

Cours de Mathématiques

11^{ème} Sciences

Programme du Mali

Un cours interactif pour apprendre en autonomie

Inspiré des œuvres de **Adama Traoré**, Professeur Lycée Technique Bamako

Comment utiliser ce cours ?

Ce document est conçu pour que tu puisses travailler **en autonomie**. Voici comment l'utiliser :

1. **Les Activités** : chaque notion est introduite par une activité guidée. Lis bien l'énoncé, réfléchis, puis écris ta réponse dans l'espace prévu.
2. **Les Mini-Synthèses** : après chaque activité, une synthèse résume ce que tu devais découvrir. Compare avec ta réponse !
3. **La Synthèse Générale** : à la fin de chaque chapitre, tu trouveras un résumé complet des notions essentielles.
4. **Les Définitions et Théorèmes** : ils sont encadrés pour que tu les repères facilement.
5. **Les estimations de temps** ☺ : chaque activité et chaque chapitre indiquent une durée estimée. Cela te permet de planifier tes séances de travail. Ce sont des estimations : prends le temps qu'il te faut !

Bon courage et bon travail !

Table des matières

1	Généralités sur les Applications	5
2	Fonctions Polynômes et Rationnelles	11
3	Fonctions Numériques – Opérations et Fonctions Associées	17
4	Limites et Continuité	21
5	Dérivées de Fonctions Numériques	27
6	Études de Fonctions Numériques	31
7	Primitives de Fonctions	35
8	Suites Numériques	39
9	Dénombrement	47
10	Probabilités	51
11	Produit Scalaire et Géométrie Analytique Plane	55

Planning prévisionnel

Estimation du temps de travail par chapitre

Chap.	Titre	Cours	Exercices
1	Généralités sur les Applications	2h00	2h00
2	Fonctions Polynômes et Rationnelles	2h30	3h00
3	Fonctions Numériques	2h00	2h00
4	Limites et Continuité	2h30	3h00
5	Dérivées de Fonctions	2h00	2h30
6	Études de Fonctions	1h30	3h00
7	Primitives	1h30	2h00
8	Suites Numériques	3h00	3h30
9	Dénombrement	2h30	2h30
10	Probabilités	2h30	2h30
11	Produit Scalaire et Géométrie Analytique	2h30	3h00
	TOTAL ESTIMÉ	~ 25h	~ 29h

Ces durées sont indicatives. Adapte ton rythme selon tes besoins. L'idéal est de travailler régulièrement par séances de 1h à 1h30, en alternant cours et exercices.

Chapitre 1

Généralités sur les Applications

⌚ **Durée estimée du chapitre** : 2h00 – 2h30 4 activités + lecture synthèses + révision

Introduction

Dans ce chapitre, tu vas découvrir les notions d'**application** et de **fonction**, ainsi que les différents types d'applications (injective, surjective, bijective). Ces notions sont fondamentales pour toute la suite du programme.

Activité 1.1 : Découvrir la notion d'application ⌚ 20 min

Considère les deux ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$.

On définit la relation f de A vers B par : $f(1) = b$, $f(2) = d$, $f(3) = a$.

On définit la relation g de A vers B par : $g(1) = b$, $g(3) = a$ (l'élément 2 n'a pas d'image).

- Représente chaque relation par un diagramme sagittal (flèches).
- Dans la relation f , est-ce que chaque élément de A a exactement une image dans B ?
- Dans la relation g , est-ce que chaque élément de A a une image dans B ?
- Quelle différence fondamentale vois-tu entre f et g ?

Ta réponse :

✓ Ce qu'on vient de découvrir

Une **application** f de A dans B est une relation qui associe à **chaque** élément de A **un et un seul** élément de B . Si un élément de A n'a pas d'image (comme dans g), ce n'est pas une application mais une **fonction**.

Retenir : Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.

Définition

Soient A et B deux ensembles non vides. Une **application** de A dans B est une relation de A vers B qui à chaque élément de l'ensemble de départ A associe **un seul** élément de l'ensemble d'arrivée B .

Notation : $f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f , et que x est un **antécédent** de $f(x)$.

Activité 1.2 : Injection, surjection, bijection ⌚ 25 min

Considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$.

Voici trois applications :

- $f_1 : 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto a, 4 \mapsto c$ (deux éléments ont la même image)
- $f_2 : 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c, 4 \mapsto d$ (chaque élément de F a un antécédent)
- $f_3 : 1 \mapsto b, 2 \mapsto c, 3 \mapsto d, 4 \mapsto a$ (chaque élément de F a un unique antécédent)

- a) Pour f_1 : l'élément $d \in F$ a-t-il un antécédent ? Deux éléments distincts de E peuvent-ils avoir la même image ?
- b) Pour f_2 : chaque élément de F possède-t-il **au moins un** antécédent dans E ? Chaque élément de F possède-t-il **un unique** antécédent ?
- c) Pour f_3 : chaque élément de F possède-t-il **exactement un** antécédent ?
- d) Laquelle de ces trois applications pourrait-on “inverser” (c'est-à-dire définir f^{-1} de F vers E) ?

- f_1 n'est ni injective (deux éléments ont la même image a), ni surjective (d n'a pas d'antécédent).
- f_2 est **surjective** : tout élément de F a au moins un antécédent. Elle est aussi injective (ici, par chance). Donc f_2 est **bijjective**.
- f_3 est **bijjective** : tout élément de F a exactement un antécédent. On peut définir f_3^{-1} .

- f est **injective** si : $\forall (x_1, x_2) \in A^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est **surjective** si : $\forall y \in B, \exists x \in A$ tel que $f(x) = y$.
- f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in B, \exists! x \in A$ tel que $f(x) = y$.

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Résous l'équation $f(x) = y$, c'est-à-dire $3x + 5 = y$.
- La solution est-elle unique? Que peux-tu en conclure sur f ?
- Détermine la bijection réciproque f^{-1} .

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$3x + 5 = y \iff x = \frac{y-5}{3}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un **unique** x solution. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$.

Activité 1.4 : Image directe et image réciproque ☉ 20 min

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- Calcule l'image directe de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ par f (c'est-à-dire $f(A)$).
- Calcule l'image réciproque de $B = \{4, 9\}$ par f (c'est-à-dire $f^{-1}(B)$, l'ensemble des x tels que $f(x) \in B$).
- f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifie.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$f(A) = \{0, 1, 4\}$ (attention : $f(-2) = f(2) = 4$). $f^{-1}(B) = \{-2, 2, -3, 3\}$. f n'est pas injective car $f(-2) = f(2)$ alors que $-2 \neq 2$.

Synthèse générale – Les Applications

1. Application vs Fonction

- Une **application** $f : A \rightarrow B$ associe à chaque élément de A **exactement un** élément de B .
- Une **fonction** peut ne pas associer d'image à certains éléments de A .

2. Types d'applications

- **Injective** : deux éléments distincts ont des images distinctes.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- **Surjective** : tout élément de B a au moins un antécédent.

$$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$$

- **Bijective** : injective + surjective. Tout élément de B a **exactement un** antécédent.

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y$$

3. Bijection réciproque

Si $f : A \rightarrow B$ est bijective, alors il existe une unique application $f^{-1} : B \rightarrow A$ telle que :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

4. Image directe et image réciproque

Si $f : A \rightarrow B$ et $C \subset A$, $D \subset B$:

- Image directe : $f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$
- Image réciproque : $f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$

Chapitre 2

Fonctions Polynômes et Rationnelles

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 2h30 – 3h00

4 activités + synthèses + révision

Introduction

Les fonctions polynômes du second degré sont parmi les fonctions les plus utilisées en mathématiques. Dans ce chapitre, tu apprendras à les mettre sous forme canonique, à résoudre des équations et inéquations, et à étudier les fonctions rationnelles.

Activité 2.1 : Découvrir la forme canonique ⊙ 20 min

Soit $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

- a) Développe $(x + 3)^2$. Que vaut $(x + 3)^2 - 4$?
- b) Compare avec $f(x)$. Peux-tu en déduire que $f(x) = (x + 3)^2 - 4$?
- c) Quel est le minimum de f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- d) Résous l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la forme $(x + 3)^2 - 4 = 0$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, donc $(x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 5 = f(x)$. Le minimum de f vaut -4 et est atteint en $x = -3$. Pour résoudre $f(x) = 0 : (x+3)^2 = 4 \iff x+3 = \pm 2$, soit $x = -1$ ou $x = -5$.

Forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. La **forme canonique** de f est :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant**.

Activité 2.2 : Le discriminant et les racines ☉ 20 min

Soit $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

- Calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Puisque $\Delta > 0$, calcule les deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Vérifie que $P(x_1) = 0$ et $P(x_2) = 0$.
- Écris la factorisation : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Donc $x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+1}{4} = 1$. La factorisation est $P(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1)$.

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles distinctes $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: aucune solution réelle.

Factorisation : Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Activité 2.3 : Signe d'un trinôme du second degré ⌚ 25 min

Considère $P(x) = -x^2 + 4x - 3$.

- a) Calcule Δ et les racines de P .
- b) Factorise $P(x)$.
- c) Complète le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$				$+\infty$
$P(x)$					

- d) Résous l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\Delta = 16 - 12 = 4$. Racines : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. $P(x) = -(x - 1)(x - 3)$. Comme $a = -1 < 0$, $P(x) \geq 0$ entre les racines : $P(x) \geq 0 \iff x \in [1, 3]$.

Signe de $ax^2 + bx + c$

Si $\Delta > 0$ avec racines $x_1 < x_2$:

- Si $a > 0$: le trinôme est négatif entre les racines, positif à l'extérieur.
- Si $a < 0$: le trinôme est positif entre les racines, négatif à l'extérieur.

Règle : le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

Activité 2.4 : Division euclidienne et fonctions rationnelles ⌚ 25 min

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$ définie pour $x \neq 1$.

- a) Effectue la division euclidienne de $x^2 + 2x + 3$ par $x - 1$.
- b) Écris $f(x)$ sous la forme $f(x) = q(x) + \frac{r}{x - 1}$ où $q(x)$ est le quotient et r le reste.
- c) Que représente la droite $y = q(x)$ pour la courbe de f ? (On dit que c'est une **asymptote oblique**.)

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$x^2 + 2x + 3 = (x - 1)(x + 3) + 6. \text{ Donc } f(x) = x + 3 + \frac{6}{x - 1}.$$

La droite $y = x + 3$ est une asymptote oblique de la courbe de f : quand $|x| \rightarrow +\infty$, le terme $\frac{6}{x-1} \rightarrow 0$ et la courbe se rapproche de la droite.

Synthèse générale – Fonctions Polynômes et Rationnelles

1. Polynôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

— **Forme canonique :** $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

— **Sommet de la parabole :** $S \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

— **Racines :**

— $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (deux racines distinctes).

— $\Delta = 0$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (racine double).

— $\Delta < 0$: pas de racine réelle.

— **Signe :** du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé entre les racines.

2. Somme et produit des racines

Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

3. Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ privé des racines de Q .

La division euclidienne de P par Q permet de trouver les **asymptotes**.

Chapitre 3

Fonctions Numériques – Opérations et Fonctions Associées

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 2h00 – 2h30

4 activités + synthèses + révision

Introduction

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à construire de nouvelles fonctions à partir de fonctions connues : somme, produit, quotient, et aussi les transformations du type valeur absolue, translation, symétrie.

Activité 3.1 : Opérations sur les fonctions ⊙ 15 min

Soient $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

- a) Calcule $(f + g)(x)$, $(f \times g)(x)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
- b) Quel est l'ensemble de définition de $\frac{f}{g}$?
- c) Simplifie $\frac{f(x)}{g(x)}$ en factorisant le numérateur et le dénominateur.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$(f + g)(x) = x^2 + x$. $(f \times g)(x) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

L'ensemble de définition du quotient est $D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$.

Activité 3.2 : Fonction valeur absolue $|f(x)|$ ⦿ 20 min

Soit f la fonction définie sur $[-4, 3]$ par le graphique suivant (dessine-le toi-même) :
 $f(-4) = -2$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 3$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$.

- Quand $f(x) \geq 0$, que vaut $|f(x)|$?
- Quand $f(x) < 0$, que vaut $|f(x)|$?
- Trace la courbe de $g(x) = |f(x)|$ en utilisant la règle : on garde la partie au-dessus de l'axe des x , et on reflète la partie en dessous.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

Pour obtenir la courbe de $|f(x)|$ à partir de celle de $f(x)$: on conserve la partie où $f(x) \geq 0$ et on effectue une **symétrie par rapport à l'axe des abscisses** pour la partie où $f(x) < 0$.

Activité 3.3 : Translation : $f(x - a)$ et $f(x) + b$ ⦿ 25 min

Soit $f(x) = x^2$.

- Calcule et trace les courbes de $g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2$ et de $h(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$.
- Comment la courbe de g est-elle obtenue à partir de celle de f ? (Translation horizontale)
- Comment la courbe de h est-elle obtenue à partir de celle de f ? (Translation verticale)
- Que représente $k(x) = f(x - 2) + 3 = (x - 2)^2 + 3$?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- $x \mapsto f(x-a)$: translation horizontale de vecteur $\vec{u}(a, 0)$ (décalage vers la droite si $a > 0$).
- $x \mapsto f(x) + b$: translation verticale de vecteur $\vec{v}(0, b)$ (décalage vers le haut si $b > 0$).
- $x \mapsto kf(x)$: dilatation verticale de rapport $|k|$ (et symétrie si $k < 0$).

Activité 3.4 : Parité d'une fonction ⦿ 15 min

Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - x$.

- a) Calcule $f(-x)$ et compare avec $f(x)$. Que constates-tu ?
- b) Calcule $g(-x)$ et compare avec $g(x)$. Que constates-tu ?
- c) Quel type de symétrie a la courbe d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$: f est **paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

$g(-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$: g est **impaire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O .

Synthèse générale – Fonctions Numériques

1. Opérations sur les fonctions

Si f et g ont pour ensembles de définition D_f et D_g :

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, définie sur $D_f \cap D_g$.
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, définie sur $D_f \cap D_g$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, définie sur $D_f \cap D_g$ avec $g(x) \neq 0$.

2. Fonctions associées et transformations

- $|f(x)|$: symétrie de la partie négative par rapport à l'axe des abscisses.
- $f(x) + b$: translation verticale de b .
- $f(x - a)$: translation horizontale de a vers la droite.
- $kf(x)$: dilatation verticale de facteur $|k|$.
- $f(-x)$: symétrie par rapport à l'axe (Oy) .
- $-f(x)$: symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

3. Parité

- f **paire** $\iff f(-x) = f(x) \iff$ symétrie / axe (Oy) .
- f **impaire** $\iff f(-x) = -f(x) \iff$ symétrie / centre O .

Chapitre 4

Limites et Continuité

⊙ Durée estimée du chapitre : 2h30 – 3h00

4 activités + synthèses + révision

Introduction

La notion de limite est l'un des concepts fondamentaux de l'analyse. Elle permet de décrire le comportement d'une fonction quand la variable x s'approche d'une valeur donnée ou tend vers l'infini.

Activité 4.1 : Approche intuitive de la limite ⊙ 20 min

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ définie pour $x \neq 1$.

a) Complète le tableau de valeurs suivant (calcule $f(x)$ pour chaque valeur de x) :

x	0,5	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$							

b) Vers quelle valeur $f(x)$ semble-t-elle tendre quand x se rapproche de 1 ?

c) Simplifie $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$. Retrouves-tu le résultat ?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ pour $x \neq 1$. Quand $x \rightarrow 1$, $f(x) \rightarrow 2$. On écrit $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Limite finie en un point

On dit que f admet pour limite L quand x tend vers x_0 si $f(x)$ se rapproche aussi près que l'on veut de L quand x est suffisamment proche de x_0 .

On note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Activité 4.2 : Limites en l'infini ⦿ 20 min

Soit $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$.

- Divise le numérateur et le dénominateur par x^2 : écris $f(x) = \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$.
- Quand $x \rightarrow +\infty$, vers quoi tendent $\frac{3}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$?
- Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

Quand $x \rightarrow +\infty$: $\frac{3}{x^2} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{2+0}{1+0} = 2$.

Règle : pour une fraction rationnelle, la limite en l'infini ne dépend que des termes de plus haut degré.

Activité 4.3 : Formes indéterminées ⦿ 25 min

Calcule les limites suivantes en identifiant d'abord la forme indéterminée, puis en la levant :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)$ (forme $\infty - \infty$?)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$)

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$ (forme $\frac{0}{0}$)

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $x^2 - 3x + 1 = x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow +\infty$. On factorise par le terme dominant.
- b) $\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} = \frac{x + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow +\infty$ (en divisant par x^2).
- c) $\frac{x^2 + 3x}{x} = x + 3 \rightarrow 3$ (en simplifiant par x).

Les 4 formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$.

Activité 4.4 : Continuité d'une fonction ☉ 20 min

Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (limite à gauche).
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (limite à droite).
- c) Calcule $f(1)$.
- d) f est-elle continue en $x = 1$? Justifie.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2(1) - 1 = 1$ et $f(1) = 1$.

Comme la limite à gauche = la limite à droite = $f(1) = 1$, la fonction f est **continue en 1**.

Continuité

f est **continue en** x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cela nécessite que les limites à gauche et à droite existent, soient égales, et égales à $f(x_0)$.

Synthèse générale – Limites et Continuité

1. Opérations sur les limites

Si $\lim f = L$ et $\lim g = L'$	$\lim(f + g)$	$\lim(f \cdot g)$	$\lim(f/g)$
$L, L' \in \mathbb{R}$	$L + L'$	$L \cdot L'$	L/L' si $L' \neq 0$
$L \in \mathbb{R}, L' = +\infty$	$+\infty$	dépend du signe	0
$L = +\infty, L' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

2. Formes indéterminées (F.I.)

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty$

Méthodes pour lever une F.I. : factoriser, simplifier, diviser par le terme de plus haut degré.

3. Continuité

f continue en $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

4. Asymptotes

— $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ asymptote **verticale** $x = a$.

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Rightarrow$ asymptote **horizontale** $y = L$.

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Rightarrow$ asymptote **oblique** $y = ax + b$.

Chapitre 5

Dérivées de Fonctions Numériques

⦿ Durée estimée du chapitre : 2h00 – 2h30

3 activités + synthèses + révision

Introduction

Le concept de dérivée est l'un des piliers du calcul mathématique. Il permet d'étudier les variations d'une fonction, de tracer des tangentes, et de modéliser de nombreux phénomènes.

Activité 5.1 : Du taux de variation au nombre dérivé ⦿ 25 min

Soit $f(x) = x^2$ et $x_0 = 3$.

- Calcule le taux de variation $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ pour $x \neq 3$. Simplifie.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$. Ce nombre s'appelle le **nombre dérivé** $f'(3)$.
- Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 3$?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 3} 6.$$

✓ Ce qu'il faut retenir

$f'(x) = 3$ (dérivée d'une fonction affine). $g'(x) = 2x$ (dérivée de x^2). $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (dérivée de $\frac{1}{x}$).

Activité 5.3 : Règles de dérivation ⌚ 25 min

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes en utilisant les règles (somme, produit, quotient) :

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ (règle de la somme)

b) $g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$ (règle du produit : $(uv)' = u'v + uv'$)

c) $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (règle du quotient : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$)

[illegible]

✓ Ce qu'il faut retenir

a) $f'(x) = 6x - 5$. b) $g'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 6x^2 + 2x - 6$. c) $h'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - (x+1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$.

Tableau des dérivées usuelles et règles

$f(x)$	$f'(x)$	Règle	Formule
k (constante)	0	$(u + v)'$	$u' + v'$
x	1	$(ku)'$	ku'
x^n	nx^{n-1}	$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)'$	$nu'u^{n-1}$

Synthèse générale – Dérivées

1. Nombre dérivé et tangente

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{Tangente : } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$2. \text{ Dérivées usuelles : } (x^n)' = nx^{n-1}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$3. \text{ Règles de calcul : } (u + v)' = u' + v', (uv)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

4. Lien dérivée – variations

— $f'(x) > 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ est **strictement croissante** sur cet intervalle.

— $f'(x) < 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ est **strictement décroissante** sur cet intervalle.

— $f'(x_0) = 0$ avec changement de signe $\Rightarrow f$ admet un **extremum** en x_0 .

Chapitre 6

Études de Fonctions Numériques

⊙ Durée estimée du chapitre : 1h30 – 2h00

2 activités + synthèses + révision

Introduction

L'étude complète d'une fonction est une compétence fondamentale. Ce chapitre te donne une méthode systématique pour mener cette étude.

Activité 6.1 : Méthode d'étude d'une fonction ⊙ 40 min

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Suivons le plan d'étude systématique :

Étape 1 : Ensemble de définition. Quel est D_f ?

Étape 2 : Parité. Calcule $f(-x)$. f est-elle paire ? impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

Étape 3 : Limites aux bornes. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Étape 4 : Dérivée et variations. Calcule $f'(x)$, puis résous $f'(x) = 0$ pour trouver les points critiques.

Étape 5 : Signe de f' et tableau de variations. Dresse le tableau de variations de f .

Étape 6 : Points remarquables. Calcule $f(0)$, et les valeurs de f aux points critiques. Cherche les zéros de f .

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$f''(x) = 6x$. $f''(x) = 0 \iff x = 0$. f'' change de signe en $x = 0$ (de $-$ à $+$).

Le point d'inflexion est $(0, 2)$. En ce point, la courbe **traverse sa tangente** et change de convexité.

Synthèse générale – Étude de Fonctions

Plan d'étude d'une fonction numérique :

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f .
2. Étudier la parité éventuelle. Recherche de période et de symétries.
3. Calculer les limites aux bornes de D_f (asymptotes).
4. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations.
5. Déterminer les points remarquables : intersections avec les axes, extrema, points d'inflexion.
6. Tracer la courbe représentative (C_f) .

Extrema : Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 , alors f admet un extremum en x_0 .

Point d'inflexion : Si $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 , alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Chapitre 7

Primitives de Fonctions

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 1h30 – 2h00

3 activités + synthèses + révision

Introduction

La notion de primitive est l'opération inverse de la dérivation : si la dérivation permet de passer de F à $f = F'$, la recherche de primitives permet de remonter de f à F .

Activité 7.1 : Découvrir la notion de primitive ⊙ 15 min

Soit $f(x) = 2x + 3$.

- a) Calcule la dérivée de $F(x) = x^2 + 3x + 10$.
- b) Calcule la dérivée de $G(x) = x^2 + 3x - 17$.
- c) Calcule la dérivée de $H(x) = x^2 + 3x + \frac{11}{2}$.
- d) Que remarques-tu ? Quel est le lien entre F , G , H et f ?
- e) Que peut-on dire de la différence $F(x) - G(x)$?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x + 3 = f(x)$. Donc F , G et H sont toutes des **primitives** de f . Elles ne diffèrent que par une constante : $F(x) - G(x) = 27$.

Retenir : Si F est une primitive de f , alors toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On appelle **primitive** de f sur $[a, b]$ toute fonction F telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) = f(x)$$

Si F est une primitive de f , alors toute autre primitive est de la forme $G(x) = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Activité 7.2 : Tableau des primitives usuelles ⦿ 20 min

Retrouve les primitives des fonctions suivantes en cherchant quelle fonction a cette dérivée :

- a) $f(x) = x^3$ (cherche F telle que $F'(x) = x^3$)
- b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$
- c) $f(x) = \cos x$
- d) $f(x) = \sin x$

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$. b) $F(x) = -\frac{1}{x} + C$. c) $F(x) = \sin x + C$. d) $F(x) = -\cos x + C$.

Règle générale : une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour $n \neq -1$.

Activité 7.3 : Primitives avec conditions initiales ⦿ 20 min

Soit $f(x) = \cos x$.

- Écris la forme générale des primitives de f .
- Trouve la primitive F de f qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- Trouve la primitive G de f qui vaut 2 pour $x = \frac{3\pi}{4}$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

Primitives de $\cos x$: $F(x) = \sin x + C$.

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 : \frac{\sqrt{2}}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$G\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 : \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + C = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Synthèse générale – Primitives

1. Tableau des primitives usuelles

$f(x)$	Primitive $F(x)$	Conditions
k	$kx + C$	$n \neq -1$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	

2. Propriétés de linéarité

- $\text{Prim}(f + g) = \text{Prim}(f) + \text{Prim}(g)$
- $\text{Prim}(\alpha f) = \alpha \cdot \text{Prim}(f)$

3. Primitive avec condition initiale

Pour trouver l'unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$: écrire $F(x) = (\text{primitive générale}) + C$, puis déterminer C grâce à la condition $F(x_0) = y_0$.

Chapitre 8

Suites Numériques

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 3h00 – 3h30

5 activités + synthèses + révision

Introduction

Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres : $u_0, u_1, u_2, \dots$. Les suites apparaissent partout en mathématiques et dans la vie courante (intérêts bancaires, populations, etc.).

Activité 8.1 : Découvrir les suites ⊙ 20 min

Considère les suites suivantes :

- (u_n) définie par $u_n = 2n + 5$ pour $n \geq 0$.
 - (v_n) définie par $v_n = 2^n$ pour $n \geq 0$.
 - (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 3w_n - 2$ pour $n \geq 0$.
- a) Pour chaque suite, calcule les 5 premiers termes (de rang 0 à 4).
 - b) Laquelle est définie de manière explicite (par une formule directe) et laquelle de manière récurrente ?
 - c) Peux-tu calculer directement u_{100} ? Et w_{100} sans calculer tous les termes précédents ?

[illegible]

✓ Ce qu'il faut retenir

$(u_n) : 5, 7, 9, 11, 13$. $(v_n) : 1, 2, 4, 8, 16$. $(w_n) : 1, 1, 1, 1, 1$ (suite constante!).

(u_n) et (v_n) sont définies de manière **explicite** ($u_n = f(n)$). (w_n) est définie par **réurrence** ($w_{n+1} = g(w_n)$). On peut calculer directement $u_{100} = 205$, mais pour une suite récurrente, il faut en général calculer tous les termes précédents.

Activité 8.2 : Sens de variation d'une suite ◉ 20 min

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 - 4n + 5$.

- Calcule $u_{n+1} - u_n$. Simplifie.
- Étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n .
- Pour quelles valeurs de n la suite est-elle décroissante? croissante?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 5 - (n^2 - 4n + 5) = 2n - 3.$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \iff 2n - 3 < 0 \iff n < \frac{3}{2}, \text{ soit } n = 0 \text{ ou } n = 1.$$

La suite est décroissante pour $n \leq 1$ et croissante à partir de $n = 2$.

Activité 8.3 : Suites arithmétiques ⌚ 20 min

On considère la suite : 3, 7, 11, 15, 19, ...

- Calcule la différence entre deux termes consécutifs. Que remarques-tu ?
- Cette suite est **arithmétique** de raison r . Quelle est la valeur de r ?
- Exprime le terme général u_n en fonction de n (avec $u_0 = 3$).
- Calcule la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 4$. Raison $r = 4$. $u_n = u_0 + nr = 3 + 4n$.
 $S = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{11}{2}(3 + 43) = \frac{11 \times 46}{2} = 253$.

Activité 8.4 : Suites géométriques ⌚ 20 min

On considère la suite : 2, 6, 18, 54, 162, ...

- Calcule le rapport entre deux termes consécutifs. Que remarques-tu ?
- Cette suite est **géométrique** de raison q . Quelle est la valeur de q ?
- Exprime le terme général v_n en fonction de n (avec $v_0 = 2$).
- Calcule la somme $S = v_0 + v_1 + \dots + v_5$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3. \text{ Raison } q = 3. v_n = v_0 \cdot q^n = 2 \times 3^n.$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-3^6}{1-3} = 2 \cdot \frac{1-729}{-2} = 728.$$

Activité 8.5 : Raisonnement par récurrence ⌚ 30 min

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Initialisation** : Vérifie que $P(0)$ est vraie.
- Hérédité** : Suppose que $P(k)$ est vraie pour un entier k donné. Montre que $P(k+1)$ est alors vraie.
Aide : pars de $1 + 2 + \dots + k + (k+1)$ et utilise l'hypothèse $P(k)$.
- Conclusion** : Que peut-on conclure ?

- Si $|q| < 1$: suite géométrique converge vers 0.
- Si $|q| > 1$: suite géométrique diverge.
- Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

5. Récurrence : Initialisation + Hérédité + Conclusion.

Chapitre 9

Dénombrement

⦿ Durée estimée du chapitre : 2h30 – 3h00

4 activités + synthèses + révision

Introduction

Le dénombrement est l'art de compter. Combien de façons peut-on choisir, ranger, ordonner des objets ? Ce chapitre te donne les outils mathématiques pour répondre à ces questions.

Activité 9.1 : Rappels sur les ensembles ⦿ 15 min

Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dans l'univers $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- a) Détermine $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $\overline{A}$ (complémentaire de A dans E).
- b) Vérifie que $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
- c) Vérifie les lois de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$A \cap B = \{3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A - B = \{1, 2\}$, $\overline{A} = \{6, 7, 8\}$.
 $\text{Card}(A \cup B) = 7 = 5 + 5 - 3$ ✓. $\overline{A \cup B} = \{8\} = \{6, 7, 8\} \cap \{1, 2, 8\} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ✓.

Activité 9.2 : Permutations et factorielle ☉ 20 min

Trois amis Ali, Bakary et Cheick veulent se placer en file indienne.

- Liste toutes les façons possibles de les ranger (exemple : Ali-Bakary-Cheick, Ali-Cheick-Bakary, ...).
- Combien y en a-t-il ? Vérifie que ce nombre est $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
- De manière générale, de combien de façons peut-on ranger n personnes en file ? C'est $n!$ (**factorielle** n).
- Calcule $5!$ et $7!$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

Les 6 arrangements : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. $3! = 6$ ✓.

$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$. Convention : $0! = 1$.

$5! = 120$, $7! = 5040$.

Activité 9.3 : Arrangements ☉ 20 min

Parmi 10 élèves, on doit choisir un président, un secrétaire et un trésorier (les postes sont différents).

- Combien de choix possibles pour le président ? Puis pour le secrétaire (une fois le président choisi) ? Puis pour le trésorier ?
- Combien de possibilités au total ?
- Ce nombre est un **arrangement** noté A_{10}^3 . Calcule-le avec la formule $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$10 \times 9 \times 8 = 720. A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720 \checkmark.$$

Arrangement : choix ordonné de p éléments parmi n . $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Activité 9.4 : Combinaisons ☉ 25 min

Dans une classe de 10 élèves, on forme une équipe de 3 personnes (sans distinction de rôle).

- Pourquoi ce problème est-il différent de l'activité précédente ?
- Si l'on choisit {Ali, Bakary, Cheick}, combien d'arrangements différents donnent cette même équipe ?
- Déduis-en la formule $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!}$.
- Calcule C_{10}^3 .

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

Ici l'ordre ne compte pas. Le même groupe $\{A, B, C\}$ correspond à $3! = 6$ arrangements.

Donc $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{720}{6} = 120$.

Combinaison : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Propriétés des combinaisons

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$ (symétrie)
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (formule de Pascal)

Synthèse générale – Dénombrement

1. **Factorielle** : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$, $0! = 1$.
2. **Permutations** : nombre de façons de ranger n objets = $n!$
3. **Arrangements (ordre compte)** : choix ordonné de p parmi n :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

4. **Combinaisons (ordre ne compte pas)** : choix de p parmi n :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

5. Principes fondamentaux

- **Principe multiplicatif** : si une action se décompose en étapes indépendantes avec $n_1, n_2, \dots, n_k$ choix, le nombre total est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.
- **Principe additif** : si les cas sont mutuellement exclusifs, on additionne.

6. Comment choisir ?

L'ordre compte ?	Outil
Oui, tous les éléments	Permutation : $n!$
Oui, p parmi n	Arrangement : A_n^p
Non, p parmi n	Combinaison : C_n^p

Chapitre 10

Probabilités

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 2h30 – 3h00

4 activités + synthèses + révision

Introduction

Les probabilités permettent de mesurer le “hasard” et de quantifier les chances qu’un événement se produise. Ce chapitre s’appuie sur les outils du dénombrement.

Activité 10.1 : Expérience aléatoire et univers ⊙ 15 min

On lance un dé équilibré à 6 faces.

- a) Quel est l’univers Ω de cette expérience ?
- b) Soit A = “obtenir un nombre pair”. Écris A comme un sous-ensemble de Ω .
- c) Soit B = “obtenir un nombre supérieur ou égal à 5”. Écris B .
- d) Décris $A \cap B$ (en mots et en extension). Décris $A \cup B$. Décris $\overline{A}$.

Ta réponse :

✓ Ce qu’il faut retenir

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $A = \{2, 4, 6\}$. $B = \{5, 6\}$. $A \cap B = \{6\}$ (pair et ≥ 5). $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.
 $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Activité 10.2 : Calcul de probabilités ⌚ 20 min

On lance un dé équilibré à 6 faces.

- Quelle est la probabilité de chaque face (équiprobabilité) ?
- Calcule $P(A)$ = probabilité d'obtenir un nombre pair.
- Calcule $P(B)$ = probabilité d'obtenir un nombre ≥ 5 .
- Vérifie que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

Chaque face a probabilité $\frac{1}{6}$. $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
 $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ✓.

Probabilité

Soit Ω un univers fini d'événements équiprobables, avec $\text{Card}(\Omega) = n$.

La **probabilité** d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On a toujours $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Activité 10.3 : Événement contraire ⌚ 25 min

D'un jeu de 32 cartes, on tire 5 cartes au hasard.

- Soit A = "avoir au moins un cœur". Quel est l'événement contraire $\bar{A}$?
- Quel est le nombre total de tirages possibles ? (Utilise les combinaisons.)
- Combien y a-t-il de tirages ne contenant aucun cœur ? (Il y a 24 cartes non-cœur.)
- Calcule $P(\bar{A})$ puis $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\bar{A}$ = “avoir 0 cœur”. Nombre de tirages : C_{32}^5 . Tirages sans cœur : C_{24}^5 .

$P(\bar{A}) = \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}$. Donc $P(A) = 1 - \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}$.

Astuce : quand on cherche “au moins un”, il est souvent plus simple de calculer le contraire (“aucun”).

Propriétés fondamentales

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ (incompatibles) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Activité 10.4 : Probabilité conditionnelle ⌚ 25 min

D'un jeu de 32 cartes, on tire successivement 2 cartes sans remise.

- a) Soit A = “la 1ère carte est un as”. Calcule $P(A)$.
- b) Sachant que la 1ère carte est un as, il reste 31 cartes dont 3 as. Soit B = “la 2ème carte est un as”. Calcule $P(B/A)$ (probabilité de B sachant A).
- c) Calcule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$ (probabilité d'avoir 2 as).

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}. \quad P(B/A) = \frac{3}{31}. \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248}.$$

Formule : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ pour $P(A) \neq 0$.

Synthèse générale – Probabilités

1. Vocabulaire

- Expérience aléatoire, univers Ω , événement, événement élémentaire.
- Événement certain (Ω), impossible ($\emptyset$), contraire ($\bar{A}$).

2. Probabilité (équiprobabilité) : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

3. Propriétés

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. Probabilité conditionnelle et indépendance

- $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$
- A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Chapitre 11

Produit Scalaire et Géométrie Analytique Plane

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 2h30 – 3h00

4 activités + synthèses + révision

Introduction

Le produit scalaire est un outil puissant qui relie l'algèbre et la géométrie. Il permet de calculer des angles, des distances, et de résoudre des problèmes géométriques par le calcul.

Activité 11.1 : Norme d'un vecteur ⊙ 15 min

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(3, 4)$ et $\vec{v}(-1, 2)$.

- a) Calcule $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ et $\|\vec{v}\|$.
- b) Si $\vec{w} = 2\vec{u}$, vérifie que $\|\vec{w}\| = 2 \times \|\vec{u}\|$.
- c) Quel vecteur a une norme nulle ? Que représente-t-il ?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$. $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. $\|\vec{w}\| = \sqrt{36 + 64} = 10 = 2 \times 5$ ✓.
Le vecteur nul $\vec{0}$ est le seul vecteur de norme 0. Pour $\vec{u}(x, y)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Activité 11.2 : Découvrir le produit scalaire ⦿ 25 min

Soient $\vec{u}(3, 1)$ et $\vec{v}(2, 4)$.

- Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 1 \times 4$.
- Calcule $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ où $\vec{u} + \vec{v} = (5, 5)$.
- Vérifie la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- Pour quels vecteurs le produit scalaire est-il nul ? Que cela signifie-t-il géométriquement ?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 4 = 10. \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{10}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{20}, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{50}.$$

$$\frac{1}{2}(50 - 10 - 20) = 10 \quad \checkmark.$$

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, les vecteurs sont **orthogonaux** (perpendiculaires).

Produit scalaire

Expression analytique : Si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Expression trigonométrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$

où α est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Activité 11.3 : Équation d'un cercle ⦿ 20 min

Soit $\Omega(2, -1)$ un point et $r = 3$.

- Un point $M(x, y)$ est sur le cercle de centre Ω et de rayon r si et seulement si $\Omega M = r$.
Écris cette condition en termes de coordonnées.

- b) Développe pour obtenir une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
 c) Le point $A(5, -1)$ est-il sur ce cercle ?

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\Omega M = r \iff (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$
 $A(5, -1) : (5 - 2)^2 + (-1 + 1)^2 = 9 \checkmark$, donc A est sur le cercle.

Activité 11.4 : Équation d'une droite ⌚ 20 min

Soit la droite (D) passant par $A(1, 3)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2, 5)$.

- a) Un point $M(x, y)$ est sur (D) ssi $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Écris la condition $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$.
 b) Développe et simplifie pour obtenir l'équation de (D) sous la forme $ax + by + c = 0$.
 c) Quel est un vecteur **normal** à (D) ? (Perpendiculaire à $\vec{u}$.)

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$\vec{AM} = (x - 1, y - 3)$. $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 5(x - 1) - 2(y - 3) = 5x - 2y + 1 = 0$.
Un vecteur normal est $\vec{n}(5, -2)$ (les coefficients de x et y dans l'équation).

Synthèse générale – Produit Scalaire et Géométrie Analytique

1. Norme : $\|\vec{u}(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

2. Produit scalaire

— Analytique : $\vec{u}(x, y) \cdot \vec{v}(x', y') = xx' + yy'$

— Trigonométrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$

— $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3. Propriétés : bilinéarité, symétrie, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

4. Équation de droite : $ax + by + c = 0$. Vecteur directeur : $\vec{u}(-b, a)$. Vecteur normal : $\vec{n}(a, b)$.

5. Équation de cercle : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. Centre (α, β) , rayon r .

6. Distance d'un point à une droite :

$d(M_0, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ où $(D) : ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$.