche à droite**

Le mot « non » traverse la phrase de gauche à droite et retourne tout sur son passage : $\forall \leftrightarrow \exists$, « et » $\leftrightarrow$ « ou », $\leq \leftrightarrow >$, $= \leftrightarrow \neq$; il **laisse intacts** les ensembles, l'ordre des quantificateurs, et l'hypothèse d'une implication ($A \Rightarrow B$ devient A et $\overline{B}$). Une condition écrite juste après un quantificateur (« $\exists T > 0$ ») indique l'ensemble : elle ne se nie pas.

Exemple : f est périodique : $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. **Négation :** $\forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x + T) \neq f(x)$.

★ **Astuce de concours : choisir le bon raisonnement**

si la question ressemble à...	alors on essaie...
« Montrer que pour tout entier $n \geq n_0$, ... » (somme, divisibilité, inégalité qui dépend de n)	une récurrence (après un essai direct)
« Montrer que ...est irrationnel », « il n'existe pas... », « il y a une infinité... »	le raisonnement par l' absurde
« Montrer que si ... $\neq$..., alors ... $\neq$... » ; « si n^2 ..., alors n ... »	la contraposée
valeurs absolues, parité, restes, signe d'une expression	la disjonction des cas
« Résoudre », « montrer que $A \iff B$ », « il existe un unique... »	les équivalences successives , ou l' analyse-synthèse
« Est-il vrai que pour tout...? » (et l'on s'en méfie)	chercher un contre-exemple
« Parmi $n + 1$ objets, deux... »	le principe des tiroirs

★ **Astuce de concours : renforcer l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$**

La récurrence directe sur « $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$ » échoue : de $S_n \leq 2$, on ne peut pas déduire $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2$. On démontre une propriété **plus forte**, qui « garde de la marge » : $P(n)$: « $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ » pour $n \geq 1$.

Initialisation. $S_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$. **Hérédité.** Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$, car $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (puisque $n \leq n+1$).

Conclusion. $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ pour tout $n \geq 1$.

D'où vient « $2 - \frac{1}{n}$ » ? Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et en additionnant de $k = 2$ à n , tout se simplifie (« télescopage ») : $S_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$.

★ **Astuce de concours : la parité et les restes**

Un carré a pour reste 0 ou 1 dans la division par 4 : $(2k)^2 = 4k^2$ et $(2k+1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$. Donc une somme de deux carrés a pour reste 0, 1 ou 2, **jamais** 3 : l'équation $x^2 + y^2 = 2027$ n'a pas de solution entière, car $2027 = 4 \times 506 + 3$. De même, si $a^2 + b^2 = c^2$ (entiers), a et b ne sont pas tous deux impairs (sinon le carré c^2 aurait pour reste 2).

★ **Astuce de concours : l'absurde pour les irrationnels**

Si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ (sinon $x = (r + x) - r$ serait rationnel) ; si de plus $r \neq 0$, alors $rx \notin \mathbb{Q}$: ainsi $1 + \sqrt{2}$ et $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ sont irrationnels, sans nouveau calcul. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, avec les restes de la section 7 : si $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ (irréductible), alors $p^2 = 3q^2$, donc $3 \mid p^2$, donc $3 \mid p$; $p = 3k$ donne $q^2 = 3k^2$, donc $3 \mid q$: contradiction.

15

L'essentiel du chapitre en une page

Connecteurs

P	Q	$\bar{P}$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

« ou » **inclusif** ; « faux $\Rightarrow$ n'importe quoi » est vraie.

$P \Rightarrow Q$: P condition **suffisante** pour Q, Q condition **nécessaire** pour P. Réciproque : $Q \Rightarrow P$; contraposée : $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Lois logiques

$$\begin{aligned} \overline{P \text{ et } Q} &\Leftrightarrow \bar{P} \text{ ou } \bar{Q} & \overline{P \text{ ou } Q} &\Leftrightarrow \bar{P} \text{ et } \bar{Q} \\ (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q) & \overline{P \Rightarrow Q} &\Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{Q}) \\ (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}) \\ (P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)) \\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &\Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R) \\ P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &\Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R) \\ ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) &\Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R) \\ ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) &\Rightarrow (P \Rightarrow R) \end{aligned}$$

Quantificateurs

$\forall$: pour tout ; $\exists$: il existe au moins un ; $\exists!$: il existe un unique.

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \bar{P}(x)$$

$$\overline{\exists x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \bar{P}(x)$$

$\forall$ se distribue sur « et », $\exists$ sur « ou » (pas l'inverse).

L'ordre compte : $\forall x \exists y$ (y dépend de x) $\neq \exists y \forall x$.

Nier, de gauche à droite

$\forall \Leftrightarrow \exists$; $= \Leftrightarrow \neq$; $< \Leftrightarrow \geq$; $\leq \Leftrightarrow >$; et $\Leftrightarrow$ ou ; $A \Rightarrow B$ devient A et $\bar{B}$; les ensembles ne changent pas.

f majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.

f non majorée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$.

Les raisonnements

Déduction : P vraie et $P \Rightarrow Q$ vraie, donc Q vraie.

Équivalences successives : chaque $\Leftrightarrow$ réversible (attention aux carrés et aux divisions).

Cas : des cas qui couvrent **tout** (parité, restes, signes).

Contraposée : pour $P \Rightarrow Q$, on suppose $\bar{Q}$ et on montre $\bar{P}$.

Absurde : on suppose $\bar{P}$, on aboutit à une contradiction.

Contre-exemple : un seul x_0 avec $\overline{P(x_0)}$ réfute « $\forall x, P(x)$ ».

Récurrence (rang n_0)

Initialisation : $P(n_0)$ vraie.

Hérédité : supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$, montrons $P(n+1)$.

Conclusion : $P(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$.

Double : $P(n)$ et $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$; forte : $P(n_0)$ et ... et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Sommes ($\sum_{k=m}^n a_k$: $n - m + 1$ termes)

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

À retenir pour les concours

n^2 pair $\Leftrightarrow n$ pair ; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; une infinité de nombres premiers ; tout $n \geq 2$ a un diviseur premier.

Un carré a pour reste 0 ou 1 dans la division par 3 et par 4.

Tiroirs : $n+1$ objets dans n tiroirs $\Rightarrow$ un tiroir en contient deux.

Analyse-synthèse : $f = g + h$, $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$,

$$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Renforcer l'hypothèse : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours : $\bar{P}$ est la négation de P (« non P ») ; **V** et **F** sont les valeurs de vérité « vrai » et « faux » ; $a \mid b$ signifie « a divise b » ; $E(x)$ est la partie entière du réel x : l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$.

16 Niveau I • Bases

Exercice 1 Proposition ou pas ? ★

corrigé p. 39

- Lesquelles de ces phrases sont des propositions ? Donner leur valeur de vérité.
a) « 221 est premier. » b) « 2026 est divisible par 3. » c) « $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$. » d) « $\frac{7}{8} \in \mathbb{D}$. »
e) « Calcule $3 + 4$. » f) « $-2 < -3$. »
g) « $x + 3 = 2x$. » h) « Le carré d'un entier impair est impair. » i) « 0 est-il un entier naturel ? »
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est la proposition « $3 \mid 2^n + 1$ ». Valeurs de vérité de $P(0)$, ..., $P(5)$? Quelle conjecture faire (démontrée à l'exercice 8) ?
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $Q(x)$ est la proposition « $|x - 1| < x$ ». Valeurs de vérité de $Q(0)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(1)$, $Q(3)$? Pour quels réels x la proposition $Q(x)$ est-elle vraie ?

Exercice 2 Connecteurs et valeurs de vérité ★

corrigé p. 39

- P : « 17 est premier », Q : « $3^5 > 250$ », R : « $\sqrt{10} > 3,1$ ». Valeur de vérité de P , Q , R , puis de : $\bar{Q}$; P et Q ; P ou Q ; $Q \Rightarrow P$; $P \Rightarrow Q$; $(P \text{ et } R) \Rightarrow Q$; $\bar{P} \Leftrightarrow Q$; $(P \text{ ou } Q)$ et $\bar{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire avec « ou » la proposition « $x \notin [-1, 2[$ » ; écrire sans « non » la négation de « $x \leq -1$ ou $x > 3$ ».

Exercice 3 Tables de vérité ★

corrigé p. 39

P , Q et R sont des propositions.

- Dresser la table de vérité de $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$. À quelle proposition simple équivaut-elle ?
- Montrer que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie. Traduire ce résultat par une phrase.
- Montrer que $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \Rightarrow R]$ est une tautologie.
- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ équivaut-elle à $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$?

Exercice 4 Implication, réciproque, contraposée ★

corrigé p. 40

- Relier par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou « aucune implication » ; la première condition est-elle nécessaire, suffisante, les deux ou aucune pour la seconde ? ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $ABCD$ est un quadrilatère.)
a) $x^2 = 2x$... $x = 2$; b) $|x| < 3$... $x^2 < 9$; c) $24 \mid n$... ($4 \mid n$ et $6 \mid n$) ; d) $12 \mid n$... ($3 \mid n$ et $4 \mid n$) ;
e) $x > -1$... $x^2 > 1$; f) « $ABCD$ est un losange » ... « les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires ».

2. Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de « Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur ». Valeur de vérité de chacune ?

Exercice 5 Lire et écrire avec des quantificateurs ★

corrigé p. 40

1. Lire en français, puis donner la valeur de vérité en justifiant :
a) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 \geq n^2$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2$; c) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 = 4x$; d) $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 = 4x$;
e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$; f) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$; g) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, xy = 0$.
2. Écrire avec des quantificateurs, puis dire si c'est vrai : a) « Tout réel positif est le carré d'un réel. » b) « Un entier naturel divise tous les entiers naturels. » c) « L'équation $x^3 = -8$ a une unique solution réelle. » d) « Aucun entier relatif n'a pour carré 12. »

Exercice 6 Nier une proposition ★

corrigé p. 40

1. Nier chaque proposition, puis dire laquelle, de la proposition et de sa négation, est vraie :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 = 3 \text{ et } x < 0)$; c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9)$;
d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y^2$; e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n < m < n + 2$.
2. (f est définie sur $\mathbb{R}$.) Écrire avec des quantificateurs, puis nier : « f s'annule » ; « f est impaire ».
Nier : « Dans chaque ville du Maroc, il y a un élève qui parle trois langues ».
3. Un élève écrit que la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ». Corriger. Qui est vraie ?

Exercice 7 Premières récurrences : des sommes ★

corrigé p. 41

1. Écrire sans Σ la somme $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)$ pour $n = 1, 2, 3$, puis montrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
3. Écrire avec Σ , puis calculer (formules du cours) : $A = 1 + 4 + 7 + \dots + 100$ et $B = 3 + 9 + 27 + \dots + 2187$.

Exercice 8 Premières récurrences : divisibilité et inégalité ★

corrigé p. 41

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $5^n - 1$ est divisible par 4.
2. a) Montrer par récurrence que $3 \mid 2^{2n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. b) Avec $2(2^{2n} + 1) = (2^{2n+1} + 1) + 1$, montrer que $2^{2n} + 1$ n'est jamais divisible par 3. c) Conclure sur la conjecture de l'exercice 1.
3. Comparer 3^n et n^3 pour $0 \leq n \leq 4$. Montrer par récurrence que $3^n > n^3$ pour tout $n \geq 4$ (utiliser $(1 + \frac{1}{n})^3 \leq (\frac{5}{4})^3 < 3$ si $n \geq 4$).

17

Niveau 2 • Bac

Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : propositions quantifiées ★★

corrigé p. 41

- $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, x^4 - 2x^2 + 2 > 0$; $P_2 : \exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3n + 2$ est un nombre premier ;
 $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2 - 2y$; $P_4 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + xy + 1 > 0$;
 $P_5 : \forall n \in \mathbb{Z}, (n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est multiple de } 8)$.

1. Écrire la négation de chacune de ces propositions. 2. Déterminer, en justifiant, la valeur de vérité de chacune.
3. Déterminer l'ensemble des réels y tels que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + xy + 1 > 0$, puis l'ensemble des réels x tels que $\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2 - 2y$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : récurrence ★★

corrigé p. 42

1. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de $1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 8 + \dots + 10 \times 512$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $A_n = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. Pour quels n est-il premier ?

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : contraposée et absurde ★★

corrigé p. 42

1. Montrer par contraposée : a) si x, y sont des réels tels que $x + y > 2$, alors $x > 1$ ou $y > 1$; b) si a est un réel tel que $|a| \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, alors $a = 0$.
2. On suppose, par l'absurde, que l'équation (E) : $x^2 + x - 1 = 0$ a une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, fraction irréductible). a) Montrer que $p^2 + pq - q^2 = 0$. b) Aboutir à une contradiction en étudiant la parité de p et de q (trois cas). c) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$; en déduire que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
3. a) Montrer que $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel t . b) Soient $a, b, c \in [0, 1]$. Montrer par l'absurde que l'un au moins des nombres $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : disjonction des cas ★★

corrigé p. 42

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x - 4| - |x + 1| = x$ (trois cas, à placer sur une droite graduée), puis l'inéquation $|2x - 4| - |x + 1| \leq x$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n^2 + 5)$ est pair, puis qu'il est divisible par 3 (distinguer selon le reste de la division euclidienne de n par 3). En déduire qu'il est divisible par 6.

Exercice 13 Équivalences successives ★★

corrigé p. 43

1. Montrer par équivalences successives que $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}}$ pour tous réels $x, y \geq 0$. Cas d'égalité ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+7} = x-5$. Un élève écrit « $\sqrt{x+7} = x-5 \iff x+7 = (x-5)^2$ » et trouve deux solutions : où est l'erreur ? 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+7} > x-5$.

Exercice 14 Conditions nécessaires, conditions suffisantes ★★

corrigé p. 43

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 < x$. Les conditions a) $x < 1$, b) $0 < x < 1$, c) $|x| < 1$ sont-elles nécessaires ? suffisantes ? pour que $x^3 < x$.
2. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$). a) Montrer que « $ac < 0$ » est une condition suffisante pour qu'elle ait deux solutions réelles distinctes. Est-elle nécessaire ? b) Montrer que « $ac < 0$ » est une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait deux solutions réelles de signes contraires.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. « $4 \mid n$ » est-elle nécessaire ? suffisante ? pour que $8 \mid n^2$; pour que $32 \mid n^2$.

Exercice 15 Nombres définis par récurrence ★★

corrigé p. 43

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ ($n \in \mathbb{N}$). Calculer u_1, u_2, u_3 , puis montrer que $u_n = 3^n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n est bien défini et $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.
3. $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1$: calculer a_1, a_2, a_3 , conjecturer l'expression de a_n , la démontrer.

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 44

Démontrer les vraies, donner un contre-exemple pour les fausses : a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $6n + 1$ est premier ;
 b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$;
 c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x + y| = |x| + |y|$; d) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 + n + 1$ n'est pas le carré d'un entier ;
 e) le produit de deux irrationnels est irrationnel ; f) $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(2x) = 2E(x)$; g) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x < \sqrt{x}$.

18

Niveau 3 · Approfondissement**Exercice 17** Un seul connecteur suffit ★★★

corrigé p. 44

Pour deux propositions P et Q , on note $P \uparrow Q$ (lue « P barre Q ») la négation de « P et Q » : elle est fausse lorsque P et Q sont vraies, et vraie dans les trois autres cas.

1. Dresser la table de vérité de $P \uparrow Q$ et de $P \uparrow P$. Montrer que : $\bar{P} \iff P \uparrow P$; $(P \text{ et } Q) \iff (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$; $(P \text{ ou } Q) \iff (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$; $(P \Rightarrow Q) \iff P \uparrow (Q \uparrow Q)$.
2. Le connecteur $\uparrow$ est-il commutatif ? associatif (comparer $(P \uparrow Q) \uparrow R$ et $P \uparrow (Q \uparrow R)$) ?
3. Montrer, sans table, que $(P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie. Est-ce surprenant ?

Exercice 18 L'ordre des quantificateurs ★★★

corrigé p. 44

Pour deux réels x et y , on note $P(x, y)$ la proposition « $x^2 < y$ ».

1. Valeur de vérité de : $A_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$; $A_2 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x, y)$;
 $A_3 : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, P(x, y)$;
 $A_4 : \forall y \in]0, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R}, P(x, y)$; $A_5 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0, +\infty[, P(x, y)$.
2. Écrire les négations de A_2 et de A_3 . Comparer A_5 et A_2 : qu'est-ce qui a changé ?
3. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\forall y \in]1, +\infty[, x^2 < y$, puis l'ensemble des réels y tels que : a) $\exists x \in [1, 2], x^2 < y$; b) $\forall x \in [1, 2], x^2 < y$.

Exercice 19 Partie entière et disjonction des cas ★★★

corrigé p. 45

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $k = E(x)$ et $t = x - k \in [0, 1[$. Montrer que $E(2x) = 2k$ si $t < \frac{1}{2}$, et $E(2x) = 2k + 1$ si $t \geq \frac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) + E(2x) = 7$, puis l'équation $E(x) + E(2x) = 8$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $E(x) + E(2x) = m$ a des solutions si et seulement si le reste de m dans la division par 3 est 0 ou 1. Combien d'entiers $m \in \{1, \dots, 100\}$ conviennent ?

Exercice 20 Contraposée et absurde sur les entiers ★★★

corrigé p. 45

1. a) Soit $n \geq 2$ un entier non premier. Montrer que n a un diviseur d tel que $2 \leq d \leq \sqrt{n}$. b) Écrire la contraposée de a). En déduire que 251 est premier. Le nombre 391 est-il premier ?
2. Montrer par l'absurde que si n , $n + 2$ et $n + 4$ sont trois nombres premiers ($n \in \mathbb{N}$), alors $n = 3$ (considérer le reste de la division euclidienne de n par 3).

Exercice 21 Encadrer une somme ★★★

corrigé p. 45

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer par récurrence que $S_n < 2\sqrt{n} - 1$ pour tout entier $n \geq 2$, puis que $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la partie entière de $S_{10\,000}$.

Exercice 22 Une divisibilité qui grandit vite ★★★

corrigé p. 46

1. Soit a un entier. Vérifier que $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ et que $a^2 - a + 1 = (a + 1)^2 - 3a$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$ (poser $a = 2^{3^n}$).
3. Plus précisément, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3^n} + 1 = 3^{n+1}q_n$, où q_n est un entier non divisible par 3. Le nombre $2^{3^n} + 1$ est-il divisible par 3^{n+2} ?

Exercice 23 Analyse et synthèse ★★★

corrigé p. 46

1. On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
a) *Analyse*. Soit f une telle fonction. Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, que $f(0) = 0$ est impossible, puis calculer $f(x)$. b) *Synthèse*. Conclure.
2. Existe-t-il une unique fonction affine f telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = 4x + 3$? 3. Montrer que $\exists ! x \in [0, +\infty[, x + \sqrt{x} = 6$.

19

Niveau 4 • Concours**Exercice 24 Chevaliers et menteurs ★★★★★**

corrigé p. 46

Sur une île, chaque habitant est soit *chevalier* (il dit toujours vrai), soit *menteur* (il ment toujours). On note a : « A est un chevalier » ; si l'habitant A affirme S , alors $a \iff S$.

1. Montrer qu'aucun habitant ne peut dire « Je suis un menteur ».
2. Trois habitants déclarent : A : « Si je suis un chevalier, alors C en est un aussi. » B : « C est un menteur. » C : « A est un chevalier. » Traduire ces déclarations par trois équivalences, puis déterminer la nature de chacun (raisonner par cas sur A).
3. À une bifurcation, un habitant de nature inconnue se tient ; une seule route mène au village. Soit G : « la route de gauche mène au village ». On lui demande : « Es-tu un chevalier si et seulement si la route de gauche mène au village ? » Montrer qu'il répond « oui » si et seulement si G est vraie.

Exercice 25 Le principe des tiroirs ★★★★★

corrigé p. 47

Rappel (cours) : si l'on range $n + 1$ objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs contient au moins deux objets.

1. On choisit 51 entiers distincts parmi 1, 2, ..., 100. a) Montrer que deux des entiers choisis sont consécutifs. b) Montrer que l'un des entiers choisis divise un autre (écrire chaque entier sous la forme $2^a m$, avec $a \in \mathbb{N}$ et m impair). c) Et si l'on choisit seulement 50 entiers ?
2. On place 10 points dans un triangle équilatéral de côté 3 (bord compris). Montrer que deux d'entre eux sont à une distance au plus égale à 1.
3. Montrer que, parmi 5 entiers naturels quelconques, on peut en choisir 3 dont la somme est divisible par 3 (raisonner sur les restes de la division par 3). Et parmi 4 entiers ?

Exercice 26 Renforcer l'hypothèse de récurrence ★★★★★

corrigé p. 47

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$, de sorte que $P_{n+1} = P_n \times \frac{2n+1}{2n+2}$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et vérifier que $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$ pour ces trois valeurs de n .
2. On tente de démontrer « $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$ » par récurrence. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+3}}$ est fausse pour tout $n \geq 1$: l'hérédité ne passe pas.

- Montrer par récurrence que $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; comparer $(2n+1)^2(3n+4)$ et $(2n+2)^2(3n+1)$. Conclure.
- Montrer de même que $P_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $0,07 < P_{50} < 0,082$.

Exercice 27 Récurrence forte : l'écriture en base 2 ★★★★★

corrigé p. 48

- Montrer par récurrence forte (selon la parité de n) que tout entier $n \geq 1$ est une somme de puissances de 2 deux à deux distinctes. Exemple : $2026 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1$.
- Montrer que $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} < 2^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), puis, par l'absurde, que l'écriture est unique (ôter les puissances communes à deux écritures distinctes et comparer les plus grandes).
- Tour de magie.* La carte j ($1 \leq j \leq 6$) porte les entiers de 1 à 63 dont l'écriture contient 2^{j-1} . On choisit un entier, on montre les cartes où il figure ; le magicien le trouve en additionnant les plus petits nombres de ces cartes. Pourquoi ? Cartes de 45 ?

Exercice 28 Récurrence double : les puissances de $1 + \sqrt{2}$ ★★★★★

corrigé p. 48

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.

- Calculer a_0, a_1, a_2 . Vérifier que $(1 \pm \sqrt{2})^2 = 2(1 \pm \sqrt{2}) + 1$, puis en déduire que $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier pair.
- Soit $n \geq 1$. Justifier que $0 < (\sqrt{2} - 1)^n < 1$, puis montrer que $E((1 + \sqrt{2})^n)$ vaut $a_n - 1$ si n est pair et a_n si n est impair. Parité de $E((1 + \sqrt{2})^n)$? Calculer $E((1 + \sqrt{2})^{10})$.

Exercice 29 Le jeu des jetons ★★★★★

corrigé p. 48

Deux joueurs retirent tour à tour 1, 2 ou 3 jetons d'un tas de n jetons ; qui prend le dernier jeton gagne. n est *perdant* si le joueur qui doit jouer devant n jetons perd face à un adversaire qui joue bien, *gagnant* sinon ; 0 est perdant.

- Justifier que, pour $n \geq 1$: n est gagnant $\iff \exists c \in \{1, 2, 3\}, (c \leq n \text{ et } n - c \text{ est perdant})$. Caractériser par négation les nombres perdants.
- Montrer par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: n est perdant si et seulement si $4 \mid n$.
- Avec 2026 jetons, Amine joue contre Basma et commence. Qui peut s'assurer la victoire ? Comment ?
- Variante* : on retire 1, 3 ou 4 jetons. Trouver les nombres perdants de 0 à 14, conjecturer une règle sur le reste de la division par 7, la démontrer. Qui gagne avec 2026 jetons ?

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 49

- Montrer par l'absurde que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$ (écrire $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux ; « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair »).
- Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (élever au carré). En déduire que $\sqrt{3} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$: supposer $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r \in \mathbb{Q}$, isoler $\sqrt{5}$, élever au carré, isoler la partie rationnelle, élever de nouveau au carré.
- Autre preuve pour $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.* a) Montrer que $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est solution de $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. b) Si $\frac{p}{q}$ en est une solution ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux), montrer que $q^4 = p^2(10q^2 - p^2)$ et $p^4 = q^2(10p^2 - q^2)$, puis (diviseur premier) que $p = \pm 1$ et $q = 1$. Conclure.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

20 Propositions et connecteurs

Deux propositions sont équivalentes si elles ont la même table de vérité ; $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q fausse.

Exercice 31 Valeurs de vérité et connecteurs ★

corrigé p. 50

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « n est pair », $Q(n)$: « n est un multiple de 3 », $R(n)$: « $n > 10$ ».
 - Pour $n \in \{4, 7, 9, 12, 15\}$, donner dans un tableau la valeur de vérité de $P(n)$, $Q(n)$, $R(n)$, $P(n)$ et $Q(n)$, $P(n)$ ou $R(n)$, $Q(n) \Rightarrow P(n)$, $R(n) \Leftrightarrow Q(n)$ et $P(n)$ ou $Q(n)$.
 - Pour quels entiers n de 1 à 20 la proposition $(P(n) \Rightarrow Q(n))$ et $R(n)$ est-elle vraie ?
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A(x)$: « $x > 1$ » et $B(x)$: « $x^2 < 4$ ». Écrire comme un intervalle ou une réunion d'intervalles l'ensemble des réels x pour lesquels est vraie : $A(x)$ et $B(x)$; $A(x)$ ou $B(x)$; $A(x) \Rightarrow B(x)$; $B(x) \Rightarrow A(x)$; $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Exercice 32 Tables de vérité ★

corrigé p. 50

- Dresser la table de vérité de $A = (P \text{ et } \bar{Q})$ ou Q , $B = P \Rightarrow (\bar{P} \Rightarrow Q)$, $C = (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ et $D = (P \Rightarrow \bar{P}) \Leftrightarrow \bar{P}$. Lesquelles sont des tautologies ? Les traduire en français. Trouver une proposition plus simple équivalente à A , puis à C .
- Dans un programme informatique, l'instruction « si P alors Q , sinon R » se traduit par $E = (P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{P} \Rightarrow R)$. Dresser la table de vérité de E , puis montrer que $E \Leftrightarrow (P \text{ et } Q)$ ou $(\bar{P} \text{ et } R)$.

Exercice 33 Lois logiques par le calcul ★★

corrigé p. 51

- Sans table de vérité, à l'aide des lois du cours (Morgan, distributivités, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$...), démontrer :
 - $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)$;
 - $((P \Rightarrow R) \text{ ou } (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \Rightarrow R)$;
 - $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \text{ et } R))$;
 - $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow \bar{Q})) \Leftrightarrow \bar{P}$ (pourquoi est-ce le principe du raisonnement par l'absurde ?).
- Le cycle d'implications. Montrer que $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P)) \Leftrightarrow ((P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R))$. Application : pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que « $x^2 - 4x + 3 < 0$ », « $|x - 2| < 1$ » et « $1 < x < 3$ » sont équivalentes en ne démontrant que trois implications.

Exercice 34 Du langage courant aux symboles ★★

corrigé p. 51

- Avec P : « Sami révise », Q : « Sami réussit son devoir », R : « Sami sort le soir », traduire :
 a) « Sami réussit son devoir seulement s'il révise. » b) « Il suffit que Sami révise pour qu'il réussisse. » c) « Sami ne réussit jamais sans réviser. » d) « Sami ne sort le soir que s'il a révisé. » e) « Sami révise ou sort le soir, mais pas les deux. » f) « Sami réussit si et seulement s'il révisé sans sortir le soir. » Quelles phrases sont équivalentes ? Nier a), b) et e) en français, sans « il est faux que ».
- Relier les propositions de chaque couple $(x, y \text{ réels})$ par le symbole le plus précis parmi $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ (contre-exemple pour toute implication fausse) ; la première est-elle une condition nécessaire, suffisante, ou nécessaire et suffisante pour la seconde ?
 a) « $|x - 3| < 1$ » et « $2 < x < 4$ » ; b) « $x^2 > 2x$ » et « $x > 2$ » ; c) « $xy > 0$ » et « $x > 0$ et $y > 0$ » ; d) « $x + y > 0$ et $xy > 0$ » et « $x > 0$ et $y > 0$ » ; e) « $x + y \in \mathbb{Z}$ et $xy \in \mathbb{Z}$ » et « $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ ».

Exercice 35 L'additionneur de Boole ★★★

corrigé p. 52

On code **V** par 1 et **F** par 0. En base deux, $P + Q + R = 2c + s$ (s, c valant 0 ou 1) : s est vraie si et seulement si un nombre impair de P, Q, R sont vraies, et la retenue c si au moins deux le sont.

- Dresser la table de vérité de s et de c en fonction de P, Q, R .
- On définit le « ou exclusif » (« P ou bien Q ») par $P \oplus Q = (P \text{ ou } Q) \text{ et } \overline{P \text{ et } Q}$.
 a) Montrer que $P \oplus Q \Leftrightarrow \overline{P \text{ et } Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } \overline{Q})$, puis que $s \Leftrightarrow (P \oplus Q) \oplus R$.
 b) *Le masque jetable.* Montrer que $(P \oplus K) \oplus K \Leftrightarrow P$. Comment deux amis partageant une clé secrète (des bits K) peuvent-ils échanger un message codé ?
- a) Justifier que $c \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (Q \text{ et } R) \text{ ou } (R \text{ et } P)$. b) Montrer que $c \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (R \text{ et } (P \oplus Q))$ (calcul de la retenue par un circuit).

Exercice 36 Une enquête et un règlement ★★★

corrigé p. 52

- Qui a effacé le tableau ? Amine, Basma, Chadi et Dounia sont soupçonnés (il peut y avoir plusieurs coupables) ; on note A : « Amine est coupable », et de même B, C, D . On sait que : (1) si Amine est coupable, Basma l'est aussi ; (2) Chadi est coupable ou Dounia est innocente ; (3) Basma et Chadi ne sont pas coupables tous les deux ; (4) si Dounia est innocente, Amine est coupable ; (5) Chadi n'est coupable que si Amine l'est.
 a) Traduire (1) à (5). b) En distinguant les cas « D vraie » et « D fausse », trouver le ou les coupables. La solution est-elle unique ? c) Que pourrait-on conclure sans le fait (5) ?
- Dans un club, on note pour chaque membre T : « il fait du théâtre », M : « il fait de la musique », S : « il fait du sport ». Règlement : (R1) tout membre qui ne fait pas de théâtre fait de la musique ; (R2) aucun membre ne fait à la fois de la musique et du sport ; (R3) tout membre qui fait du théâtre fait du sport.
 a) Traduire chaque règle. b) Montrer que le règlement équivaut à $(T \Leftrightarrow S)$ et $(M \Leftrightarrow \overline{T})$; décrire en une phrase les membres en règle. Peut-on supprimer une des règles ?

21 Quantificateurs et négations

Un « $\forall$ » se prouve sur un élément quelconque et se réfute par **un** contre-exemple ; un « $\exists$ » se prouve par un exemple. Pour nier, on échange $\forall$ et $\exists$, puis on nie la fin.

Exercice 37 Lire et juger ★

corrigé p. 53

Traduire en français, puis donner la valeur de vérité (avec une preuve ou un contre-exemple) :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| + x \geq 0$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 9} > x + 3$; c) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n = 2026$;
 d) $\exists! x \in \mathbb{R}, x|x| = -4$; e) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 3n$ est pair ; f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \mid 2^n$;
 g) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^2+1} < M$; h) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y^2 = 1$; i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m^2 \leq n < (m+1)^2$.

Exercice 38 Nier sans se tromper ★

corrigé p. 53

- Écrire la négation de chaque proposition, puis dire laquelle, de la proposition ou de sa négation, est vraie :
 a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 1 \Rightarrow x > 1)$; b) $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 1 \text{ est premier et } n \text{ est impair})$; c) $\forall \varepsilon \in]0, +\infty[, \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} < \varepsilon$;
 d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$; e) $\exists! x \in \mathbb{R}, x^3 = x$ (nier « un et un seul », c'est dire « aucun, ou au moins deux »).
- Nier sans utiliser « il est faux que » : a) « Tous les élèves de la classe ont au moins une note supérieure ou égale à 15. » b) « Il existe un bus qui s'arrête à toutes les stations de la ville. » c) « Chaque fois que l'équipe du lycée joue à domicile, elle gagne ou fait match nul. » d) « Personne n'a résolu tous les exercices du devoir. »

Exercice 39 Le tableau des exercices ★★

corrigé p. 54

Le tableau indique les exercices (e_1 à e_5) résolus par quatre élèves. On note $R(x, y)$: « l'élève x a résolu l'exercice y » ; ci-dessous, x décrit les élèves et y les exercices.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
Ali	V	F	V	F	F
Badr	F	F	V	V	F
Chama	V	F	V	F	V
Dina	F	F	V	F	F

- Traduire en français et donner la valeur de vérité de : $P_1 : \forall x, \exists y, R(x, y)$; $P_2 : \exists y, \forall x, R(x, y)$; $P_3 : \forall y, \exists x, R(x, y)$; $P_4 : \exists x, \forall y, R(x, y)$; $P_5 : \exists! y, \forall x, R(x, y)$; $P_6 : \exists x, \exists! y, R(x, y)$; $P_7 : \exists y, \exists! x, R(x, y)$.
- Écrire et traduire les négations de P_3 et P_4 . Combien de cases faut-il changer, au minimum, pour rendre P_3 vraie ? pour rendre P_4 vraie ?
- Montrer que, quel que soit le tableau, $P_2 \Rightarrow P_1$. Donner un tableau à deux élèves et deux exercices où P_1 est vraie et P_2 fausse.

Exercice 40 Fonctions : traduire, nier, prouver ★★

corrigé p. 54

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- Traduire avec des quantificateurs, puis nier : a) « f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ » ; b) « f ne prend que des valeurs entières » ; c) « f prend au moins une valeur strictement négative ».

2. Soit $g(x) = \frac{4x}{x^2+4}$. a) Montrer que $|g(x)| \leq 1$ pour tout réel x , et que g admet un maximum. b) À l'aide des négations du 1, montrer que g n'est pas strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, ne prend pas que des valeurs entières, et prend une valeur strictement négative.
3. Soit $h(x) = |x - 3| + x$. Montrer que h admet un minimum (atteint en une infinité de réels), qu'elle n'est pas majorée (écrire d'abord la négation de « h est majorée »), et qu'elle n'est ni paire ni impaire, bien que $h(-1) = h(1)$.

Exercice 41 Quantificateurs et connecteurs ★★★

corrigé p. 55

$P(x)$ dépend d'une variable x d'un ensemble E ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) ; la proposition R ne dépend pas de x .

1. En distinguant les cas « R vraie » et « R fausse », montrer :
- a) $(\forall x, (R \text{ ou } P(x))) \iff (R \text{ ou } (\forall x, P(x)))$; b) $(\exists x, (R \text{ et } P(x))) \iff (R \text{ et } (\exists x, P(x)))$;
- c) $(\exists x, (P(x) \Rightarrow R)) \iff ((\forall x, P(x)) \Rightarrow R)$. Pour quels réels a est vraie :
- d) $\forall x \in \mathbb{R}, (a \geq 1 \text{ ou } x^2 + a \geq 0)$? e) $\exists x \in \mathbb{R}, (a \leq 0 \text{ et } x^2 + ax + 1 = 0)$?
2. *Le paradoxe du buveur.* Dans un café où il y a au moins un client, montrer qu'il existe un client x tel que : si x boit du thé, alors tous les clients boivent du thé. Est-ce vraiment un paradoxe ?

Exercice 42 Fonctions périodiques ★★★

corrigé p. 55

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique* s'il existe un réel $T > 0$ (une période) tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. On note $E(x)$ la partie entière de x : l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$.

1. À l'aide de la négation de « f est périodique », montrer que $u(x) = x^2$ n'est pas périodique, puis que $w(x) = x^3 - 4x$ ne l'est pas (le réel x à trouver dépend de T).
2. Soit $h(x) = x - E(x)$. Montrer que $0 \leq h(x) < 1$, que h est périodique de période 1, et que h n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f une fonction périodique de période T .
- a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x + nT) = f(x)$. En déduire que $f(x - nT) = f(x)$.
- b) Montrer que si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est constante.

22

Contraposée et absurde

Contraposée : pour prouver $P \Rightarrow Q$, on prouve $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$. Absurde : on suppose le contraire et l'on aboutit à une contradiction. On annonce le raisonnement dès la première ligne.

Exercice 43 Contraposée : premiers pas ★

corrigé p. 56

Démontrer par contraposition (écrire d'abord la contraposée), puis écrire la réciproque et dire si elle est vraie.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n^3 + 1$ est pair, alors n est impair. 2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Si ab est impair, alors a et b sont impairs.
3. Soit x un réel non nul. Si $x + \frac{1}{x} < 2$, alors $x < 0$. 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.

Exercice 44 L'absurde : premiers pas ★

corrigé p. 56

Démontrer par l'absurde que :

- il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $15a + 21b = 2026$;
- il n'existe pas de plus grand rationnel strictement inférieur à 1 ;
- le réel 2 est l'unique solution de l'équation $x^5 + x = 34$;
- pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 45 Rationnel ou irrationnel ? ★★

corrigé p. 56

On admet que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels (cours).

- Soit $x \neq -1$ un réel irrationnel. Montrer par contraposition que $\frac{2x+1}{x+1}$ est irrationnel.
- Montrer que si x^2 et x^5 sont rationnels, x l'est aussi ; en déduire que si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x^2 \notin \mathbb{Q}$ ou $x^5 \notin \mathbb{Q}$.
- Vrai ou faux ? Pour tout réel irrationnel x : a) x^2 est irrationnel ; b) $x + \sqrt{2}$ est irrationnel ; c) $x + \frac{1}{x}$ est irrationnel ; d) si $x > 0$, $\sqrt{x}$ est irrationnel.
- a) Soient a, b, c, d rationnels tels que $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$. Montrer par l'absurde que $b = d$, puis que $a = c$.
b) Trouver les rationnels a, b tels que $(a + b\sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$; simplifier $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Exercice 46 Pavages et coloriages ★★

corrigé p. 57

Un damier est colorié comme un échiquier (deux cases voisines, ayant un côté commun, sont de couleurs différentes). Un domino recouvre deux cases voisines ; *paver* une région, c'est la recouvrir de dominos sans chevauchement ni débordement.

- Montrer qu'une région pavable a autant de cases blanches que de noires. Écrire la contraposée.
- On retire d'un damier 6×6 deux coins opposés. Montrer que la région obtenue n'est pas pavable.
- On retire une seule case d'un damier 5×5 dont les coins sont noirs. a) Compter les cases de chaque couleur selon la couleur de la case retirée ; en déduire que le pavage est impossible si l'on retire une case voisine d'un coin. b) Proposer un pavage lorsque la case retirée est la case centrale.
- La réciproque de la propriété du 1 est-elle vraie ?

Exercice 47 Le triangle équilatéral impossible ★★★

corrigé p. 57

Le plan est muni d'un repère orthonormé ; un *point entier* est un point à coordonnées entières. On admet que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et que l'aire du triangle OBC , où $B(a, b)$ et $C(c, d)$, vaut $\frac{1}{2}|ad - bc|$.

- Montrer que le carré de la distance de deux points entiers est entier, et que l'aire d'un triangle à sommets entiers est rationnelle.
- Montrer qu'un triangle équilatéral de côté ℓ a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$. En déduire, par l'absurde, qu'aucun triangle équilatéral n'a ses trois sommets en des points entiers.
- a) Montrer qu'aucun triangle équilatéral n'a pour sommets trois points à coordonnées rationnelles. b) En déduire qu'aucun hexagone régulier n'a ses six sommets en des points entiers (alors que $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, 3)$ forment un carré).

Exercice 48 Poignées de main ★★★

corrigé p. 58

Dans un groupe de $n \geq 2$ personnes, certaines se sont serré la main (au plus une fois par paire) ; chacune compte les mains qu'elle a serrées.

1. Montrer que la somme des n nombres obtenus est le double du nombre de poignées de main, puis, par l'absurde, que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.
2. Dans une classe de 25 élèves, chacun peut-il avoir exactement trois amis dans la classe (l'amitié étant réciproque) ? Et avec 26 élèves ?
3. Montrer par l'absurde que, dans tout groupe de $n \geq 2$ personnes, deux personnes au moins ont serré le même nombre de mains.

23

Cas par cas et équivalences

On **découpe** le problème en cas qui couvrent toutes les possibilités (signe, parité, reste, valeur d'un paramètre), puis on **transforme** chaque cas par des équivalences justifiées, sans perdre ni ajouter de solution ; à la fin d'un cas, on vérifie que les solutions trouvées respectent l'hypothèse du cas.

Exercice 49 Valeurs absolues : un cas à la fois ★

corrigé p. 59

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. a) $|2x - 3| = x + 1$; b) $||x - 1| - 2| = 1$; c) $|x - 3| \geq 2x$.
2. $|x^2 - 4| = 2x + 4$ (distinguer les cas $|x| \geq 2$ et $|x| < 2$, et représenter ces cas sur une droite graduée).

Exercice 50 Deux cas suffisent ★

corrigé p. 59

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $1 + (-1)^n(2n - 1)$ est un multiple de 4.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$: a) $n + (-1)^n = 7$; b) $n + (-1)^n = 8$.
3. Pour deux réels a et b , on note $\max(a, b)$ le plus grand et $\min(a, b)$ le plus petit des deux.
a) Montrer que $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ et $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$. b) En déduire $\max(a, b) + \min(a, b)$ et $\max(a, b) \times \min(a, b)$. c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\max(x, 2 - x) = 3$.

Exercice 51 Racines entières : parité et restes ★★

corrigé p. 60

Soit b, c, d trois entiers relatifs et $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Montrer que, pour tous entiers m et n , l'entier $P(m) - P(n)$ est un multiple de $m - n$.
2. On suppose $P(0)$ et $P(1)$ impairs. En distinguant n pair et n impair, montrer que $P(n)$ est impair pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis que l'équation $P(x) = 0$ n'a aucune solution entière. Application : $x^3 + 4x^2 + 7x + 2027 = 0$.
3. On suppose qu'aucun des entiers $P(0), P(1), P(2)$ n'est multiple de 3. Montrer que $P(x) = 0$ n'a aucune solution entière (on admet que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = 3q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1, 2\}$). Application : $x^3 + 2x + 4 = 0$; la question 2 permettait-elle de conclure ?

Exercice 52 Bien rédiger des équivalences ★★

corrigé p. 60

- Un élève écrit : « $\frac{2x-1}{x+2} \leq 1 \iff 2x-1 \leq x+2 \iff x \leq 3$, donc $S =]-\infty, -2[\cup]-2, 3]$ ». a) Vérifier que -3 n'est pas solution. Quelle équivalence est fautive, et pourquoi ? b) Résoudre correctement l'inéquation.
- Sans calculatrice, comparer $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ et $3 + \sqrt{3}$ par équivalences successives.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $x^2 - |x| - 2 \leq 0$ (poser $t = |x|$) ; b) $|x-1| < |2x+4|$ (justifier l'élévation au carré).

Exercice 53 Une équation à paramètre ★★★

corrigé p. 61

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue réelle x : $(E_m) : (m+1)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$.

- Résoudre (E_{-1}) . Pour $m \neq -1$, calculer le discriminant réduit Δ' , discuter selon m le nombre de solutions de (E_m) , et résoudre (E_m) pour $m = -\frac{3}{2}$.
- Montrer que, pour aucun réel m , (E_m) n'admet deux solutions distinctes strictement positives. Pour quels m admet-elle deux solutions distinctes strictement négatives ? deux solutions de signes contraires ?
- La proposition « $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (m+1)x^2 + 2mx + m - 3 > 0$ » est-elle vraie ? Écrire sa négation. Pour quels m a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, (m+1)x^2 + 2mx + m - 3 < 0$?

Exercice 54 Fractions égyptiennes ★★★

corrigé p. 61

Le papyrus Rhind (Égypte, vers -1650) écrit les fractions comme des sommes d'inverses d'entiers.

- Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (montrer que $x > 2$ et $y > 2$, puis que $(x-2)(y-2) = 4$).
- On cherche les triplets (x, y, z) d'entiers naturels non nuls tels que $x \leq y \leq z$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. a) Montrer que $x \geq 2$, puis que $x \leq 3$ (comparer à $\frac{3}{x}$). b) Traiter les cas $x = 2$ et $x = 3$, puis conclure.
- Combien y a-t-il de triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$, sans condition d'ordre, tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$?

24

Raisonnement par récurrence

Écrire d'abord la propriété $P(n)$, puis rédiger les trois étapes : **initialisation** ($P(n_0)$ est vraie), **hérédité** (si $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie), **conclusion**.

Exercice 55 Deux sommes ★

corrigé p. 62

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (3k^2 - k)$. a) Écrire S_3 sans le symbole Σ , puis calculer S_1, S_2, S_3 . b) Montrer par récurrence que $S_n = n^2(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. c) Retrouver ce résultat à l'aide des sommes Σk et Σk^2 du cours.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = -1 + 4 - 9 + \dots + (-1)^n n^2$. a) Calculer T_1, T_2, T_3, T_4 . b) Montrer que $T_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. c) Calculer $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$.

Exercice 56 Divisibilités ★

corrigé p. 62

Démontrer par récurrence que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, 19 divise $3^{3n+1} + 2^{3n+4}$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ (la somme de trois cubes consécutifs) ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 2^n divise $P_n = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$ (montrer d'abord que $P_{n+1} = 2(2n+1)P_n$).

Exercice 57 Inégalités et premier rang ★★

corrigé p. 63

1. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $0,99^{100} \leq \frac{1}{2}$ et $0,9^{30} \leq \frac{1}{4}$ (un prix qui baisse de 1 % par an pendant 100 ans est au moins divisé par 2).
2. On rappelle que $0! = 1$ et $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \geq 1$. a) Comparer $n!$ et 3^n pour $0 \leq n \leq 7$. b) Montrer que $n! > 3^n$ pour tout entier $n \geq 7$. c) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n! > 3^n$.

Exercice 58 Deviner, puis démontrer ★★

corrigé p. 63

1. On pose $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. a) Calculer u_1, u_2, u_3 . b) Montrer que $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2$. c) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis la démontrer.
2. On pose $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi(t) = t - \frac{t^2}{2}$.
a) Montrer que, pour $0 \leq a \leq b \leq 1$: $\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)$; en déduire que φ est croissante sur $[0, 1]$.
b) Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{2}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. c) En déduire un encadrement de x_{99} .

Exercice 59 Une identité alternée ★★★

corrigé p. 64

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}$ et $B_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

1. Calculer A_1, B_1, A_2, B_2 .
2. Montrer que $A_{n+1} - A_n = B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$, puis, par récurrence, que $A_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{2}{3} - \frac{1}{6n} \leq B_n \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$.
4. En déduire que $0,66 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} < 0,75$.

Exercice 60 Découper un carré en n carrés ★★★

corrigé p. 64

Un entier $n \geq 1$ est *bon* si l'on peut découper un carré en n carrés (de tailles quelconques, sans chevauchement ni trou). Ainsi 1 et 4 sont bons.

1. Montrer que, si n est bon, alors $n+3$ est bon. Montrer, par des figures, que 6, 7 et 8 sont bons.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 6$, la propriété $Q(n)$: « $n, n+1$ et $n+2$ sont bons » est vraie. Conclure.
3. On admet que les côtés des petits carrés sont parallèles à ceux du grand. a) Montrer qu'un petit carré qui contient deux sommets du grand carré est le grand carré lui-même. b) En déduire, par l'absurde, que 2 et 3 ne sont pas bons. (On admet que 5 n'est pas bon : les entiers bons sont 1, 4 et tous les $n \geq 6$.)

25

Défis de concours

Six problèmes où se combinent analyse et synthèse, disjonction des cas, absurde, récurrence simple ou forte, et une attention constante à l'ordre des quantificateurs.

Exercice 61 Analyse, puis synthèse ★★★★★

corrigé p. 65

- Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x f(-x) = x + 1$.
- Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + y^2$.
- Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) = n + 2$. a) Montrer par récurrence que $f(n) \geq n + f(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. b) On pose $a = f(0)$. Montrer que $f(a) = 2$, puis que $a = 1$. c) En déduire f , et vérifier qu'elle convient.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$. a) Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$.
b) Soit x, y réels, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_k = y + \frac{k}{n}(x - y)$ ($0 \leq k \leq n$). En écrivant $f(x) - f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))$, montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{(x-y)^2}{n}$. c) Par l'absurde, montrer que f est constante. Quelles fonctions conviennent ?

Exercice 62 Des phrases qui parlent d'elles-mêmes ★★★★★

corrigé p. 65

Une feuille porte N phrases numérotées de 1 à N . On cherche à leur attribuer des valeurs de vérité (**V** ou **F**) de façon *cohérente* : chaque phrase déclarée **V** dit vrai, chaque phrase déclarée **F** dit faux.

- $N = 10$; la phrase k dit : « Exactement k des phrases de cette feuille sont fausses. » a) Montrer que deux phrases ne peuvent pas être vraies en même temps, puis qu'au moins une est vraie. b) En déduire la seule attribution cohérente. c) Que se passe-t-il pour cette liste avec $N = 1$? Faire le lien avec le cours.
- $N = 10$; la phrase k dit : « Au moins k des phrases de cette feuille sont fausses. » On note F le nombre de phrases fausses. a) Montrer que la phrase k est vraie si et seulement si $k \leq F$, puis qu'il y a F phrases vraies. b) Conclure. c) Même liste avec $N = 11$: montrer qu'aucune attribution n'est cohérente. Pour quels N existe-t-il une attribution cohérente ?

Exercice 63 Premier ou composé ? ★★★★★

corrigé p. 66

- a) Vérifier que $n^5 + n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$. b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, $n^5 + n + 1$ est premier si et seulement si $n = 1$.
- Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'entier $10^m - (-1)^m$ est divisible par 11.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = 1 + 100 + 100^2 + \dots + 100^n$: $A_1 = 101, A_2 = 10\,101, A_3 = 1\,010\,101$, etc. On note $m = n + 1$.
a) Montrer que $99A_n = (10^m - 1)(10^m + 1)$. b) Si $m = 2p$ avec $p \geq 2$, montrer que $A_n = (10^m + 1)A_{p-1}$.
c) Si m est impair et $m \geq 3$, montrer que $\frac{10^m - 1}{9}$ et $\frac{10^m + 1}{11}$ sont des entiers strictement supérieurs à 1 de produit A_n .
d) Parmi les nombres 101, 10 101, 1 010 101, ..., lesquels sont premiers ?

Exercice 64 Les chapeaux des prisonniers ★★★★★

corrigé p. 66

n prisonniers ($n \geq 2$) $P_1, \dots, P_n$ sont en file indienne, tournés vers l'avant : P_k voit les chapeaux de $P_1, \dots, P_{k-1}$, mais ni le sien ni ceux des suivants. Chacun reçoit un chapeau blanc ou noir ; puis, dans l'ordre $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$, chacun annonce à voix haute « blanc » ou « noir » (tous entendent). Ceux qui annoncent la couleur de leur chapeau sont libérés. Avant l'épreuve, ils choisissent une *stratégie* : une règle qui dit à chacun quoi annoncer selon ce qu'il voit et entend.

1. Montrer que, pour toute stratégie, il existe une répartition des chapeaux pour laquelle P_n n'est pas libéré.
2. *Parité* : P_n annonce « noir » si le nombre de chapeaux noirs qu'il voit est impair, « blanc » sinon. Expliquer comment P_{n-1} trouve sa couleur, puis montrer par récurrence sur $j \in \{1, \dots, n-1\}$ que $P_{n-1}, \dots, P_{n-j}$ annoncent leur vraie couleur. Combien de prisonniers sont libérés, au moins ?
3. On note s une stratégie et r une répartition. Les propositions suivantes sont-elles vraies ? A : « $\exists s, \forall r$, au moins $n-1$ prisonniers sont libérés » ; B : « $\exists s, \forall r$, tous sont libérés » ; C : « $\forall r, \exists s$, tous sont libérés ». Commenter.
4. Avec des chapeaux numérotés 0, 1 ou 2 (chacun annonce un numéro), proposer une stratégie qui libère au moins $n-1$ prisonniers.

Exercice 65 Payer avec des pièces de 5 et de 7 ★★★★★

corrigé p. 67

Dans un pays imaginaire, il n'existe que des pièces de 5 et de 7 dirhams. Un entier naturel n est *payable* s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = 5a + 7b$.

1. a) En discutant selon b , montrer que 23 n'est pas payable. b) Lister les entiers non payables compris entre 0 et 23.
2. a) Montrer que 24, 25, 26, 27 et 28 sont payables. b) Par une récurrence forte, montrer que tout entier $n \geq 24$ est payable.
3. a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ s'écrit d'une seule façon $n = 5a + 7b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (étudier les restes de 0, 7, 14, 21, 28 dans la division par 5). b) Montrer que n est payable si et seulement si, dans cette écriture, $a \geq 0$. c) Pour $0 \leq n \leq 23$, montrer qu'exactly un des entiers n et $23-n$ est payable. En déduire, sans la liste de 1.b), le nombre d'entiers naturels non payables.

Exercice 66 Le problème de Josèphe ★★★★★

corrigé p. 67

n personnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n , sont assises en cercle dans cet ordre. En partant de 1, on épargne une personne, on élimine la suivante, on épargne la suivante, etc. (les éliminés quittent le cercle), jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une, dont on note $J(n)$ le numéro. Pour $n = 5$, on élimine 2, 4, 1, 5 : $J(5) = 3$.

1. Calculer $J(n)$ pour $1 \leq n \leq 8$.
2. Soit $n \geq 1$. a) Avec $2n$ personnes, montrer qu'après un tour il reste 1, 3, ..., $2n-1$ et qu'on recommence en épargnant 1 ; en déduire $J(2n) = 2J(n) - 1$. b) Avec $2n+1$ personnes, montrer qu'après l'élimination de 2, 4, ..., $2n$, puis de 1, on recommence avec 3, 5, ..., $2n+1$ en épargnant 3 ; en déduire $J(2n+1) = 2J(n) + 1$.
3. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ la propriété $P(m)$: « pour tout entier ℓ tel que $0 \leq \ell < 2^m$, $J(2^m + \ell) = 2\ell + 1$ ».
4. Calculer $J(100)$ et $J(2026)$. Pour quels entiers n a-t-on $J(n) = 1$? $J(n) = n$?

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

26 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

- a) Proposition **F** : $221 = 13 \times 17$. b) Proposition **F** : $2026 = 3 \times 675 + 1$. c) Proposition **F** : $\sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$. d) Proposition **V** : $\frac{7}{8} = 0,875 \in \mathbb{D}$. e) Pas une proposition (un ordre). f) Proposition **F**. g) Pas une proposition : sa valeur de vérité dépend de x (fonction propositionnelle, vraie seulement pour $x = 3$). h) Proposition **V** : $(2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$. i) Pas une proposition (une question).
- 2^n+1 vaut 2, 3, 5, 9, 17, 33 pour $n = 0, \dots, 5$: $P(0)$ **F**, $P(1)$ **V**, $P(2)$ **F**, $P(3)$ **V**, $P(4)$ **F**, $P(5)$ **V**. Conjecture : $P(n)$ est vraie si et seulement si n est impair.
- $Q(0)$: $1 < 0$, **F** ; $Q(\frac{1}{2})$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, **F** ; $Q(1)$: $0 < 1$, **V** ; $Q(3)$: $2 < 3$, **V**. Si $x \leq 0$: $|x-1| \geq 0 \geq x$, donc $Q(x)$ est fausse. Si $x > 0$: $|x-1| < x \iff -x < x-1 < x \iff x > \frac{1}{2}$. Ainsi $Q(x)$ est vraie $\iff x > \frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 2

- P est **V** ; Q est **F** ($3^5 = 243 < 250$) ; R est **V** ($3,1^2 = 9,61 < 10$). Donc : $\bar{Q}$: **V** ; P et Q : **F** ; P ou Q : **V** ; $Q \Rightarrow P$: **V** (Q est fausse) ; $P \Rightarrow Q$: **F** (**V** $\Rightarrow$ **F**) ; $(P$ et $R) \Rightarrow Q$: **F** (**V** $\Rightarrow$ **F**) ; $\bar{P} \Leftrightarrow Q$: **V** (**F** $\Leftrightarrow$ **F**) ; $(P$ ou $Q)$ et $\bar{R}$: **F** (car $\bar{R}$ est fausse).
- $x \in [-1, 2[\iff (x \geq -1 \text{ et } x < 2)$, donc, par la loi de Morgan : $x \notin [-1, 2[\iff (x < -1 \text{ ou } x \geq 2)$. De même, $\overline{(x \leq -1 \text{ ou } x > 3)} \iff (x > -1 \text{ et } x \leq 3) \iff -1 < x \leq 3$.

■ Corrigé de l'exercice 3

On note $T = Q \Rightarrow R$, $U = (P \text{ et } Q) \Rightarrow R$, $W = (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$, puis (5) = $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$ et (8) = $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	P ou Q	P et Q	(5)	P $\Leftrightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	(8)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V

P	Q	R	T	P $\Rightarrow$ T	P et Q	U	P $\Rightarrow$ Q	W
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	F

- Table de gauche : les colonnes (5) et $P \Leftrightarrow Q$ coïncident : $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)] \iff (P \Leftrightarrow Q)$.

- La colonne (8) ne contient que des **V** : c'est une tautologie. Une proposition vraie est impliquée par n'importe quelle proposition.
- Table de droite : les colonnes $P \Rightarrow T$ et U sont identiques : l'équivalence est une tautologie.
- Non** : lignes 6 et 8 (P et R fausses), $W = (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ est fausse alors que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est vraie. L'implication n'est pas « associative » : les parenthèses comptent.

■ Corrigé de l'exercice 4

- $x = 2 \Rightarrow x^2 = 2x$ ($4 = 4$), réciproque fausse ($x = 0$) : $x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 2$; la première est **nécessaire, non suffisante**.
 - $|x| < 3 \Leftrightarrow x^2 < 9$ (car $x^2 = |x|^2$ et deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés) : **nécessaire et suffisante**.
 - $24 \mid n \Rightarrow (4 \mid n \text{ et } 6 \mid n)$ car $24 = 4 \times 6$; réciproque fausse : $n = 12$. La première est **suffisante, non nécessaire**.
 - $\Leftrightarrow$: si $3 \mid n$ et $n = 4m$, le nombre premier 3 divise $4m$ sans diviser 4, donc $3 \mid m$ et $12 \mid n$. **Nécessaire et suffisante** (en c), 4 et 6 ont le facteur commun 2).
 - Aucune implication** : $x = 0$ vérifie $x > -1$ mais $x^2 = 0 \leq 1$; $x = -2$ vérifie $x^2 > 1$ mais $x < -1$. **Ni l'une ni l'autre**.
 - $\Rightarrow$ (les diagonales d'un losange sont perpendiculaires) ; réciproque fausse : le « cerf-volant » $A(0, 1), B(1, 0), C(0, -3), D(-1, 0)$ a des diagonales perpendiculaires mais $AB = \sqrt{2} \neq BC = \sqrt{10}$. **Suffisante, non nécessaire**.
- L'implication est **V**. Réciproque : « si les diagonales d'un quadrilatère ont la même longueur, c'est un rectangle » : **F** (trapèze isocèle $A(0, 0), B(4, 0), C(3, 2), D(1, 2)$: $AC = BD = \sqrt{13}$). Contraposée : « si les diagonales n'ont pas la même longueur, ce n'est pas un rectangle » : **V**. Négation : « il existe un rectangle dont les diagonales n'ont pas la même longueur » : **F**.

■ Corrigé de l'exercice 5

- « Pour tout entier naturel n , $n^3 \geq n^2$ » : **V**, car $n^3 - n^2 = n^2(n - 1) \geq 0$ si $n \geq 1$, et $0 \geq 0$.
 - « Pour tout réel x , $x^3 \geq x^2$ » : **F** : $x = -1$ donne $-1 < 1$.
 - « Il existe un réel x tel que $x^2 + 4 = 4x$ » : **V** ($x = 2$).
 - « Il existe un unique réel... » : **V**, car $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
 - « Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x + y = 0$ » : **V** ($y = -x$, qui dépend de x).
 - « Il existe un réel y tel que, pour tout réel x , $x + y = 0$ » : **F** : pour y donné, $x = 1 - y$ donne $x + y = 1 \neq 0$.
 - V** : $y = 0$ convient pour tous les x .
- $\forall x \in [0, +\infty[, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$: **V** ($y = \sqrt{x}$).
 - $\exists d \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, d \mid n$: **V** ($d = 1$).
 - $\exists ! x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$: **V** : $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ et $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$, donc seul $x = -2$ convient.
 - $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 12$: **V** : si $|n| \leq 3, n^2 \leq 9$; si $|n| \geq 4, n^2 \geq 16$.

■ Corrigé de l'exercice 6

- Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 2x$. La proposition est vraie : $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$.
 - Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \neq 3 \text{ ou } x \geq 0)$. La proposition est vraie : $x = -\sqrt{3}$.
 - Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 3 \text{ et } x^2 < 9)$. La proposition est vraie : si $x \geq 3$, alors $x \geq 0$ et $x^2 = x \times x \geq 3 \times 3 = 9$.
 - Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y^2$. La proposition est vraie : $x = 0$ convient, car $0 \leq y^2$ pour tout y .
 - Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (m \leq n \text{ ou } m \geq n + 2)$. La proposition est vraie : $m = n + 1$.
- « f s'annule » : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$; négation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. « f est impaire » : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$; négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq -f(x)$. Négation de la phrase : « Il existe une ville du Maroc dans laquelle aucun élève ne parle trois langues. »
- On échange $\forall$ et $\exists$ et on nie la fin : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$. C'est la négation qui est vraie ($x = 0$) ; la proposition de départ est fausse, et celle de l'élève aussi ($x = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 7

1. $S_1 = 1 \times 2 = 2$, $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$, $S_3 = 2 + 6 + 12 = 20$. Notons $P(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

Initialisation. $S_1 = 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3}$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} : P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. $P(n)$: « $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ ». **Initialisation.** pour $n = 1$, les deux membres valent $\frac{1}{2}$.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} =$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (Autre preuve : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et la somme « télescope ».)

3. $100 = 3 \times 33 + 1$: $A = \sum_{k=0}^{33} (3k+1) = 3 \sum_{k=0}^{33} k + 34 = 3 \times \frac{33 \times 34}{2} + 34 = \boxed{1717}$. $2187 = 3^7$:
 $B = \sum_{k=1}^7 3^k = \sum_{k=0}^7 3^k - 1 = \frac{3^8-1}{3-1} - 1 = 3280 - 1 = \boxed{3279}$.

■ Corrigé de l'exercice 8

1. $P(n)$: « $4 \mid 5^n - 1$ ». **Initialisation.** $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $5^n - 1 = 4q$ avec $q \in \mathbb{N}$. Alors $5^{n+1} - 1 = 5(4q+1) - 1 = 4(5q+1)$: $P(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \mid 5^n - 1$.
2. a) $P(n)$: « $3 \mid 2^{2n+1} + 1$ ». **Initialisation.** $2^1 + 1 = 3$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $2^{2n+1} + 1 = 3q$ ($q \in \mathbb{N}$), donc $2^{2n+3} + 1 = 4 \times 2^{2n+1} + 1 = 4(3q-1) + 1 = 3(4q-1)$: $P(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 b) Par l'absurde : si 3 divisait $2^{2n} + 1$, il diviserait $2(2^{2n} + 1)$ et $2^{2n+1} + 1$ (question a), donc leur différence, qui vaut 1 : absurde. c) $P(n)$ est vraie pour n impair (a) et fausse pour n pair (b) : la conjecture est démontrée.
3. $1 > 0$, $3 > 1$, $9 > 8$, $27 = 27$, $81 > 64$: $3^n > n^3$ pour $n \in \{0, 1, 2, 4\}$, mais pas pour $n = 3$. $P(n)$: « $3^n > n^3$ ».

Initialisation. $3^4 = 81 > 64 = 4^3$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 4$ et montrons $P(n+1)$. D'une part $3^{n+1} = 3 \times 3^n > 3n^3$; d'autre part $(n+1)^3 = n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \frac{125}{64} n^3 < 3n^3$. Donc $3^{n+1} > (n+1)^3$. **Conclusion.** $3^n > n^3$ pour tout $n \geq 4$ (et donc pour tout $n \neq 3$).

27

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

1. $\overline{P_1}$: $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 - 2x^2 + 2 \leq 0$; $\overline{P_2}$: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 3n + 2$ n'est pas premier ;
 $\overline{P_3}$: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2 - 2y$; $\overline{P_4}$: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + xy + 1 \leq 0$;
 $\overline{P_5}$: $\exists n \in \mathbb{Z}, (n \text{ est pair et } n^2 \text{ n'est pas multiple de } 8)$.
2. P_1 est **V** : $x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$. P_2 est **V** : $n = 0$ donne 2, premier (et seul $n = 0$ convient, car $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$). P_3 est **F** : $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1 \geq -1$, donc $x = -2$ n'est jamais égal à $y^2 - 2y$ ($\overline{P_3}$ est vraie avec $x = -2$). P_4 est **V** : $y = 0$ convient, car $x^2 + 1 > 0$. P_5 est **F** : $n = 2$ est pair et 4 n'est pas multiple de 8.

3. Si $-2 < y < 2$, le discriminant $y^2 - 4$ est négatif : le trinôme $x^2 + xy + 1$ a le signe de 1 pour tout x .
 Si $|y| \geq 2$, $x = -\frac{y}{2}$ donne $1 - \frac{y^2}{4} \leq 0$. Ensemble : $]-2, 2[$. Ensuite $x = y^2 - 2y \iff (y - 1)^2 = x + 1$, qui a une solution y si et seulement si $x + 1 \geq 0$ ($y = 1 + \sqrt{x + 1}$) : $[-1, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 10

1. $P(n)$: « $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ ». **Initialisation.** pour $n = 1$: $1 = 0 \times 2 + 1$.
Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = 2n \times 2^n + 1 = ((n+1) - 1)2^{n+1} + 1$.
Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La somme demandée est $\sum_{k=1}^{10} k 2^{k-1}$ ($512 = 2^9$) : elle vaut $9 \times 2^{10} + 1 = \boxed{9217}$.
2. $P(n)$: « $11 \mid A_n$ ». **Initialisation.** $A_0 = 3^2 + 2 = 11$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $A_n = 11q$. Alors

$$A_{n+1} = 3^{2n+4} + 2^{6n+7} = 9 \times 3^{2n+2} + 64 \times 2^{6n+1} = 9A_n + 55 \times 2^{6n+1} = 11(9q + 5 \times 2^{6n+1})$$

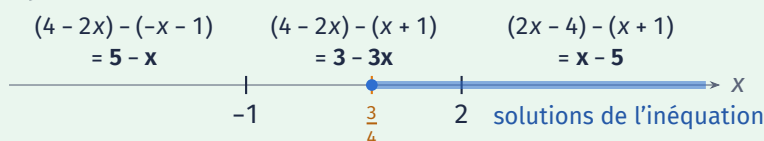
Conclusion. $11 \mid A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A_n est un multiple de 11 et, pour $n \geq 1$, $A_n \geq 3^4 > 11$: A_n n'est pas premier. Comme $A_0 = 11$ est premier : $A_n \text{ est premier} \iff n = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 11

1. a) **Raisonnons par contraposée** : la négation de « $x > 1$ ou $y > 1$ » est « $x \leq 1$ et $y \leq 1$ » (Morgan).
 Si $x \leq 1$ et $y \leq 1$, alors, en ajoutant, $x + y \leq 2$. D'où : $x + y > 2 \Rightarrow (x > 1 \text{ ou } y > 1)$.
 b) **Raisonnons par contraposée** : montrons que si $a \neq 0$, alors $\exists \varepsilon > 0$, $|a| > \varepsilon$ (négation de « $\forall \varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$ »). Le réel $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ est > 0 et $|a| > \frac{|a|}{2}$: c'est démontré.
2. **Raisonnement par l'absurde.** a) $\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} - 1 = 0$; en multipliant par q^2 : $p^2 + pq - q^2 = 0$.
 b) La fraction est irréductible, donc p et q ne sont pas tous deux pairs. Cas 1 : p, q impairs : p^2, pq, q^2 sont impairs, et $p^2 + pq - q^2$ est impair. Cas 2 : p pair, q impair : $p^2 + pq$ est pair et q^2 impair : la somme est impaire. Cas 3 : p impair, q pair : p^2 impair, $pq - q^2$ pair : impair. Un nombre impair n'est pas nul : contradiction. Donc (E) n'a pas de solution rationnelle.
 c) $\Delta = 5$: les solutions sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Si $\sqrt{5}$ était rationnel, $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ serait une solution rationnelle de (E) : impossible. $\boxed{\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}}$.
3. a) $\frac{1}{4} - t(1-t) = t^2 - t + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.
 b) **Par l'absurde**, supposons $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ et $c(1-a) > \frac{1}{4}$. Ces nombres sont positifs : leur produit est $> \frac{1}{64}$. Or ce produit vaut $a(1-a) \times b(1-b) \times c(1-c)$, produit de trois réels de $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ (car $a \geq 0$ et $1-a \geq 0$, etc.) : il est $\leq \frac{1}{64}$. Contradiction : l'un des trois nombres est $\leq \frac{1}{4}$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. On découpe $\mathbb{R}$ aux points -1 et 2 , où s'annulent $x+1$ et $2x-4$:



Cas $x < -1$: $5 - x = x \iff x = \frac{5}{2}$, rejeté ($\frac{5}{2} \geq -1$). Cas $-1 \leq x < 2$: $3 - 3x = x \iff x = \frac{3}{4}$, qui convient. Cas $x \geq 2$: $x - 5 = x \iff -5 = 0$: impossible. $\boxed{S = \left\{\frac{3}{4}\right\}}$.

Inéquation : cas $x < -1$: $5 - x \leq x \iff x \geq \frac{5}{2}$: aucune solution ; cas $-1 \leq x < 2$: $3 - 3x \leq x \iff x \geq \frac{3}{4}$: $\left[\frac{3}{4}, 2\right[$; cas $x \geq 2$: $-5 \leq 0$, toujours vrai : $[2, +\infty[$. $S = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

2. Soit $N = n(n^2 + 5)$. Parité : si n est pair, N est pair ; si n est impair, n^2 est impair et $n^2 + 5$ est pair, donc N est pair.

Restes par 3 : si $n = 3k$, $3 \mid n$; si $n = 3k + 1$, $n^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 6 = 3(3k^2 + 2k + 2)$; si $n = 3k + 2$, $n^2 + 5 = 9k^2 + 12k + 9 = 3(3k^2 + 4k + 3)$. Dans tous les cas, $3 \mid N$.

Enfin $N = 2m$ et le nombre premier 3 divise $2m$ sans diviser 2 : $3 \mid m$, donc $6 \mid n(n^2 + 5)$.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. Les deux membres sont positifs : l'inégalité équivaut à l'inégalité entre leurs carrés.

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}} \iff \frac{x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}}{4} \leq \frac{x+y}{2} \iff 0 \leq x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \iff 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

ce qui est vrai. Égalité $\iff \sqrt{x} = \sqrt{y} \iff x = y$.

2. Une racine carrée est positive, et deux réels positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont :

$$\sqrt{x+7} = x-5 \iff (x-5 \geq 0 \text{ et } x+7 = (x-5)^2) \iff (x \geq 5 \text{ et } x^2 - 11x + 18 = 0) \iff x = 9,$$

car le trinôme a pour racines 2 et 9 : $S = \{9\}$. L'élève a oublié la condition $x - 5 \geq 0$: son « $\iff$ » n'est qu'un « $\Rightarrow$ », et 2 est une solution parasite ($\sqrt{9} = 3$ alors que $2 - 5 = -3$).

3. Il faut $x \geq -7$. Cas $-7 \leq x < 5$: $x - 5 < 0 \leq \sqrt{x+7}$: tous ces réels sont solutions. Cas $x \geq 5$: les deux membres sont positifs, donc l'inéquation équivaut à $x+7 > (x-5)^2 \iff x^2 - 11x + 18 < 0 \iff 2 < x < 9$: on garde $[5, 9[$. $S = [-7, 9[$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ (tableau de signes) : $x^3 < x \iff x < -1$ ou $0 < x < 1$, $S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.
 a) $x < 1$ est **nécessaire** ($S \subset]-\infty, 1[$), non suffisante ($x = -\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$). b) $0 < x < 1$ est **suffisante** ($]0, 1[\subset S$), non nécessaire ($x = -2$: $-8 < -2$). c) $|x| < 1$ n'est **ni nécessaire** ($x = -2$) **ni suffisante** ($x = -\frac{1}{2}$).
2. a) Si $ac < 0$, alors $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ($b^2 \geq 0$ et $-4ac > 0$) : deux solutions distinctes. Condition non nécessaire : $x^2 - 3x + 2 = 0$ a les solutions 1 et 2, avec $ac = 2 > 0$.
 b) Si $ac < 0$: deux solutions x_1, x_2 (a), de produit $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{ac}{a^2} < 0$: de signes contraires. Réciproquement, si $x_1 < 0 < x_2$ sont solutions, $\frac{c}{a} = x_1 x_2 < 0$, donc $ac = a^2 \times \frac{c}{a} < 0$. La condition est **nécessaire et suffisante**.
3. Si $8 \mid n^2$, n^2 est pair donc n est pair : $n = 2m$, et $8 \mid 4m^2$ donne m^2 pair, donc m pair et $4 \mid n$. Réciproquement, $n = 4k$ donne $n^2 = 16k^2$. « $4 \mid n$ » est **nécessaire et suffisant** pour $8 \mid n^2$. Pour $32 \mid n^2$: elle est **nécessaire** ($32 \mid n^2 \Rightarrow 8 \mid n^2 \Rightarrow 4 \mid n$) mais **non suffisante** : $n = 4$, $n^2 = 16$.

■ Corrigé de l'exercice 15

1. $u_1 = 5, u_2 = 11, u_3 = 29$. $P(n)$: « $u_n = 3^n + 2$ ». **Initialisation.** $u_0 = 3 = 3^0 + 2$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $u_{n+1} = 3(3^n + 2) - 4 = 3^{n+1} + 2$; $P(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** $u_n = 3^n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_1 = 2, v_2 = \frac{3}{2}, v_3 = \frac{5}{3}$. $P(n)$: « v_n est défini et $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$ ». **Initialisation.** $v_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$. Alors $v_{n+1} \neq 0$,

donc v_{n+1} est défini, et, la fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{v_n} \leq \frac{2}{3}$, d'où $\frac{3}{2} \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2$. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

3. $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 27$: on conjecture $a_n = n^3$. **Initialisation.** $a_0 = 0 = 0^3$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$: « $a_n = n^3$ » est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $a_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$. **Conclusion.** $a_n = n^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ Corrigé de l'exercice 16

- a) **Faux** : $n = 4$ donne $25 = 5 \times 5$ (et $n = 0$ donne 1, qui n'est pas premier). b) **Faux** : $x = -1$ donne $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ (en fait $\sqrt{x^2} = |x|$). c) **Faux** : $x = 1, y = -1$ donnent $0 \neq 2$.
d) **Vrai** : pour $n \geq 1$, $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; aucun carré d'entier n'est strictement compris entre deux carrés consécutifs. e) **Faux** : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (cours) et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$. f) **Faux** : $x = \frac{1}{2}$: $E(1) = 1$ mais $2E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. g) **Vrai** : $x = \frac{1}{4}$ donne $\frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

28

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

1. Table ci-contre. Avec les lois du cours : $P \uparrow P \iff \overline{P \text{ et } P} \iff \overline{P}$;

$$(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \iff \overline{P \uparrow Q} \iff \overline{\overline{P \text{ et } Q}} \iff P \text{ et } Q ;$$

$$(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \iff \overline{P \uparrow P} \iff \overline{\overline{P \text{ et } P}} \iff P \text{ et } P \text{ (Morgan)} ;$$

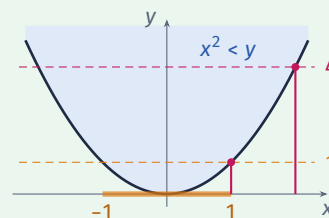
$$P \uparrow (Q \uparrow Q) \iff P \uparrow \overline{Q} \iff \overline{P \text{ et } \overline{Q}} \iff (P \Rightarrow Q) \text{ (négation de l'implication)}.$$

P	Q	$P \uparrow Q$	$P \uparrow P$
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	V	V

2. **Commutatif** : $P \uparrow Q \iff \overline{P \text{ et } Q} \iff \overline{Q \text{ et } P} \iff Q \uparrow P$. **Non associatif** : pour P, Q vraies et R fausse, $(P \uparrow Q) \uparrow R = \text{F} \uparrow \text{F} = \text{V}$ mais $P \uparrow (Q \uparrow R) = \text{V} \uparrow \text{V} = \text{F}$.
3. $(P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow P) \iff (\overline{P} \text{ ou } Q) \text{ ou } (\overline{Q} \text{ ou } P) \iff (P \text{ ou } \overline{P}) \text{ ou } (Q \text{ ou } \overline{Q})$ (commutativité, associativité), vraie par le tiers exclu : c'est une tautologie. Surprenant : de deux propositions quelconques, l'une implique l'autre ! L'implication compare des valeurs de vérité, pas des causes.

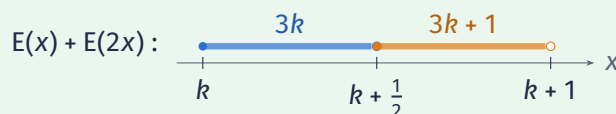
■ Corrigé de l'exercice 18

1. A_1 : **V** : pour x donné, $y = x^2 + 1$ convient. A_2 : **F** : pour y donné, $x = |y| + 1 \geq 1$ vérifie $x^2 \geq x = |y| + 1 > y$. A_3 : **F** : pour $y = 0$, aucun réel ne vérifie $x^2 < 0$. A_4 : **V** : pour $y > 0$, $x = 0$ convient. A_5 : **V** : $x = 0$ convient pour tous les $y > 0$ à la fois.
2. $\overline{A_2}$: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq y$; $\overline{A_3}$: $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq y$ (vraie avec $y = 0$). A_2 demande un y au-dessus de tous les carrés (impossible), A_5 un x dont le carré est sous tous les $y > 0$ ($x = 0$) : l'ordre et le domaine changent le sens.
3. Si $x \in [-1, 1]$, alors $x^2 \leq 1 < y$ pour tout $y > 1$. Si $|x| > 1$, $y = x^2 > 1$ ne vérifie pas $x^2 < y$. Ensemble : $[-1, 1]$. Pour $x \in [1, 2]$, $1 \leq x^2 \leq 4$ (traits rouges ci-dessus). a) Si $y > 1$, $x = 1$ convient ; si $y \leq 1$, $x^2 \geq 1 \geq y$ pour tout x : $]1, +\infty[$. b) Si $y > 4$, $x^2 \leq 4 < y$; si $y \leq 4$, $x = 2$ ne convient pas : $]4, +\infty[$.



■ Corrigé de l'exercice 19

1. $2x = 2k + 2t$. Si $t < \frac{1}{2}$: $0 \leq 2t < 1$, donc $2k \leq 2x < 2k + 1$ et $E(2x) = 2k$. Si $t \geq \frac{1}{2}$: $1 \leq 2t < 2$, donc $2k + 1 \leq 2x < 2k + 2$ et $E(2x) = 2k + 1$. Ainsi, sur $[k, k + 1[$:



2. Égalité à 7 : le cas $t < \frac{1}{2}$ donne $3k = 7$, impossible ; le cas $t \geq \frac{1}{2}$ donne $3k + 1 = 7$, $k = 2$: $x = 2 + t$ avec $t \in [\frac{1}{2}, 1[$: $S = [\frac{5}{2}, 3[$. Égalité à 8 : $3k = 8$ et $3k + 1 = 8$ sont impossibles : $S = \emptyset$.
3. Les valeurs prises sont exactement les entiers $3k$ (pour $x \in [k, k + \frac{1}{2}[$) et $3k + 1$ (pour $x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1[$). Si m a pour reste 0, $m = 3k$ et $[k, k + \frac{1}{2}[$ est formé de solutions ; reste 1 : $m = 3k + 1$ et $[k + \frac{1}{2}, k + 1[$ convient ; reste 2 : $m = 3k + 2$ n'est ni de la forme $3k'$ ni $3k' + 1$ (unicité du reste) : pas de solution. De 1 à 100, les entiers de reste 2 sont 2, 5, ..., 98, au nombre de 33 : il en reste $\boxed{67}$.

■ Corrigé de l'exercice 20

1. a) n a un diviseur a avec $1 < a < n$; alors $b = \frac{n}{a}$ est un entier et $1 < b < n$. Quitte à échanger a et b , on peut supposer $a \leq b$. Alors $a^2 \leq ab = n$, donc $d = a$ vérifie $2 \leq d \leq \sqrt{n}$.
- b) *Contraposée* : « si un entier $n \geq 2$ n'a aucun diviseur d tel que $2 \leq d \leq \sqrt{n}$, alors n est premier ». Comme $15^2 < 251 < 16^2$, on teste $d = 2, \dots, 15$: $251 = 2 \times 125 + 1 = 3 \times 83 + 2 = 5 \times 50 + 1 = 7 \times 35 + 6 = 11 \times 22 + 9 = 13 \times 19 + 4$, et les autres d (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15), multiples de 2, 3 ou 5, ne le divisent pas non plus. $\boxed{251 \text{ est premier}}$. En revanche $391 = 17 \times 23$ n'est pas premier ($17 \leq \sqrt{391} \approx 19,8$).
2. **Par l'absurde**, supposons $n, n + 2, n + 4$ premiers et $n \neq 3$. Soit r le reste de n par 3. Si $r = 0$: $3 \mid n$ et n est premier, donc $n = 3$: contradiction. Si $r = 1$: $n = 3k + 1$ et $n + 2 = 3(k + 1)$ est premier, donc $n + 2 = 3$, $n = 1$, qui n'est pas premier : contradiction. Si $r = 2$: $n + 4 = 3(k + 2) \geq 6$ est multiple de 3, donc pas premier : contradiction. Ainsi $\boxed{n = 3}$ (et 3, 5, 7 sont bien premiers).

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $P(n)$: « $S_n < 2\sqrt{n} - 1$ ». **Initialisation.** $S_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2\sqrt{2} - 1 \iff 2 < \frac{3\sqrt{2}}{2} \iff 4 < 3\sqrt{2} \iff 16 < 18$: vrai.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 2$ et montrons $P(n + 1)$. On a $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, et

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} \iff \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \iff \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1},$$

ce qui est vrai. Donc $S_{n+1} < 2\sqrt{n+1} - 1$. **Conclusion.** $S_n < 2\sqrt{n} - 1$ pour tout $n \geq 2$.

$P'(n)$: « $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ ». **Initialisation.** $S_1 = 1 \geq 2\sqrt{2} - 2 \iff 3 \geq 2\sqrt{2} \iff 9 \geq 8$.

Hérédité. Supposons que $P'(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P'(n + 1)$. Alors $S_{n+1} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} - 2$, car $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \iff \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \geq 2\sqrt{n+1}$, vrai. **Conclusion.** $P'(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour $n = 10\,000$: $S_n \geq 2\sqrt{10\,001} - 2 > 2 \times 100 - 2 = 198$ et $S_n < 2 \times 100 - 1 = 199$. Donc $198 < S_{10\,000} < 199$: $\boxed{E(S_{10\,000}) = 198}$.

■ Corrigé de l'exercice 22

- $(a+1)(a^2 - a + 1) = a^3 - a^2 + a + a^2 - a + 1 = a^3 + 1$ et $(a+1)^2 - 3a = a^2 + 2a + 1 - 3a = a^2 - a + 1$.
- $P(n)$: « $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$ ». **Initialisation.** $n = 0$: $2^1 + 1 = 3$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: avec $a = 2^{3^n}$, $a+1 = 3^{n+1}q$. Comme $2^{3^{n+1}} = (2^{3^n})^3 = a^3$: $2^{3^{n+1}} + 1 = (a+1)[(a+1)^2 - 3a]$. Or 3 divise $a+1$, donc $(a+1)^2$ et $3a$: $(a+1)^2 - 3a = 3r$. Ainsi $2^{3^{n+1}} + 1 = 3^{n+1}q \times 3r = 3^{n+2}qr$. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $P(n)$: « $2^{3^n} + 1 = 3^{n+1}q_n$ avec q_n entier non divisible par 3 ». **Initialisation.** $3 = 3^1 \times 1$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $a+1 = 3^{n+1}q$, $3 \nmid q$. Alors $(a+1)^2 - 3a = 3s$ avec $s = 3^{2n+1}q^2 - a$; $a = 2^{3^n}$ n'est pas multiple de 3 (son seul facteur premier est 2) et $3 \mid 3^{2n+1}q^2$, donc $3 \nmid s$. D'où $2^{3^{n+1}} + 1 = 3^{n+2}qs$, et $3 \nmid qs$ (3 est premier et ne divise ni q ni s). **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout n . Par conséquent, 3^{n+2} ne divise pas $2^{3^n} + 1$ (sinon $3 \mid q_n$). Ex. : $2^{27} + 1 = 134\,217\,729 = 3^4 \times 1\,657\,009$.

■ Corrigé de l'exercice 23

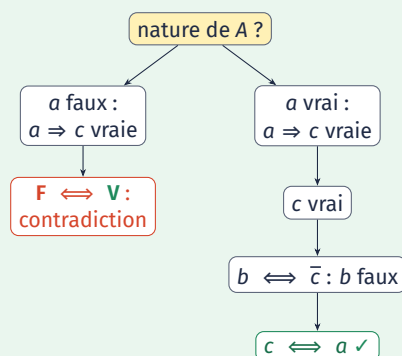
- a) Analyse. Avec $x = y = 0$: $f(0)^2 - f(0) = 0$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$: $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, $y = 0$ donne $f(x)f(0) - f(0) = x$, soit $0 = x$ pour tout réel x : faux pour $x = 1$. Donc $f(0) = 1$, et $y = 0$ donne $f(x) - 1 = x$: $f(x) = x + 1$ pour tout x .
b) Synthèse. Pour $f(x) = x + 1$: $(x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$ ✓. Il y a une seule solution : $f : x \mapsto x + 1$.
- Si $f(x) = ax + b$, alors $f(f(x)) = a^2x + (a+1)b$. L'égalité pour $x = 0$ et $x = 1$ donne $(a+1)b = 3$ et $a^2 = 4$: $(a, b) = (2, 1)$ ou $(a, b) = (-2, -3)$. Réciproquement, $2(2x+1)+1 = 4x+3$ et $-2(-2x-3)-3 = 4x+3$: **non**, il y a deux fonctions, $x \mapsto 2x+1$ et $x \mapsto -2x-3$ (existence, mais pas unicité).
- Pour $x \geq 0$, posons $t = \sqrt{x} \geq 0$: $x + \sqrt{x} = 6 \iff t^2 + t - 6 = 0 \iff (t-2)(t+3) = 0 \iff t = 2$ (car $t+3 > 0$) $\iff x = 4$. Il existe donc un unique réel convenable : $x = 4$.

29

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- Si A dit « je suis un menteur », on a $a \iff \bar{a}$, proposition toujours fausse ($V \iff F$ et $F \iff V$ sont fausses) : impossible.
- Les déclarations s'écrivent : $a \iff (a \Rightarrow c)$; $b \iff \bar{c}$; $c \iff a$. **Disjonction des cas** sur a (arbre ci-contre) :
Cas *a faux* : $a \Rightarrow c$ est vraie (le faux implique tout), et $a \iff (a \Rightarrow c)$ devient $F \iff V$: contradiction.
Cas *a vrai* : $a \Rightarrow c$ doit être vraie, donc c est vrai ; puis $b \iff \bar{c}$ donne b faux ; enfin $c \iff a$ est vérifiée.
A et C sont chevaliers, B est menteur.



3. Soit k : « l'habitant est un chevalier » et S : « $k \iff G$ » (la question posée). Il répond « oui » quand il affirme S ; or il dit vrai si et seulement si k est vraie. Donc : « il répond oui » $\iff (k \iff S) \iff (k \iff (k \iff G))$. La table montre que cette proposition a toujours la valeur de G : il répond « oui » si et seulement si la route de gauche mène au village, quelle que soit sa nature.

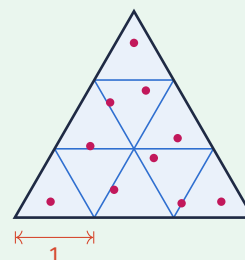
k	G	$k \iff G$	$k \iff (k \iff G)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	V	F

■ Corrigé de l'exercice 25

- a) On forme 50 tiroirs $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{99, 100\}$. Avec 51 entiers, deux sont dans le même tiroir : ils sont consécutifs.

b) Tout entier $n \leq 100$ s'écrit $n = 2^a m$, m impair, et $m \in \{1, 3, \dots, 99\}$: 50 valeurs possibles (les tiroirs). Deux des 51 entiers ont le même m : $2^a m$ et $2^b m$ avec $a < b$, et $2^a m$ divise $2^b m = 2^{b-a} \times 2^a m$.

c) **Non** : les 50 impairs $1, 3, \dots, 99$ ne contiennent pas deux entiers consécutifs ; parmi $51, 52, \dots, 100$, aucun ne divise un autre (si $x \mid y$ avec $x < y$, alors $y \geq 2x \geq 102$).
- En partageant chaque côté en trois et en traçant les parallèles aux côtés, on découpe le triangle en 9 triangles équilatéraux de côté 1 (ci-contre). 10 points dans ces 9 tiroirs : deux d'entre eux sont dans un même petit triangle, donc à une distance au plus égale à son plus grand côté (admis), soit 1.
- Disjonction des cas** sur les restes (0, 1 ou 2) des cinq entiers. Si les trois restes apparaissent, on choisit $3a, 3b + 1, 3c + 2$: leur somme $3(a + b + c + 1)$ est multiple de 3. Sinon, au plus deux restes apparaissent : 5 entiers dans 2 tiroirs, l'un en contient au moins 3 (sinon il y en aurait au plus 4) ; trois entiers $3a + r, 3b + r, 3c + r$ ont pour somme $3(a + b + c + r)$. Avec 4 entiers, c'est **faux** : 3, 6, 1, 4 donnent les sommes 10, 13, 8, 11.



■ Corrigé de l'exercice 26

- $P_1 = \frac{1}{2}, P_2 = \frac{3}{8}, P_3 = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$. L'inégalité $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$ équivaut à $3nP_n^2 \leq 1$: $\frac{3}{4} \leq 1, \frac{54}{64} \leq 1, \frac{225}{256} \leq 1$ ✓.
- Tout est positif : l'inégalité équivaut à $(2n + 1)^2 \times 3(n + 1) \leq (2n + 2)^2 \times 3n$, soit (en divisant par $3(n + 1) > 0$) $(2n + 1)^2 \leq 4n(n + 1)$, c'est-à-dire $4n^2 + 4n + 1 \leq 4n^2 + 4n$: $1 \leq 0$, **faux**. L'hypothèse $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$ donne seulement $P_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$, nombre strictement supérieur à $\frac{1}{\sqrt{3n+3}}$: l'hérédité ne passe pas.
- $P(n)$: « $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ». **Initialisation.** $P_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$. **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n + 1)$. Alors $P_{n+1} = P_n \times \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$, et

$$\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \iff (2n+1)^2(3n+4) \leq (2n+2)^2(3n+1),$$
 soit, en développant, $12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4$, c'est-à-dire $0 \leq n$: vrai. Donc $P(n + 1)$ est vraie. **Conclusion.** $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a démontré *plus fort* pour que l'hérédité fonctionne.
- $P'(n)$: « $P_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ». **Initialisation.** $P_1 = \frac{1}{2}$. **Hérédité.** Supposons que $P'(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P'(n + 1)$: $P_{n+1} \geq \frac{2n+1}{(2n+2)2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$, car cette dernière inégalité équivaut

à $(2n+1)^2(n+1) \geq 4(n+1)^2n$, soit $4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n$, vrai. **Conclusion.** $P'(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 50$: $P_{50} \geq \frac{1}{2\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{20} > \frac{1,4}{20} = 0,07$ et $P_{50} \leq \frac{1}{\sqrt{151}} < \frac{1}{12,2} < 0,082$ (car $12,2^2 = 148,84 < 151$). ($P_{50} \approx 0,0796$.)

■ Corrigé de l'exercice 27

- $P(n)$: « n est une somme de puissances de 2 deux à deux distinctes ». **Initialisation.** $1 = 2^0$. **Hérédité.** (récurrence forte) Supposons que $P(k)$ est vraie pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ (avec $n \geq 1$) et montrons $P(n+1)$. Si $n+1 = 2m$ est pair : $1 \leq m \leq n$, donc $m = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_r}$ (exposants distincts), et $n+1 = 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_r+1}$, exposants distincts. Si $n+1 = 2m+1$ est impair : $1 \leq m \leq n$ (car $n+1 \geq 3$), et $n+1 = 2^0 + 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_r+1}$, où les exposants $a_i + 1 \geq 1$ sont distincts et différents de 0. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
- $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1 < 2^k$ (cours). **Par l'absurde**, supposons deux écritures différentes d'un même entier. En ôtant les puissances communes, on obtient $\sum_{i \in I} 2^i = \sum_{j \in J} 2^j$ avec I, J sans exposant commun et non tous deux vides ; aucun n'est vide (une somme non vide est > 0). Soit K le plus grand exposant de I et de J , par exemple dans $I : J$ ne contient que des exposants $< K$, donc $\sum_{j \in J} 2^j \leq 2^0 + \dots + 2^{K-1} < 2^K \leq \sum_{i \in I} 2^i$: contradiction.
- La carte j contient 2^{j-1} et des nombres $\geq 2^{j-1}$: son plus petit nombre est 2^{j-1} . L'écriture (unique) d'un entier $m \leq 63 < 2^6$ n'utilise que $2^0, \dots, 2^5$ et indique exactement ses cartes : en ajoutant leurs plus petits nombres, on reconstitue m . $45 = 32 + 8 + 4 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$: cartes $1, 3, 4, 6$.

■ Corrigé de l'exercice 28

- $a_0 = 2, a_1 = (1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2}) = 2, a_2 = (3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2}) = 6$. $(1 \pm \sqrt{2})^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} = 2(1 \pm \sqrt{2}) + 1$. En multipliant par $(1 \pm \sqrt{2})^n$: $(1 \pm \sqrt{2})^{n+2} = 2(1 \pm \sqrt{2})^{n+1} + (1 \pm \sqrt{2})^n$; en ajoutant les deux égalités : $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.
- $P(n)$: « a_n est un entier pair ». **Initialisation.** $a_0 = 2$ et $a_1 = 2$: $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies. **Hérédité.** (récurrence double) Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+2)$: $a_n = 2p, a_{n+1} = 2p'$. Alors $a_{n+2} = 2(2p' + p)$ est un entier pair : $P(n+2)$ est vraie. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ et $0 < (\sqrt{2} - 1)^n < 1$ (produit de n réels de $]0, 1[$) ; de plus $(1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n (\sqrt{2} - 1)^n$. n pair : $(1 + \sqrt{2})^n = a_n - (\sqrt{2} - 1)^n \in]a_n - 1, a_n[$, donc $E((1 + \sqrt{2})^n) = a_n - 1$, **impair**. n impair : $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + (\sqrt{2} - 1)^n \in]a_n, a_n + 1[$, donc $E((1 + \sqrt{2})^n) = a_n$, **pair**. Avec la relation de 1. : $a_3 = 14, a_4 = 34, a_5 = 82, a_6 = 198, a_7 = 478, a_8 = 1154, a_9 = 2786, a_{10} = 6726$, d'où $E((1 + \sqrt{2})^{10}) = 6725$ ($(1 + \sqrt{2})^{10} \approx 6725,99985$: presque un entier !).

■ Corrigé de l'exercice 29

- S'il existe un coup $c \leq n$ menant à $n - c$ perdant, le joueur le joue et laisse son adversaire perdant : n est gagnant. Si tous les coups permis mènent à des gagnants, l'adversaire peut gagner quoi qu'il arrive : n est perdant. Par négation : $n \geq 1$ est perdant $\iff \forall c \in \{1, 2, 3\}, (c \leq n \Rightarrow n - c \text{ est gagnant})$.
- $P(n)$: « n est perdant $\iff 4 \mid n$ ». **Initialisation.** 0 est perdant et $4 \mid 0$. **Hérédité.** (récurrence forte) Supposons que $P(k)$ est vraie pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$ et montrons $P(n+1)$.

Si $4 \mid n+1$: $n+1 \geq 4$ et les coups $c = 1, 2, 3$ mènent à des nombres de restes 3, 2, 1 par 4, gagnants par hypothèse : $n+1$ est perdant. Sinon, soit $r \in \{1, 2, 3\}$ le reste de $n+1$ par 4 : le coup $c = r \leq n+1$ mène à $n+1-r$, multiple de 4, donc perdant : $n+1$ est gagnant. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $2026 = 4 \times 506 + 2$ est gagnant : **Amine** retire 2 jetons (il en reste 2024) ; ensuite, chaque fois que Basma retire c jetons, Amine en retire $4-c$. Après chacun de ses coups, il reste un multiple de 4 jetons, jusqu'à 0 : Amine prend le dernier jeton.
4. De proche en proche (n est perdant si tous ses coups mènent à un gagnant) :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 perdants : 0, 2, 7, 9, 14
les autres sont gagnants

Conjecture : n est perdant $\iff$ le reste r de n par 7 est 0 ou 2. Récurrence forte : **Initialisation.** 0 est perdant. **Hérédité.** Supposons la règle vraie pour tout entier $k < n$ (avec $n \geq 1$) et montrons-la pour n . Si $r = 0$ ou $r = 2$: les coups 1, 3, 4 mènent à des restes 6, 4, 3 (si $r = 0$) ou 1, 6, 5 (si $r = 2$), donc à des gagnants : n est perdant. Sinon, le coup $c = 1$ ($r = 1$ ou 3), $c = 4$ ($r = 4$ ou 6) ou $c = 3$ ($r = 5$), avec $c \leq r \leq n$, mène à un reste 0 ou 2, donc à un perdant : n est gagnant. **Conclusion.** la règle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $2026 = 7 \times 289 + 3$: gagnant, **le premier joueur gagne** en retirant 1 jeton ($2025 = 7 \times 289 + 2$).

■ Corrigé de l'exercice 30

1. **Par l'absurde**, supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $p^2 = 6q^2$ est pair, donc p est pair : $p = 2p'$, et $4p'^2 = 6q^2$, soit $3q^2 = 2p'^2$: $3q^2$ est pair, donc q^2 est pair (sinon $3q^2$ serait impair) et q est pair. 2 divise p et q : contradiction. De même, $p^2 = 30q^2$ donne $p = 2p'$, puis $15q^2 = 2p'^2$, donc q pair : contradiction. $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$.
2. **Par l'absurde**, supposons $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$. En élevant au carré : $r^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$, donc $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2} \in \mathbb{Q}$: contradiction avec 1. Ensuite $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$: si $\sqrt{3} - \sqrt{2} = s$ était rationnel (et non nul), $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{s}$ le serait aussi : contradiction.
3. **Par l'absurde**, supposons $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r \in \mathbb{Q}$ ($r > 0$). On isole $\sqrt{5}$: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$, puis on élève au carré :

$$5 + 2\sqrt{6} = r^2 - 2r\sqrt{5} + 5, \quad \text{d'où} \quad 2\sqrt{6} + 2r\sqrt{5} = r^2 \quad (\text{partie rationnelle isolée}).$$
On élève de nouveau au carré : $24 + 8r\sqrt{30} + 20r^2 = r^4$, donc $\sqrt{30} = \frac{r^4 - 20r^2 - 24}{8r} \in \mathbb{Q}$: contradiction avec 1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ ($\approx 5,382$).
4. a) $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ et $\alpha^4 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 49 + 20\sqrt{6}$, donc $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 49 + 20\sqrt{6} - 50 - 20\sqrt{6} + 1 = 0$.
 b) En multipliant par q^4 : $p^4 - 10p^2q^2 + q^4 = 0$, d'où $q^4 = p^2(10q^2 - p^2)$ et $p^4 = q^2(10p^2 - q^2)$. Ici $p \neq 0$ (sinon $q^4 = 0$). Si $|p| \geq 2$, un nombre premier ℓ divise p , donc q^4 , donc q : contradiction (p, q premiers entre eux) ; ainsi $p = \pm 1$. De même, un premier divisant q diviserait p^4 , donc p : $q = 1$. Or $(\pm 1)^4 - 10 + 1 = -8 \neq 0$: l'équation n'a pas de solution rationnelle, et comme α en est une : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

30

Corrigés : connecteurs logiques

■ Corrigé de l'exercice 31

1. a)

n	$P(n)$	$Q(n)$	$R(n)$	$P(n) \text{ et } Q(n)$	$P(n) \text{ ou } \overline{R(n)}$	$Q(n) \Rightarrow P(n)$	$R(n) \Leftrightarrow Q(n)$	$\overline{P(n) \text{ ou } Q(n)}$
4	V	F	F	F	V	V	V	F
7	F	F	F	F	V	V	V	V
9	F	V	F	F	V	F	F	F
12	V	V	V	V	V	V	V	F
15	F	V	V	F	F	F	V	F

b) Il faut $R(n)$, soit $11 \leq n \leq 20$, et $P(n) \Rightarrow Q(n)$, qui n'est fausse que si n est pair et non multiple de 3 : on retire 14, 16 et 20. $n \in \{11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}$.

2. $A(x)$ est vraie sur $]1, +\infty[$, $B(x)$ sur $]-2, 2[$ (car $x^2 < 4 \iff |x| < 2$). A et B : $]1, 2[$; A ou B : $]-2, +\infty[$. $A \Rightarrow B$ équivaut à $\overline{A}$ ou B : $x \leq 1$ ou $|x| < 2$, soit $]-\infty, 2[$. $B \Rightarrow A$ équivaut à $\overline{B}$ ou A : $|x| \geq 2$ ou $x > 1$, soit $]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$. $A \Leftrightarrow B$: les deux vraies ($1 < x < 2$) ou les deux fausses ($x \leq 1$ et $|x| \geq 2$, soit $x \leq -2$) : $]-\infty, -2] \cup]1, 2[$.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. On calcule colonne par colonne (D ne dépend que de P) :

P	Q	$\overline{Q}$	$P \text{ et } \overline{Q}$	A	$\overline{P} \Rightarrow Q$	B	$P \Rightarrow Q$	C
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V	F

P	$\overline{P}$	$P \Rightarrow \overline{P}$	D
V	F	F	V
F	V	V	V

B et D sont des **tautologies**. A n'est fausse que si P et Q le sont : $A \iff P \text{ et } Q$. La colonne de C est celle de P : $C \iff P$.

En français, B : **d'une proposition et de sa négation, on peut déduire n'importe quoi** (si P et $\overline{P}$ étaient vraies, toute Q le serait). D : **une proposition qui entraîne sa propre négation est fausse**.

2. E est vraie si et seulement si les deux implications le sont :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \Rightarrow R$	E	$P \text{ et } Q$	$\overline{P} \text{ et } R$	$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } R)$
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	F	F

Les colonnes de E et de $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } R)$ coïncident, d'où l'équivalence. Lecture : si P est vraie, E a la valeur de Q ; sinon, celle de R .

■ Corrigé de l'exercice 33

$$1. a) ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \text{ ou } Q \text{ ou } Q} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } Q \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (\overline{Q} \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \boxed{P \text{ ou } Q}$$

(Morgan et double négation, puis distributivité, et $\overline{Q} \text{ ou } Q$ est toujours vraie).

$$b) (P \Rightarrow R) \text{ ou } (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } R) \text{ ou } (\overline{Q} \text{ ou } R) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}) \text{ ou } R \Leftrightarrow \overline{P \text{ et } Q} \text{ ou } R \Leftrightarrow \boxed{(P \text{ et } Q) \Rightarrow R}$$

(commutativité, associativité et $R \text{ ou } R \Leftrightarrow R$, puis Morgan).

$$c) (P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q) \text{ et } (\overline{P} \text{ ou } R) \Leftrightarrow \overline{P} \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow \boxed{P \Rightarrow (Q \text{ et } R)}$$

(distributivité de « ou » sur « et »).

$$d) \text{ Avec c) pour } R = \overline{Q}: (P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow \overline{Q}) \Leftrightarrow \overline{P} \text{ ou } (Q \text{ et } \overline{Q}) \Leftrightarrow \boxed{\overline{P}}, \text{ car } Q \text{ et } \overline{Q} \text{ est toujours fausse.}$$

Pour démontrer $\overline{P}$ par l'absurde, on suppose P et l'on en déduit une proposition Q et sa négation : on a établi $(P \Rightarrow Q)$ et $(P \Rightarrow \overline{Q})$, qui équivaut à $\overline{P}$ d'après d).

2. Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$, alors $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$, et $R \Rightarrow Q \Rightarrow P$ donne $R \Rightarrow P$ (transitivité). Réciproquement, si les trois implications sont vraies : $Q \Rightarrow R \Rightarrow P$ donne $Q \Rightarrow P$, d'où $P \Leftrightarrow Q$; et $R \Rightarrow P \Rightarrow Q$ donne $R \Rightarrow Q$, d'où $Q \Leftrightarrow R$. **Trois** implications suffisent donc (au lieu de quatre).

Application. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$: $x^2 - 4x + 3 < 0 \Rightarrow |x-2|^2 < 1 \Rightarrow |x-2| < 1$ (car $|x-2| \geq 0$) ; $|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$; $1 < x < 3 \Rightarrow (x-1) > 0$ et $x-3 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) < 0$, soit $x^2 - 4x + 3 < 0$. Le cycle est bouclé : les trois propositions sont équivalentes.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. a) $\boxed{Q \Rightarrow P}$ (« seulement si » : condition nécessaire) ; b) $\boxed{P \Rightarrow Q}$ (« il suffit » : condition suffisante) ; c) il est impossible qu'il réussisse sans réviser : $Q \text{ et } \overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q} \text{ ou } P \Leftrightarrow \boxed{Q \Rightarrow P}$; d) $\boxed{R \Rightarrow P}$; e) $\boxed{(P \text{ ou } R) \text{ et } \overline{P \text{ et } R}}$; f) $\boxed{Q \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{R})}$.

Les phrases **a) et c)** sont équivalentes ; b), réciproque de a), ne l'est pas : si Sami révisé sans réussir, a) est vraie et b) fausse.

Négations : a) $Q \text{ et } \overline{P}$: « Sami a réussi son devoir sans avoir révisé. » b) $P \text{ et } \overline{Q}$: « Sami a révisé et n'a pas réussi. » e) $\overline{P \text{ ou } R} \text{ ou } (P \text{ et } R)$: « Sami révisé et sort le soir, ou bien il ne fait ni l'un ni l'autre » (c'est $P \Leftrightarrow R$).

2. a) $|x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$: $\boxed{\Leftrightarrow}$, condition **nécessaire et suffisante**.
 b) Si $x > 2$, alors $x^2 - 2x = x(x-2) > 0$; mais $x = -1$ donne $x^2 = 1 > -2 = 2x$ avec $x < 2$. $\boxed{\Leftarrow}$: condition **nécessaire**, non suffisante.
 c) $x > 0$ et $y > 0$ entraînent $xy > 0$; mais $x = y = -1$ donne $xy > 0$. $\boxed{\Leftarrow}$: condition **nécessaire**, non suffisante.
 d) $\Leftarrow$ est clair. Si $xy > 0$, x et y sont non nuls et de même signe ; tous deux négatifs, ils donneraient $x+y < 0$. Donc $x > 0$ et $y > 0$: $\boxed{\Leftrightarrow}$, condition **nécessaire et suffisante**.
 e) Somme et produit d'entiers sont entiers ; mais $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donnent $x+y = 1$, $xy = \frac{1-5}{4} = -1$, alors que $1 < x < 2$. $\boxed{\Leftarrow}$: condition **nécessaire**, non suffisante.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. On compte les **V** de chaque ligne (s : nombre impair ; c : au moins deux) ; les deux dernières colonnes servent au 2 a) :

P	Q	R	$P + Q + R$	s	c	$P \oplus Q$	$(P \oplus Q) \oplus R$
V	V	V	3	V	V	F	V
V	V	F	2	F	V	F	F
V	F	V	2	F	V	V	F
V	F	F	1	V	F	V	V
F	V	V	2	F	V	V	F
F	V	F	1	V	F	V	V
F	F	V	1	V	F	F	V
F	F	F	0	F	F	F	F

2. a) $P \oplus Q$ (« l'une au moins, mais pas les deux ») est vraie lorsque **exactement une** des deux est vraie ; de même $\overline{P \oplus Q}$ (valeurs différentes) et $(P \text{ et } \overline{Q})$ ou $(\overline{P} \text{ et } Q)$ (« seulement P » ou « seulement Q ») : les trois colonnes valent **F, V, V, F**. En particulier $X \oplus F \iff X$ et $X \oplus V \iff \overline{X}$. Si R est fausse, $(P \oplus Q) \oplus R \iff P \oplus Q$ est vraie si et seulement si une seule de P, Q l'est ; si R est vraie, $(P \oplus Q) \oplus R \iff \overline{P \oplus Q}$ est vraie si et seulement si 0 ou 2 des propositions P, Q le sont. Dans les deux cas, un nombre impair de P, Q, R sont vraies : $s \iff (P \oplus Q) \oplus R$ (colonnes identiques ci-dessus).

b) Si K est fausse, $(P \oplus K) \oplus K \iff P$; si K est vraie, $(P \oplus K) \oplus K \iff \overline{P} \iff P$: $(P \oplus K) \oplus K \iff P$. Amal envoie $C_i = P_i \oplus K_i$; Bilal, qui a la clé, calcule $C_i \oplus K_i = P_i$. Un espion qui intercepte C_i sans K_i n'apprend rien : C_i peut provenir de P_i vraie comme de P_i fausse.

3. a) Au moins deux sont vraies si et seulement si l'une des paires (P, Q), (Q, R), (R, P) est formée de deux propositions vraies : $c \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (Q \text{ et } R) \text{ ou } (R \text{ et } P)$.

b) Si R est fausse, le membre de droite se réduit à P et Q, et c est vraie si et seulement si P et Q le sont. Si R est vraie, il devient (P et Q) ou (P $\oplus$ Q) (« les deux, ou exactement une »), soit P ou Q, et c est vraie si et seulement si l'une au moins de P, Q l'est. Dans les deux cas : $c \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (R \text{ et } (P \oplus Q))$.

■ Corrigé de l'exercice 36

1. a) (1) $A \Rightarrow B$; (2) C ou $\overline{D}$; (3) $\overline{B \text{ et } C}$, soit $\overline{B}$ ou $\overline{C}$; (4) $\overline{D} \Rightarrow A$; (5) $C \Rightarrow A$.

b) Cas 1 : D vraie. (2) impose C, puis (3) impose $\overline{B}$, puis la contraposée de (1), $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, impose $\overline{A}$. Mais (5) avec C vraie impose A : **contradiction**, ce cas est impossible.

Cas 2 : D fausse. (4) impose A, (1) impose B, (3) impose $\overline{C}$; et (2), (5) sont vraies (car $\overline{D}$ est vraie et C fausse).

Les deux cas couvrent toutes les possibilités, et dans le second chaque valeur est imposée : la solution est **unique**. **Amine et Basma sont coupables, Chadi et Dounia innocents.**

c) Sans (5), le cas 1 n'est plus contradictoire : C, D vraies et A, B fausses vérifient (1) à (4). Deux solutions, {Amine, Basma} ou {Chadi, Dounia} : on ne pourrait pas conclure.

2. a) (R1) $\overline{T} \Rightarrow M$, soit T ou M ; (R2) $\overline{M \text{ et } S}$, soit $\overline{M}$ ou $\overline{S}$; (R3) $T \Rightarrow S$.

b) Si T est vraie : (R1) est vraie, (R3) impose S, puis (R2) impose $\overline{M}$. Si T est fausse : (R1) impose M, (R2) impose $\overline{S}$, et (R3) est vraie. Le règlement est donc vrai exactement pour les

profils $(T, M, S) = (\mathbf{V}, \mathbf{F}, \mathbf{V})$ et $(\mathbf{F}, \mathbf{V}, \mathbf{F})$, qui sont aussi exactement ceux où $(T \Leftrightarrow S)$ et $(M \Leftrightarrow \bar{T})$ est vraie : même table, d'où l'équivalence. **Chaque membre fait soit du théâtre et du sport (sans musique), soit de la musique seule.**

On ne peut supprimer aucune règle : sans (R1), un membre qui ne fait rien vérifie (R2) et (R3) ; sans (R2), un membre qui fait tout vérifie (R1) et (R3) ; sans (R3), un membre qui ne fait que du théâtre vérifie (R1) et (R2) ; aucun n'est en règle.

31

Corrigés : quantificateurs

■ Corrigé de l'exercice 37

- a) « Pour tout réel x , $|x| + x \geq 0$. » **Vraie** : si $x \geq 0$, $|x| + x = 2x \geq 0$; si $x < 0$, $|x| + x = -x + x = 0$.
- b) « Pour tout réel x , $\sqrt{x^2 + 9} > x + 3$. » **Fausse** : pour $x = 0$, $\sqrt{9} = 3$ n'est pas strictement supérieur à 3 (et pour $x = 4 : 5 < 7$).
- c) « Il existe un entier naturel n tel que $n^2 + n = 2026$. » **Fausse** : $n^2 + n = n(n + 1)$ augmente avec n , et $44 \times 45 = 1980 < 2026 < 2070 = 45 \times 46$; donc $n(n + 1) \leq 1980$ si $n \leq 44$ et $n(n + 1) \geq 2070$ si $n \geq 45$.
- d) « Il existe un unique réel x tel que $x|x| = -4$. » **Vraie** : si $x \geq 0$, $x|x| = x^2 \geq 0$; si $x < 0$, $x|x| = -x^2 = -4 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$. L'unique solution est -2 .
- e) « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n$ est pair. » **Vraie** : $n^2 + 3n = n(n + 3)$, et si n est impair, $n + 3$ est pair.
- f) « Tout entier naturel non nul n divise 2^n . » **Fausse** : $3 \nmid 2^3 = 8$.
- g) « Il existe un réel strictement supérieur à $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ pour tout réel x . » **Vraie** : $M = 1$ convient, car $x^2 < x^2 + 1$.
- h) « Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x + y^2 = 1$. » **Fausse** : pour $x = 2$, il faudrait $y^2 = -1$.
- i) « Pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $m^2 \leq n < (m + 1)^2$. » **Vraie** : soit $n \in \mathbb{N}$; les entiers m tels que $m^2 \leq n$ sont au plus égaux à n (car $m \leq m^2$) et $m = 0$ en fait partie : il y a un plus grand tel entier m , et alors $(m + 1)^2 > n$ (m est la « racine carrée entière » de n).

■ Corrigé de l'exercice 38

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 > 1 \text{ et } x \leq 1)$: la **négation est vraie** ($x = -2$), la proposition est fausse.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 + 1 \text{ n'est pas premier ou } n \text{ est pair})$: la **proposition est vraie** ($n = 1 : 2$ est premier et 1 est impair).

c) $\exists \varepsilon \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq \varepsilon$: la **proposition est vraie** : pour $\varepsilon > 0$, tout entier $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (il en existe : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré) vérifie $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2 \text{ et } x \neq y)$: la **négation est vraie** ($x = 1, y = -1$).

e) $(\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \neq x)$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \neq y \text{ et } x^3 = x \text{ et } y^3 = y))$: la **négation est vraie**, car $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$ s'annule en $-1, 0$ et 1 .
- a) « Il y a au moins un élève de la classe dont toutes les notes sont strictement inférieures à 15. »

b) « Chaque bus de la ville a au moins une station où il ne s'arrête pas. »

c) « Il est arrivé au moins une fois que l'équipe du lycée perde à domicile » (ni victoire, ni match nul : défaite).

d) « Personne n'a résolu tous les exercices » signifie : pour toute personne, il existe un exercice qu'elle n'a pas résolu. Négation : « **quelqu'un a résolu tous les exercices du devoir.** »

■ Corrigé de l'exercice 39

- P_1 : « chaque élève a résolu au moins un exercice » : **vraie** (chaque ligne contient un **V**).
 P_2 : « un même exercice a été résolu par tous les élèves » : **vraie** (e_3).
 P_3 : « chaque exercice a été résolu par au moins un élève » : **fausse** (personne n'a résolu e_2).
 P_4 : « un élève a résolu tous les exercices » : **fausse** (chaque ligne contient un **F**).
 P_5 : « un et un seul exercice a été résolu par tous » : **vraie** (seule la colonne e_3 est pleine de **V**).
 P_6 : « un élève a résolu exactement un exercice » : **vraie** (Dina, avec e_3 seulement).
 P_7 : « un exercice a été résolu par exactement un élève » : **vraie** (e_4 , par Badr seul ; ou e_5 , par Chama seule).
- $\overline{P_3} : \exists y, \forall x, \overline{R(x, y)}$: « il existe un exercice que personne n'a résolu » (e_2). $\overline{P_4} : \forall x, \exists y, \overline{R(x, y)}$: « chaque élève a au moins un exercice non résolu ».
 Pour P_3 , il suffit de changer **une** case de la colonne e_2 (les autres colonnes contiennent déjà un **V**). Pour P_4 , il faut remplir une ligne de **V** : Ali et Badr ont trois **F**, Chama deux, Dina quatre : **deux** cases au minimum (Chama, e_2 et e_4).
- Si P_2 est vraie, il existe un exercice y_0 tel que $R(x, y_0)$ pour tout élève x ; alors, pour chaque élève x , l'exercice $y = y_0$ convient : P_1 est vraie. Réciproque fausse : si Ali n'a résolu que e_1 et Badr que e_2 , chaque élève a résolu un exercice (P_1 vraie), mais aucun exercice n'a été résolu par les deux (P_2 fausse).

■ Corrigé de l'exercice 40

- a) $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [0, +\infty[, (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
 négation : $\exists x \in [0, +\infty[, \exists y \in [0, +\infty[, (x < y \text{ et } f(x) \leq f(y))$.
 b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{Z}$; négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \notin \mathbb{Z}$. c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$; négation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
- a) $x^2 + 4 - 4|x| = (|x| - 2)^2 \geq 0$, donc $4|x| \leq x^2 + 4$ et $|g(x)| = \frac{4|x|}{x^2+4} \leq 1$. Comme $g(2) = \frac{8}{8} = 1$, on a $g(x) \leq 1 = g(2)$ pour tout x : g admet un **maximum**, **1**, atteint en 2.
 b) $0 < 1$ et $g(0) = 0 \leq g(1) = \frac{4}{5}$: g n'est pas strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. $g(1) = \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$.
 $g(-1) = -\frac{4}{5} < 0$.
- Si $x \leq 3$, $h(x) = 3 - x + x = 3$; si $x > 3$, $h(x) = 2x - 3 > 3$. Donc $h(x) \geq 3$ pour tout x , avec égalité pour tout $x \leq 3$: h admet un minimum, **3**, atteint en chaque réel de $]-\infty, 3]$.
 « h est majorée » s'écrit $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq M$; prouvons sa négation $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, h(x) > M$. Soit $M \in \mathbb{R}$; pour $x = 3 + |M| > 3$: $h(x) = 2|M| + 3 > M$. Donc h **n'est pas majorée**.
 $h(1) = h(-1) = 3$ ne prouve rien (un exemple ne prouve pas un « $\forall$ »). Mais $h(4) = 5$ et $h(-4) = 3$: $h(-4) \neq h(4)$, donc h n'est pas paire ; $h(-4) \neq -h(4)$, donc h n'est pas impaire (un seul réel, $x = 4$, suffit pour nier un « $\forall$ »).

■ Corrigé de l'exercice 41

- a) Si R est vraie, les deux membres sont vrais. Si R est fausse, $R \text{ ou } P(x) \iff P(x)$: les deux membres se réduisent à $\forall x, P(x)$.

b) Si R est vraie, les deux membres se réduisent à $\exists x, P(x)$. Si R est fausse, les deux membres sont faux.

c) $P(x) \Rightarrow R \iff \overline{P(x)} \text{ ou } R$. Si R est vraie, les deux membres sont vrais (E n'est pas vide). Si R est fausse, le membre de gauche devient $\exists x, \overline{P(x)}$, soit $\forall x, P(x)$, et celui de droite $(\forall x, P(x)) \Rightarrow \mathbf{F}$, qui équivaut aussi à $\forall x, P(x)$.

d) Avec $R : \langle a \geq 1 \rangle$ et $P(x) : \langle x^2 + a \geq 0 \rangle$, la loi a) donne : $a \geq 1$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + a \geq 0$. Or $\forall x, x^2 + a \geq 0$ équivaut à $a \geq 0$ ($x = 0$ donne $a \geq 0$, et si $a \geq 0, x^2 + a \geq 0$). Donc la proposition équivaut à $\langle a \geq 1 \text{ ou } a \geq 0 \rangle : \boxed{a \in [0, +\infty[}$.

e) D'après b) : $a \leq 0$ et $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + 1 = 0$, soit $a \leq 0$ et $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$, c'est-à-dire $a \leq 0$ et ($a \leq -2$ ou $a \geq 2$) : $\boxed{a \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[}$.
- Notons $B(x) : \langle \text{le client } x \text{ boit du thé} \rangle$. La proposition $R : \langle \forall y, B(y) \rangle$ ne dépend pas de x . D'après c), $\exists x, (B(x) \Rightarrow R)$ équivaut à $(\forall x, B(x)) \Rightarrow R$, c'est-à-dire $R \Rightarrow R : \text{ toujours vraie}$. Concrètement : si tous les clients boivent du thé, n'importe quel client convient ; sinon, un client x qui n'en boit pas convient, car l'implication « si x boit du thé, alors... » a une hypothèse fausse. Ce n'est **pas un paradoxe** : « si... alors... » ne signifie pas que le client entraîne les autres.

■ Corrigé de l'exercice 42

- « f n'est pas périodique » s'écrit : $\forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x + T) \neq f(x)$. Soit $T > 0$.
Pour $u : x = 0$ convient, car $u(T) = T^2 > 0 = u(0)$. Donc u n'est pas périodique.
Pour $w : w(T) - w(0) = T^3 - 4T = T(T - 2)(T + 2)$, non nul si $T \neq 2$: $x = 0$ convient. Si $T = 2$: $w(3) - w(1) = 15 - (-3) = 18 \neq 0$: $x = 1$ convient. Dans tous les cas, il existe x tel que $w(x + T) \neq w(x)$: w n'est pas périodique.
- De $E(x) \leq x < E(x) + 1$ on tire $0 \leq h(x) < 1$. L'entier $E(x) + 1$ vérifie $E(x) + 1 \leq x + 1 < E(x) + 2$, donc $E(x + 1) = E(x) + 1$ et $h(x + 1) = x + 1 - E(x) - 1 = h(x)$: h est périodique de période 1.
Enfin, $\frac{1}{2} < 1$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > h(1) = 0$: h n'est pas croissante. $0 < \frac{1}{2}$ et $h(0) = 0 < h\left(\frac{1}{2}\right)$: h n'est pas décroissante.
- a) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n) : \langle \forall x \in \mathbb{R}, f(x + nT) = f(x) \rangle$.
Initialisation. $f(x + 0 \times T) = f(x)$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, et montrons $P(n + 1)$. Pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x + (n + 1)T) = f((x + nT) + T) = f(x + nT) = f(x)$, d'après la définition de T puis $P(n)$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. En appliquant $P(n)$ à $x - nT$: $f(x) = f((x - nT) + nT) = f(x - nT)$. Ainsi $f(x + kT) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

b) Soient $x < y$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \geq y - x$ (par exemple $n = E\left(\frac{y-x}{T}\right) + 1$). Alors $x < y \leq x + nT$, et f croissante donne $f(x) \leq f(y) \leq f(x + nT) = f(x)$, d'où $f(y) = f(x)$. Deux réels quelconques ont la même image : f est **constante**.

32

Corrigés : contraposée et absurde

■ Corrigé de l'exercice 43

- Contraposée : « si n est pair, alors $n^3 + 1$ est impair ». Si $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $n^3 + 1 = 2(4k^3) + 1$ est impair. Réciproque : « si n est impair, alors $n^3 + 1$ est pair » : **vraie** (n^3 est impair comme produit d'impairs).
- Contraposée : « si a est pair ou b est pair, alors ab est pair » (négation de « et » : « ou »). Si $a = 2k$, $ab = 2(kb)$; de même si b est pair. Réciproque : « si a et b sont impairs, alors ab est impair » : **vraie**, car $(2k+1)(2m+1) = 2(2km+k+m)+1$.
- Pour $x \neq 0$, la négation de « $x < 0$ » est « $x > 0$ ». Contraposée : « si $x > 0$, alors $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ». Pour $x > 0$: $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$. Réciproque : « si $x < 0$, alors $x + \frac{1}{x} < 2$ » : **vraie**, car alors $x + \frac{1}{x} < 0 < 2$. Finalement $x + \frac{1}{x} < 2 \iff x < 0$ (pour $x \neq 0$).
- Contraposée : « si a et b sont rationnels, alors $a + b$ est rationnel » : avec $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$, $a + b = \frac{ps+qr}{qs} \in \mathbb{Q}$. Réciproque : « si a ou b est irrationnel, alors $a + b$ est irrationnel » : **fausse** : $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$ sont irrationnels, et $a + b = 0 \in \mathbb{Q}$.

■ Corrigé de l'exercice 44

- Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $15a + 21b = 2026$. Alors $2026 = 3(5a + 7b)$ serait un multiple de 3 ; or $2026 = 3 \times 675 + 1$. Contradiction : de tels entiers n'existent pas.
- Supposons qu'il existe un rationnel $q < 1$ supérieur ou égal à tout rationnel strictement inférieur à 1. Le nombre $r = \frac{q+1}{2}$ est rationnel et $q = \frac{q+q}{2} < \frac{q+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$: r est un rationnel strictement inférieur à 1 et strictement supérieur à q . Contradiction.
- $2^5 + 2 = 34$: 2 est solution. Supposons qu'il existe une autre solution $y \neq 2$. Si $y > 2$: $y^5 > 32$ et $y > 2$, d'où $y^5 + y > 34$. Si $0 < y < 2$: $y^5 < 32$ et $y < 2$, d'où $y^5 + y < 34$. Si $y \leq 0$: $y^5 + y \leq 0 < 34$. Dans tous les cas $y^5 + y \neq 34$: contradiction. La solution 2 est **unique**.
- Supposons $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré : $a+b \geq a+2\sqrt{ab}+b$, soit $\sqrt{ab} \leq 0$. Or $ab > 0$, donc $\sqrt{ab} > 0$: contradiction.

■ Corrigé de l'exercice 45

- Contraposée : « si $y = \frac{2x+1}{x+1}$ est rationnel, alors x est rationnel ». On a $y(x+1) = 2x+1$, soit $x(y-2) = 1-y$. Si $y = 2$, on obtiendrait $0 = -1$: donc $y \neq 2$, et $x = \frac{1-y}{y-2}$ est rationnel.
- Si $x = 0$, $x \in \mathbb{Q}$. Sinon $x^2 \neq 0$ et $x = \frac{x^5}{(x^2)^2}$ est un quotient de rationnels : $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x^2 \in \mathbb{Q}$ et $x^5 \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $x^2 \notin \mathbb{Q}$ ou $x^5 \notin \mathbb{Q}$.
- a) **Faux** : $x = \sqrt{2}$ est irrationnel et $x^2 = 2$. b) **Faux** : $x = 1 - \sqrt{2}$ est irrationnel (sinon $\sqrt{2} = 1 - x$ serait rationnel), et $x + \sqrt{2} = 1$.
c) **Faux** : $x = 2 + \sqrt{3}$ est irrationnel (sinon $\sqrt{3} = x - 2$ serait rationnel), et $\frac{1}{x} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$, donc $x + \frac{1}{x} = 4 \in \mathbb{Q}$. d) **Vrai**, par contraposition : si $\sqrt{x} = r \in \mathbb{Q}$, alors $x = r^2 \in \mathbb{Q}$.

4. a) Supposons $b \neq d$. Alors $\sqrt{3} = \frac{a-c}{d-b}$ serait rationnel : contradiction. Donc $b = d$, puis $a = c$: l'écriture $a + b\sqrt{3}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) est **unique**.

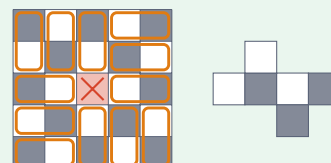
b) $(a + b\sqrt{3})^2 = (a^2 + 3b^2) + 2ab\sqrt{3}$, avec $a^2 + 3b^2$ et $2ab$ rationnels. D'après a), $(a + b\sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ équivaut à $a^2 + 3b^2 = 7$ et $ab = -2$. Alors $a \neq 0$, $b = -\frac{2}{a}$, et $a^2 + \frac{12}{a^2} = 7$, soit $a^4 - 7a^2 + 12 = 0$, c'est-à-dire $(a^2 - 3)(a^2 - 4) = 0$. Le cas $a^2 = 3$ est impossible ($a = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$) ; donc

$(a, b) = (2, -1)$ ou $(-2, 1)$. Ainsi $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$, et comme $2 - \sqrt{3} > 0$: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 46

- Un domino recouvre deux cases voisines, donc une blanche et une noire. Une région pavée par k dominos contient donc k cases blanches et k noires. Contraposée : **si une région n'a pas autant de cases blanches que de noires, elle n'est pas pavable**.
- Le damier 6×6 a 18 cases de chaque couleur. Deux coins opposés ont la même couleur (repérons la case de la ligne i et de la colonne j ; la couleur ne dépend que de la parité de $i + j$, et $1 + 1$, $6 + 6$ sont pairs). Il reste 16 cases de cette couleur et 18 de l'autre. Si la région était pavable, elle aurait autant de cases de chaque couleur (question 1) : contradiction.
- a) Le damier 5×5 a 13 cases noires (celles où $i + j$ est pair, dont les coins) et 12 blanches. Si l'on retire une case blanche, il reste 13 noires et 11 blanches : **pavage impossible**. Si l'on retire une case noire, il en reste 12 de chaque couleur : le coloriage ne permet pas de conclure. Une case voisine d'un coin est blanche (voisine d'une case noire) : son retrait rend le pavage impossible.

b) La case centrale ($i + j = 6$) est noire. Quatre rectangles 2×3 , « tournant » autour du centre, recouvrent les 24 cases restantes, et chacun se pave par trois dominos (figure de gauche).



- Non.** La région de six cases de la figure de droite (une rangée de quatre cases, avec une case au-dessus de la deuxième et une au-dessous de la troisième) a trois cases blanches et trois noires. Mais la case de gauche de la rangée n'a qu'une voisine dans la région, la deuxième case, qui est aussi la seule voisine de la case placée au-dessus d'elle : ces deux cases ne peuvent pas être recouvertes toutes les deux. La région n'est pas pavable.

■ Corrigé de l'exercice 47

- Si $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ sont des points entiers, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ est une somme de carrés d'entiers : $AB^2 \in \mathbb{N}$.

Soit ABC un triangle à sommets entiers. La translation de vecteur $\vec{AO}$ conserve les aires et envoie A en O , B en $B'(a, b)$ et C en $C'(c, d)$, avec $a = x_B - x_A$, $b = y_B - y_A$, $c = x_C - x_A$, $d = y_C - y_A$ entiers. L'aire vaut $\frac{1}{2}|ad - bc|$, quotient d'un entier par 2 : c'est un **rationnel**.

- Dans le triangle équilatéral ABC de côté ℓ , la hauteur issue de A coupe $[BC]$ en son milieu H

(triangle isocèle) ; par Pythagore, $AH^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$, donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ et l'aire vaut $\frac{1}{2}\ell \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$.

Supposons qu'un triangle équilatéral ABC ait ses sommets en des points entiers. D'après 1, $\ell^2 = AB^2$ est un entier non nul et son aire A est rationnelle. Alors $\sqrt{3} = \frac{4A}{\ell^2}$ serait rationnel : **contradiction**.

3. a) Supposons que A, B, C aient des coordonnées rationnelles et forment un triangle équilatéral. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun aux six coordonnées (le produit des dénominateurs, par exemple). Les points A', B', C' obtenus en multipliant toutes les coordonnées par N sont entiers, et $A'B' = NAB$, $B'C' = NBC$, $C'A' = NCA$: le triangle $A'B'C'$ est équilatéral à sommets entiers, ce qui contredit la question 2.

b) Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de côté s . Les triangles ABC, CDE, EFA ont deux côtés de longueur s formant un angle de 120° : ils sont superposables, donc $AC = CE = EA$ et le triangle ACE est équilatéral. Si les six sommets étaient des points entiers, A, C, E le seraient aussi : impossible d'après 2.

Pour le carré : les côtés successifs ont pour carrés de longueurs $3^2 + 1^2, 1^2 + 3^2, 3^2 + 1^2, 1^2 + 3^2$: tous égaux à 10, c'est un losange. Ses diagonales, de $(0, 0)$ à $(2, 4)$ et de $(3, 1)$ à $(-1, 3)$, ont pour carrés de longueurs $4 + 16 = 20$ et $16 + 4 = 20$: un losange aux diagonales de même longueur est un **carré** (de côté $\sqrt{10}$). Les carrés « inclinés » existent, les triangles équilatéraux non.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. Chaque poignée de main concerne deux personnes : elle est comptée une fois par chacune d'elles. La somme S des n nombres vaut donc $2N$, où N est le nombre de poignées de main : S est **pair**. Supposons que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains soit impair. Alors S serait la somme de nombres pairs et d'un nombre impair de nombres impairs : S serait impair. Contradiction.

2. **Non** pour 25 élèves : ils auraient chacun un nombre impair (3) d'amis ; or 25 est impair, ce qui contredit la question 1 (ou : $25 \times 3 = 75$ serait le double du nombre de paires d'amis).

Oui pour 26 élèves : numérotons les élèves de 0 à 25 autour d'un cercle, et déclarons chaque élève k ami de ses deux voisins et de l'élève diamétralement opposé ($k + 13$ ou $k - 13$) : chacun a exactement trois amis, et l'amitié est réciproque.

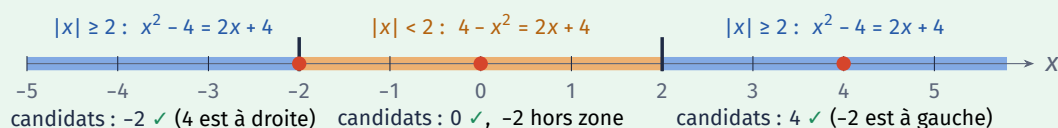
3. Supposons que les n personnes aient serré des nombres de mains deux à deux distincts. Chacun de ces nombres appartient à $\{0, 1, \dots, n-1\}$, qui contient exactement n valeurs : toutes sont donc atteintes, en particulier 0 et $n-1$. La personne qui a serré $n-1$ mains a serré la main de **toutes** les autres, y compris celle qui n'a serré aucune main : contradiction. (C'est le principe des tiroirs : n personnes, au plus $n-1$ valeurs possibles.)

33

Corrigés : cas par cas

■ Corrigé de l'exercice 49

1. a) Disjonction des cas selon le signe de $2x - 3$. Si $x \geq \frac{3}{2}$: $2x - 3 = x + 1 \iff x = 4$, qui vérifie $x \geq \frac{3}{2}$. Si $x < \frac{3}{2}$: $3 - 2x = x + 1 \iff x = \frac{2}{3}$, qui vérifie $x < \frac{3}{2}$. $S = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$.
- b) Pour tout réel A : $|A| = 1 \iff (A = 1 \text{ ou } A = -1)$. Donc $||x - 1| - 2| = 1 \iff (|x - 1| = 3 \text{ ou } |x - 1| = 1) \iff x - 1 \in \{3, -3, 1, -1\}$: les points à la distance 3 ou 1 de 1. $S = \{-2, 0, 2, 4\}$.
- c) Si $x \geq 3$: $x - 3 \geq 2x \iff x \leq -3$, incompatible avec $x \geq 3$. Si $x < 3$: $3 - x \geq 2x \iff x \leq 1$, et ces réels vérifient $x < 3$. $S =]-\infty, 1]$.
2. On découpe la droite selon le signe de $x^2 - 4$, c'est-à-dire selon la position de x par rapport à -2 et 2 (figure).
- Cas $|x| \geq 2$: $x^2 - 4 = 2x + 4 \iff x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x - 4)(x + 2) = 0$; 4 et -2 vérifient $|x| \geq 2$: ce sont des solutions (contrôle : $|16 - 4| = 12 = 8 + 4$ ✓).
- Cas $|x| < 2$: $4 - x^2 = 2x + 4 \iff x(x + 2) = 0$; seul 0 vérifie $|x| < 2$. $S = \{-2, 0, 4\}$.



■ Corrigé de l'exercice 50

1. Cas $n = 2p$ pair ($p \in \mathbb{N}$) : $(-1)^n = 1$ et $1 + (2n - 1) = 2n = 4p$. Cas $n = 2p + 1$ impair : $1 - (2n - 1) = 2 - 2n = -4p$. Ces deux cas couvrent tout $\mathbb{N}$: l'entier est toujours un multiple de 4.
2. a) n pair : $n + 1 = 7 \iff n = 6$, bien pair. n impair : $n - 1 = 7 \iff n = 8$, pas impair : rejeté. $S = \{6\}$.
- b) n pair : $n = 7$, pas pair : rejeté. n impair : $n = 9$, bien impair. $S = \{9\}$ (on vérifie toujours que la valeur trouvée respecte l'hypothèse du cas).
3. a) Cas $a \geq b$: $|a - b| = a - b$, d'où $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = a = \max(a, b)$ et $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = b = \min(a, b)$. Cas $a < b$: $|a - b| = b - a$, d'où $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = b$ et $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = a$.
- b) En ajoutant : $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$. En multipliant, comme $|a - b|^2 = (a - b)^2$: $\max(a, b) \times \min(a, b) = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (a - b)^2]$, soit $\max(a, b) \times \min(a, b) = ab$.
- c) $\max(x, 2 - x) = \frac{1}{2}(2 + |2x - 2|) = 1 + |x - 1|$, donc $\max(x, 2 - x) = 3 \iff |x - 1| = 2 \iff x \in \{-1, 3\}$.

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $P(m) - P(n) = (m^3 - n^3) + b(m^2 - n^2) + c(m - n) = (m - n)[m^2 + mn + n^2 + b(m + n) + c]$, et le crochet est entier.
2. Cas n pair : $n - 0$ est pair et divise $P(n) - P(0)$, donc $P(n) = P(0) + (\text{pair})$ est impair. Cas n impair : $n - 1$ est pair, donc $P(n) = P(1) + (\text{pair})$ est impair. Par l'absurde, si $P(n) = 0$ pour un $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ serait pair : l'équation n'a aucune solution entière.
Application : $P(0) = 2027$ et $P(1) = 1 + 4 + 7 + 2027 = 2039$ sont impairs : **aucune solution dans $\mathbb{Z}$.**
3. Soit $n = 3q + r$. D'après 1, $n - r = 3q$ divise $P(n) - P(r)$, donc $P(n) - P(r)$ est un multiple de 3. Par l'absurde, si $P(n) = 0$, alors $P(r)$ serait un multiple de 3, contrairement à l'hypothèse. Pour $x^3 + 2x + 4$: $P(0) = 4$, $P(1) = 7$, $P(2) = 16$ ne sont pas multiples de 3 : **aucune solution entière.** La question 2 ne s'appliquait pas ($P(0) = 4$ est pair).

■ Corrigé de l'exercice 52

1. a) $\frac{2x(-3)-1}{-3+2} = \frac{-7}{-1} = 7 > 1$: -3 n'est pas solution. La première équivalence est fautive : multiplier par $x + 2$ conserve le sens de l'inégalité seulement si $x + 2 > 0$; pour $x < -2$, le sens change.
b) Pour $x \neq -2$: $\frac{2x-1}{x+2} \leq 1 \iff \frac{2x-1}{x+2} - 1 \leq 0 \iff \frac{x-3}{x+2} \leq 0$. Le quotient est positif pour $x < -2$ (deux facteurs négatifs) et pour $x > 3$, négatif entre -2 et 3 , nul en 3 : $S =]-2, 3]$ (l'élève avait ajouté à tort $]-\infty, -2[$).
2. Les deux nombres sont positifs, et pour $u, v \geq 0$: $u > v \iff u^2 > v^2$. Comme $6\sqrt{3} = 2\sqrt{27}$:
$$\sqrt{5} + \sqrt{7} > 3 + \sqrt{3} \iff 12 + 2\sqrt{35} > 12 + 2\sqrt{27} \iff \sqrt{35} > \sqrt{27} \iff 35 > 27.$$

La dernière inégalité est vraie, donc $\sqrt{5} + \sqrt{7} > 3 + \sqrt{3}$ ($4,88 > 4,73$).
3. a) $x^2 = t^2$ avec $t = |x| \geq 0$: $t^2 - t - 2 \leq 0 \iff (t - 2)(t + 1) \leq 0 \iff -1 \leq t \leq 2$; comme $t \geq 0$, cela équivaut à $|x| \leq 2$. $S = [-2, 2]$.
b) Les deux membres sont positifs : l'inégalité équivaut à celle des carrés. Comme $(2x + 4)^2 - (x - 1)^2 = (x + 5)(3x + 3)$:

$$|x - 1| < |2x + 4| \iff (x - 1)^2 < (2x + 4)^2 \iff 3(x + 5)(x + 1) > 0 \iff x < -5 \text{ ou } x > -1.$$

$$S =]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[.$$

■ Corrigé de l'exercice 53

1. $(E_{-1}) : -2x - 4 = 0$, $S = \{-2\}$. Pour $m \neq -1 : \Delta' = m^2 - (m+1)(m-3) = 2m+3$. Si $m < -\frac{3}{2}$: aucune solution. Si $m = -\frac{3}{2}$: une solution double ; l'équation s'écrit $-\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) = 0$, $S = \{-3\}$. Si $m > -\frac{3}{2}$ et $m \neq -1$: deux solutions distinctes (et une seule pour $m = -1$).
2. Pour $m > -\frac{3}{2}$, $m \neq -1$, le produit et la somme des solutions sont $P = \frac{m-3}{m+1}$ et $S = -\frac{2m}{m+1}$ (tableau).

m	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3	$+\infty$		
$\Delta' = 2m + 3$	-	0	+	+	+	+		
$P = \frac{m-3}{m+1}$	+		+		-	-	0	+
$S = -\frac{2m}{m+1}$	-		-		+	0	-	-
solutions	aucune		deux < 0		signes contraires		deux < 0	

Par l'absurde, supposons deux solutions strictement positives : alors $S > 0$, donc $-1 < m < 0$; mais alors $P < 0$: contradiction (et les cas $m = -\frac{3}{2}$, $m = -1$ donnent -3 et -2). Deux solutions distinctes strictement négatives $\iff \Delta' > 0$, $P > 0$ et $S < 0 \iff m \in]-\frac{3}{2}, -1[\cup]3, +\infty[$.

Signes contraires $\iff P < 0 \iff -1 < m < 3$ (alors $\Delta' > 0$ automatiquement). Pour $m = 3$: solutions 0 et $-\frac{3}{2}$.

3. Disjonction des cas. Si $m < 3$, le premier membre vaut $m - 3 < 0$ en $x = 0$; si $m \geq 3$, $\Delta' > 0$ et il s'annule. Donc la proposition est **fausse**, et sa négation $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, (m+1)x^2 + 2mx + m - 3 \leq 0$ est vraie.

Pour $m = -1$, $-2x - 4$ vaut 2 en $x = -3$; pour $m \geq -\frac{3}{2}$, $m \neq -1$, on a $\Delta' \geq 0$ et le trinôme s'annule ; pour $m < -\frac{3}{2}$, $m+1 < 0$ et $\Delta' < 0$, donc le trinôme est du signe de $m+1$ partout.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (m+1)x^2 + 2mx + m - 3 < 0 \iff m < -\frac{3}{2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 54

1. Comme $\frac{1}{y} > 0$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$, donc $x > 2$; de même $y > 2$. En multipliant par $2xy \neq 0$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \iff xy - 2x - 2y = 0 \iff (x-2)(y-2) = 4$. Les entiers $x-2, y-2 \geq 1$ de produit 4 sont $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$: $(x, y) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$.
2. a) Si $x = 1$, alors $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$: impossible ; donc $x \geq 2$. Comme $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{x}$, on a $1 \leq \frac{3}{x}$, soit $x \leq 3$.
- b) Cas $x = 2$: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ avec $y \leq z$: d'après 1, $(y, z) = (3, 6)$ ou $(4, 4)$. Cas $x = 3$: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ avec $3 \leq y \leq z$, donc $\frac{2}{3} \leq \frac{2}{y}$, $y \leq 3$, puis $y = z = 3$. Solutions : $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ (réciproquement, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓).
3. Toute solution est une permutation d'un de ces triplets : $(2, 3, 6)$ en donne 6, $(2, 4, 4)$ en donne 3 et $(3, 3, 3)$ un seul. Il y a **10** triplets.

34

Corrigés : récurrence

■ Corrigé de l'exercice 55

1. a) $S_3 = (3 - 1) + (12 - 2) + (27 - 3) = 2 + 10 + 24$; $S_1 = 2$, $S_2 = 12$, $S_3 = 36$.

b) $P(n)$: « $S_n = n^2(n + 1)$ ». Initialisation. $S_1 = 2 = 1^2 \times 2$.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n + 1)$. On ajoute le dernier terme :

$$S_{n+1} = S_n + 3(n + 1)^2 - (n + 1) = n^2(n + 1) + (n + 1)(3n + 2) = (n + 1)(n^2 + 3n + 2) = (n + 1)^2(n + 2).$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n^2(n + 1)$.

c) Par linéarité : $S_n = 3 \sum k^2 - \sum k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) \times 2n}{2} = n^2(n + 1)$ ✓.

2. a) $T_1 = -1$, $T_2 = 3$, $T_3 = -6$, $T_4 = 10$.

b) $P(n)$: « $T_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ». Initialisation. $T_1 = -1 = (-1)^1 \times \frac{1 \times 2}{2}$.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n + 1)$. Comme $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$:

$$T_{n+1} = T_n + (-1)^{n+1}(n + 1)^2 = (-1)^{n+1} \left[(n + 1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right] = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. c) La somme vaut $-T_{100} = -\frac{100 \times 101}{2} = \boxed{-5050}$.

■ Corrigé de l'exercice 56

1. $P(n)$: « 19 divise $3^{3n+1} + 2^{3n+4}$ ». Initialisation. $3^1 + 2^4 = 19$.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, soit $3^{3n+1} + 2^{3n+4} = 19q$ ($q \in \mathbb{N}$), et montrons $P(n + 1)$:

$$3^{3n+4} + 2^{3n+7} = 27 \times 3^{3n+1} + 8 \times 2^{3n+4} = 27(3^{3n+1} + 2^{3n+4}) - 19 \times 2^{3n+4} = 19(27q - 2^{3n+4}).$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 19 divise $3^{3n+1} + 2^{3n+4}$.

2. $P(n)$: « 9 divise $s_n = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ ». Initialisation. $s_0 = 0 + 1 + 8 = 9$. Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, $s_n = 9q$, et montrons $P(n + 1)$: on remplace n^3 par $(n + 3)^3$, $s_{n+1} = s_n + (n + 3)^3 - n^3 = 9q + 9n^2 + 27n + 27 = 9(q + n^2 + 3n + 3)$. Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise s_n .

3. $P_{n+1} = (n + 2) \cdots (2n)(2n + 1)(2n + 2) = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n+1} \times (2n + 1) \times 2(n + 1) = 2(2n + 1)P_n$.

$P(n)$: « 2^n divise P_n ». Initialisation. $P_1 = 2$. Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$, $P_n = 2^n q$, et montrons $P(n + 1)$: $P_{n+1} = 2(2n + 1) \times 2^n q = 2^{n+1}(2n + 1)q$. Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 2^n divise P_n (et même $P_n = 2^n \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n - 1)$).

■ Corrigé de l'exercice 57

1. Soit $x \in [0, 1]$ fixé et $P(n) : \ll (1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx} \gg$. *Initialisation.* $(1-x)^0 = 1 = \frac{1}{1+0}$.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$. Comme $1-x \geq 0$, on multiplie $P(n)$ par $1-x$: $(1-x)^{n+1} \leq \frac{1-x}{1+nx}$. Les dénominateurs étant strictement positifs,

$$\frac{1-x}{1+nx} \leq \frac{1}{1+(n+1)x} \iff (1-x)(1+(n+1)x) \leq 1+nx \iff 1+nx - (n+1)x^2 \leq 1+nx,$$

ce qui est vrai. Donc $(1-x)^{n+1} \leq \frac{1}{1+(n+1)x}$. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avec $x = 0,01$, $n = 100$: $0,99^{100} \leq \frac{1}{2}$. Avec $x = 0,1$, $n = 30$: $0,9^{30} \leq \frac{1}{4}$.

2. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	1	3	9	27	81	243	729	2187

 Seul $n = 7$ vérifie $n! > 3^n$ ici ($6! = 720 < 729$ de justesse).

b) $P(n) : \ll n! > 3^n \gg$. *Initialisation.* $7! = 5040 > 2187 = 3^7$. *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 7$ et montrons $P(n+1)$: comme $n+1 > 3$, $(n+1)! = (n+1) \times n! > (n+1) \times 3^n > 3 \times 3^n = 3^{n+1}$. *Conclusion.* $n! > 3^n$ pour tout $n \geq 7$.

c) D'après a) et b) : $n! > 3^n \iff \boxed{n \geq 7}$.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. a) $u_1 = 16 - 8 + 2 = 10$, $u_2 = 100 - 20 + 2 = 82$, $u_3 = 6724 - 164 + 2 = 6562$. b) $(u_n - 1)^2 = u_n^2 - 2u_n + 1 = u_{n+1} - 1$.

c) $u_n - 1$ vaut 3, 9, 81, 6561, soit $3^1, 3^2, 3^4, 3^8$: on conjecture $P(n) : \ll u_n = 3^{2^n} + 1 \gg$. *Initialisation.* $u_0 = 4 = 3^{2^0} + 1$. *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: d'après b), $u_{n+1} - 1 = (3^{2^n})^2 = 3^{2 \times 2^n} = 3^{2^{n+1}}$. *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 3^{2^n} + 1}$.

2. a) $\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a) - \frac{b^2-a^2}{2} = (b-a)\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)$. Si $0 \leq a \leq b \leq 1$, alors $b-a \geq 0$ et $a+b \leq 2$, donc $\varphi(b) \geq \varphi(a)$: φ est croissante sur $[0, 1]$.

b) $P(n) : \ll \frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{2}{n+2} \gg$. *Initialisation.* $x_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 1$.

Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$. Les nombres $\frac{1}{n+1}$, x_n , $\frac{2}{n+2}$ sont dans $[0, 1]$, où φ est croissante : $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq x_{n+1} \leq \varphi\left(\frac{2}{n+2}\right)$. Or

$$\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+2} = \frac{2n+1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+1)^2(n+2)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{2}{n+3} - \varphi\left(\frac{2}{n+2}\right) = \frac{2}{n+3} - \frac{2(n+1)}{(n+2)^2} = \frac{2}{(n+2)^2(n+3)} > 0.$$

Donc $\frac{1}{n+2} \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{n+3}$. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. c) $\boxed{0,01 \leq x_{99} \leq \frac{2}{101}}$, et $\frac{2}{101} < 0,0199$.

■ Corrigé de l'exercice 59

- $A_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = B_1$; $A_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ et $B_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.
- $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$ (deux termes de plus). Pour B_{n+1} , on perd $\frac{1}{n+1}$ et l'on gagne $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$:
 $B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = d_n$.
P(n) : « $A_n = B_n$ ». *Initialisation.* $A_1 = B_1$. *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$: $A_{n+1} = A_n + d_n = B_n + d_n = B_{n+1}$. *Conclusion.* $A_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- On a $d_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$; on note $P(n)$ l'encadrement. *Initialisation.* $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \leq B_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P(n+1)$. Comme $B_{n+1} = B_n + d_n$, il suffit de vérifier

$$d_n \leq \frac{1}{4n} - \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4n(n+1)} \iff 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 6n + 2,$$

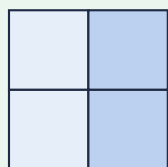
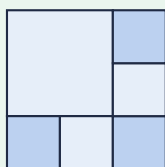
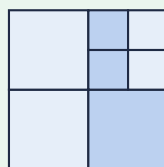
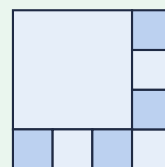
$$d_n \geq \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} = \frac{1}{6n(n+1)} \iff 6n^2 + 6n \geq 4n^2 + 6n + 2,$$

deux inégalités vraies (la seconde équivaut à $n^2 \geq 1$). Alors $B_{n+1} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n} + d_n \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4(n+1)}$ et $B_{n+1} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{6n} + d_n \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{6(n+1)}$. *Conclusion.* L'encadrement est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- La somme est $A_{50} = B_{50}$: $\frac{199}{300} = \frac{2}{3} - \frac{1}{300} \leq A_{50} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{200} = \frac{149}{200}$, soit $0,66 < 0,663 \leq A_{50} \leq 0,745 < 0,75$ (en fait $A_{50} \approx 0,688$).

■ Corrigé de l'exercice 60

- On coupe l'un des n carrés en quatre par ses médianes : on obtient $n - 1 + 4 = n + 3$ carrés. Découpages en 4, 6, 7, 8 carrés (pour 7 : un des quatre carrés du découpage en 4 est recoupé en quatre) :

 $n = 4$  $n = 6$  $n = 7$  $n = 8$

- Initialisation.* $Q(6)$ est vraie : 6, 7, 8 sont bons. *Hérédité.* Supposons que $Q(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 6$ et montrons $Q(n+1)$: $n+1$ et $n+2$ sont bons par hypothèse, et $n+3$ l'est car n l'est (question 1). *Conclusion.* $Q(n)$ est vraie pour tout $n \geq 6$: **tout entier $n \geq 6$ est bon.**
- a) Plaçons le grand carré en $[0, L]^2$ et un petit carré en $[\alpha, \alpha+s] \times [\beta, \beta+s]$, contenu dans le grand. Deux sommets distincts du grand carré ont des abscisses ou des ordonnées qui diffèrent de L ; s'ils sont dans le petit carré, alors $s \geq L$, donc $s = L$: le petit carré est le grand.
 b) *Par l'absurde*, supposons un découpage en 2 ou 3 carrés. Aucun n'est le grand carré, donc, d'après a), chacun contient au plus un des quatre sommets ; or chaque sommet est dans un petit carré : il faut au moins quatre carrés. Contradiction : **2 et 3 ne sont pas bons.**

35

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Analyse. Soit f une solution. En remplaçant x par $-x$: $f(-x) - x f(x) = 1 - x$, d'où $f(-x) = 1 - x + x f(x)$, que l'on reporte :

$$f(x) + x(1 - x + x f(x)) = x + 1 \iff (1 + x^2)f(x) = 1 + x^2 \iff f(x) = 1 \quad (\text{car } 1 + x^2 \neq 0).$$

Synthèse. La fonction constante 1 convient : $1 + x \times 1 = x + 1$. **C'est la seule solution.**

2. Par l'absurde, supposons qu'une telle f existe. Avec $x = 0$: $f(y) = f(0) + y^2$ pour tout y . Avec $x = y = 1$: $f(2) = f(1) + 1$, soit $f(0) + 4 = f(0) + 2$: contradiction.
3. a) $P(n)$: « $f(n) \geq n + f(0)$ ». Initialisation. Égalité pour $n = 0$. Hérédité. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $P(n+1)$: $f(n+1) > f(n) \geq n + f(0)$, et ce sont des entiers, donc $f(n+1) \geq n+1 + f(0)$. Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) $f(a) = f(f(0)) = 2$. D'après a) : $2 = f(a) \geq a + f(0) = 2a$, donc $a \leq 1$. Si $a = 0$: $f(f(0)) = f(0) = 0 \neq 2$, absurde. Donc $a = 1$.
- c) $R(n)$: « $f(n) = n + 1$ ». Initialisation. $f(0) = 1$. Hérédité. Supposons que $R(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $R(n+1)$: $f(n+1) = f(f(n)) = n + 2$. Conclusion. $f(n) = n + 1$ pour tout n . Réciproquement, $n \mapsto n + 1$ est strictement croissante et $f(f(n)) = n + 2$ ✓ : c'est la seule solution.
4. a) En échangeant x et y : $f(y) - f(x) \leq (x - y)^2$. Donc $-(x - y)^2 \leq f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$.
- b) La somme est télescopique et vaut $f(x_n) - f(x_0) = f(x) - f(y)$. Par l'inégalité triangulaire (étendue à n termes par récurrence) et a), avec $x_{k+1} - x_k = \frac{x-y}{n}$: $|f(x) - f(y)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq n \times \frac{(x-y)^2}{n^2} = \frac{(x-y)^2}{n}$.
- c) Par l'absurde, supposons f non constante : il existe x, y avec $\delta = |f(x) - f(y)| > 0$. Pour un entier $n > \frac{(x-y)^2}{\delta}$ (par exemple $n = \left\lceil \frac{(x-y)^2}{\delta} \right\rceil + 1$), on a $\frac{(x-y)^2}{n} < \delta$, ce qui contredit b). Donc f est constante ; réciproquement, toute constante convient ($0 \leq (x - y)^2$) : **les solutions sont les fonctions constantes.**

■ Corrigé de l'exercice 62

1. a) Si les phrases $i \neq j$ étaient vraies, il y aurait exactement i et exactement j phrases fausses : absurde. Si aucune n'était vraie, les 10 seraient fausses, et la phrase 10 dirait vrai : contradiction.
- b) Il y a donc une seule phrase vraie et 9 fausses ; la vraie est celle qui annonce 9 fausses : **seule la phrase 9 est vraie** (contrôle : 9 phrases fausses, et chaque phrase $k \neq 9$ dit bien faux).
- c) Avec $N = 1$, la phrase dit « exactement une phrase de cette feuille est fausse », c'est-à-dire « cette phrase est fausse ». Déclarée **V**, elle affirme être fausse ; déclarée **F**, il y a bien une phrase fausse, donc elle dit vrai. C'est le **paradoxe du menteur** : ce n'est pas une proposition.
2. a) La phrase k dit « $F \geq k$ » : elle est vraie si et seulement si $k \leq F$. Les phrases vraies sont donc $1, 2, \dots, F$: il y en a F .
- b) F vraies et F fausses : $2F = 10$, $F = 5$. **Les phrases 1 à 5 sont vraies, les phrases 6 à 10 fausses** (contrôle : 5 fausses, et « au moins k » est vrai si et seulement si $k \leq 5$ ✓).

c) Le même raisonnement donne $2F = 11$: impossible (parité). Aucune attribution n'est cohérente. En général, il faut $2F = N$: une attribution cohérente existe si et seulement si N est pair (elle est alors unique, avec $F = \frac{N}{2}$).

■ Corrigé de l'exercice 63

- a) $(n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1) = n^5 - n^4 + n^2 + n^4 - n^3 + n + n^3 - n^2 + 1 = n^5 + n + 1$.

b) $n = 0$: 1 n'est pas premier ; $n = 1$: 3 est premier. Pour $n \geq 2$: $n^2 + n + 1 \geq 7$ et $n^3 - n^2 + 1 = n^2(n - 1) + 1 \geq 5$, donc $n^5 + n + 1$ est produit de deux entiers > 1 (ex. $35 = 7 \times 5$).
 $n^5 + n + 1$ premier $\iff n = 1$.
- $P(m)$: « 11 divise $10^m - (-1)^m$ ». *Initialisation.* $10^0 - (-1)^0 = 0$. *Hérédité.* Supposons que $P(m)$ est vraie pour un entier $m \geq 0$ et montrons $P(m+1)$: $10^{m+1} - (-1)^{m+1} = 10(10^m - (-1)^m) + 11 \times (-1)^m$, somme de deux multiples de 11. *Conclusion.* $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- a) Somme géométrique de raison 100 : $A_n = \frac{100^n - 1}{99}$, donc $99A_n = (10^m)^2 - 1 = (10^m - 1)(10^m + 1)$.

b) $10^m - 1 = 100^p - 1 = 99(1 + 100 + \dots + 100^{p-1}) = 99A_{p-1}$, d'où $A_n = (10^m + 1)A_{p-1}$, avec $A_{p-1} \geq 101 > 1$: A_n est composé.

c) $\frac{10^m - 1}{9} = 1 + 10 + \dots + 10^{m-1}$ est un entier ≥ 111 ; m étant impair, $10^m + 1 = 10^m - (-1)^m$ est divisible par 11 (question 2) et $\frac{10^m + 1}{11} \geq \frac{1001}{11} = 91$. Leur produit vaut $\frac{(10^m - 1)(10^m + 1)}{99} = A_n$: A_n est composé.

d) Pour $n \geq 2$, $m \geq 3$ est pair avec $p \geq 2$ (cas b) ou impair (cas c) : A_n est composé. Et 101 est premier (ni 2, ni 3, ni 5, ni 7 ne le divisent, et $11^2 > 101$). **Seul 101 est premier** ; par exemple $10\,101 = 111 \times 91$ et $1\,010\,101 = 101 \times 10\,001$.

■ Corrigé de l'exercice 64

- Fixons une stratégie. P_n parle en premier : son annonce ne dépend que des chapeaux de $P_1, \dots, P_{n-1}$. Fixons ces chapeaux ; l'annonce de P_n est alors déterminée, et l'on donne à P_n l'autre couleur : il n'est pas libéré. (C'est « $\forall s, \exists r, P_n$ n'est pas libéré ».)
- Soit p la parité du nombre de chapeaux noirs de $P_1, \dots, P_{n-1}$, connue de tous grâce à P_n . P_{n-1} voit $P_1, \dots, P_{n-2}$: si le nombre de chapeaux noirs qu'il voit a la parité p , son chapeau est blanc, sinon il est noir.
 $R(j)$: « $P_{n-1}, \dots, P_{n-j}$ annoncent leur vraie couleur ». *Initialisation.* $R(1)$ vient d'être vue. *Hérédité.* Supposons que $R(j)$ est vraie pour un entier j avec $1 \leq j \leq n - 2$ et montrons $R(j+1)$: P_{n-j-1} voit $P_1, \dots, P_{n-j-2}$ et a entendu $P_{n-1}, \dots, P_{n-j}$, qui ont annoncé leur vraie couleur ; il connaît donc tous les chapeaux de $P_1, \dots, P_{n-1}$ sauf le sien, et la parité p : il en déduit sa couleur. *Conclusion.* $R(n-1)$ est vraie : **au moins $n-1$ prisonniers sont libérés.**
- A est **vraie** (stratégie de la parité). B est **fausse** : sa négation « $\forall s, \exists r$, un prisonnier au moins n'est pas libéré » est prouvée en 1. C est **vraie** : pour une répartition r donnée, la règle « chacun annonce la couleur qu'il porte dans r » libère tout le monde. Dans C , la stratégie dépend de r (impossible en pratique : les prisonniers ne connaissent pas r) ; dans B , une même stratégie doit marcher pour toutes les répartitions. **Échanger $\exists$ et $\forall$ change le sens.**
- P_n annonce le reste p dans la division par 3 de la somme des numéros qu'il voit. Par la même récurrence qu'en 2, chaque P_k ($k \leq n-1$) connaît p et la somme T des numéros de $P_1, \dots, P_{n-1}$ autres que le sien ; son numéro $c \in \{0, 1, 2\}$ est l'unique valeur telle que $c + T$ ait pour reste p ($T, T+1, T+2$ ont des restes deux à deux distincts). Au moins $n-1$ prisonniers sont libérés.

■ Corrigé de l'exercice 65

- a) Si $23 = 5a + 7b$ ($a, b \in \mathbb{N}$), alors $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $23 - 7b \in \{23, 16, 9, 2\}$: aucun n'est multiple de 5.

b) Payables ≤ 23 : 0, 5, 10, 15, 20, 7, 12, 17, 22, 14, 19, 21. **Non payables** : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23 (douze entiers).
- a) $24 = 5 \times 2 + 7 \times 2$, $25 = 5 \times 5$, $26 = 5 + 7 \times 3$, $27 = 5 \times 4 + 7$, $28 = 7 \times 4$.

b) $P(n)$: « n est payable ». *Initialisation.* $P(24)$, ..., $P(28)$ (question a). *Hérédité (forte).* Soit $n \geq 28$ tel que $P(k)$ soit vraie pour tout entier k de 24 à n ; montrons $P(n+1)$: $24 \leq n-4 \leq n$, donc $n-4 = 5a + 7b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) et $n+1 = 5(a+1) + 7b$. *Conclusion.* Tout entier $n \geq 24$ est payable.
- a) Les restes de 0, 7, 14, 21, 28 dans la division par 5 sont 0, 2, 4, 1, 3 : chaque reste est atteint une fois. *Existence* : si r est le reste de n , on prend b tel que $7b$ ait le reste r ; alors $n - 7b = 5a$ avec $a \in \mathbb{Z}$. *Unicité* : si $5a + 7b = 5a' + 7b'$, alors $7(b - b') = 5(a' - a)$ est multiple de 5 ; or $7(b - b') \in \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 28\}$, donc $b = b'$, puis $a = a'$.

b) Si $a \geq 0$, n est payable. Réciproquement, si $n = 5a' + 7b'$ avec $a', b' \in \mathbb{N}$, on écrit $b' = 5q + b''$ ($b'' \in \{0, \dots, 4\}$) : $n = 5(a' + 7q) + 7b''$, et par unicité $a = a' + 7q \geq 0$.

c) $23 = 5 \times (-1) + 7 \times 4$. Si $n = 5a + 7b$ (écriture de a), alors $23 - n = 5(-1 - a) + 7(4 - b)$ avec $4 - b \in \{0, \dots, 4\}$: c'est l'écriture de $23 - n$. D'après b) : $23 - n$ payable $\iff -1 - a \geq 0 \iff a < 0 \iff n$ non payable. Les entiers de 0 à 23 forment 12 paires $\{n, 23 - n\}$ (23 est impair), chacune contenant exactement un non payable, et tout $n \geq 24$ est payable : **il y a exactement 12 entiers non payables.**

■ Corrigé de l'exercice 66

- $J(1) = 1$; $J(2) = 1$; $J(3) = 3$ (on élimine 2, 1) ; $J(4) = 1$ (2, 4, 3) ; $J(5) = 3$; $J(6) = 5$ (2, 4, 6, 3, 1) ; $J(7) = 7$ (2, 4, 6, 1, 5, 3) ; $J(8) = 1$.
- a) Au premier tour, on élimine 2, 4, ..., $2n$; après $2n$ vient 1, épargné. On rejoue avec n personnes, la i -ième étant $2i - 1$: le survivant est la $J(n)$ -ième, d'où $J(2n) = 2J(n) - 1$.

b) On élimine 2, 4, ..., $2n$, on épargne $2n + 1$, puis on élimine 1. On rejoue avec 3, 5, ..., $2n + 1$ en épargnant 3 : la i -ième personne est $2i + 1$, d'où $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$.
- Initialisation.* Pour $m = 0$: $\ell = 0$ et $J(1) = 1$. *Hérédité.* Supposons que $P(m)$ est vraie pour un entier $m \geq 0$ et montrons $P(m+1)$. Soit $0 \leq \ell < 2^{m+1}$. Si $\ell = 2\ell'$ est pair, alors $0 \leq \ell' < 2^m$ et $J(2(2^m + \ell')) = 2(2\ell' + 1) - 1 = 2\ell + 1$. Si $\ell = 2\ell' + 1$ est impair, alors $0 \leq \ell' \leq 2^m - 1$ et $J(2(2^m + \ell') + 1) = 2(2\ell' + 1) + 1 = 2\ell + 1$. *Conclusion.* $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- Tout $n \geq 1$ s'écrit $n = 2^m + \ell$ avec $0 \leq \ell < 2^m$ (2^m : plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n). $100 = 64 + 36$: $J(100) = 73$; $2026 = 1024 + 1002$: $J(2026) = 2005$.

$J(n) = 1 \iff \ell = 0 \iff n$ est une puissance de 2 ; $J(n) = n \iff 2\ell + 1 = 2^m + \ell \iff \ell = 2^m - 1 \iff n = 2^{m+1} - 1$ (1, 3, 7, 15, ...).

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Calculs et nombres

- ① $A = 2\sqrt{2}$ et $B = 4$: c'est B l'entier. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;
 $B = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3$.
- ② $E = 4(x-1)(x+2)$;
 $S = \{-2; 1\}$.
 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 2x+1$ et $b = 3$.
- ③ $[-1; 5]$. $-3 \leq x-2 \leq 3$, soit $-1 \leq x \leq 5$: la distance de x à 2 est au plus 3.
- ④ $1 \leq 3-2x \leq 7$ et $0 \leq x^2 \leq 4$. Multiplier par -2 renverse l'ordre ; $x = 0$ est permis, donc pas « $1 \leq x^2$ ».

Bloc 2 · Raisonner sur les entiers

- ⑤ $(n+1)^2 - n^2$ toujours impair, $2n^2 + 6n + 4$ toujours pair, $n^2 + 1$ ni l'un ni l'autre. Ils valent $2n+1$ et $2(n^2+3n+2)$; n^2+1 vaut 1 si $n=0$, 2 si $n=1$.
- ⑥ $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$;
 PGCD = 36.
 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$; facteurs communs au plus petit exposant.
- ⑦ Seul 89 est premier.
 $87 = 3 \times 29$, $119 = 7 \times 17$;
 89 n'a pas de diviseur premier $p \leq 7$, et $11^2 > 89$.
- ⑧ Le reste est 3. $n = 5q + 3$ donne $2n+7 = 5(2q+2)+3$.

Bloc 3 · Bon sens logique

- ⑨ (a) Son téléphone n'est pas déchargé. (b) Non. Elle peut être en classe, occupée...
- ⑩ (a) 20 ; (b) 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20. « Ou » garde aussi 20 (les deux).
- ⑪ Par exemple $f(x) = x^3 - x$.
 $f(-1) = f(1) = 0$, mais $f(-2) = -6$ et $f(2) = 6$: f n'est pas paire.
- ⑫ (a) « Au moins un train ne part pas à l'heure. »
 (b) « Aucune question de ce test n'est facile. » Et non « aucun train ne part à l'heure ».

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 3 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 37**, p. 31. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 11), méthodes et pièges compris. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 31 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 11 en lecture rapide), puis les sections 12 à 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Calculs et nombres

Relis : les sections 6 et 7 du cours.
Fais : **exercice 12**, p. 25, **exercice 13**, p. 25, **exercice 49**, p. 34 et **exercice 52**, p. 35.

Bloc 2 · Raisonner sur les entiers

Relis : les sections 7, 8, 9 et 11 du cours.
Fais : **exercice 8**, p. 24, **exercice 11**, p. 25, **exercice 43**, p. 32 et **exercice 50**, p. 34.

Bloc 3 · Bon sens logique

Relis : les sections 1, 2, 5 et 10 du cours.
Fais : **exercice 4**, p. 23, **exercice 6**, p. 24, **exercice 16**, p. 26 et **exercice 38**, p. 31.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B • Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 • Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 • Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 • Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 • Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C • La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A • Propositions et connecteurs	31 à 36	/ 6	
Thème B • Quantificateurs et négations	37 à 42	/ 6	
Thème C • Contraposée et absurde	43 à 48	/ 6	
Thème D • Cas par cas et équivalences	49 à 54	/ 6	
Thème E • Raisonnement par récurrence	55 à 60	/ 6	
Thème F • Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Les ensembles

Maths Olympiad