


Lycée Privé les Castors

L. Castors

Cahier du professeur

Classe : 11^{ème} Sciences

Chapitres :

- ✓ Géométrie Plane.
- ✓ Suites Numériques

Année scolaire : 2022-2023

Date : Bamako le 12 Avril 2023



Sommaire

<i>Géométrie Plane</i>	2
Séquence 1 : Vecteur du plan	2
Séquence 2 : Droites	4
Séquence 3 : Cercle.....	7
Séquence 4 : Produit scalaire	9
Séquence 5 : Barycentre.....	13
<i>Suites Numériques</i>	18
Séquence 1 : Généralités sur les suites numériques	18
Séquence 2 : Suite arithmétique	22
Séquence 3 : Suite géométrique	23
Evaluation	24



Géométrie Plane

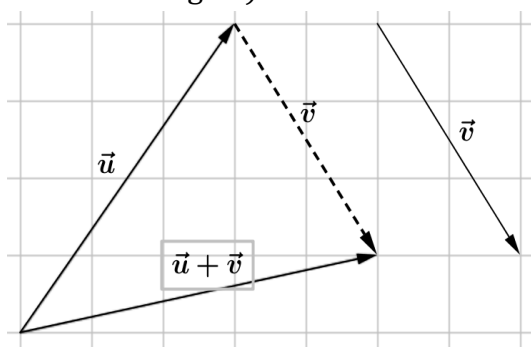
Dans cette partie P désigne le plan euclidien et $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des vecteurs du plan P

Séquence 1 : Vecteur du plan

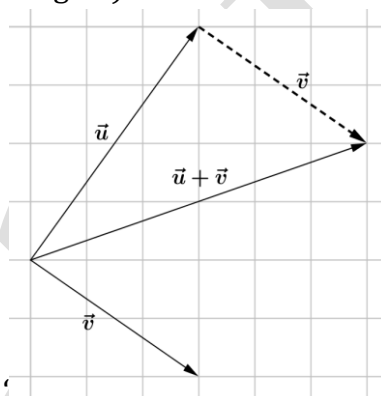
1.1. Somme vectorielle

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur de $\mathcal{V}$

1^{er} cas : (vecteur n'ayant pas le même origine)



2^{ième} cas : (vecteur ayant le même origine)



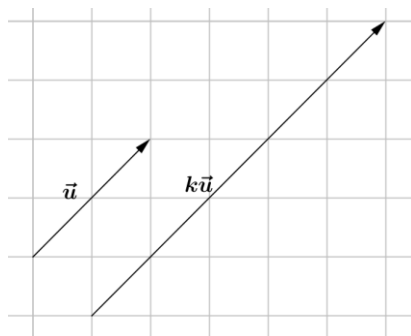
Propriétés

$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} ; \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2}.$

- ❖ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Commutative)
- ❖ $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (associativité)
- ❖ $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$ (Élément symétrie)
- ❖ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (Élément neutre)
- ❖ $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

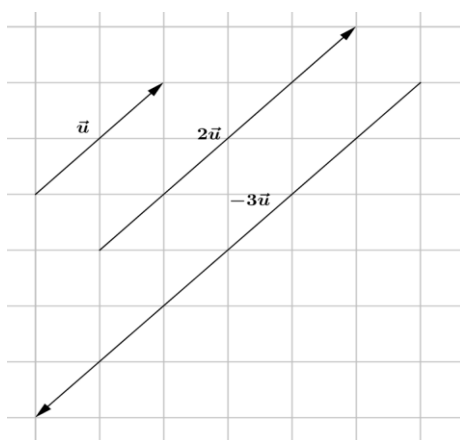
1.2. Multiplication d'un vecteur par un réel :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$ et k un réel.



où $k > 0$

Exemple



Propriétés

$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} ; \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2}.$

- ❖ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- ❖ $a\vec{u} = \vec{u} \times a$
- ❖ $a \times (b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

1.3. Combinaison linéaire des vecteurs

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V} ; \vec{v} \in \mathcal{V}$

Un vecteur $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsque $\vec{w}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$.

Exemple

$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} ; \vec{t} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \end{pmatrix}$

$\vec{w}$ est-il une combinaison linéaire de :

- a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- b) $\vec{u}$ et $\vec{t}$.

1.4. Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque :

$\vec{u} = k\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

- ❖ Si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens.
- ❖ Si $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires.



Remarques

- ❖ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.
- ❖ A, B, C sont alignés si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ ou $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

1.5. Base de $\mathcal{V}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathcal{V}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc si $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$

Exemple

I) Indique parmi les vecteurs ceux qui sont colinéaires et ceux qui forment une base. Précise le sens de ceux qui sont colinéaires : $\vec{u}(\frac{2}{3})$; $\vec{v}(\frac{4}{6})$; $\vec{t}(\frac{24}{12})$ et $\vec{w}(\frac{1}{9})$

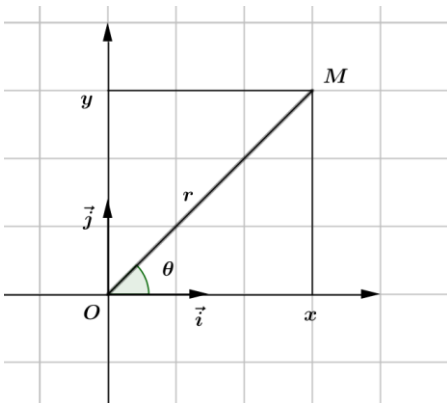
II) Dans le plan P on considère $A(\frac{1}{3})$; $B(\frac{5}{7})$; $C(\frac{-1}{1})$ et $D(\frac{8}{1})$

- 1) A, B, C sont-ils alignés ?
- 2) A, B, D sont-ils alignés ?

1.6. Repère

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$ et O un point. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère.

Soit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$



x et y sont les coordonnées cartésiennes de M et on note $M(\frac{x}{y})$.

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{OM} = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{OM} = \frac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$M(r; \theta)$ coordonnée polaire de M .

Exemple

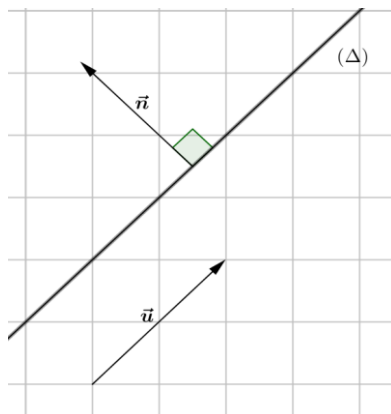
- a) Trouve les coordonnées polaires des points $A(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $B(-1; 1)$ et $C(-\sqrt{3}; -1)$
- b) Trouve les coordonnées cartésiennes de $D(2; \frac{3\pi}{4})$, $E(\frac{3}{2}; -\frac{\pi}{3})$ et $F(3; \frac{7\pi}{6})$.

Séquence 2 : Droites

2.1. Equation cartésienne d'une droite

Forme générale (Δ) : $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

- ❖ $\vec{n}(\frac{a}{b})$ est vecteur normale à la droite (Δ) .
- ❖ $\vec{u}(\frac{-b}{a})$ est vecteur directeur de (Δ) .



$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \text{ si } b \neq 0 \text{ alors } (\Delta) : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Posons $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$

- $(\Delta) : y = mx + p$ est l'équation réduite de (Δ) .
- $m = -\frac{a}{b}$ est le coefficient directeur de (Δ) ou encore la pente à (Δ) .

Exemple

Soit $(\Delta) : 3x - 4y + 9 = 0$

- $a = 3; b = -4; c = 9$
- $\vec{n}_1\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right); \vec{n}_2\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right); \vec{n}_3\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -8 \end{smallmatrix}\right)$ sont des vecteurs normaux à (Δ)
- $\vec{v}_1\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right); \vec{v}_2\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right); \vec{v}_3\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ sont des vecteurs directeurs à (Δ) .
- $m = \frac{-a}{b} = \frac{3}{4}$ est le coefficient directeur de (Δ) .
- $(\Delta) : y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ est l'équation réduite de (Δ) .

2.2. Equation ou représentation paramétrique d'une droite

Soit (Δ) une droite et $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right) \in (\Delta)$ et $t \in \mathbb{R}$

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (\Delta)$ et $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ un vecteur directeur de (Δ) .

$\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{smallmatrix}\right)$ est aussi un vecteur directeur de (Δ) .

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\left(\begin{smallmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$

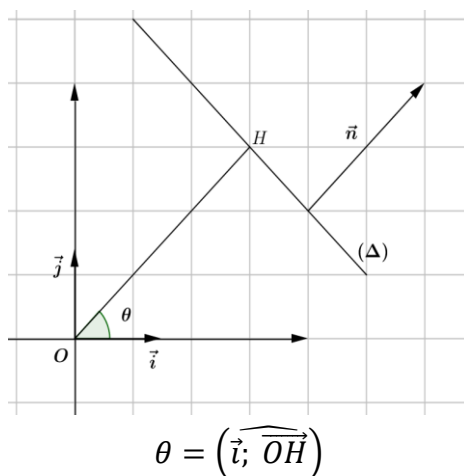
Par identification on a :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\Delta) : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique de } (\Delta).$$

Exemple

Trouve l'équation paramétrique de $(\Delta) : 3x - 7y + 1 = 0$

2.3. Equation normale d'une droite



Soit $(\Delta) : ax + by + c = 0$

$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur normale à la droite (Δ) . Pour déterminer une équation normale à (Δ) , il suffit de diviser l'équation de (Δ) , par la norme du vecteur normal.

Ainsi, on a :

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$(\Delta) : \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ est une équation normale de (Δ)

Posons : $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(\Delta) : (\cos \theta)x + (\sin \theta)y + p = 0$ est une équation normale de (Δ) .

Remarque : (distance d'un point à une droite)

Soit $(D) : ax + by + c = 0$ et $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \in (D)$.

La distance du point A à (D) notée $d(A; (D))$ est définie par $d(A; (D)) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.4. Droites parallèles-Droites orthogonales (ou perpendiculaires)

Soit $(\Delta) : ax + by + c = 0$ et $(\Delta') : a'x + b'y + c' = 0$

$$\diamond (\Delta) // (\Delta') \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow a'b = ab'$$

$$\diamond (\Delta) \perp (\Delta') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Soit $(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$

$$\diamond (D) // (D') \Leftrightarrow m = m'$$

$$\diamond (D) \perp (D') \Leftrightarrow m \times m' = -1$$

Evaluation

Soit (D_m) dans le plan muni de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$(D_m) : (m-2)x + (m+1)y + 3 = 0$ avec m paramètre réel.

1) Trouve m pour que (D_m) passe par $A \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2) Trouve m pour que (D_m) passe par $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

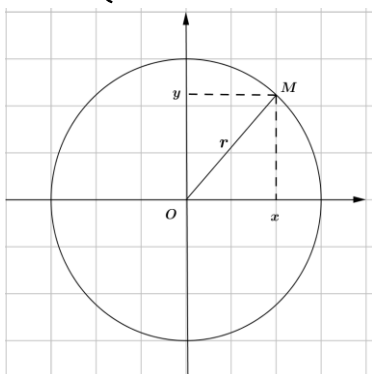


- 3) Détermine m pour que $(D_m) // (\Delta) : 9x - 5y + 1 = 0$.
- 4) Détermine m pour que $(D_m) \perp (\Delta') : 4x - y + 7 = 0$.
- 5) Trouve l'équation cartésienne des droites de : (D_0) , (D_2) et (D_{-1})
- 6) Détermine une équation cartésienne de (Δ) passant par A et $// (D_0)$.
- 7) Trouve l'équation cartésienne de (Δ_2) passant par A et $\perp$ à (D_0)
- 8) Trouve l'équation normale à (D_0)
- 9) Calcule la distance de A à (D_0)
- 10) Détermine m pour que $d(A ; D_m) = 3\sqrt{5}$.
- 11) Trace les droites (D_0) , (D_{-1}) et (D_2) .

Séquence 3 : Cercle

3.2. Equation cartésienne d'un cercle

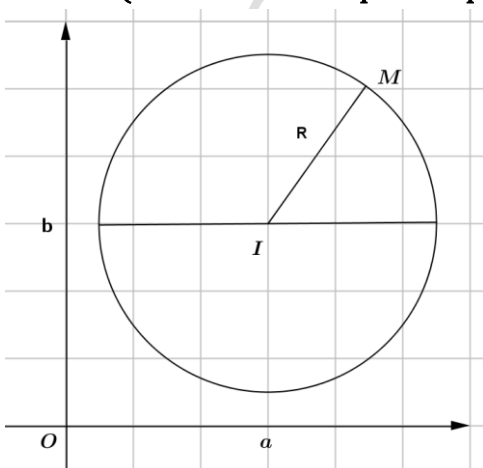
1^{er} cas : (cercle de centre l'origine du repère)



$$OM^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2$$

$x^2 + y^2 = r^2$ est l'équation cartésienne du cercle de centre $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon r .

2^{ème} cas : (cercle de centre quelconque)



$$IM = \sqrt{(x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2}$$
$$OM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ est une équation du cercle (C) de centre $I(a, b)$ et de rayon R

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

$$\text{Posons : } c = a^2 + b^2 - R^2$$

$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est appelé l'équation cartésienne de centre $I(a, b)$ et rayon R .



3.2. Equation ou représentation paramétrique du cercle

1^{er} cas : (cercle de centre $O(0; 0)$)

Soit (C) le cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon R ($R > 0$)

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$$

Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{R} \\ \sin \theta = \frac{y}{R} \end{cases}$$

$(C): \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est une équation ou représentation paramétrique du cercle (C) de centre $O(0; 0)$ et de rayon R .

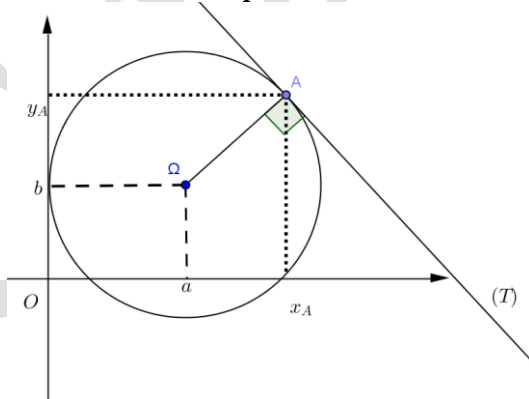
2^{ème} cas : (cercle de centre quelconque)

Soit (C) le cercle de centre $I(a, b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et rayon R ($R > 0$) et $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (C)$

$$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1 \text{ alors } \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x-a}{R} \\ \sin \theta = \frac{y-b}{R} \end{cases}$$

$(C): \begin{cases} x = R \cos \theta + a \\ y = R \sin \theta + b \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est une équation ou représentation paramétrique du cercle (C) de centre $I(a, b)$ et de rayon R .

3.3. Equation de la tangente d'un cercle en un point



Soit $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right) \in (T)$ et $A \in (C)$ de cercle $\Omega(a, b)$. (T) est appelé la tangente du cercle (C) en A .

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (T)$

$\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{smallmatrix}\right)$ est aussi un vecteur directeur de (T)

$\overrightarrow{\Omega A}\left(\begin{smallmatrix} x_A-a \\ y_A-b \end{smallmatrix}\right)$

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A-a \\ y_A-b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (T): (x - x_A)(x_A - a) + (y - y_A)(y_A - b) = 0$$



Evaluation

Exercice 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_1) de centre $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon 3.
- 2) Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_2) de centre $I\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon 5.
- 3) Trouve une équation cartésienne du cercle passant par $A\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), C\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 12 \end{smallmatrix}\right)$
- 4) Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_4) de diamètre $[DE]$ avec $E\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), D\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$.
- 5) Construis $(C_1), (C_2), (C_4)$
- 6) Trouve les coordonnées des points d'intersection de (C_1) et $(\Delta): y = x - 1$

Exercice 2

Parmi les équations ci-dessous indique celles qui sont du cercle et construis ce cercle :

$$(E_0) : x^2 + y^2 = -2$$

$$(E_1) : x^2 + y^2 = 2$$

$$(E_2) : 3x^2 + 2y^2 = 5$$

$$(E_3) : x^2 + y^2 - 7x - 3y + 50 = 0$$

$$(E_4) : x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$$

$$(E_5) : \begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = -5 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R} ; \quad (E_6) : \begin{cases} x = 3 - 7 \cos \theta \\ y = -2 - 7 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

On donne le cercle $(C) : x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ et le point $A(1; 3)$.

- 1) Vérifie que $A \in (C)$
- 2) Trouve une équation de la tangente (T) à (C) au point A .

Séquence 4 : Produit scalaire

4.1. Définition

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est un réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$

4.2. Propriétés

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et a et b deux réels :

- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$;
- $\|a\vec{u}\|^2 = a^2 \vec{u} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)\vec{u} \cdot \vec{v}$;



- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

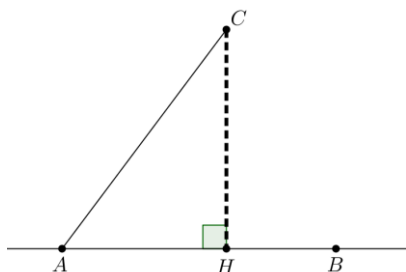
4.3. Interprétation géométrique :

Soient A, B, C trois points distincts :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos(\widehat{AB, AC})$$

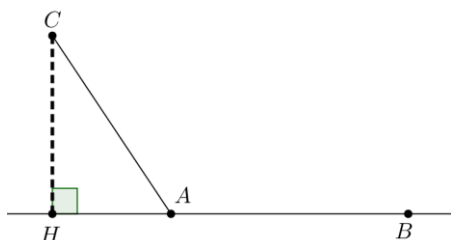
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos(\hat{A})$$

1^{er} cas : $H \in [AB]$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ ou H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

2^{ème} cas : $H \notin [AB]$

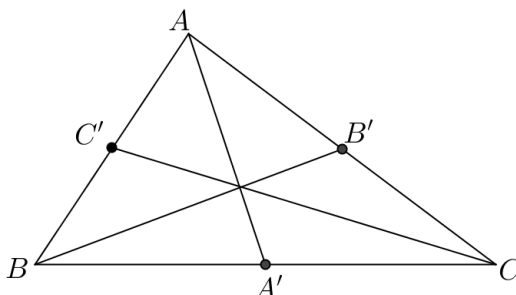


$$H \notin [AB] \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

4.4. Produit et relation métrique dans un triangle :

Soit ABC un triangle quelconque tel que : $AB = c, AC = b, BC = a$

Soit A', B' et C' respectivement milieu de $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$





$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$BC^2 = (BA + AC)^2$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cdot \cos(\hat{A})$$

$$2AB \times AC \cdot \cos(\hat{A}) = AB^2 + AC^2 - BC^2$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \times AC}$$

On a

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc } BC^2 = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2}$$

(AA') ; (BB') et (CC') sont les médianes respectives des sommets A , B et C

Théorème des médianes

$$AA'^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$

$$BB'^2 = \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4}$$

$$CC'^2 = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$$

L'aire du triangle ABC :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}$$

Rayon du cercle circonscrit :

$$R = \frac{BC}{2\sin \hat{A}} = \frac{AC}{2\sin \hat{B}} = \frac{AB}{2\sin \hat{C}}$$



Rayon du cercle inscrit :

$$r = \frac{AB \times AC \times \sin \hat{A}}{AB + AC + BC} = \frac{BA \times BC \times \sin \hat{B}}{AB + AC + BC} = \frac{CA \times CB \times \sin \hat{C}}{AB + AC + BC}$$

4.5. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé c'est-à-dire $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \times \vec{j} = 0$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs / $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ de $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

- Norme

Soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Si $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$ alors $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Distance entre deux points A et B:

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On appelle distance de A à B est le réel noté AB ou $d(A; B)$ tel que :

$$AB = d(A; B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

1) Cosinus et sinus d'un angle $(\vec{u}; \vec{v})$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée alors :

$$\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Evaluation

Exercice 1 :

I. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ et } \vec{v} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\|\vec{i}\| = 1 ; \|\vec{j}\| = 2 \text{ et } \vec{i} \times \vec{j} = -1$$

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\cos(\vec{u}; \vec{v})$; $\sin(\vec{u}; \vec{v})$

II. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j} \text{ et } \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$; $\cos(\vec{u}; \vec{v})$; $\sin(\vec{u}; \vec{v})$; $\text{mes}(\vec{u}; \vec{v})$

III. Dans d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit par :



$$\vec{u} = 3\vec{i} - 7\vec{j} \text{ et } \vec{v} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}; C \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calcule AB ; AC ; BC .
- 2) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- 3) Calcule en degré de chaque angle du triangle ABC

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 3 \text{ cm}$.

Soit A' ; B' ; C' les milieux respectifs de $[BC]$; $[AC]$; $[AB]$

- 1) Calcule AA' ; BB' ; CC' .
- 2) Calcule l'aire, les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit à triangle ABC .
- 3) Calcule la normé en degré de chaque angle de triangle ABC .

Séquence 5 : Barycentre

5.1. Barycentre de deux points pondérés :

Soit A un point et a un réel.

Le couple $(A; a)$ est appelé point pondéré.

Exemple :

$(A; 2)$; $(B; 7)$ sont des points pondérés.

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$. On appelle barycentre de deux points pondérés (A, a) et (B, b) le point G défini par : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

- Si $a + b \neq 0$, G barycentre de (A, a) et $(B, b) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$

Preuve :

$$\begin{aligned} G \text{ bary}\{(A; a); (B; b)\} &\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a + b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

- **Coordonnées du barycentre :**

Si $a + b \neq 0$, les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) dans un repère orthonormé sont : $x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}$ et $y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$

5.2. Barycentre de trois points pondérés :

- ❖ Soient a, b et c des réels tels que $a + b + c \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés (A, a) (B, b) (C, c) le point G défini par : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- ❖ Si $a + b + c \neq 0$, G barycentre de (A, a) (B, b) $(C, c) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$



- ❖ Si $a + b + c \neq 0$, les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, a) (B, b) (C, c) dans un repère orthonormé sont :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$$

NB :

Isobarycentre :

- On appelle isobarycentre des points A, B et C le barycentre de ces trois points pondérés par un même coefficient. Il s'agit en fait du centre de gravité du triangle ABC .
- L'isobarycentre de deux points est le milieu du segment formé par ces deux points.

4.3. Barycentre de quatre points

- Soient a, b, c et d des réels tels que $a + b + c + d \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés (A, a) (B, b) (C, c) (D, d) le point G défini par : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
- Si $a + b + c + d \neq 0$, G barycentre de (A, a) (B, b) (C, c) $(D, d) \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c+d}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c+d}\overrightarrow{AC} + \frac{d}{a+b+c+d}\overrightarrow{AD}$$

4.4. Lignes de niveaux

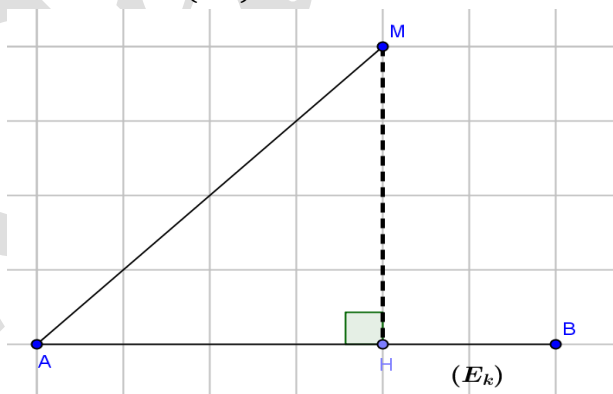
4.4.1. Définition

Soit k un réel, on appelle lignes des niveaux de l'application f , l'ensemble (E_k) tel que $f(M) = k$ pour tout point M du plan.

4.4.2. Lignes de niveaux de type : $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Soit à déterminer l'ensemble (E_k) des points M tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB)



$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Rightarrow \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} = k \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{k}{\overrightarrow{AB}}$$

Alors l'ensemble (E_k) est la droite perpendiculaire à (AB) en H telle que $\overrightarrow{AH} = \frac{k}{\overrightarrow{AB}}$

Exemple : Soit $AB = 3 \text{ cm}$

Détermine et construis l'ensemble (E_k) des points M tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ dans chacun des cas suivants :

$k = 0$; $k = 3$; $k = 12$ et $k = -6$

4.4.3. Ligne de niveaux du type : $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$



Soient A, B deux points avec $A \neq B$ et k un réel. (E_k)

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ avec M un point quelconque de P .

Soit I milieu de $[AB]$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \times (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k$$

$$\Rightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = k$$

$$\Rightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \underbrace{(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_0 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = k$$

$$\Rightarrow MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = k$$

$$\Rightarrow MI^2 - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}{2} = k$$

$$\Rightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$\Rightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

Posons $\alpha = k + \frac{AB^2}{4}$

❖ Si $\alpha < 0$ alors $MI^2 < 0$ impossible par conséquent l'ensemble (E_k) est ensemble vide.

❖ Si $\alpha = 0$ alors $MI^2 = 0 \Rightarrow MI = 0$ alors l'ensemble (E_k) est I .

❖ Si $\alpha > 0$ alors $MI = \sqrt{\alpha}$ alors l'ensemble (E_k) est le cercle de centre I et de rayon $r = \sqrt{\alpha}$.

Exemple

Soit $AB = 4 \text{ cm}$

Discute suivant les valeurs de k l'ensemble (E_k) des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

En déduis l'ensemble (E) pour $k = 5$. Construis (E) .

4.4.4. Ligne de niveau de type $aMA^2 + bMB^2 = k$

Soit à déterminer l'ensemble (E_k) de points M tel que $aMA^2 + bMB^2 = k$ avec $a, b, k \in \mathbb{R}$.

- $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

$$aMA^2 - aMB^2 = k \Rightarrow a(MA^2 - MB^2) = k \Rightarrow a(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = k$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \frac{k}{a}$$

Soit I milieu de $[AB]$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \frac{k}{a}$$

$$\Rightarrow (2\overrightarrow{MI})(\overrightarrow{BA}) = \frac{k}{a} \Rightarrow (-2\overrightarrow{IM})(-\overrightarrow{AB}) = \frac{k}{a} \text{ car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{k}{2a}$$

Soit H la projection orthogonale de M sur (AB) :

$$\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB} = \frac{k}{2a} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2a\overrightarrow{AB}} \text{ alors l'ensemble } (E_k) \text{ est la droite perpendiculaire à } (AB)$$

$$\text{en } H \text{ tel que } \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2a\overrightarrow{AB}}$$

- Si $a + b \neq 0$ alors $\exists G$ barycentre $(A, a), (B, b)$

$$aMA^2 + bMB^2 = k$$



$$\begin{aligned}
 a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 &= k \\
 \Rightarrow aMG^2 + 2a\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + aGA^2 + bMG^2 + 2b\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + bGB^2 &= k \\
 \Rightarrow (a+b)MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \left(\underbrace{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}}_0 \right) + aGA^2 + bGB^2 &= k \\
 \Rightarrow (a+b)MG^2 &= k - aGA^2 - bGB^2 \\
 \Rightarrow MG^2 &= \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b} \\
 \text{Posons } \alpha &= \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}
 \end{aligned}$$

- ❖ Pour $\alpha < 0$ alors $MG^2 < 0$ par conséquent l'ensemble (E_k) est ensemble vide.
- ❖ Si $\alpha = 0$ alors $MG^2 = 0 \Rightarrow MG = 0$ alors l'ensemble (E_k) est G
- ❖ Si $\alpha > 0$ alors $MG = \sqrt{\alpha}$ alors l'ensemble (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\alpha}$.

Exemple : On donne $AB = 4 \text{ cm}$

- 1) Détermine et construis l'ensemble (E_k) de points M tel que $2MA^2 - 2MB^2 = 24$.
- 2) Détermine et construis si possible l'ensemble (E) des points M vérifiant

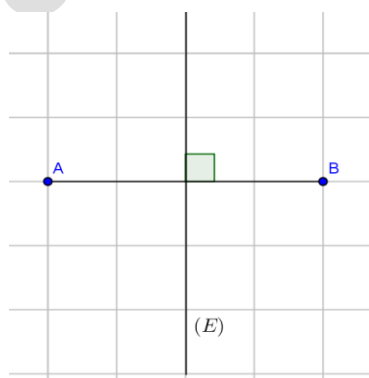
$$2MA^2 + MB^2 = k$$

- a) $k = 0$; b) $\frac{32}{3}$; c) $k = 16$

4.4.5. Ligne de niveau du type : $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Soit à déterminer l'ensemble des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ avec $k > 0$.

- ❖ Si $k = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow MA = MB$ alors l'ensemble (E) des points M est la médiatrice du segment (AB) .



- ❖ Si $k \neq 1$
 $\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 = k^2MB^2 \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0$
 $\Rightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - k^2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 0$
 $\Rightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 - k^2MG^2 - 2k^2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} - k^2GB^2 = 0$



$$\Rightarrow (1 - k^2)MA^2 + 2\overrightarrow{MG} \left(\underbrace{\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB}}_0 \right) + GA^2 - k^2GB^2 = 0$$

$$\Rightarrow (1 - k^2)MA^2 = -GA^2 + k^2GB^2$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{GA} = k^2\overrightarrow{GB} \Rightarrow GA^2 = k^4GB^2$$

$$\Rightarrow (1 - k^2)MA^2 = -k^4GB^2 + k^2GB^2$$

$$\Rightarrow MA^2 = \frac{(1-k^2)k^2GB^2}{1-k^2}$$

$$\Rightarrow MA^2 = k^2GB^2$$

$MG = kGB$ alors l'ensemble (E) des points M cherches est le cercle de centre G et de rayon $r = kGB$.

Exemple : Soit $AB = 3 \text{ cm}$

Détermine et construis l'ensemble (E) des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ sachant que :

1) $k = 1$

2) $k = \frac{2}{3}$

Remarque :

$R_1) aMA^2 + bMB^2 = k$ avec $a + b \neq 0$

$\exists G \text{ bary}\{(A, a); (B, b)\}$ et $MG^2 = \frac{k-f(G)}{a+b}$ avec $f(G) = aGA^2 + bGB^2 = \frac{a \times b AB^2}{a+b}$

$R_2) aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = k$

Si $a + b + c \neq 0$ alors $\exists G = \text{bary}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$

$MG^2 = \frac{k-f(G)}{a+b+c}$ avec $f(G) = aGA^2 + bGB^2 + cGC^2 = \frac{a \times b AB^2}{a+b+c} + \frac{a \times c AC^2}{a+b+c} + \frac{b \times c BC^2}{a+b+c}$

Exercices

Exercice 1 : soit $A B C$ un triangle tel que : $AB = 3 \text{ cm}$; $AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$

1) Construis le triangle ABC .

2) Détermine et construis le barycentre $G = \text{bary}\{(A, 3); (B, 2); (C, -1)\}$

3) Soit $f(M) = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$

1) Détermine suivant les valeurs de k l'ensemble des points M vérifiant $f(M) = k$

2) En déduis l'ensemble f pour $k = -20$ puis construis.

Exercice 2

Soit $A B C$ un triangle équilatéral de côté 6 cm

1) Construis le triangle ABC

2) Détermine et construis l'isobarycentre des points A, B, C

3) Soit $g(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

a) Démontre que $\forall M \in P, g(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

b) Calcule $GA^2; GB^2; GC^2$

c) Détermine l'ensemble des points M vérifiant $f(M) = k$

d) Détermine et construis l'ensemble des points M pour $k = 24$



Suites Numériques

Séquence 1 : Généralités sur les suites numériques

Activité : Un monsieur économise 100000fcfa le mois de janvier 2018 ; 150000f le mois de Février 2018 ainsi de suite il économise 50000f de plus par rapport au mois précédent.

- 1) Déterminer le montant qu'il aura économisé au mois de Décembre 2018.
- 2) Déterminer le montant total de l'économie du Monsieur au cours de l'année 2018.
- 3) Son objectif étant de financer les frais du Hadj dont le montant s'élève à 4500000fcfa. Pourra-t-il atteindre son objectif en une année c'est-à-dire au mois de Décembre 2018? Sinon déterminer en quelle année et en quel mois pourra-t-il atteindre son objectif ?

SOLUTION

- 1) Le montant économisé en Décembre est :

-Jan 2018 :100000fcfa

-Fév 2018 :150000fcfa

-Mars 2018 :200000fcfa

Avril 2018 : 250000

-Mai 2018 :300000fcfa

-Juin 2018 :350000fcfa

-Juillet 2018 :400 000fcfa

-Août 2018 :450 000fcfa

-Sept 2018 :500 000fcfa

-Oct 2018 :550 000fcfa

-Nov 2018 :600 000fcfa

-Déc 2018 :650 000fcfa

Ou $(50\,000F \times 10) + 150\,000F = 650\,000F$

- 2) Le montant total économisé en 2018 est :4 500 000f

- 3) Oui il pourra atteindre son objectif en une année précisément au mois de Décembre 2018. Il a atteint son objectif.

1.1. Définition

On appelle suite numérique toute fonction u de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Remarque

- ☞ La suite numérique u d'ensemble de définition E est notée $(u_n)_{n \in E}$
- ☞ $u(n)$ est l'image de l'entier naturel n par la suite u .
- ☞ $u(n)$ est simplement noté u_n et se lit : « u indice n ».
- ☞ u_n est appelé le **terme général** de la suite u .
- ☞ $u_{n+1} \neq u_n + 1$

Exemple : $u_n = 2n - 5$ est une suite .



$u_0 = 2(0) - 5 = -5$ est le 1^{er} terme ou terme d'indice 0.

$u_1 = 2(1) - 5 = -3$ est le 2^{ème} terme

$u_2 = 2(2) - 5 = -1$ est le 3^{ème} terme

$u_3 = 2(3) - 5 = 1$ est le 4^{ème} terme

1.2. Différentes formes de définition d'une suite

Une suite numérique peut être définie par sa formule explicite c'est-à-dire lorsqu'elle est exprimée en fonction de n ou par sa formule de récurrence c'est à dire lorsqu'il y a une relation liant deux termes consécutifs et son 1^{er} terme donné.

➤ Suite définie par sa formule explicite

Exemple : $u_n = \sqrt{n-2}$

$u_2 = \sqrt{2-2} = 0$ est le 1^{er} terme

$u_3 = \sqrt{3-2} = 1$ est le 2^{ème} terme

$u_4 = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$ est le 3^{ème} terme

$u_{18} = \sqrt{18-2} = 4$ est le 16^{ème} terme

➤ Suite définie par sa formule de récurrence

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$ Calcule les 5 premiers termes.

$u_0 = 8$

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 6 = \frac{1}{2}(8) + 6 = 4 + 6 = 10$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = \frac{1}{2}(10) + 6 = 5 + 6 = 11$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = \frac{1}{2}(10) + 6 = 5 + 6 = 11$

$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 6 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{2}\right) + 6 = \frac{23}{4} + 6 = \frac{23+24}{4} = \frac{47}{4}$

1.3. Représentation graphique des termes d'une suite

➤ Sur un axe

Exemple : Représente sur un axe les 4 premiers termes de chacune des suites :

$u_n = \sqrt{n-2}$ et $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$

1.4. Principe de raisonnement par récurrence

Soient n et n_0 deux entiers naturels et $P(n)$ une proposition dépendant de n .

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0 , on peut procéder comme suit :

- ☞ Vérifier que $P(n_0)$ est vraie (**Initialisation**) ;
- ☞ Supposer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ et montrer que $P(n+1)$ est vraie (**Hérédité**) ;
- ☞ Pour tout $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie (**Conclusion**).

Exemple : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$



2. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

SOLUTION

1) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Pour $n = 1$ on a $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie
- Supposons que la relation est vraie au rang n c'est-à-dire

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ c'est-à-dire
- $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n + 1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Pour $n = 1$ on a : $1^2 = \frac{1(2)(3)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie
- Supposons que la relation est vraie au rang n c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] \\ &= (n+1) \left(\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \right) \\ &= \left(\frac{n+1}{6} \right) (2n^2 + 7n + 6) \end{aligned}$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{CQFD}$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.5. Suite minorée, Suite majorée, Suite bornée



Soit (u_n) une suite numérique, m et M deux nombres réels .

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \leq M$ alors (u_n) est majorée par M
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \geq m$ alors (u_n) est minorée par m
- (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n); m \leq u_n \leq M$.

Exemple : Montrr que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ est minorée , majorée ,bornée.

Solution

$$u_n = \frac{n+1+1}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Leftrightarrow n+2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{n+2} \geq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} \geq 1 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{la suite } (u_n) \text{ est minorée par } \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Leftrightarrow n+2 \geq 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n < 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est majorée par } 1.$$

(u_n) étant majorée par 1 et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle est bornée.

1.6. Sens de variation d'une suite

Soit (u_n) une suite numérique.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ alors (u_n) est croissante
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ alors (u_n) est décroissante
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0$ alors (u_n) est constante

Exemple : Etudie le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$$1) u_n = 2n - 7 \quad 2) w_n = \frac{n+1}{n+2} \quad 3) v_n = -5n + 14$$

Solution

$$1) u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 7 - (2n - 7) = 2n + 2 - 7 - 2n + 7 = 2 > 0,$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante}$$

$$2) w_{n+1} - w_n = \frac{n+1+1}{n+1+2} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$w_{n+1} - w_n > 0 \text{ alors } (w_n) \text{ est croissante}$$

$$3) v_{n+1} - v_n = -5(n+1) + 14 - (-5n + 14) = -5n - 5 + 14 + 5n - 14 = -5 < 0$$

$$v_{n+1} - v_n < 0 \text{ alors } (v_n) \text{ est décroissante}$$

NB : Une suite est monotone lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante.

Convergence d'une suite :

Soit (u_n) une suite numérique et l un réel.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors la suite est convergente et converge vers l .
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ alors la suite (u_n) n'est pas convergente . Elle est donc divergente.

Toute suite qui n'est pas convergente est divergente.

NB : Toute suite croissante majorée est convergente



Tout suite décroissante minorée est divergente

Séquence 2 : Suite arithmétique

2.1. Définition

On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) définie par:

$u_{n+1} - u_n = r$ ou $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la raison.

NB : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$; (u_n) est croissante
- Si $r < 0$; (u_n) est décroissante
- Si $r = 0$; (u_n) est constante

2.2. Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme u_1 .

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r$$

$$u_4 = u_3 + r = u_1 + 2r + r = u_1 + 3r$$

⋮

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

$u_n = u_1 + (n - 1)r$ est l'expression du terme général si u_1 est le 1^{er} terme.

NB : Si u_p est le 1^{er} terme alors $u_n = u_p + (n - p)r$ est la formule générale de l'expression du terme général u_n en fonction de n où p est un entier naturel.

Pour u_0 le 1^{er} terme on a : $u_n = u_0 + nr$.

2.3. Somme des termes consécutifs

(u_n) suite arithmétique de raison r et 1^{er} terme u_p désignant par S la somme de termes consécutifs.

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

Remarques :

R1 : 3 nombres a, b, c sont en progression arithmétique ou sont trois nombres d'une suite arithmétique si et seulement si $a + c = 2b$

R2 : x, y, z, t sont en progression arithmétique $\Leftrightarrow y - x = z - y = t - z = r$ avec r =raison

R3 : Pour insérer k moyenne arithmétique entre deux réels a et b , on calcule la raison $r = \frac{b-a}{k+1}$ et on insère les k moyens arithmétique.

R4 : Un placement est en intérêt simple lorsque à chaque période il produit les mêmes intérêts. Dans ce cas l'intérêt n'est pas capitalisé et on utilise les suites arithmétiques pour faire les calculs.



Séquence 3 : Suite géométrique

3.1. Définition

(u_n) est dite géométrique lorsqu'elle s'écrit sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \text{ ou } u_{n+1} = q \times u_n$$

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

NB : (u_n) suite de raison q et de 1^{er} terme u_p

- Pour u_p positif on a :
$$\begin{cases} \text{Si } q \in]0; 1[\text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \\ \text{Si } q = 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est constante} \\ \text{Si } q > 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ |q| \in]0; 1[\text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \end{cases}$$
- Pour $u_p < 0$ c'est la situation inverse

3.2. Expression du terme général

(u_n) suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_1

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = q \times u_1$$

$$u_3 = q \times u_2 = q \times q \times u_1 = q^2 \times u_1$$

$$u_4 = q \times u_3 = q \times q^2 \times u_1 = q^3 \times u_1$$

⋮

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ est l'expression du terme général si u_1 est le 1^{er} terme.

NB : Si u_p est le 1^{er} terme alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$ est la formule générale de l'expression du terme général u_n en fonction de n où p est un entier naturel.

Pour u_0 le 1^{er} terme on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

3.3. Somme des termes consécutifs

Désignons par S la somme des termes consécutifs d'une suite :

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Remarques

R1 : $a; b; c$ sont en progression géométrique ou sont trois termes consécutifs d'une suite si et seulement si $a \times c = b^2$

R2 : $x; y; z$ et t sont des nombres consécutifs d'une suite géométrique alors

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{t}{z} = q \quad \text{avec } q = \text{raison}$$



R3 : Pour insérer k moyen géométrique entre 2 réels a et b on calcule la raison $q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$ et on insère les k moyens géométriques.

R4 : Un placement est à intérêt composé lorsque l'intérêt produit de l'intérêt d'une période à une autre. Dans ce cas on dit que l'intérêt est capitalisé. Pour les placements à intérêt composé, on utilise les suites géométriques pour faire les calculs.

Evaluation

Exercice 1

- I) Déterminer trois nombres en progression arithmétique croissante sachant que leur somme est **45** et leur produit est **3240**.
- II) Déterminer trois nombres en progression arithmétique sachant que leur somme est **42** et la somme de leur carré est **638**.
- III) Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$
 - 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - 2) Préciser le sens de variation de (u_n) .
 - 3) Exprimer (u_n) en fonction de n
 - 4) Calculer $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{54}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$; $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
- IV) Soit (u_n) une suite arithmétique croissante de 1^{er} terme u_0 et raison r définie par $u_{17} = 89$ et $u_{83} = 419$.
 - 1) Déterminer le 1^{er} terme u_0 et la raison r .
 - 2) Exprimer u_n en fonction de n
- V) On veut insérer **3** moyen arithmétique entre **100000** et **120000**.
Déterminer la raison puis insérer (intercaler) les moyens.
- VI) Une dame place au 1^{er} Janvier 2017 une somme de 1000000 dans une banque à intérêt simple au taux annuel de **5%**. On désigne par (C_n) la valeur acquise par cette somme au 01/01/2017+n.
 - 1) Calculer la valeur acquise au 01/01/2018 puis au 01/01/2019.
 - 2) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n
 - 3) En déduire la nature de C_n et préciser ses éléments caractéristiques
 - 4) Exprimer C_n en fonction de n
 - 5) Quel sera son capital au 01/01/2035 ?
 - 6) Déterminer au 01/01/ de quelle année son capital sera 3 100 000 fcf.

Exercice 2

- I) Déterminer 3 nombres en progression géométrique croissante sachant que leur somme est 49 et leur produit est 2744.
- II) Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10 \end{cases}$$
 - 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - 2) Exprimer (u_n) en fonction de n



- 3) Quel est le sens de variation de U_n
- 4) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- III) On définit la suite géométrique (U_n) tel que $u_2 = 175$; $u_5 = 21875$
- 1) Déterminer le 1^{er} terme u_0 et la raison q .
- 2) Exprimer u_n en fonction de n
- IV) Une dame place au 1^{er} Janvier 2017 une somme de 1000000 dans une banque à intérêt composé au taux annuel de 5%. On désigne par (C_n) la valeur acquise par cette somme au 01/01/2017+n.
- 1) Calculer la valeur acquise au 01/01/2018 puis au 01/01/2019.
- 2) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n
- 3) En déduire la nature de C_n et préciser ses éléments caractéristiques
- 4) Exprimer C_n en fonction de n
- 5) Quel sera son capital au 01/01/2035 ?

SOLUTION1

- I) Soit $A + B + C = 45$; $A * B * C = 3240$

$$A + C = 2B \Leftrightarrow 2B + B = 45 \Leftrightarrow 3B = 45 \Leftrightarrow B = \frac{45}{3} = 15 \Leftrightarrow B = 15$$

$$A + C = 30 = S$$

$$A * C = \frac{3240}{B} = 216 = P$$

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 30X + 216 = 0$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4(216) = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$X_1 = \frac{30 - 6}{2} = 12 \quad X_2 = \frac{30 + 6}{2} = 18$$

Les trois nombres sont : $A = 12$; $B = 15$; $C = 18$

- II) Soit $A + B + C = 42$; $A^2 + B^2 + C^2 = 638$

$$A + C = 2B \Leftrightarrow 2B + B = 42 \Leftrightarrow 3B = 42 \Leftrightarrow B = \frac{42}{3} = 14 \Leftrightarrow B = 14$$

$$A + C = 42 - 14 = 28 = S$$

$$A^2 + C^2 = 638 - B^2 \Leftrightarrow A^2 + C^2 = 442$$

$$(A + C)^2 = 28^2$$

$$A^2 + 2AC + C^2 = 784 \Leftrightarrow 442 + 2AC = 784 \Leftrightarrow 2AC = 784 - 442 \Leftrightarrow AC = 171 = P$$

$$X^2 - 28X + 171 = 0$$

$$\Delta = (-28)^2 - 4(1)(171) = 100$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$$

$$X_1 = \frac{28 - 10}{2} = 9 \quad X_2 = \frac{28 + 10}{2} = 19$$

$$A = 9 \quad B = 14 \quad C = 19 \quad \text{ou} \quad A = 19 \quad B = 14 \quad C = 9$$

- III) $\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$



1) (U_n) est une suite arithmétique car elle sous la forme $U_{n+1} = U_n + r$ avec $r = 4$
 $r = 4$ est la raison et le 1^{er} terme est $U_0 = 13$

2) Sens de variation

$r = 4 > 0$ alors U_n est croissante

3) Exprimons U_n en fonction de n

$$U_n = U_p + (n - p)r = U_0 + nr = 13 + 4n$$

$$U_n = 13 + 4n$$

4) Calculons

$$S = U_3 + U_4 + \dots + U_{54} = \left(\frac{54 - 3 + 1}{2} \right) (U_3 + U_{54})$$

$$U_3 = 13 + 4(3) = 23$$

$$U_{54} = 13 + 4(54) = 229$$

$$S = \left(\frac{54 - 3 + 1}{2} \right) (23 + 229) = 6604$$

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + \dots + U_n = \left(\frac{n - 0 + 1}{2} \right) (U_0 + U_n) = \left(\frac{n + 1}{2} \right) (13 + 13 + 4n) \\ &= \left(\frac{n + 1}{2} \right) (26 + 4n) = (n + 1)(13 + 2n) \end{aligned}$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \left(\frac{n - 1 + 0 + 1}{2} \right) (U_{n-1} + U_0)$$

$$U_{n-1} = 13 + 4(n - 1) = 13 + 4n - 4 = 9 + 4n$$

$$S_n = \left(\frac{n}{2} \right) (26 + 9 + 4n) = \left(\frac{n}{2} \right) (35 + 4n)$$

IV) $U_{17} = 89$ et $U_{23} = 419$

1) Déterminons le 1^{er} terme U_0 et la raison r

$$U_n = U_0 + nr$$

$$\begin{cases} U_{17} = U_0 + 17r \\ U_{23} = U_0 + 23r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 + 17r = 89 \\ U_0 + 23r = 419 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -U_0 - 17r = -89 \\ U_0 + 23r = 419 \end{cases} \Leftrightarrow 66r = 330 \Leftrightarrow r = \frac{330}{66} = 5$$

$$\Leftrightarrow r = 5$$

Dans 1 on a :

$$U_0 + 17(5) = 89 \Leftrightarrow U_0 = 89 - 85 = 4 \Leftrightarrow U_0 = 4$$

2) Exprimons U_n en fonction de n

$$U_n = U_0 + nr \Leftrightarrow U_n = 4 + 5n$$

V)

1) Déterminons la raison

$$r = \frac{b - a}{k + 1} = \frac{120000 - 100000}{3 + 1} = 5000$$

Insertion

100000 ; 105000 ; 110000 ; 115000 ; 120000

VI)

1) Calculons la valeur acquise

01/01/2018

$$C_0 = 1000000$$



$$I = \frac{C_0 * t}{100} = \frac{(1000000 * 5)}{100} = 50\,000$$

01/01/2018, elle a $C_1 = C_0 + I = 1\,050\,000$ son capital est 1 050 000 fcf

Au 01/01/2019

$C_2 = C_1 + I = 1\,050\,000 + 50\,000 = 1\,100\,000$ son capital est 1 100 000 fcf

2) Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n

$$C_1 = C_0 + 50\,000$$

$$C_2 = C_1 + 50\,000$$

⋮

$$C_{n+1} = C_n + 50\,000 \Leftrightarrow C_{n+1} = C_n + 50\,000$$

3) La nature et caractéristiques

$C_{n+1} = C_n + 50\,000$ est une suite arithmétique de raison $r = 50\,000$ et de 1er terme $C_0 = 1\,000\,000$

4) Exprimons C_n en fonction de n

$$C_n = C_0 + nr = 1\,000\,000 + 50\,000n \Leftrightarrow C_n = 1\,000\,000 + 50\,000n$$

5) Son capital au 01/01/2035

$$2035 - 2017 = 18$$

$$C_{18} = C_0 + 50\,000 * 18 = 1\,900\,000 \Leftrightarrow C_{18} = 1\,900\,000 \text{ fcf}$$

Son capital sera 1 900 000 fcf

6) Au 01/01/quel année son capital sera 3 100 000 f

$$C_n = 3\,100\,000 \Leftrightarrow 1\,000\,000 + 50\,000n = 3\,100\,000 \Leftrightarrow 50\,000n = 3\,100\,000 - 1\,000\,000 \\ \Leftrightarrow n = 42$$

$$2017 + 42 = 2059$$

Au 01/01/2059 son capital sera de 3 100 000 fcf

Exercice 2 :

I) Soit A ; B et C trois nombres

$$\text{Soit } A + B + C = 49 \text{ ; } A * B * C = 2744$$

$$A * C = B^2$$

$$A * C = \frac{2744}{14} = 196 = P \quad A + C = 49 - 14 = 35 = S$$

$$X^2 - 35X + 196 = 0$$

$$\Delta = (-35)^2 - 4(1)(196) = 441 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{441} = 21$$

$$X_1 = \frac{35 - 21}{2} = 7 \quad X_2 = \frac{35 + 21}{2} = 28$$

$$A = 7 \quad B = 14 \quad C = 28$$

II) 1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (U_n)

$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ alors (U_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $U_0 = 8$

2) Exprimons (u_n) en fonction de n

$$U_n = U_0 * q^n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3) Sens de variation de U_n



$\frac{1}{2} \in [0; 1]$ et $U_0 > 0$ alors U_n est décroissante

4) Calculons

$$S = U_0 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 8 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 16 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$S = 16 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

III) $U_2 = 175$ $U_5 = 21875$

1) $U_2 = U_0 * q^2 \Rightarrow 175 = U_0 * q^2$

$$U_5 = U_0 * q^5 \Rightarrow 21875 = U_0 * q^5$$

$$U_0 = U_0 \Leftrightarrow \frac{175}{q^2} = \frac{21875}{q^5} \Rightarrow \frac{q^5}{q^2} = \frac{21875}{175} \Rightarrow q^5 * q^{-2} = \frac{21875}{175} \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = \sqrt[3]{125}$$

$$= 5 \Rightarrow q = 5$$

$$U_0 = \frac{175}{25} = 7 \Rightarrow U_0 = 7$$

2) Exprimons (u_n) en fonction de n

$$U_n = U_0 * q^n = 7 * 5^n \Rightarrow U_n = 7 * 5^n$$

IV) 1) Calculons la valeur acquise

$$C_0 = 1\,000\,000$$

$$C_1 = C_0 + C_0 * \frac{t}{100} = C_0 \left(1 + \frac{t}{100} \right) \Rightarrow C_1 = 1\,000\,000 \left(1 + \frac{5}{100} \right) \Rightarrow C_1 = 1\,050\,000$$

Son capital du 01/01/2018 est 1 050 000f

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{5}{100} \right) = 1\,102\,500f$$

01/01/2019 son capital sera 1 102 500

2) Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{5}{100} \right)$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{5}{100} \right)$$

$$C_{n+1} = C_n \left(1 + \frac{5}{100} \right) \Leftrightarrow C_{n+1} = 1,05C_n$$

3) C_n est une suite géométrique de raison 1,05 et de 1er terme $C_0 = 1\,000\,000$

4) Exprimons C_n en fonction de n

$$C_n = C_0 * q^n \Leftrightarrow C_n = 1\,000\,000 * 1,05^n$$

5) Son capital le 01/01/2035

$$2035 - 2017 = 18$$

$$C_{18} = 1\,000\,000 * 1,05^{18} = 2\,406\,619,23$$

Son capital sera 2 406 619,23 fcfa

Exercice 14 : CIAM 1^{ère} SM PAGE 298



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite de terme générale $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

- 1) Détermine deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
- 2) Calcule en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
- 3) Calcule la limite de la suite (S_n) .

Solution

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

- 1) Déterminons deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

$$U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{na + a + nb}{n(n+1)} = \frac{n(a+b) + a}{n(n+1)}$$

$$U_n = U_n \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(a+b) + a}{n(n+1)} \Rightarrow 1 = n(a+b) + a$$

Par identification :

$$a + b = 0$$

$$a = 1$$

$$1 + b = 0$$

$$b = -1$$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- 2) Calculons en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Après simplification on a

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 38 : CIAM 1^{ère} SM PAGE 300

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

- 1) Construire les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.
- 2) a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$
- b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?



- 3) a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$
b) Dédudis-en $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$
c) Calculons la limite de la suite (u_n)

Solution

- 1) Construction des 5 premiers (graphique)
2) a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad (1)$$

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} - 3 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 3 - \frac{1}{2}u_{n-1} + 3 = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$$

b) Dédudisons en que $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On sait que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)$$

$$u_3 - u_2 = \frac{1}{2}u_2 - u_1$$

$\vdots$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$$

En simplifiant membre à membre on a

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1} (u_1 - u_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1 - 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5) \quad \text{car } u_0 = 4 \text{ et } u_1 = -1$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5)$$

c) Le sens de variation

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5) < 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante}$$

- 4) a) Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} - 3$

$$u_n + 6 = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3 \Leftrightarrow u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

b) Dédudisons en $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On sait que

$$u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

$$u_1 + 6 = \frac{1}{2}(u_0 + 6)$$



$$u_2 + 6 = \frac{1}{2}(u_1 + 6)$$

$$u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

En multipliant membre on a

$$u_n + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1} (u_0 + 6) \Leftrightarrow u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Calculons la limite de (u_n)

$$u_n = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 = 0 - 6 = -6 \text{ car } \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$$