

COURS ET EXERCICES EN APC

11ème SCIENCE

BOUYA
MATHEMATIQUES

BOUYA MAHAMANE

Prof de Mathématiques au L.H.D.S de l'A.E de Mopti



Vos critiques et suggestions sont les bienvenues pour une future amélioration de ce document. Sachez que dans les deux derniers j'ai abordé certaines notions qui ne sont pas dans le programme officiel selon ma lecture du programme. Merci pour votre bonne compréhension

Mon programme proposé pour l'avancement

- ☞ **Chapitre I : Equations – Inéquations - Systèmes**
- ☞ **Chapitre II : Les Applications**
- ☞ **Chapitre III : Fonctions polynômes –Fonctions rationnelles**
- ☞ **Chapitre IV : Trigonométrie**
- ☞ **Chapitre V : Etude locale d'une fonction numérique**
- ☞ **Chapitre VI : Suites Numériques**
- ☞ **Chapitre VII : Dénombrement – Probabilité**
- ☞ **Chapitre VIII : Statistiques**
- ☞ **Chapitre IX : Géométrie Plane**
- ☞ **Chapitre X : Géométrie dans l'espace**

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE III : EQUATIONS – INEQUATIONS - SYSTEMES

Compétences :

- ☞ **Composantes, manifestations :**

Contenu(s) : Equations – inéquations - Systèmes

- Calcul de deux nombres dont le produit et la somme sont connus.
- Comparaison d'un nombre aux solutions d'une équation du second degré à une inconnue réelle
- Résolution d'équations bicarrées.
- Recherche des zéros d'une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2.
- Résolution d'équations trigonométriques en utilisant un changement de variable.
- Résolution d'équations irrationnelles du type : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ et $\sqrt{f(x)} = ax + b$ où le degré de f et celui de g sont inférieurs ou égaux à 2 et d'inéquations irrationnelles du même type.
- Quelques exemples simples de résolution d'équations ou d'inéquations contenant un paramètre.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles :**
- **Ressources financières :**

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation :

1) Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes

- a) $2x - 8 = 0$; b) $2(x - 3) + 5 = -3(x - 1)$; c) $\frac{3(2x+5)}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7-3x}{12}$;
 d) $\frac{2x-1}{6} + \frac{3x+2}{5} = \frac{14x+9}{15}$; e) $2(x - 7) + 3(x + 3) = 5(x - 1)$;
 f) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2 + \frac{x}{6}$; g) $(x - 2)(x + 2) = 0$; h) $(x - 2)^2 - 9 = 0$

2) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3} = 0$; b) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + \sqrt{2} + 1 = 0$;
 c) $2x^2 + 3x + 4 = 0$; d) $3x^2 - 5x = 0$; e) $4x^2 - 1 = 0$; f) $x^2 + 9 = 0$;
 g) $-x^2 + 2x + 3 = 0$; h) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; i) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; j) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;
 k) $x^2 + 2x + 4 = 0$; l) $-x^2 + x + 3 = 0$

Situation problem: Ali a un jardin de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et un champ de forme rectangulaire dont l'aire est le double de l'aire du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du jardin augmenté de 44 mètres. L'aire du champ étant 2 égale à 64m, calculer les dimensions du jardin puis celles du champ.

Activité 1 : Calcul de deux nombres dont le produit et la somme sont connus.

Consigne 1: Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) de discriminant $\Delta \geq 0$

- a) Montre que la somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et le produit $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ où x_1 et x_2 sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
 b) En déduis que si $ax^2 + bx + c = 0$ alors $x^2 - Sx + P = 0$

Consigne 2 : Détermine, s'ils existent, l'équation du second degré vérifiant les deux nombres réels dont la somme est S et le produit P dans chacun des cas suivants : a) $S = -1$ et $P = 12$; b) $S = -9$ et $P = 20$

c) $S = 3$ et $P = 4$; d) $S = \sqrt{2}$ et $P = \frac{1}{2}$

Synthèse partielle : Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) de discriminant $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet deux racines réelles

distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a}$;

a) **Somme des racines :** $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

b) **Produit des racines :** $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Remarque : Deux nombres x_1 et x_2 dont la somme est S et le produit est P sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

Consigne 3 : Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la somme S et le produit P :

$$\begin{cases} x + y = \frac{9}{2} \\ xy = 5 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Consigne 4 : Mise en équation

- 1) L'aire d'un terrain rectangulaire est de 1971m^2 . Le périmètre de ce terrain est de 200m. Calculer la longueur L et la largeur ℓ de ce terrain.
- 2) Ali a un jardin de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et un champ de forme rectangulaire dont l'aire est le double de l'aire du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du

jardin augmenté de 44 mètres. L'aire du champ étant égale à 64m^2 , calculer les dimensions du jardin puis celles du champ.

- 3) Un triangle rectangle a pour périmètre 30m et pour aire 30m^2 . Quelles sont ses dimensions ?

Activité 2 : Comparaison d'un nombre aux solutions d'une équation du second degré à une inconnue réelle

Théorème : Soit la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ et α un nombre réel.

- a) Si $a \times f(\alpha) < 0$, alors f possède deux solutions distinctes x_1 et x_2 tel que $x_1 < \alpha < x_2$
- b) Si $a \times f(\alpha) > 0$, et que f possède deux solutions x_1 et x_2 distinctes
- ou non si :
$$\begin{cases} \alpha + \frac{b}{2a} < 0, \text{ alors } \alpha < x_1 < x_2 \\ \alpha + \frac{b}{2a} > 0, \text{ alors } x_1 < x_2 < \alpha \end{cases}$$
- c) Si $a \times f(\alpha) = 0$, alors α est solution de l'équation ;

Consigne : En utilisant le théorème ci – dessus

- 1) Classer $\alpha = 2$ par rapport aux racines des équations ci -dessous :
- 2) Donne les signes des racines des équations ci – dessous s'elles existent

a) $\sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$; b) $-x^2 + 4x + 5 = 0$;

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$; d) $(-1 + \sqrt{3})x^2 - x + \sqrt{3} + 1 = 0$

Activité 3 : Résolution d'équations bicarrées.

Consigne 1 : Soit l'équation (E) : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

- 1) Poser $x^2 = t$ puis remplacer x^2 par t dans (E)
- 2) Que devient l'équation (E) ;
- 3) Résous l'équation trouvée et en déduis les solutions de l'équation (E)

Consigne 2 : résolvez dans IR les équations bicarrées suivantes :

- 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$; 3) $x^6 - 124x^3 - 125 = 0$;
4) $-2x^4 + 5x^2 - 5 = 0$; 5) $\sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$; 6) $x^4 - 81 = 0$

Synthèse partielle : On appelle équation bicarrée, toute écriture qui peut se ramener sous la forme $ax^4 + bx^2 + c$ avec $a \neq 0$. Pour résoudre une équation bicarrée, on peut poser $X = x^2 \Rightarrow X^2 = x^4$ si $X \geq 0$ alors $x = \sqrt{X}$ ou $x = -\sqrt{X}$.

Activité 4 : Recherche des zéros d'une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2.

Consigne 1 : Soit l'équation (E) : $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

- 1) Vérifie que si y est une solution de (E) ($x \neq 0$), alors son inverse $\frac{1}{y}$ est aussi solution de (E)
- 2) Vérifiez que si y est une solution de (E) ($y \neq 0$), alors le nombre $X = y + \frac{1}{y}$ est une solution de (P) : $X^2 - 4X + 3 = 0$
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Consigne 2 : On considère l'équation (E) : $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$

- 1) Vérifie que 0 n'est pas une solution de (E) ;
- 2) Montre que (E) est équivalente à (E') : $x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
- 3) En utilisant le changement de variable $K = x + \frac{1}{x}$, montre que (E') est équivalente à une équation à déterminer et à résoudre
- 4) Résous en fin l'équation (E) en te basant sur tout ce qui précède

Consigne 3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- 1) Calcule $P(2)$;
- 2) Développe et réduire $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ suivant les puissances décroissantes de x puis
- 3) En déduis les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

4) Résous dans IR, l'équation $P(x) = 0$;

Activité 5 : Résolution des inéquations

Consigne: Résous dans IR les inéquations suivantes

- 1) $2x - 3 \geq -x + 7$; 2) $-x + 2 - 3(x + 5) < 0$; 3) $\frac{5-2x}{x+5} > 0$
 4) $-2x^2 + 4x + 30 \leq 0$; 5) $3x^2 + 5x + 4 > 0$;
 6) $9x^2 + 6x + 1 < 0$; 7) $\frac{x^2+2x-3}{-x+5} \leq 0$ et 8) $-2x(x^2 - 5x - 4)$

Synthèse partielle :

☞ Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation du premier degré; $ax + b \leq 0$
 ou $ax + b \geq 0$ C'est étudier le signe du polynôme $P(x) = ax + b$
 (Voir le premier tableau) puis en déduire la solution S

☞ Résoudre dans IR une inéquation du second degré
 $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$; C'est étudier le signe
 du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ pour ce faire, on peut
 calculer son discriminant Δ et utiliser l'un des trois derniers
 tableaux ci- dessous.

$\Delta > 0$; tu calcules x_1 et x_2 supposons que $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$	signe de a	

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de $(-a)$	signe de a	

$\Delta < 0$ x_1 et x_2 n'existent pas

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

$\Delta = 0$; tu calcules $x_1 = x_2$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de a	

Activité 6 : Résolution d'équations irrationnelles du type :

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ et $\sqrt{f(x)} = ax + b$ où le degré de f et celui de g sont inférieurs ou égaux à 2 et d'inéquations irrationnelles du même type.

Consigne 1 : soit à résoudre dans IR l'équation : $\sqrt{2x + 1} = x - 1$

- Déterminer son domaine de définition ou validité Dv ;
- Elever au carré les deux membres de l'équation puis résoudre l'équation trouvée ;
- Quel est l'ensemble solution de l'équation résolue appartenant Dv (cet ensemble solution est les solutions de l'équation : $\sqrt{2x + 1} = x - 1$

Consigne 2 : Résous dans IR les équations :

- $\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x - 3}$;
- $\sqrt{3(x^2 - 1)} = 2x - 1$;
- $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = \sqrt{2x^2 + x + 1}$;
- $5 - x = \sqrt{x + 1}$;
- $5 = x - \sqrt{x^2 + x + 1}$;
- $\sqrt{4 - 2x} = \sqrt{x + 3}$

Synthèse partielle : Une équation irrationnelle est une équation ou inconnue figure sous le radical. Pour résoudre une équation irrationnelle(E), on peut utiliser la méthode suivante :

- Déterminer le domaine de validité Dv ;
- Eliminer les radicaux par des élévations au carré ;
- Résoudre l'équation (E') sans radical ainsi obtenue ;
- Déterminer, parmi les solutions de (E'), celles qui appartiennent Dv, sont solutions de (E)

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :

$$a) \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \text{ et } a \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases} ; b) \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \\ a = b \end{cases}$$

Activité 7 : Résolution d'inéquations irrationnelles du type :

$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} ; \sqrt{f(x)} \leq ax + b$ et $\sqrt{f(x)} \geq ax + b$ où le degré de f et celui de g sont inférieurs ou égaux à 2

Propriétés : Pour tous réels a et b , on a :

$$a) \sqrt{a} \leq b \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq b^2 \end{cases} ; b) \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq b \end{cases}$$

$$c) \sqrt{a} \geq b \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \geq b^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

Consigne : Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$a) \sqrt{3(x^2 - 1)} < 2x - 1 ; b) \sqrt{3x^2 + 2x - 1} < \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

$$c) 5 - x \leq \sqrt{x + 1} ; d) \sqrt{4 - 2x} \leq \sqrt{x + 3} ; e) \sqrt{-2x} \geq \sqrt{x + 3} ;$$

Activité 8 : Quelques exemples simples de résolution d'équations contenant un paramètre

Consigne 1 : Résous et discute suivants les valeurs du paramètre réel m l'équation $(E_m) : (m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$

- Donne la valeur de a puis la valeur m si a égale zéro ($a = 0$)
- En déduis la solution de l'équation (E_m) en remplaçant m par sa valeur
- Si $a \neq 0$, calcule le discriminant Δ puis étudie son signe dans $\mathbb{R}$;
- Suivant le signe du discriminant Δ , en déduis les solutions de l'équation (E_m) ;

Consigne 2 : Soit l'équation paramétrique

$$(E_m) : (m - 2)x^2 + (2m + 2)x + 10m - 14$$

- 1) Discuter suivants les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (E_m) . Pour ce faire :
 - Donne la valeur de a puis la valeur m si a égale zéro ($a = 0$)
 - En déduis la solution de l'équation (E_m) puis le signe de cette solution dans $\mathbb{R}$ en remplaçant m par sa valeur ;
 - Si $a \neq 0$, calcule le discriminant Δ puis étudie son signe dans $\mathbb{R}$,
 - Etudie le signe du produit P et celui de la somme S dans $\mathbb{R}$;
 - Suivant les signes de Δ , P et S en déduis l'existence et le signe des solutions de (E_m) ;
- 2) Trouve entre les solutions x_1 et x_2 une relation indépendante de m .
 - Exprime m en fonction de P puis m en fonction de S ;
 - Compare les valeurs de m puis en déduis entre x_1 et x_2 une relation indépendante de m
- 3) Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions de signe contraire.
- 4) Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions positives.

Consigne 3 : Classifier $\alpha = 2$ par rapport aux racines de l'équation :

$(E_m) : (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$. Pour ce faire :

- Donne la valeur de a puis la valeur m si a égale zéro ($a = 0$)
- En déduis la solution de l'équation (E_m) puis compare cette solution à α dans $\mathbb{R}$ en remplaçant m par sa valeur ;
- Si $a \neq 0$, calcule le discriminant Δ puis étudie son signe dans $\mathbb{R}$,
- En posant $f_m(x) = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$; détermine $f_m(\alpha)$;
- Calcule $a \times f_m(\alpha)$ puis étudie son signe dans $\mathbb{R}$;
- Détermine $\alpha + \frac{b}{2a}$ puis étudie son signe dans $\mathbb{R}$;
- En utilisant les signes de Δ , $a \times f_m(\alpha)$ et $\alpha + \frac{b}{2a}$, classer $\alpha = 2$

par rapport aux racines

Activité 9 : Quelques exemples simples de résolution d'inéquations contenant un paramètre

Consigne : Soit $f_m(x) = (m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$

Résous et discute suivant les valeurs du paramètre réel m l'inéquation $f_m(x) < 0$; Pour ce faire :

- Donne la valeur de a puis la valeur m si a égale zéro (a = 0)
- En déduis la solution de l'inéquation $f_m(x) < 0$ en remplaçant m par sa valeur ;
- Si a $\neq 0$, calcule le discriminant Δ puis étudie le signe de Δ et le signe de a dans $\mathbb{R}$;
- Suivant les signes du discriminant Δ et a en déduis les solutions de l'inéquation $f_m(x) < 0$;

Activité 10 : Système d'équations du 1^{er} degré à 2 inconnues :

Consigne 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci – dessous

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} ; \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} ; \begin{cases} -x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = 14 \end{cases}$$

Consigne 2 : Méthode des déterminants :

Soit à résoudre le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \text{ (1)} \\ a'x + b'y = c' \text{ (2)} \end{cases}$

On calcule Δ (le déterminant) : $\Delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Si $\Delta \neq 0$ On calcule

$$\checkmark \Delta_x \text{ (le déterminant par rapport à } x \text{)} : \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b' \\ c' & b \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$\checkmark \Delta_y \text{ (le déterminant par rapport à } y \text{)} : \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} ; \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$$

- $\checkmark$ Si $\Delta = 0$; $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors $S = \{ \}$;
- $\checkmark$ si $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$ alors $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

NB : Alors le système admet une infinité de solution.

Résous et discute selon les valeurs de m les solutions de systèmes ci – dessous en utilisant la méthode de déterminants

$$1^\circ) \begin{cases} mx - y = 2 - m \\ 3x + y = -5 \end{cases} ; \quad 2^\circ) \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x + my = 1 - \sqrt{2} \\ -mx + (1 + \sqrt{2})y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} ;$$

$$3^\circ) \begin{cases} (2 - m)x - 3y = 1 - m \\ (m + 4)x + (m - 6)y = 2 \end{cases}$$

Activité 11 : Mise en système d'équations

Consigne 1 : Amadou dépense 580Fcfa pour six croissants et deux brioches. Il lui faudrait 40Fcfa de plus pour acheter deux croissants et six brioches. Combien coûte chaque gâteau ?

Consigne 2 : Les maliens de France organisent une manifestation culturelle dans une salle de théâtre, la salle compte 400 places. Les parterres sont à 23 euros et les balcons à 18 euros. Quand le théâtre est plein, la recette est de 8100 euros. Combien y a-t-il de parterres, de balcons ?

Activité 12 : Résolution de systèmes d'inéquations

Consigne : Résous graphiquement les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -x + 2y > 7 \\ 2x - 4y \leq 14 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + 2y > 5 \\ 3x + 6y > 15 \end{cases}$$

Activités 13 : Résolution du système d'équations à trois inconnues

Définition : Soit trois équations à trois inconnues :

$$ax + by + cz = d ; a'x + b'y + c'z = d' ; a''x + b''y + c''z = d''$$

On nomme le système d'équations à trois inconnues, le système à la

forme suivante :
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Consigne : Résous dans $\mathbb{R}^3$; les systèmes suivants:

- Par substitution
- Par pivot de Gauss

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$$

Activité 14 : Mise en système d'équations

Consigne 1 : Un potier fabrique trois types différents A , B, C de canaris.

Pour fabriquer un canari du type A, le potier a besoin de : 40kg d'argile, 60litres d'eau et 15kg de bois de chauffage.

Pour fabriquer un canari du type B, le potier a besoin de : 18kg d'argile, 20 litres d'eau et 7kg de chauffage.

Pour fabriquer un canari du type C, le potier a besoin de : 70kg d'argile, 110 litres d'eau, 35kg de bois de chauffage.

En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3656kg d'argiles, 5040 litres d'eau et 1494kg de bois de chauffage.

Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Consigne 2 : Une usine fabrique trois produits différents A, B et C. la fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures de travail pour A, 3 heures pour B et 1/3 heure pour C.

L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unités de chaque produit B étant le tiers du nombre d'unités de A. parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique – t – elle ?

Evaluation 1 : Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

- a) $3x^2 - 5x = 0$; b) $4x^2 - 1 = 0$; c) $x^2 + 9 = 0$; d) $-x^2 + 2x + 3 = 0$
 e) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; f) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; g) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; h) $x^2 + 2x + 4 = 0$;
 i) $-x^2 + x + 3 = 0$; j) $x(x + 1) \geq -\frac{9}{2}$; k) $x + 1 \geq -\frac{9}{2x}$;
 l) $2x \geq -\frac{9}{x+1}$; m) $3x + 5 \leq 4x - 3$; n) $-2x - 3 < -3x + 5$; o) $4x - x^3 \leq 0$;
 p) $\frac{x+3}{-x+5} \leq 0$; q) $\frac{-2x+7}{5x+1} \geq -1$; s) $\frac{x^1-4}{-x^2+4x-3} > 0$

Evaluation 2 : Détermine s'ils existent, les deux nombres x et y dans les cas suivants

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{9} \\ xy = -3 \end{cases} ; 2) \begin{cases} xy = -6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} ; 3) \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\frac{25}{12} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} ;$$

$$4) \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases} ; 5) \begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases} ; 6) \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Evaluation 3 : Résous dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes

1) $\sqrt{-x^2 + 5} = x - 3$; 2) $\sqrt{-2x + 5} = \sqrt{x + 3}$;
 3) $1 - \sqrt{x^2 - 4} = x$; 4) $2x - 8 + \sqrt{x^2 - 4x} = 0$;

5) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{-x^2 - x + 2}$; 6) $\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$

7) $\sqrt{-x + 1} \leq 3x + 6$; 8) $-x - 1 < \sqrt{x^2 - 2}$

9) $\sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{-x + 2}$; 10) $\sqrt{-x^2 + 7x} \geq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;

11) $\sqrt{(x + 1)^2 + 3} - 3x > 2$; 12) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$;

13) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$; 14) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;

15) $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$; 16) $x^4 + x^2 - 6 \geq 0$

17) $x^4 - 7x^2 - 6 < 0$; 18) $\frac{x + 1}{x} - \frac{2}{x + 1} \geq \frac{8}{x^2 + x}$

Evaluation 4 : Soit l'équation (E) : $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

1) Vérifie q si x' est une solution de (E) ($x' \neq 0$), alors son inverse

$\frac{1}{x'}$ est aussi solution de (E)

2) Vérifiez que si x' est une solution de (E) ($x' \neq 0$), alors le nombre

$X' = x' + \frac{1}{x'}$ est une solution de (P) : $X^2 - 4X + 3 = 0$ En déduire

l'ensemble des solutions de (E).

Evaluation 5 : Résous dans IR les équations suivantes

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; b) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$; c) $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$

d) $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$. e) $(x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$;

f) $(x + 5)^4 - 6(x + 5)^2 - 7 = 0$ g) $(2x + 1)^4 - 8(2x + 1)^2 + 15 = 0$;

h) $(2x^2 + 1)^4 - 8(2x^2 + 5)^2 + 15 = 0$; i) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$;

j) $\left(\frac{3-4x}{5}\right)^2 - 2(3 - 4x) + 25 = 0$; k) $x^2 + 2 + \frac{8}{x^2 + 2} = 6$;

l) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$; m) $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5}$.

Evaluation 6 : Résous et discute suivant les valeurs de m les équations paramétriques suivantes

1) $(m - 3)x^2 + (7 - 4m)x + 20 = 0$; 2) $(m - 1)x^2 - 2(m + 3)x + m = 0$

3) $mx^2 - 2(m - 2)x - 10 = 0$; 4) $(m^2 - 4)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 1 = 0$

Evaluation 7 : Etudier l'existence et le signe des racines des équations paramétriques

1) $(m + 1)x^2 - 2mx + m^2 + 2m = 0$; 2) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 5 = 0$;

3) $3x^2 - 2(5m - 1)x + 3 = 0$; 4) $(m - 5)x^2 - (2m + 3)x + m + 6 = 0$;

5) $(m - 4)x^2 - (m + 3)x + m - 4 = 0$

Evaluation 8 : On considère l'équation (E_m) : $x^2 + 2(m - 1)x + (m - 1) = 0$

1) Détermine m pour que 1 soit une racine de l'équation (E_m). En déduis alors l'autre solution

2) Déterminer m pour que l'équation admette deux solutions distinctes.

3) Déterminer m pour que l'équation n'admette pas de solution

4) Déterminer m pour que l'équation admette une solution double.

5) Déterminer m pour que l'équation admette deux solutions de signe contraire.

Evaluation 9 : Soit l'équation paramétrique

(E) : $(12m + 1)x^2 - 2(6m - 4)x + 3m = 0$.

1) Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles (E) admet deux solutions distinctes x' et x'' . Calculer la somme $S = x' + x''$.

2) En supposant que x' et x'' vérifient la relation : $4x' + x'' = 1$; calculer alors x' ; x'' et m s'ils existent ?

Evaluation 10 : Soit P un polynôme défini par

$$P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1.$$

Détermine les valeurs du nombre réels m pour que P ait deux racines α et β telles que : a) $\alpha^2 + \beta^2 = 29$; b) $|\alpha - \beta| = 1$

Evaluation 11 : On considère l'équation d'inconnue x :

$$x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$$

Détermine les valeurs de nombres réels m pour lesquelles cette équation a : 1) Quatre solutions distinctes ; 2) Deux solutions distinctes ; 3) Trois solutions distinctes

Evaluation 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode des substitutions et du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + 3z = 26 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + 2c = -5 \\ a + 4b + 9c = -18 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases} ;$$

Evaluation 13 : L'aire d'un terrain rectangulaire est de 1971m. Le périmètre de ce terrain est de 200m. Calculer la longueur L et la largeur ℓ de ce terrain.

Evaluation 14 : Ali a un jardin de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et un champ de forme rectangulaire dont l'aire est le double de l'aire du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du jardin augmenté de 44 mètres. L'aire du champ étant 2 égale à 64m, calculer les dimensions du jardin puis celles du champ.

Evaluation 15 : Un groupe d'élèves réserve un voyage pour un montant total de 21600F. Pour 30 participants de plus il aurait obtenu une réduction de 20F par billet et aurait payé un total de 24000F. Quel est le prix d'un billet et le nombre d'élèves participant à ce voyage ?

Evaluation 16 : Un triangle rectangle a pour périmètre 30m et pour aire 30m^2 . Quelles sont ses dimensions ?

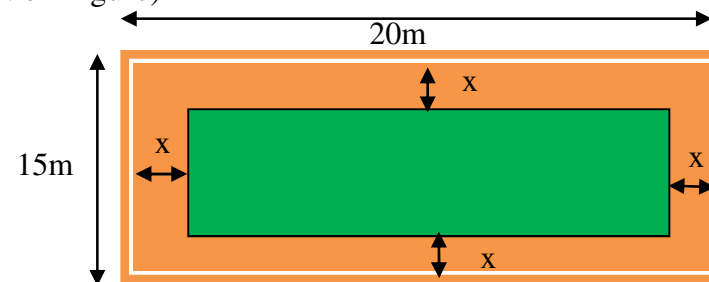
Evaluation 17 :

- 1) La somme de deux nombres est 17 et la somme de leurs carrés est 149. Trouve les deux nombres.
- 2) La différence entre deux entiers est 4 et leur produit est 96. Trouve les nombres,
- 3) le produit de deux entiers pairs consécutifs est 440. Trouve les nombres.
- 4) Trouve les mesures des côtes du triangle rectangle dont les mesures des côtes sont trois entiers consécutifs.

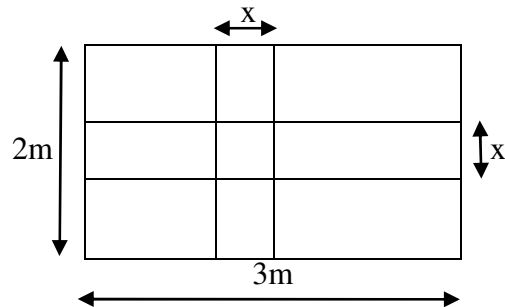
Evaluation 18 : ABCD est un rectangle tels que : $BC=AB+1$ et $AC=2AB$. Calcule l'aire de ce rectangle

Evaluation 19 : La longueur d'un rectangle est 7 cm de plus que les quatre cinquième de sa largeur. Si l'aire du rectangle est 785 cm. Trouve les dimensions de celui-ci.

Evaluation 20 : Une cour mesure 15m sur 20m. Tout autour de la cour, mais à l'intérieur, on veut construire un jardin d'une largeur uniforme. Si l'aire occupée par jardin est la même que l'aire du gazon qui occupe l'intérieur de la cour, trouve la largeur du jardin. (Voir figure)



Evaluation 21 : Le drapeau danois a pour dimension 3m sur 2m. L'aire de la croix est égale l'aire colorée. Détermine la largeur x de la croix.



Evaluation 22 : Une automobile et un camion font un trajet de 485 km. Ils partent en même temps.

L'automobile fait 20 km/h de plus que le camion et arrive à la destination 2 heures avant le camion. Trouve la vitesse de chaque véhicule.

Evaluation 23 : Un groupe d'élèves ont besoin de partager 140 \$ pour acheter un bateau d'occasion. Ils décident de se cotiser. A (a dernière minute trois des élèves décident de ne pas participer, augmentant ainsi chacun des autres de 15 \$. Combien d'élèves étaient dans le groupe initial ?

Evaluation 24 : Un potier fabrique trois types différents A, B, C de canaris. Pour fabriquer un canari du type A, le potier a besoin de : 40kg d'argile, 60litres d'eau et 15kg de bois de chauffage. Pour fabriquer un canari du type B, le potier a besoin de : 18kg d'argile, 20 litres d'eau et 7kg de chauffage. Pour fabriquer un canari du type C, le potier a besoin de : 70kg d'argile, 110 litres d'eau, 35kg de bois de chauffage.

En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3656kg d'argiles, 5040 litres d'eau et 1494kg de bois de chauffage.

Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Evaluation 25 : Une usine fabrique trois produits différents A, B et C. la fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures de travail pour A, 3 heures pour B et $\frac{1}{3}$ heure pour C.

L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unités de chaque produit B étant le tiers du nombre d'unités de A. parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique – t – elle ?

Evaluation 26 : Des hommes d'affaires organisent une partie de chasse aux buffles, aux autruches et aux oies. A leur retour, on compte au total 75 têtes et 210 pattes d'animaux tués.

Le transporteur perçoit une somme de 170 000 F à raison de 3 000 F par buffle, 1500 F par autruche et 2 000 F par oie. On admettra que chaque animal a une tête, qu'un buffle a 4 pattes, une autruche 2 pattes et une oie 2 pattes.

Déterminer le nombre de buffles, le nombre d'autruches et le nombre d'oies tués.

Evaluation 27 : Un gérant de magasin de musique décide de liquider un stock de cassettes (K7) sous forme de lots.

- ✓ Lot A : 5 K7 de disco, 2 de jazz et 1 de classique ;
- ✓ Lot B : 4 K7 de jazz et 4 de classique ;
- ✓ Lot C : 2 K7 de disco, 1 de jazz et 5 de classique ;

Combien doit – il proposer de lots de chaque type s'il veut épuiser son stock de 760 K7 de disco, 720 de jazz et 920 de classique ?

Evaluation 28 : Trois joueurs jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres

joueurs. Après trois parties où chacun en a perdu une, chaque joueur a un avoir de 2400 F. Quels étaient les avoirs initiaux ?

Evaluation 29 : Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que la somme de ces chiffres est égale à 6, le chiffre des unités est égale à la somme des chiffres des dizaines et des centaines. On note de plus que ce nombre lu à l'envers est égale au nombre cherché augmenté de 198.

Evaluation 30 : « l'âne et le cheval »

Un âne et un cheval chargés de sacs également pesants font chemin ensemble. L'âne se plaignant de sa charge, le cheval lui : « De quoi te plains-tu ! Si je prenais un de tes sacs, je serais chargé deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargé que toi ». Combien de sacs porte chaque animal ?

Evaluation 31 : « Les âges de Ali et Boubacar »

Ali s'adresse à Boubacar en ces termes « j'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai la somme de nos âges sera 98 ans ». Déterminer l'âge de chacune de ces deux personnes.

Evaluation 32 : « La traversée du désert »

Deux automobiles de même modèle traversent ensemble le désert. Avant la dernière étape, les deux chauffeurs décident de répartir la réserve de carburant afin que les deux réservoirs contiennent la même quantité. Il reste 40 litres dans la réserve, 9 litres dans l'un des réservoirs et 11 litres dans l'autre. Comment faut-il répartir les 40 litres de réserve ?

Evaluation 33 : Un industriel emploie dans son usine 15 hommes, 8 femmes et 12 enfants. Le montant du salaire de ces ouvriers pendant une semaine de 6 jours s'est élevé à 4752F. On demande combien

chacun gagne par jour sachant que 3 journées d'un homme valent 4 journées d'une femme et que 5 journées d'une femme valent 12 journées d'un enfant

Evaluation 34 : Un imprimeur achète auprès d'un grossiste 15 bidons d'encre et 20 cartons de feuilles de papier vélin/ A la réception, une partie de la facture est illisible.

Voici, ce que le comptable a pu déchiffrer (un point d'interrogation a été mis à la place de nombres illisibles)

Articles	quantités	Prix unitaire H.T	Prix H.T
Encre noire	10	40 900 F	?
Encre rouge	2	63 900 F	?
Encre bleue	1	51 900 F	?
Encre jaune	2	72 900 F	?
Carton de vélin 80g	?	24 000 F	?
Carton de vélin extra	?	32 000 F	?
		Total H.T : 1 310 500 F	
		T.V.A: ?	
		Total TTC : 1 572 600 F	

Pouvez aider le comptable à reconstituer la facture ?

Quel est le taux de la taxe sur la valeur ajoutée ?

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE II : LES APPLICATIONS

Compétences :

☞ Composantes, manifestations :

Contenu(s) : Les applications

À partir d'exemples simples on introduira les notions suivantes :

- Applications injectives, surjectives, bijectives.
- Application réciproque ;
- Application composée ;
- Restriction d'une application, prolongements ;
- Image directe et image réciproque.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines** : Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles** :
- **Ressources financières** :

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré – évaluation : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$;

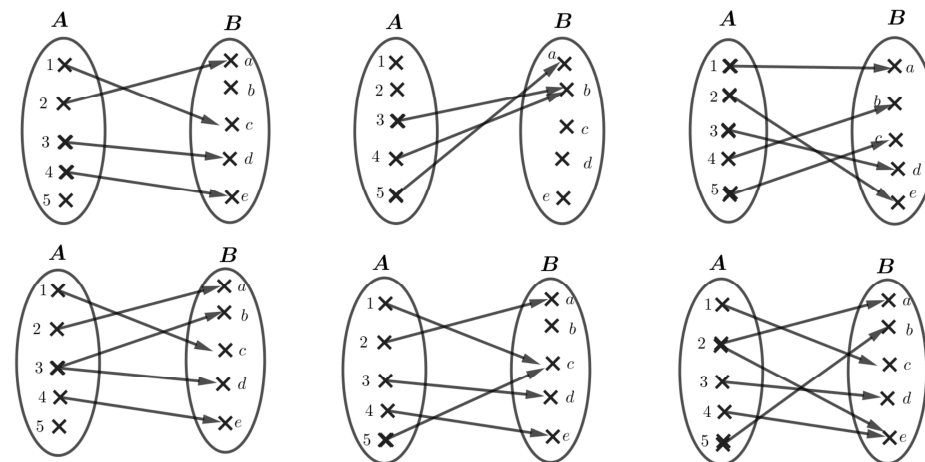
a) Montre que $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (forme canonique de $f(x)$);

b) Ecris sous la forme canonique les fonctions ci – dessous :

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 ; g(x) = -x^2 + 4x - 4 ; h(x) = 3x^2 + x + 5$$

Activité 1 : Définir une application et une fonction

Soient A et B deux ensembles non vides définis par une relation de A vers B (voir les diagrammes sagittaux ci – dessous)



Parmi les relations ci – dessus, indique celles dans lesquelles :

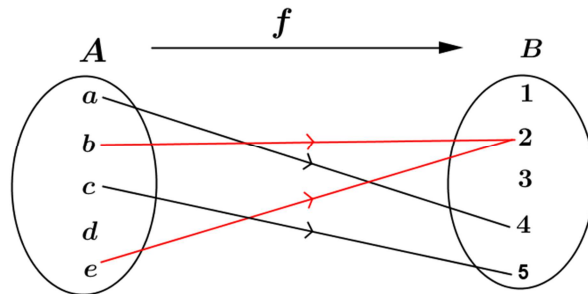
- a) Chaque élément de l'ensemble A a au plus un élément correspondant dans l'ensemble B, note la relation : fonction ;
- b) Un ou plusieurs éléments de l'ensemble A a ou ont plus d'un élément correspondant dans l'ensemble B puis note la relation : n'est pas fonction ;
- c) Chaque élément de l'ensemble A a un et un seul élément correspondant dans l'ensemble B puis note la relation : application ;
- d) Détermine l'ensemble des éléments de A qui ont des correspondants dans l'ensemble B des relations notées fonction appelé l'ensemble de définition Df

Synthèse partielle :

Définition d'une fonction : Soient A et B deux ensembles non vides.

Une relation de A vers B est une fonction de A vers B, si chaque élément de l'ensemble de départ A possède au **plus une (o ou une)** image dans l'ensemble d'arrivée B.

Diagramme sagittal :



A = ensemble de départ ou source, **B** = ensemble d'arrivé ou but

Notation :

$f: A \rightarrow B$ " f envoie A dans B "

$a \mapsto 4$ " a a pour image 4 "

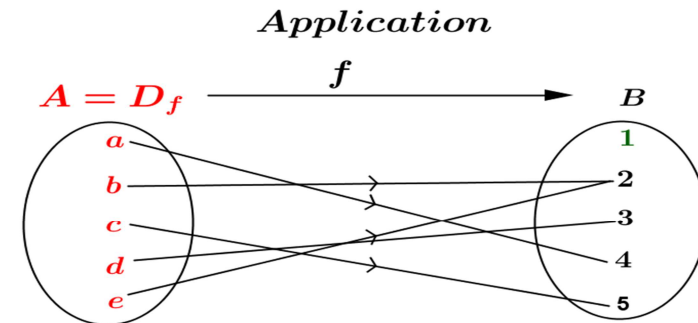
$f: x \mapsto y$ Signifie que « x a pour image y » ou « x est l'antécédent de y » avec x et y des nombres réels.

On écrit : $f(a) = 4$; $f(x) = y$.

N.B : Si A et B sont des sous ensemble de $\mathbb{R}$ alors on parle de fonction numérique d'une variable réel.

Définition d'une application : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application de A dans B est une relation de A vers B qui à chaque élément de l'ensemble de départ A associe un seul élément de

l'ensemble d'arrivée B.



Remarque :

- ☞ Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.
- ☞ Une fonction est une application si et seulement si son ensemble de définition est égal à son ensemble de départ.

Ensemble de définition d'une fonction : Soient A et B deux ensembles non vides. On appelle ensemble de définition d'une fonction de A vers B, l'ensemble des éléments de A ayant une image dans B par la fonction. Si f est la fonction on note D_f .

Exemple : dans le diagramme sagittal : $D_f = A \setminus \{d\} = \{a; b; c; e\}$

Fonction polynôme : L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

Fonctions rationnelles : Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère la fonction rationnelle f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, v(x) \neq 0\}$

- Si l'équation $v(x) = 0$ admet des solutions $x_1, x_2, \dots$, alors

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}.$$

- Si l'équation $v(x) = 0$ n'admet pas de solution, alors $D_f = \mathbb{R}$.

Fonctions irrationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère la fonction rationnelle f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ et } g(x) = \sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}};$$

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, v(x) \geq 0\}$

L'ensemble de définition de g est :

$$D_g = \left\{x/x \in \mathbb{R}, \frac{u(x)}{v(x)} \geq 0 \text{ et } v(x) \neq 0\right\};$$

Consigne 2 :

Détermine l'ensemble de définitions des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1; b) f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}; c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 13}};$$

$$d) f(x) = \frac{x^2}{|x+3|+4}; e) f(x) = \sqrt{\frac{1-3x}{x^2+5x}}; f) f(x) = \frac{x^3+4x^2-2x+7}{5}$$

$$g) f(x) = \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+5x}}; h) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}; i) f(x) = \frac{x^2}{2x^2-x+4};$$

$$j) f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2+4x+4}; k) f(x) = \frac{\sqrt{2-3x-2x^2}}{x^2+5x+4}; l) f(x) = \frac{2x^2-3}{2x^2-6x+4};$$

$$m) f(x) = \sqrt{x^3+3x-1+x}; n) f(x) = \frac{x}{x^2+1}; o) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x-2}}$$

$$p) f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}}; q) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}; r) f(x) = \frac{2x}{|x+2|-|x|}$$

Activité 2 : Définir une application injective ; surjective et bijective

Soient f ; g et h deux fonctions numériques définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x - 5$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 3$$

et

$$h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 3$$

Consigne 1 :

- 1) En considérant que $\forall x_1; x_2 \in \mathbb{R} f(x_1) = 3x_1 - 5; f(x_2) = 3x_2 - 5$

Montre que si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$ (f est injective)

- 2) Montre que $\forall y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$ alors $\exists ! x \in \mathbb{R}$

telque $x = \frac{y+5}{3}$ (f est injective)

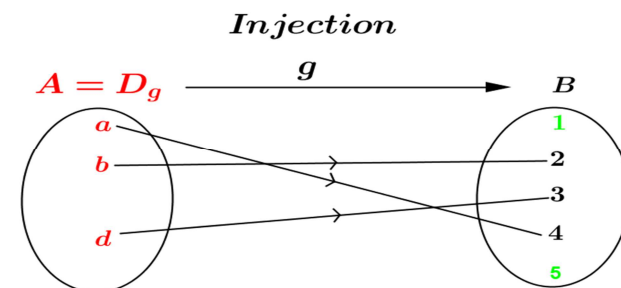
- 3) En s'inspirant des questions 1 et 2 ; les fonctions g et h sont – elles injectives ?

Synthèse partielle :

Application injective : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application g de A dans B est une application injective (ou injection), si tout élément de B possède **au plus 1 (0 ou 1)** antécédent dans A par g .

Formulation : ($g: A \rightarrow B$ est injective) $\Leftrightarrow (\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Le diagramme sagittal :



Consigne 2 :

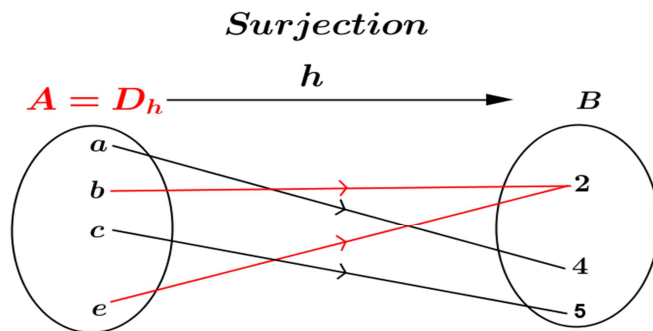
- 1) Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$
 $x \mapsto 2x - 3$ $x \mapsto x^2 + 3x + 2$
- a) Montre que $\forall y \in \mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$;
- b) Montre que $\forall y \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$, il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$;
- 2) Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 + 4$ h est-elle surjective ?

Synthèse partielle :

Application surjective : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application h de A dans B est une application surjective (ou surjection), si tout élément de B possède **au moins 1(1 ou plusieurs)** antécédent dans A par h .

Formulation : ($h: A \rightarrow B$ est surjective) $\Leftrightarrow (\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x))$

Le symbole $\exists$ signifie : « il existe au moins »



Consigne 3 :

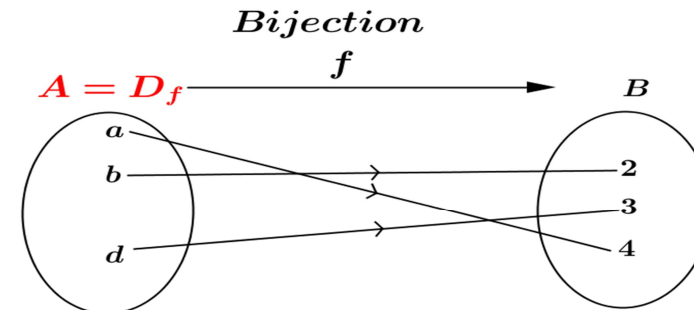
- 1) Soient $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: x \mapsto \frac{3x-5}{2x+7}$ $g: x \mapsto x^2 + 2x + 1$
- f et g sont – elles injectives et surjectives ?
- 2) Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x + 8$ h est-elle bijective ?

Synthèse partielle :

Application bijective : Soient A et B deux ensembles non vides. Une application f de A dans B est une application bijective (ou bijection), si tout élément de B possède un unique antécédent dans A par f .

Formulation : ($f: A \rightarrow B$ est bijective) $\Leftrightarrow (\forall y \in B \exists! x \in A / y = f(x))$

Le symbole $\exists!$ signifie : « il existe un unique »



Théorème : Une application f de A dans B est bijective si elle est **à la fois** injective et surjective.

Retenons : soit $f: A \rightarrow B$ une application.

Dans la pratique pour montrer qu'une application est : soit

bijjective, soit injective, soit surjective, on résout : $\forall y \in B$

l'équation $f(x) = y$.

- Si $f(x) = y$ admet 1 solution unique x , alors f est bijective.
- Si $f(x) = y$ admet 0 ou 1 solution x , alors f est injective.
- Si $f(x) = y$ admet 1 ou plusieurs solution (s) x , alors f est surjective.

Activité 4: Application réciproque d'une bijection :

Consigne 1 :

1) Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x - 3$ $x \mapsto \frac{x+3}{2}$

a) Vérifie que f et g sont bijectives.

b) Complète les tableaux suivants puis conclus

x	-2	0	1	3	4	6	8	10
$f(x)$								

x	-7	-3	-1	3	5	9	13	17
$g(x)$								

2) Soit $h: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

$h \mapsto \frac{x-5}{3x+6}$ Montre que h est bijective, puis déterminer h^{-1} .

Consigne 2 :

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$x \mapsto x^2$ Une fonction numérique.

a) Montre que f est bijective puis explicite sa réciproque f^{-1} .

b) Complète les tables de valeurs ci – dessous

x	0	1	2	3	3,5
$f(x)$					

x	0	1	4	9	12,25
$f^{-1}(x)$					

c) Représente dans un repère orthonormé les courbe de f et f^{-1} .

Synthèse partielle :

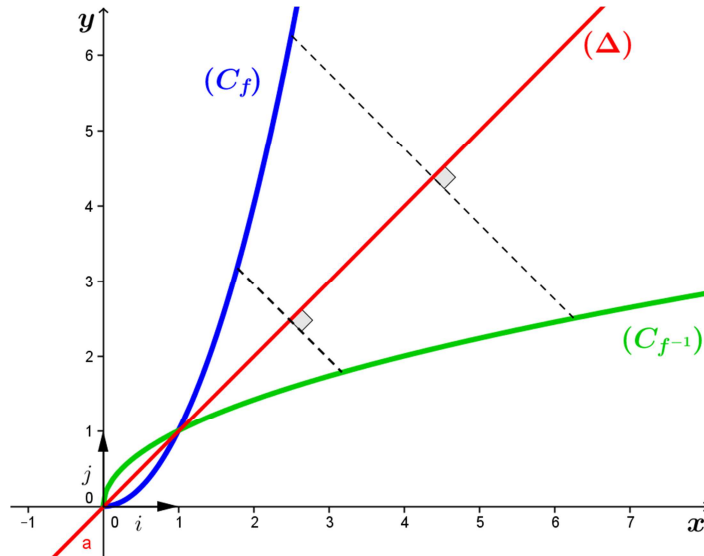
Définition : Soient A et B deux ensembles non vides.

On appelle application réciproque d'une bijection f de A sur B, la bijection notée : f^{-1} de B sur A. $f: A \rightarrow B$; $f^{-1}: B \rightarrow A$

$\forall y \in B, \exists! x \in A / y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$.

Représentation graphique de deux bijections réciproques :

Soient $(C_{f^{-1}})$ la courbe de la bijection réciproque de la fonction bijective de courbe (C_f) . Pour tracer $(C_{f^{-1}})$; on trace le symétrique orthogonal de la courbe (C_f) par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$. Ce symétrique est la courbe $(C_{f^{-1}})$.



Activité 5 : Composition des applications :

Consigne 1 : soit $f : x \mapsto f(x) = 2x+1$; $g : x \mapsto g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$; et $h : x \mapsto h(x) = x^2$

- 1) Trouver l'ensemble de définition de chacune des fonctions f ; g et h
- 2) En remplaçant $f(x)$ par x dans $g(x)$; on a alors

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{3(f(x))+1}{f(x)-1} = \frac{3(2x+1)+1}{(2x+1)-1} = \frac{6x+4}{2x}$$

Détermine $f \circ g(x)$; $g \circ h(x)$; $h \circ f(x)$; $f \circ h(x)$
- 3) Calcule $g \circ f(3)$; $f \circ g(3)$; $g \circ f(-2)$; $f \circ g(-2)$; $g \circ h(3)$; $h \circ f(-2)$;
- 4) Détermine l'ensemble de définition de $f \circ g(x)$; $g \circ h(x)$; $h \circ f(x)$;

Synthèse partielle :

Définition : Soient A , B et C des ensembles non vides ; f étant une fonction de A vers B , g une application de B vers C , la fonction

notée : $g \circ f$ de A vers C est définie par :

$$f : A \rightarrow B \text{ et } g : B \rightarrow C, g \circ f : A \rightarrow C$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] \text{ et s'appelle}$$

la composée de f par g .

Ensemble de définition de $g \circ f$ est :

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in IR; x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

Activité 6 : Image directe - Image réciproque par une application :

Consigne 1 : soit : $f : IR \rightarrow IR$

$$x \mapsto \frac{2}{x-1}$$

- 1) Détermine $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(\{0 ; 2 ; 3\})$; $f([-1 ; 0])$
- 2) Trouve les images par f de chacun des intervalles de $IR - \{1\}$ suivants
 $A = [2 ; 7]$; $B = \{-3\}$; $C =]1 ; 3]$ et $D = [-5 ; 6]$

Consigne 2 :

Soient $f : x \mapsto f(x) = 2x - 1$; $g : x \mapsto g(x) = x^2 - x - 2$

- 1) Résous les équations suivantes $f(x) = 0$; $f(x) = -3$; $f(x) = 4$;
- 2) En déduis l'image réciproque par f de : 0 ; -3 et 4
- 3) Résous les inéquations suivantes : $1 \leq f(x) \leq 3$ et $-1 < f(x) \leq 7$
- 4) En déduis l'image réciproque par f de $B = [1 ; 3]$ et $C =]-1 ; 7]$
- 5) Trouver l'image réciproque par g de $B = \{0\}$; $A = \{-2\}$

Synthèse partielle :

Image directe : Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f , et A une partie de E . On appelle image directe (ou image)

de A par f notée $f(A)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de $A \cap D_f$.

Image réciproque : Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f , et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f , la partie de D_f , notée : $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f de tous les éléments de B.

Retenons : Comment chercher l'image réciproque ?

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle B de $\mathbb{R}$ par une fonction f d'ensemble de définition D_f , on résout l'un des systèmes d'inconnue x suivants :

- ☞ Si $B = [a, b]$ on résout $x \in D_f ; a \leq f(x) \leq b$;
- ☞ Si $B =]a, b[$ on résout $x \in D_f ; a < f(x) < b$.
- ☞ Si $B = [a, b[$ on résout $x \in D_f ; a \leq f(x) < b$
- ☞ Si $B = \{b\}$ on résout $x \in D_f ; f(x) = b$
- ☞ Si $B =]-\infty, a]$ on résout $x \in D_f ; f(x) \leq a$.
- ☞ Si $B =]a, +\infty[$ on résout $x \in D_f ; a < f(x)$.

Activité 7 : Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble :

Consigne 1 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

$g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = |2x - 1| + |1 - x| ; \quad x \mapsto g(x) = 3x - 2$$

- a) Ecris la fonction f sans le symbole de la valeur absolue ;
- b) Trouver la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident ;
- c) Que représentent g pour la fonction f et f pour g ?

Synthèse partielle :

Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble :

Définition : soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) \quad \quad \quad x \mapsto g(x)$$

Soit C un sous-ensemble de $D_f \cap D_g$.

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ et } g \text{ coïncident} \\ \text{sur } C \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{c} \forall x \in C \\ f(x) = g(x) \end{array} \right)$$

Restriction d'une application :

Définition : Soit f une application de A dans B, et E une partie de A. On appelle restriction de f à E l'application de E dans B notée : $f|_E$ définie par : $(\forall x \in E ; (f|_E)(x) = f(x))$.

f est le prolongement de E sur $\mathbb{R}$.

Evaluation formative :

Evaluation 1 : Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = 3x + 5$ et $g(x) = \frac{5x-1}{x+1}$

- 1°) Quelles sont les images par f de (-5) ; 0 ; 5 ?
- 2°) Quelles sont les images par g de (-3) ; 1 ; 3 ?
- 3°) Quels sont les antécédents de 14 ; (-4) ; 5 par f ?
- 4°) Quels sont les antécédents de 11 ; 2 ; 7 par g ?

Evaluation 2: Soient les fonctions f , g et h définies respectivement par : $f(x) = 3x - 1$; $g(x) = -5x + 2$; $h(x) = x^2 + 1$

- 1°) Trouver les images directes par f de chacun des intervalles

$A = [-5, 4]$; $B =] 3, 8[$; $C =] -9, 0]$; $D = [-11, -8]$

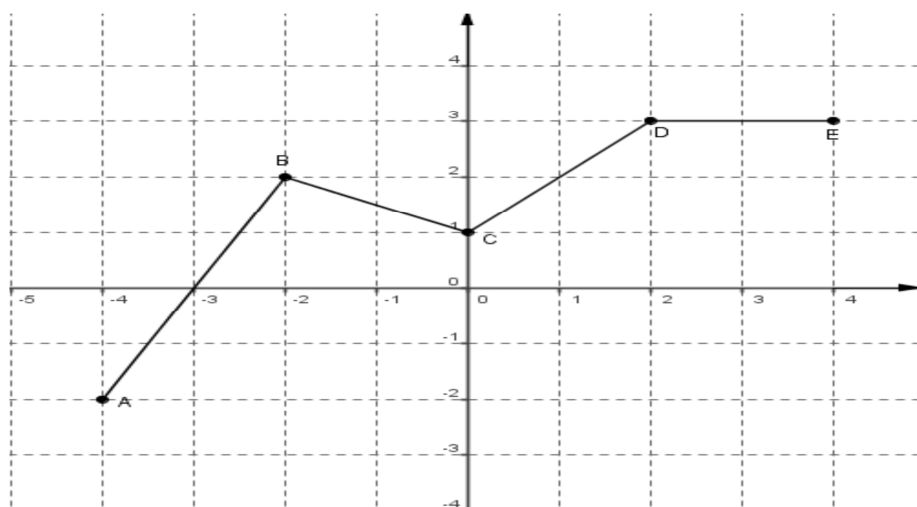
2°) Trouver les images directes par g de chacun des intervalles

$A = [-5, 4]$; $B =] 3, 8[$; $C =] -9, 0]$; $D = [-11, -8]$

3°) Trouver les images directes par h de chacun des intervalles

$I = [0, 5]$; $J =] 6, 8[$; $K = [-4, -1]$

Evaluation 3 : Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous



1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

2°) Trouver graphiquement l'image par f de chacun des intervalles

$I = [-4, -2]$; $J = [-2, 0]$; $K =] 0, 2[$; $L = [2, 4]$; $E = [-3, 1]$

3°) Trouver graphiquement l'image réciproque par f des parties suivantes : $F =] 2, 3[$; $G = [-2, 0]$; $H = [-2, 3]$; $P =] 0, 2[$

Evaluation 4:

I- Soit $f : [3 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[$ définie par $x \rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3$

1°) Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$

2°) Utiliser ce résultat de la première question pour montrer que si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) \in [0 ; +\infty[$. Que peut-on alors dire de f .

3°) Soit $y \in [0 ; +\infty[$

a) Quel est le nombre de solutions dans $[3 ; +\infty[$ de $f(x) = y$?

b) f est-elle injective ? Est-elle bijective ?

II- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier

III- Soit $g : [-1 ; 1] \rightarrow A$

$x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}$. Déterminer A pour que la fonction g soit surjective

Evaluation 5 : Soient les fonctions f ; g définies respectivement par:

$f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$; $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$

$$x \rightarrow \frac{x}{x-1} \qquad x \rightarrow 3x - 2$$

1) Les fonctions f et g sont-elles des bijections ?

2) Calcule $f \circ g(0)$; $g \circ f(0)$; $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

3) Trouve $f([-2 ; -1])$; $g([-2 ; 0])$; $f^{-1}([2 ; 3])$; $f^{-1}([-\infty ; 0])$

4) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

5) Sur quel intervalle I , f et g coïncident ?

Evaluation 6 : Soit la fonction affine g définie sur $[-1 ; 5]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = |x - 1|, \text{ si } x \in [-1 ; 3] \\ g(x) = \frac{5x-11}{2}, \text{ si } x \in [3 ; 5] \end{cases}$$

- 1) Représente la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé
- 2) Chercher graphiquement l'image par g de chacune des intervalles : $[-1 ; 5]$; $] 0 ; 5]$; $[-1 ; 0]$.
- 3) Déterminer graphiquement l'image réciproque par g des intervalles : $[1 ; 2]$; $] 2 ; 7 [$; $\{0\}$.
- 4) Vérifiez par calcul les résultats obtenus.

Evaluation 7 :

1°) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x - 1| + |x - 3| - 1$

- a) Ecris f sans le symbole de la valeur absolue ;
- b) Détermine $f([-1 ; 1])$ et $f^{-1}(]5 ; +\infty[)$

2°) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2 \text{ et } g(x) = -4x - 5$$

- a) Ecris f sans le symbole de valeur absolue ;
- b) Détermine la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

3°) Trouve deux fonctions f et g telles que $h(x) = (f \circ g)(x)$ dans les cas suivants :

a) $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$; b) $h(x) = \cos(2x + 2)$; c) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$;

d) $h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2}$; e) $h(x) = (3x + 1)^2$; f) $h(x) = (x + 5)^3 + 7$

Evaluation 8 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + |x - 2| + 3$

- a) Écris $f(x)$ sans le symbole valeur absolue
- b) Donne la restriction g de f à l'intervalle $[2 ; +\infty[$
- c) On donne $I = [3 ; 5]$ et $J = [9 ; 10]$. Trouve $g(I)$ puis $g(J)$

Evaluation 9 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |2x - 1| + |x - 3|$$

- 1) Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue
- 2) Détermine la restriction de f à chacun des intervalles suivants : $] -\infty ; \frac{1}{2} [$; $] \frac{1}{2} ; 3 [$; $] 3 ; +\infty [$;

Evaluation 10 : Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{4 + x^2}{2}$$

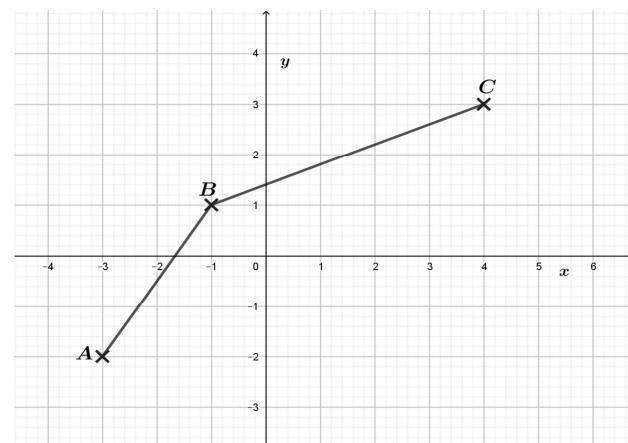
1) Détermine l'image directe par f des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \mathbb{R}_+ ; B = [2 ; 6] ; C = \{0 ; 2 ; 6\}.$$

2) Détermine l'image réciproque par f de : $P = [2 ; 10]$; $K =]3 ; 4 [$; $J = \{0\}$; $L =]-\infty ; -2 [$; $] 0 ; +\infty [$

3) l'application f est-elle bijective ? si oui déterminer sa bijection réciproque

Evaluation 11 : Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous :



- 1) Détermine l'ensemble de définition de la fonction f ;
- 2) Trouve l'image directe par f des intervalles suivants : $A = [-3 ; -1]$; $B =]-1 ; 4[$; $C = \{-3 ; -1\}$
- 3) Trouve l'image réciproque par f des intervalles suivants : $F =]1 ; 3[$; $G =]-\infty ; -3]$; $H = [-2 ; 3]$.
- 4) Donne les formules explicites de $f(x)$;
- 5) Montre que f est bijective et tracer dans le même repère la courbe de sa bijection réciproque.

Evaluation 12 : Soient les fonctions f ; g ; h définies respectivement par

$$g : [0 ; 2] \rightarrow [0 ; 1] ; \quad h : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} ; \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ;$$

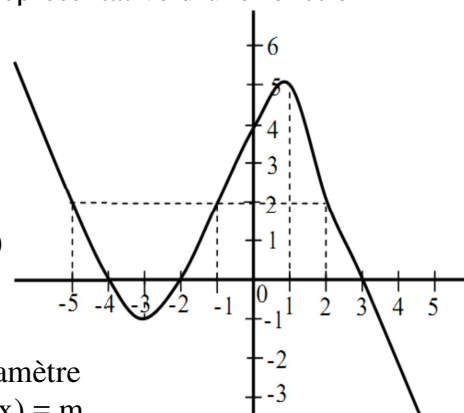
$$x \rightarrow x^2 - 2x + 1 \quad x \rightarrow \frac{x}{x-1} \quad x \rightarrow 3x - 4$$

- 1) Déterminer $f([0 ; 1])$; $f(]-1 ; 2])$;
- 2) g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- 3) Déterminer $h([-2 ; -1])$; $h^{-1}([2 ; 3[)$.
- 4) Montrer que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x ; y) \rightarrow (x + 3 ; y - 2)$ est une bijection et détermine sa bijection réciproque.

Evaluation 13 : Soit (Cf) la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

- 1- Détermine Df de f ;
- 2- Détermine $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$;
- 3- a. Détermine les antécédents par f de 0 ; 2
b. Résous graphiquement : $f(x) = 0$
 $f(x) = 2$; $f(x) \geq 0$; $f(x) < 2$;
 $0 \leq f(x) \leq 2$;
- 4- Discute suivant les valeurs du paramètre de m les solutions de l'équation $f(x) = m$

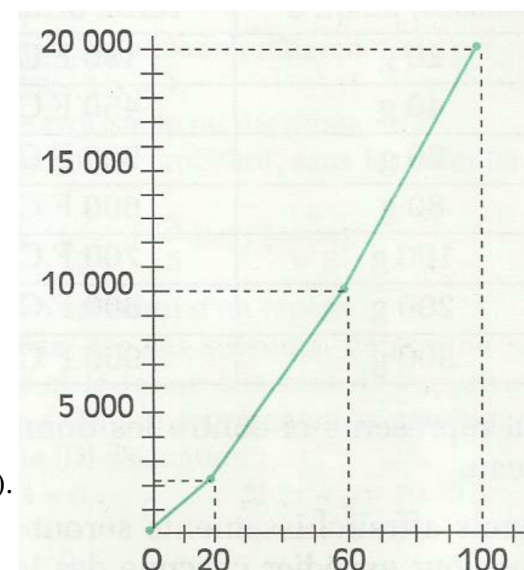


Evaluation 14 : Pour établir les factures afférentes à la consommation d'eau de ses abonnés, la SOMAGEP – SA

TRANCHES	Du 1 ^{er} au 20 ^e m ³	Du 21 ^{er} au 60 ^e m ³	Au-delà du 61 ^e m ³
PRIX DU m ³	115F	196F	248F

On désigne par g l'application qui à la quantité x d'eau (en m³) consommée par un abonné à la SOMAGEP – SA associe le prix $g(x)$ à payer (hors taxes)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on donne la représentation graphique de l'application de g



- 1) Détermine $g(x)$ selon que x appartienne à $[0 ; 20]$;
à $]20 ; 60]$; ou à $]60 ; \infty[$;
- 2) La consommation d'un abonné est 95m³. Utilise le graphique pour estimer la somme à payer, (hors taxes).
Calcule la somme exacte.
- 3) Une consommation d'eau

correspond à une factorisation hors taxes de 5 362F. Utilise le graphique pour estimer la quantité d'eau facturée. Calculer la quantité exacte

- 4) Une consommation d'eau correspond à une factorisation hors taxes de 10 000F. Utilise le graphique pour estimer la quantité d'eau facturée. Calculer la quantité exacte

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE III : FONCTIONS POLYNÔMES ET RATIONNELLES

Compétences :

☞ **Composantes, manifestations :**

Contenu(s) : Fonctions polynômes et Rationnelles

- ☞ Généralités ;
- ☞ Factorisation ; divisibilité ;
- ☞ Zéros d'une fonction polynôme ;
- ☞ Signe de l'image d'un nombre réel par une fonction.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles :**
- **Ressources financières :**

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré évaluation : Soit $P(x) = \sqrt{2}x^2 + 3x - 2\sqrt{2}$

- 1) Donne la nature de $P(x)$;
- 2) Résous $P(x) = 0$ puis en déduire la forme factorisée de $P(x)$;
- 3) Résous les inéquations $P(x) \geq 0$ et $P(x) < 0$;
- 4) Ecris $P(x)$ sous la forme canonique ;

Situation Problème : Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisément on a : $x = 300 - 12p$.

- 1) Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
- 2) Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à "1848", montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
- 3) En déduire pour quelles valeurs de p la séance est rentable.
- 4) Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

Activité1 : Définir un polynôme

Consigne :

- 1) Développe et réduire suivant l'ordre décroissant les fonctions suivantes ;
- 2) Donne la nature de chacune des fonctions
 - a) $P(x) = (2x^2 - 3x + 1) + x(-1 + 4x) - 5$;
 - b) $F(x) = \sqrt{x^8} - 2x^2 + 5x^5 - \frac{1}{3}x + \sqrt{5}$
 - c) $P(x) = \sqrt{2}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + 2x - 3 + \frac{1}{x}(-x + 4x^2)$;
 - d) $G(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{4x} + x^2 - 7 + 3x$

Synthèse partielle :

Définitions :

- Toute expression de la forme ax^n est appelée monôme avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- On appelle polynôme, toute somme de monômes.
- Tout polynôme (x) , admet une écriture de la forme :
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$
- La fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto P(x)$ est appelée une fonction polynôme.
- On dit que $P(x)$ est un polynôme de degré n et on écrit $d^\circ P = n$.

- L'écriture $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ est appelée forme développée, réduite et ordonnée de (x) suivant les puissances décroissantes de x .
- Le domaine de définition (Df) de $P(x)$ est $\mathbb{R} \Leftrightarrow Df = \mathbb{R}$

Activité 2 : Identifier une fonction polynôme à un autre

Consigne 1 : Soit deux fonctions polynômes f et g tels que pour tout réel x défini sur $\mathbb{R}$

- I- $f(x) = x^2(9 + x^2 - 5x) - 7x + 2$ et $g(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 1)$
 II- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ et $g(x) = (x - 1)(2x^2 - 2x + 4)$
- 1) développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x les fonctions polynômes f et g
 - 2) comparer f et g puis conclure

Consigne 2 : Soit le polynôme $P(x) = 5x^3 - 13x^2 + 7x + 25$

On donne : $G(x) = (\alpha + 2)x^3 + 2\beta x^2 + (3\theta + 1)x + 25$.

Détermine les valeurs α ; β et θ pour que $P(x) = G(x)$

Synthèse partielle : Soit deux fonctions polynômes f et g tels que pour tout réel x , $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ et $g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$. ($f = g$) $\Leftrightarrow (d^\circ f = d^\circ g) \Leftrightarrow (n = p)$ et les coefficients de même rang sont identiques

Activité 3 : définir le zéros d'un polynôme

Consigne : On donne $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

- 1) Calculer $P(2)$; $P(-2)$ et $P(3)$;
- 2) vérifie que $P(x) = (x - 2)^2(x - 3)$
- 3) Donnez toutes les racines (zéros) de P en précisant leur ordre de multiplicité.

Synthèse partielle :

Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.

Si $f(a) = 0$ alors on dit que a est un zéro du polynôme $f(x)$.

Activité 4 : Divisibilité et factorisation des fonctions polynômes

Consigne : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- 1) Calculer $P(2)$; $P(-4)$ et $P(5)$
- 2) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$; $P(x) = (x - 2)(x + 4)(x - 5)$
- 3) Qu'appelle-t-on la forme $P(x) = (x - 2)(x + 4)(x - 5)$? Conclure.

Synthèse partielle :

Définition : Soit f une fonction polynôme défini par :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ et g une fonction polynôme. On dit que f est divisible (ou factorisable) par g s'il existe h une fonction polynôme telle que $f = g h$.

Théorème 1: Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.

Le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $f(a) = 0$.

Ou

Soit $a \in \mathbb{R}$, a est racine de f si et seulement si il existe une fonction polynôme h telle que $f(x) = (x - a)h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Théorème 2: Soit f une fonction polynôme non identiquement nulle et de degré n . Alors f admet au plus n racines dans K . De plus si f admet exactement n racines distinctes $a_1, a_2, \dots, a_n$ alors :

$f(x) = \lambda(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n), \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Activité 5 : Méthode pratique de la division euclidienne

Consigne 1 : Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$.

Consigne 2 : Soit $h(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

Trouver les polynômes $q(x)$ et $R(x)$ tels que $h(x) = p(x) \times q(x) + R(x)$.

Synthèse partielle : Soient $F(x)$ et $G(x)$ deux fonctions polynômes quelconques tels que degré de F est supérieur ou égal au degré de G ($d^\circ F \geq d^\circ G$) avec $G(x) \neq 0$. On a :

F(x) (dividende)	G(x) (diviseur)	$\longleftrightarrow$	$F(x) = G(x) \times Q(x) + R(x)$
R(x) (reste)	Q(x)(quotient)	Si $R(x) = 0$ alors	$F(x) = G(x) \times Q(x)$

NB : $\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b} x^{n-m}$ avec $b \neq 0$ et $n \geq m$

Activité 6 : Méthode des coefficients indéterminés

Consigne 1 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- 1) Calculer $P(2)$
- 2) Développer et réduire $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ suivant les puissances décroissantes de x puis déterminer les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

Consigne 2 : Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$

Synthèse partielle :

Soit deux fonctions polynômes f et g tels que pour tout réel x ,

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ et $g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_0$ avec $b_p \neq 0$ et soit $q(x)$ une fonction polynôme à coefficients indéterminés tel que f

$(x) = g(x) \times q(x)$. Pour déterminer les coefficients de $q(x)$, il faut chercher le degré de $q(x)$ puis développer, réduire suivant l'ordre croissant ou décroissant les puissances de x de $f(x)$ et $g(x) \times q(x)$ et identifier $f(x)$ et $g(x) \times q(x)$

NB : Si $f(x) = g(x) \times q(x)$ alors $d^\circ f = d^\circ g + d^\circ q \leftrightarrow d^\circ q = d^\circ f - d^\circ g$

Activité 7 : Méthode de Hörner

Consigne : Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

- 1) Calcule $f(2)$;
- 2) en déduis que pour tout réel x , $f(x) = (x - 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$, où a ; b ; c ; d sont des réels à déterminer.

Synthèse partielle :

Soit f une fonction polynôme défini par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, α un réel donné tel que $f(\alpha) = 0$ et $p(x)$ un polynôme à déterminer de telle sorte que $f(x) = (x - \alpha) \times p(x)$

Méthode de Hörner :

Activité 8 : Etudier le Signe de l'image d'un nombre réel par une fonction ;

Consigne : Soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$

- 1) Calculer $f(2)$ et $f(-3)$
- 2) En déduire une factorisation de $f(x)$
- 3) Trouvez les zéros de f et leur ordre de multiplicité.
- 4) Etudier les signes de $f(x)$ puis en déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$

Synthèse partielle :

Pour étudier le signe de l'image d'un nombre réel par une fonction polynôme f , il faut étudier le signe de chaque facteur de f puis calculer le produit de signes de facteurs de f qui correspond le signe de l'image du nombre réel par la dite fonction polynôme .

Activité 9 : Fonctions rationnelles

Soient f et g deux fonctions polynômes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $g(x) = (x-1)^2$

Consigne 1 :

En effectuant la division euclidienne de f par g montrer qu'il existe 4 réels a, b, c, d telles que pour tout $x \neq 1$; $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$

Consigne 2 :

En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouver les constantes réelles $a ; b ; c$ telles que $\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

Synthèse partielle :

Définition : On appelle fonction rationnelle toute fonction f telle que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes. Le domaine de définition de f s'écrit $D_f = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ et } Q(x) \neq 0\}$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{lcl}
 P(x) \text{ (Dividende)} & Q(x) \text{ (Diviseur)} & \\
 \hline
 R(x) \text{ (Reste)} & G(x) \text{ (Quotient)} & Q(x) \neq 0
 \end{array}
 \longleftrightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ Avec}$$

Après la division euclidienne, il faut faire une identification pour pouvoir déterminer les coefficients demandés.

Méthodes de coefficients indéterminés :

Réduire au même dénominateur toutes les fonctions puis identifier les numérateurs.

Activité 10 : simplification

Consigne : Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^2-x-6}{9-x^2}$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Vérifier que 3 est un zéro commun au numérateur et au dénominateur.
- Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.

Synthèse partielle :

De façon générale si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle et si α est un zéro commun à P et à Q , alors $f(x) = \frac{(x-\alpha)P_1(x)}{(x-\alpha)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, pour tous $x \in D_f$ est une forme simplifiée de $f(x)$.

Evaluation 1 : Montrer que la fonction polynôme f définie par

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que l'on déterminera.

Evaluation 2 : Soit le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouver les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

Evaluation 3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- Calculer $P(2)$

2) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

3) Résoudre dans R, l'équation $P(x) = 0$

4) Résoudre dans R, l'inéquation $P(x) > 0$.

Evaluation 4 :

Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Trouver les réels a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$

Evaluation 5 : Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$

Montrer qu'il existe trois réels a ; b ; c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

Evaluation 6 : Après avoir déterminé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de $f(x)$ dans les cas suivants

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} ; \quad g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 19x - 30} ; \quad h(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$$

Evaluation 7 : Soient f ; g ; h et p quatre fonctions respectivement définies par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{2\} &\rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 4}{(x-2)^2} ; & x &\rightarrow g(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \\ h: \mathbb{R} - \{3\} &\rightarrow \mathbb{R} & p: \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow h(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-3)^2} ; & x &\rightarrow p(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1} \end{aligned}$$

Détermine trois nombres réels a ; b et c dans les cas suivants tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2} ; \quad g(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$; h(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2} ; \quad h(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

Evaluation 8 : Dans chacun de cas suivants, détermine deux nombres

réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = a + \frac{b}{x-2}$

$$a) f(x) = \frac{x}{x-2} ; b) f(x) = \frac{1-2x}{x-2} ; c) f(x) = \frac{x-1}{2-x} ; d) f(x) = -\frac{3x}{x-2}$$

Evaluation 9 : On considère les fonctions f ; g et définies par :

$$f: x \rightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{x+1} ; \quad g: x \rightarrow \frac{x^2(x-2)}{x-1} \text{ et } h(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$$

1) détermine l'ensemble de définition de f ; g et h

2) Détermine a ; b ; c et d tels que : a) $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$

$$b) g(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1} \quad c) h(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$$

Evaluation 10 : Soit f la fonction polynôme définie sur R par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$

1) Montre que $x = -1$ est racine de ce polynôme.

2) Détermine trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

3) (a) Terminer la factorisation de $f(x)$

(b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

Evaluation 11 :

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$

a) Détermine l'ensemble de définition de f ;

b) Trouver les réels a et b tels que pour tout $x \neq -1, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

a) Détermine l'ensemble de définition de f ;

b) Trouver les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

3) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Trouver les réels a et b tels que, $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$

Evaluation 12 : Le coût moyen de production d'une quantité q est donné par : $C_{m0}(q) = \frac{C(q)}{q}$

Le coût marginal de production d'une quantité q est donné par : $C_{m_a}(q) = C(q+1) - C(q)$.

Une entreprise produit des objets en quantité q dans un régime de concurrence parfaite. Le coût de production en milliers de francs de la quantité q est : $C(q) = q^2 + 100q + 100$. Le prix de vente p par unité lorsque la quantité produite est q est : $p(q) = -2q^2 - 4q + 300$.

On suppose $q \leq 100$.

- 1) Calcule en fonction de q, le coût moyen C_{m0} de production.
- 2) Calcule le coût marginal à partir de la définition ;
- 3) Calcule, en fonction de q le revenu global puis le bénéfice réalisé.

Evaluation 13 : Une entreprise produit de la farine de blé. On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.

On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonne de farine.

- 1) Sachant que chaque tonne est vendue 120 ", exprimer $R(q)$ en fonction de q.
- 2) Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$

- a) déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable
- b) la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

Evaluation 14 : Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisément on a : $x = 300 - 12p$.

- 1) Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
- 2) Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1848 " montrer que le bénéfice b(p) de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
- 3) En déduis pour quelles valeurs de p la séance est rentable.
- 4) Détermine le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?
- 5) Détermine a, α ; β trois réels (3) tels que $b(q) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- 6) En déduis que α et β correspondent respectivement le prix du billet et le bénéfice maximum déterminés à la question 4)

Evaluation 15 : On a montré que le taux de croissance du nombre de bactéries dans une culture donnée, t heures après le début de l'expérience est de $24(t + 5)$ bactéries par heure.

On suppose que le nombre de bactéries est de 1000 au début de l'expérience.

- 1) Vérifier que le nombre de bactéries après t heures est $N(t) = 24t(t + 5) + 1000$.
- 2) Etudier et représenter la fonction $N : t \rightarrow N(t)$.
- 3) Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries atteigne 5000, 10000, 15000 bactéries.

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE IV : TRIGONOMETRIE

Compétences :

☞ Composantes, manifestations :

Contenu(s) : Trigonométrie

- Calculs sur les angles orientés. Mesure d'un angle orienté
- Formules usuelles de transformation. : Formules d'addition de multiplication
- Propriétés des fonctions trigonométriques : fonction paire, impaire, périodique. Conséquences de ces propriétés.
- Équations dans $\mathbb{R}$: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\tan x = a$;
 $a \cos x + b \sin x + c = 0$.
- Résolution dans $\mathbb{R}$ d'inéquations du type $\sin x < a$; $\cos x < a$

Ressources éducatives

- **Ressources humaines** : Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles** :
- **Ressources financières** :

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation :

- 1- En se basant sur vos connaissances antérieures, définis et trace un cercle trigonométrique dans le plan muni d'un repère orthogonal direct,
- 2- Définis un angle orienté puis trace un exemple ;

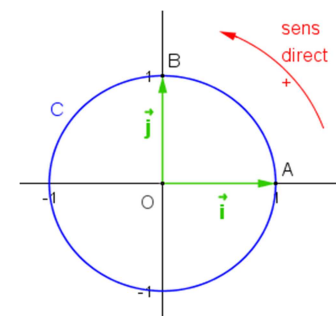
- 3- Cite les rapports trigonométriques d'un angle aigu puis en déduis la relation fondamentale entre ces rapports
- 4- Quels sont les angles remarquables que vous connaissez ? présente – les sur un cercle trigonométrique puis détermine leur rapport trigonométrique

Cercle trigonométrique et Angles Orientés :

Cercle trigonométrique :

Définition 1 : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

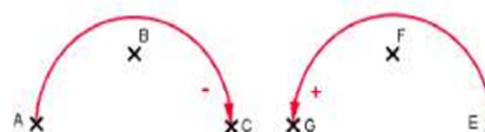
Définition 2 : on muni le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on appelle cercle trigonométrique le cercle $C(0,1)$ de centre O et de rayon 1.



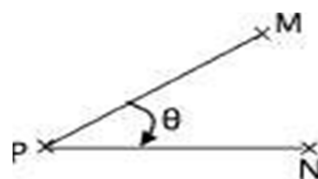
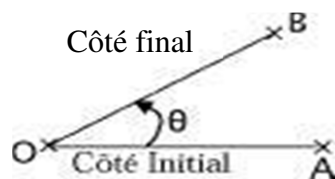
Angles orientés: Considérons les points A, B, C, E, F, G.

Les triplets (A, B, C) et (E, F, G) sont de sens contraires.

- ✓ Le sens du triplet (E, F, G) est appelé **sens positif ou direct** ;
- ✓ Le sens du triplet (A, B, C) est appelé **sens négatif ou indirect**



Considérons les angles $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$



$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ est un angle orienté **positivement** ; $(\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM})$ est un angle orienté **négativement**

NB : Le cercle trigonométrique a pour longueur $L = 2\pi$.

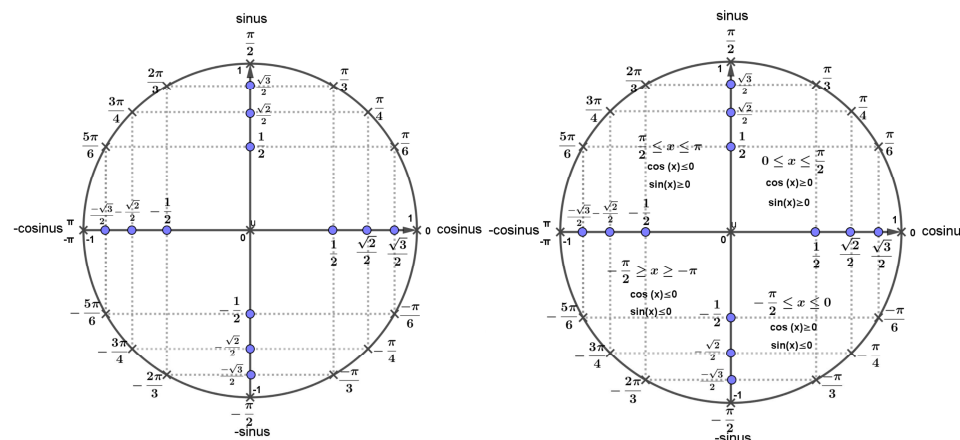
Propriétés : Pour tout nombre réel x , on a :

- 1) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; 2) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$; 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- 4) $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}, \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$; 5) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;
- 6) $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$; 7) $1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$;

Table des valeurs de quelques Angles remarquables

Angles	0° 0 rd	30° $\frac{\pi}{6}$ rd	45° $\frac{\pi}{4}$ rd	60° $\frac{\pi}{3}$ rd	90° $\frac{\pi}{2}$ rd	120° $\frac{2\pi}{3}$ rd	135° $\frac{3\pi}{4}$ rd	150° $\frac{5\pi}{6}$ rd	180° π rd
Cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	0
Cotan(x)		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	

Représentation sur le cercle trigonométrique le rapport trigonométrique des angles remarquables (entre 0° et 180°)



Activité 1 : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté:

Consigne 1 : Construis un cercle trigonométrique et place les points images des nombres réels suivants : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi$; $\frac{\pi}{3} - 2\pi$,

$\frac{13\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{39\pi}{4}$; $\frac{-33\pi}{4}$. Que remarques-tu ?

Consigne 2 : Donne la mesure principale de chacun des angles suivants

$x = \frac{89\pi}{12}$; $x = \frac{17\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{6}$; $x = \frac{13\pi}{3}$; $x = -\frac{17\pi}{11}$;

$x = \frac{-65\pi}{7}$; $x = \frac{2012\pi}{11}$

Synthèse partielle :

Définition : Soit α une mesure en radians respectivement en degrés de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$. On écrit $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \alpha \text{ rads}$ ou $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \alpha^\circ$
L'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ comporte une infinité de mesures

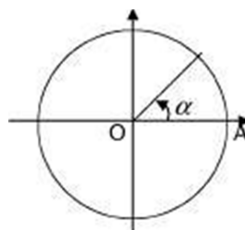
Parmi toutes ces mesures une et une seule notée θ appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Cette mesure s'appelle la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{OA}; \vec{OB})$. On note : $\text{Mes}(\vec{OA}; \vec{OB})$

Théorème : Si α une mesure en radians sa **détermination ou mesure principale** notée θ est telle que : $\alpha = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou

$\theta = \alpha - 2k\pi$ avec $\theta \in]-\pi; \pi]$;

NB : α peut s'écrire sous la forme $\alpha = \frac{a}{b}\pi$ avec

a et $b \neq 0$ sont des réels et $\frac{a-b}{2b} < k \leq \frac{a+b}{2b}$

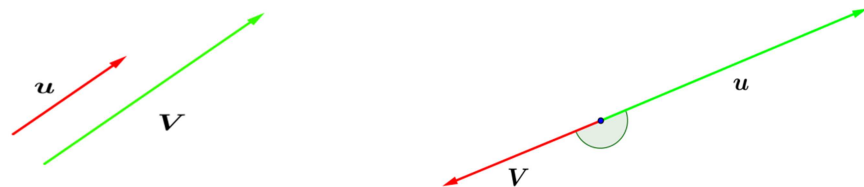


Propriétés des angles orientés : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors

$$\widehat{(\vec{u}; \vec{u})} = 0 \text{ et } \widehat{(\vec{u}; -\vec{u})} = \pi$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, si et seulement si : $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraires, si et seulement si : $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} = \pi$



Théorème de Chasles : Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Alors $\widehat{(\vec{u}; \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}; \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}; \vec{w})}$

Théorème 3 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors :

$$\checkmark \quad \widehat{(\vec{v}; \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

$$\checkmark \quad \widehat{(-\vec{u}; \vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

$$\checkmark \quad \widehat{(\vec{u}; -\vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

$$\checkmark \quad \widehat{(-\vec{u}; -\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

Théorème 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et k et k' deux nombres réels non nuls. Alors

$$\checkmark \quad \text{Si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe, alors } \widehat{(k\vec{u}; k'\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

$$\checkmark \quad \text{Si } k \text{ et } k' \text{ sont de signes contraires, alors } \widehat{(k\vec{u}; k'\vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}.$$

Evaluation 1 :

Soit un carré ABCD de centre I tel que $\widehat{(\vec{IA}; \vec{IB})} = \frac{\pi}{2}$. Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants

$\widehat{(\vec{IA}; \vec{ID})}$; $\widehat{(\vec{IB}; \vec{ID})}$; $\widehat{(\vec{IB}; \vec{CI})}$; $\widehat{(\vec{AD}; \vec{CI})}$; $\widehat{(\vec{CD}; \vec{BI})}$ et $\widehat{(\vec{AC}; \vec{DB})}$

Evaluation 2 :

1) soit ABC un triangle ; on désigne par α une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})}$. Donner, en fonction de α , une mesure des angles $\widehat{(\vec{BA}; \vec{AC})}$; $\widehat{(\vec{AC}; \vec{AB})}$; $\widehat{(\vec{CA}; \vec{AB})}$; $\widehat{(\vec{CA}; \vec{BA})}$.

2) A, B, C, D sont quatre points distincts de plan. Démontrer que :

$$\widehat{(\vec{AD}; \vec{AB})} + \widehat{(\vec{BA}; \vec{BC})} + \widehat{(\vec{CB}; \vec{CD})} + \widehat{(\vec{DC}; \vec{DA})} = \hat{0}$$

Activité 2 : utiliser les formules usuelles de transformations : de l'addition et de la multiplication

Consigne 1 : calcule les expressions suivantes puis conclus

$$\text{a) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ et } \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} ;$$

b) $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\pi \cos\frac{\pi}{4} + \sin\pi \sin\frac{\pi}{4}$

c) $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\pi \cos\frac{\pi}{6} + \cos\pi \sin\frac{\pi}{6}$;

d) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{6}$

e) $\tan\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\tan\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{5\pi}{6} \tan\frac{\pi}{3}}$; f) $\tan\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right)$ et $\frac{\tan\frac{\pi}{6} - \tan\pi}{1 + \tan\frac{\pi}{6} \tan\pi}$

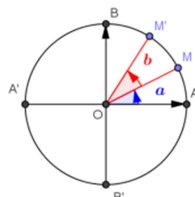
Synthèse partielle :

Formules d'addition et de multiplication

Formules d'addition : Soit A et B deux points du cercle trigonométrique tels que le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ soit orthonormé direct ; $(\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB})$. Le réel a associé au point M et le réel b est elui associé au point M' c'est-à-dire

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = a \text{ et } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM'}) = b$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OM'} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$



1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

5) $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ 6) $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication :

Pour tout réel a on a : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Formules de linéarisation :

Pour tout réel a on a : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

En posant $2a = x$; on a $a = \frac{x}{2}$ et à la fin on aura : $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$

$$\text{et } \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

Formules de transformations : à démontrer

$$\diamond \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\diamond \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\diamond \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\diamond \sin b \cos a = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

$$\diamond \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\diamond \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\diamond \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\diamond \sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \text{ avec } p = a + b \text{ et } q = a - b$$

Formules trigonométriques usuelles : angles associés

Angles opposés : (α) et $(-\alpha)$ **Angles supplémentaires** : α et $\pi - \alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha ;$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha ;$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

Angles complémentaires : α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ **Angles** : $\pi + \alpha$ et α

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha ;$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha ;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} + \alpha$ et α

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad ; \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cotan x$$

Evaluation 1 :

1. Exprimez en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

a) $F(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $G(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(-\pi + x)$

c) $f(x) = \cos(200\text{grs} - x) + \sin(180 - x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

d) $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x + 2 \sin x$

2. Calculer le nombre F dans les cas suivants :

a) $F = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi$;

b) $F = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6}$

c) $F = \sin(\pi - 30^\circ) - \cos\left(180^\circ - \frac{\pi}{3}\right)$;

d) $F = 2 \sin\left(180^\circ - \frac{\pi}{6}\right) - \cos(90^\circ - 50\text{grs})$

e) $F = 3 \sin\left(\pi \cos\frac{\pi}{3} - \tan\left(\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) + 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

f) $F = \sin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) - \tan\frac{\pi}{3} * \cos\frac{\pi}{6} + \cos(\sin\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{3} \cotan\frac{\pi}{4}\right)$

3. Sachant que $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

Utilise les relations trigonométriques pour donner les valeurs

exactes de : a) $\sin\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\sin\frac{3\pi}{10}$ et $\cos\frac{3\pi}{10}$

b) $\sin\frac{6\pi}{5}$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{10}$ et $\cos\frac{7\pi}{10}$

Evaluation 2:

1) $E = \cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

Montrer que E est un entier naturel.

2) En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$; calcule $\cos\frac{5\pi}{12}$; $\sin\frac{5\pi}{12}$; $\tan\frac{5\pi}{12}$;

3) En utilisant les formules de linéarisation ; calculer $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$;

4) a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b ;

On a: $2\sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$;

b) En déduire que : $2 \sin\frac{\pi}{7} \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} \right) = \sin\frac{6\pi}{7}$;

c) Démontrer que : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

Évaluation 3 :

1) Démontrer que, pour tout nombre réel α , on a :

a) $\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$;

b) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$;

2) Démontrer que, pour tout nombre réel x :

a) $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; b) $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Activité 3 : fonctions trigonométriques : fonctions paires, impaires, périodiques, conséquences de ces propriétés :

Consigne :

- 1- A travers vos connaissances antérieures, définis une fonction paire ; une fonction impaire ; une fonction périodique
- 2- Les fonctions cosinus ; sinus et tangente sont – elles paires ou impaires ?
- 3- Les fonctions cosinus ; sinus et tangente sont – elles périodiques ? justifiez votre réponse

Synthèse partielle :

Définition des fonctions trigonométriques :

La fonction sinus, notée $\sin$ est : définie sur $\mathbb{R}$; à valeurs dans $[-1,1]$.

Elle est impaire et 2π -périodique.

Représentation graphique de la fonction sinus :

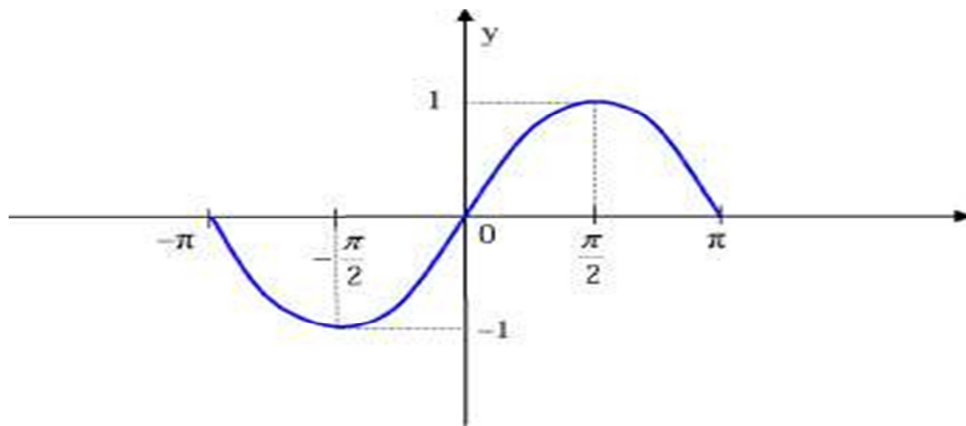
Puisque la fonction sinus est périodique de période 2π , on peut l'étudier

sur $[-\pi ; \pi]$. $f:]-\pi ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin x$$

X	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
Sin(x)	0	-1	0	1	0

✓ Représentation de la fonction sinus



La fonction cosinus, notée $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$; à valeurs dans $[-1,1]$.

Elle est paire et 2π -périodique.

Représentation graphique de la fonction cosinus :

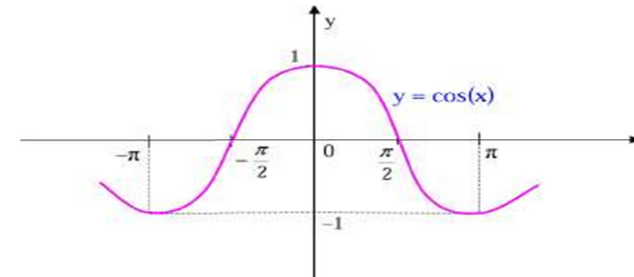
Puisque la fonction cosinus est périodique de période 2π , on peut

l'étudier sur $[-\pi ; \pi]$. $g:]-\pi ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos x$$

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
cos(x)	-1	0	1	0	-1

✓ Représentation de la fonction cosinus



NB : Si a est augmenté de $2k\pi$ le point M revient à sa position initiale.

On exprime ce fait en disant que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

$$\forall x \in \mathbb{R} \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x) ;$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Conséquences :

✚ Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

✚ Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

La fonction tangente, notée $\tan$, et donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} ; \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ est :}$$

- définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; à valeurs dans $\mathbb{R}$.

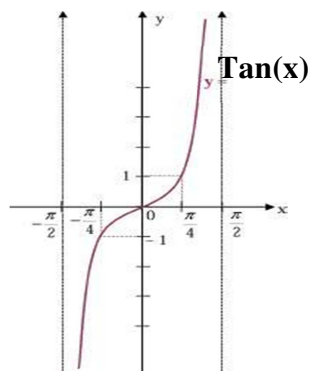
- Elle est impaire ; π -périodique et continue sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

NB : La fonction tangente et la fonction cotangente sont périodiques de période π . **$\tan(x + \pi) = \tan(x)$; $\cotan(x + \pi) = \cotan(x)$**

$$\tan(x + k\pi) = \tan(x) ; \cotan(x + k\pi) = \cotan(x)$$

Puisque la fonction tangente est périodique de période π , on peut l'étudier sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$.

✓ **Représentation graphique de la fonction tangente**



Activité 4 : résoudre l'équation du type : $\cos x = a$, ($a \in \mathbb{R}$)

Soit (E) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = a$

Cas 1 : si $a \notin [-1, 1]$ alors équation (E) n'admet pas de solution on écrit $S = \emptyset$

Cas 2 : si $a \in [-1, 1]$ alors l'équation (E) admet des solutions.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos(\alpha) \text{ avec } a = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{\alpha + 2k\pi ; -\alpha + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Consigne : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \cos x = \frac{4}{3} ; \cos x = -\frac{1}{2} ; \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos 3x = \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) ; \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Activité 5 : Equation du type : $\sin x = a$

Soit (E) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = a$

Cas 1 : si $a \notin [-1, 1]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution on écrit $S = \emptyset$

Cas 2 : si $a \in [-1, 1]$ alors l'équation (E) admet des solutions.

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin(\alpha) \text{ avec } a = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{\alpha + 2k\pi ; \pi - \alpha + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Consigne : résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin x = -\frac{1}{2} ; \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$2 \sin x = \sqrt{2} ; \sin(2x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) ; \sin\left(-5x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin(-4x)$$

Activité 6 : Résoudre l'équation du type : $\tan x = a$; $a \in \mathbb{R}$

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan(\alpha) \text{ avec } a = \tan \alpha \Rightarrow x$$

$$= \alpha + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{\alpha + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Consigne : Résous avec $x \in]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

$$\tan x = \sqrt{3} ; \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 ; 3 \tan^2 x - 1 = 0 ;$$

$$\tan 2x = -\sqrt{3} ; \tan\left(-5x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan(-4x) ; \tan x = \tan 2x$$

Activité 7 : Résolution des équations du type :

(E): $a \cos x + b \sin x = c$ où a, b, c sont trois nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$

Méthode de résolution :

Poser $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. On remarque que $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$; ($r > 0$) et $-1 \leq \frac{a}{r} \leq 1$ et $-1 \leq \frac{b}{r} \leq 1$.

Ainsi le point $M\left(\frac{a}{r}; \frac{b}{r}\right)$ est un point appartenant au cercle trigonométrique. On pourra donc poser : $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{r}$ où α désigne l'abscisse curviligne du point M . L'équation (E) peut alors se mettre sous la forme $\frac{a}{r} \cdot \cos x + \frac{b}{r} \sin x = \frac{c}{r}$; ($r > 0$).

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha = \cos(x - \alpha) = \frac{c}{r} \text{ avec}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Consigne 1 : Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x - 3 = 0 ; \quad \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$$

$$\cos 2x - \sin 2x = -1 ; \quad 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0 ;$$

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1 ; \quad \cos 3x + \sin 3x = 0 ;$$

Consigne 2 : Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) ; \quad \sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) ; \quad \cos x = \sin 2x$$

$$-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0 ; \quad \sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3}{4} = 0 ;$$

$$\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 ; \quad 2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0$$

$$\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 ; \quad 4\cos^2 x + 3\sin^2 2x = 0 ;$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Activité 8 : Résoudre les inéquations trigonométriques de types :
 $\cos x \geq a, \sin x \geq a; \cos x \leq a; \sin x \leq a$.

Méthode : pour résoudre les inéquations de l'un des types ci-dessus, on peut utiliser le cercle trigonométrique : la valeur de α détermine deux points sur le cercle trigonométrique limitant deux arcs ; on détermine quel est l'arc qui convient et on en déduit l'ensemble solution.

Consigne : Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\cos x \geq \frac{1}{2} ; \quad \sin x - \cos x \leq 0 ; \quad \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0 ;$$

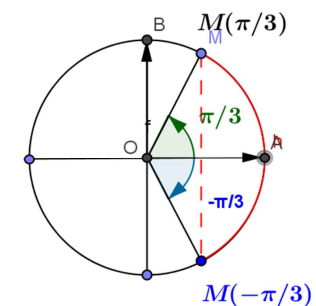
$$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad \begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \sin x + 1 \geq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solution 1

Déterminons les réels α telque $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Sont solutions de cette inéquation les abscisses curvilignes des points du cercle situés sur l'arc en trait rouge. On a

$$S = \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] ; (k \in \mathbb{Z})$$



Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Déterminons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. On trouve $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

$$S = \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] ; \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Evaluation (formative notamment)

Evaluation 1 : si $a + b + c = \pi$ alors démontre que

a) $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c$,

b) $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -1 - 4 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c$

Evaluation 2 :

1) Pour tout nombre réel x tel que $\tan \frac{x}{2}$ soit défini, en posant $t = \tan \frac{x}{2}$

a) Démontre les égalités suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

b) En utilisant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, résous dans $\mathbb{R}$,

les équations suivants : a) $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2$;

b) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

2) Démontre que, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

3) En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$,

démontre que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

4) En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$; calcule $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$

Evaluation 3 :

1) calcule $A+B$ et $A-B$ puis en déduis A et B

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} ;$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

2) Calcule A et B

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} ; B = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12}$$

En déduis que $\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

3) Démontre que $16 \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = 1$

4) calcule $\cos x$ et $\tan x$, sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$

5) calcule $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$, sachant que

$$\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5} \text{ et } x \in]0; \pi[$$

6) calcule $\sin x$; $\cos x$ et $\tan x$, sachant que

$$\sin(-x) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } x \in]-\frac{\pi}{2}; \pi[$$

Evaluation 4 : En utilisant les formules de transformations ou d'addition. Calculer les expressions suivantes :

1°) $A = (\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2$ avec $x - y = \frac{\pi}{3}$;

2°) $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cotan(-x)$;

$$3^\circ) C = \cotan(-x) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cotan(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$4^\circ) D = \cos(2\pi - x) + \cos(-x) + \tan(2\pi - x) + \cotan(-x);$$

$$5^\circ) E = \cotan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \tan(\pi - x) + \cos(-x) + \sin(-x)$$

Evaluation 5 : Démontre les identités suivantes

$$a) \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \cdot \sin^2 x; b) \tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x};$$

$$c) \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2; d) \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan y;$$

$$e) \frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan x; f) \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

Evaluation 6 : Si $A + B + C = 180^\circ$

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$$

$$c) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$$

$$d) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$e) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Evaluation 7 : Résous dans $\mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes

$$1^\circ) \cos 2x = -\frac{1}{2}; 2^\circ) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; 3^\circ) 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3};$$

$$4^\circ) \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; 5^\circ) \tan 2x = 1; 6^\circ) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$7^\circ) 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1; 8^\circ) \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$9^\circ) \tan 2x = \sqrt{3}; 10^\circ) \cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right); 11^\circ) 2 \sin 2x = \sqrt{3};$$

$$12^\circ) \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right); 13^\circ) \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$14^\circ) \sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); 15^\circ) \tan 2x + \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0;$$

$$16^\circ) \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right); 17^\circ) 4 \sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1) \sin x - \sqrt{2} = 0$$

Evaluation 8: résous dans $\mathbb{R}$; les inéquations suivantes

$$1^\circ) x \in [0, 2\pi[; \cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; 2) x \in \mathbb{R} \quad 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3^\circ) x \in [0, \pi[; \tan x \geq \sqrt{3}; 4^\circ) x \in \mathbb{R}; \sin x < \frac{1}{2}$$

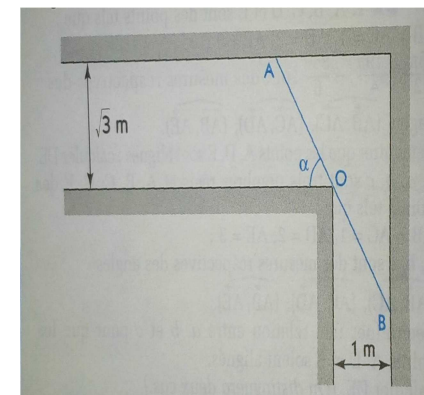
$$5) x \in \mathbb{R}; \sqrt{3} \cos x + \sin x \geq 1; 6) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$7^\circ) x \in \mathbb{R}, 4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{6} \leq 0;$$

Evaluation 9: Un couloir de longueur $\sqrt{3}$ mètres, tourne à un angle droit et sa longueur n'est plus alors que de 1 mètre.

Sur la figure, une droite passe par O, fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et B.

- 1) Exprime en fonction de α , les longueurs OA, OB et AB;
- 2) On pose : $AB = f(\alpha)$. Démontre que $f(\alpha) = \frac{4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\sin 2\alpha}$
- 3) A) Détermine α pour que $AB = 4$;
b) Détermine α pour que : $OA = OB$



FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE V : ÉTUDE LOCALE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Compétences :

☞ Composantes, manifestations :

Contenu(s) : Étude locale d'une fonction numérique

- ☞ Limite nulle en zéro.
- ☞ Limite d'une fonction en un point (*On admettra les théorèmes classiques sur les limites*).
- ☞ Limite à droite, limite à gauche.
- ☞ Continuité d'une fonction en un point (*On admettra les théorèmes généraux sur la continuité*) continuité à droite, continuité à gauche.
- ☞ Fonction dérivable en un point, nombre dérivé
- ☞ Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche.
- ☞ Interprétation géométrique du nombre dérivé : équation de la tangente en un point de la courbe représentative.
- ☞ Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.
- ☞ Dérivées successives,
- ☞ Énoncé et démonstration du théorème donnant le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle à partir du signe de sa dérivée.

Étude de quelques exemples de fonctions

On traitera des exemples d'étude de fonctions de types suivants :

- ☞ Fonctions polynômes.
- ☞ Fonctions homographiques.

- ☞ Fonctions du type $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{dx + c}$ avec a et d non nuls (*mise en évidence sur des exemples de la notion d'asymptote oblique*)
- ☞ Fonctions rationnelles pour lesquelles on peut déterminer le signe de $f'(x)$
- ☞ Fonction sinus et cosinus (*la valeur du nombre dérivé de la fonction sinus en 0 sera admise*).

Ces exemples permettront d'illustrer les points suivants :

- ✓ notion d'extremum relatif,
- ✓ Résolution (avec discussion éventuelle) d'équations et d'inéquations par l'examen du graphique, – Extension de la notion de limite avec les asymptotes.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines** : Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles** :
- **Ressources financières** :

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation : Détermine l'ensemble de définitions des fonctions

suivantes : a°) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 13}}$; b°) $f(x) = \sqrt{\frac{1-3x}{x^2 + 5x}}$

c°) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x-3|+5}$; d°) $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 2x}$; e°) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

f) $f(x) = \sqrt{2 \cos x + 1}$; g) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin x}}$; g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}$

h) $g(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x - 4$; i) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - 4}$; j) $p(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x-1} + 1$

Activité 1: calculer les limites en l'infini ou en un point x_0

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies respectivement par

$$f(x) = \frac{-3}{2x^3} ; g(x) = x^5 ; h(x) = \frac{-x^4}{2} ;$$

Consigne 1:

1- Donne les valeurs de f ; g et h quand x tend vers :

$$-10^{20}; 10^{30}$$

2- Que penses-tu de la limite de f ; g et h si x tend vers $-\infty$ et $+\infty$

Consigne 2 : Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7$

1-Montre que pour tout x différent de zéro $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^3}\right)$;

2-Détermine la limite de $1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^3}$ en $-\infty$ et $+\infty$;

3-Donne une conjoncture entre la limite $f(x)$ et x^3 quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$

Synthèse partielle :

Fonctions polynômes ::

☞ **Formules usuelles :**

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} ;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

☞ **Propriété :** La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Fonctions rationnelles :

☞ **Propriété 1 :** La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

☞ **Propriété 2 :** Soit f une fonction définie en a avec $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Consigne 3: calcule les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{x^5} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{2}x^6 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^2 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 + 9) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^4 + 1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^2 - 3x^3 + x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^4 + 4x^2 + 1) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x - 1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 1}{2x + 3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{1 - 2x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x - 7} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{2 + 3x^3}$$

Consigne 4 : calcule les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 10x - 1) ; \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 3} ; \lim_{x \rightarrow +2} \left(\frac{x + 2}{5x - 1} \right) ; \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x^2 - 1}{3x + 1} \right)$$

Consigne 5 : soient $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

1) Calcule la limite de f en 3 et la limite de g en 25 ;

2) Montre que $f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}$ puis simplifie f et g ;

3) En déduis la limite de f en 3 et celle de g en 25

Remarque :

Les formes indéterminées : les formes suivantes : $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$; $\infty - \infty$ sont dites indéterminées . Pour lever l'indétermination, on procède à une factorisation des fonctions considérées ou la division euclidienne ou à une multiplication de l'expression par son conjugué.

Consigne 5 : calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} ; & b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} ; & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} ; \\ d) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} ; & e) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{25 - x} ; & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} ; \\ g) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{x^2 - 25} ; & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2x^2 - 5x + 3} ; & i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \end{aligned}$$

Activité 3 : calculer la limite à gauche et la limite à droite

Consigne 1 : Soient les fonctions f et h définies par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4}{x - 3} ; h(x) = \frac{x + 3}{-x + 2} ;$$

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f ;
b) Dresse le tableau de signe de x - 3
- c) Détermine $\lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + 4)$; $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)$ puis en déduis $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$;
- d) Détermine $\lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + 4)$; $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)$ puis en déduis $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$;
- 2) a) Détermine l'ensemble de définition de f ;
b) Dresse le tableau de signe de - x + 2
- c) Détermine $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$; $\lim_{x \rightarrow 2} (-x + 2)$ puis en déduis $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$;

d) Détermine $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$; $\lim_{x \rightarrow 2} (-x + 2)$ puis en déduis $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

Consigne 2: soit les fonctions f définies par :

$$\begin{aligned} a^{\circ}) f(x) &= \frac{1 - x^2}{x + 1} ; & b^{\circ}) f(x) &= \frac{x + 3}{-x + 2} ; & c^{\circ}) f(x) &= \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 5} ; \\ d^{\circ}) f(x) &= \frac{2x + 3}{x - 3} ; & e^{\circ}) f(x) &= \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} ; & f^{\circ}) f(x) &= \frac{-2x}{-x - 1} \end{aligned}$$

Déterminer Df de chacune des fonctions ci – dessus puis les limites aux bornes de Df

Remarque :

Asymptote parallèle aux axes de coordonnées :

Propriétés : Dans le plan muni d'un repère orthonormal ; soit une fonction f et a, b des réels.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ **alors** $y = b$

est asymptote horizontale à la courbe (C) de f.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ **alors** $x = a$

est asymptote verticale à la courbe (C) de f

Activité 4: limites de fonctions trigonométriques usuelles:

Retenons que pour x très voisin de zéro, on a $\sin x \approx x$; $\tan x \approx x$; $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} ;$$

$$a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

Consigne : calculer les limites suivantes au point x_0 fixé ;

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{\sin^2 x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x}$; g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{\sin^2 x}$; h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$; j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 x^2}{1 - \cos ax}$; k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x}$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{5x}$

Evaluation : Chercher à la maison

a) Exemples d'utilisation d'une factorisation

calcule ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

b) Exemples d'utilisation de l'expression conjuguée

calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x)$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)]$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

c) Exemple d'utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation

calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 + x - 7})$

d) Exemple d'utilisation d'un taux de variation (dérivée)

calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$

e) Exemples de changement d'écriture (variable)

calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin 3x}{\sin 6x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin(x-a)}{x-a} \right)$;

Activité 5 : Limites d'une fonction composée

Consigne :

1) On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ et } g(x) = x + 1$$

On veut étudier la limite en 1 de $f \circ g$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ g$;

b) Calculer la limite de $f \circ g(x)$ en 1 ;

2) Calculer la limite en 1 de la fonction $f: x \mapsto \sin \frac{\pi x^2}{x+1}$

3) Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction $g: x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

Synthèse partielle :

Propriété f et g sont des fonctions, α, l, l' des éléments de

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}.$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow l} f(x) = l' \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} f \circ g(x) = l'$$

Activité 4 : Limites et inégalités

Considérons les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x - 1$

Consigne :

- 1- Vérifier aisément que $f \geq g$.
- 2- Comparer les limites de f et g en 0, en $+\infty$ et $-\infty$.

Synthèse partielle

Propriétés : a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$,

f et g deux fonctions admettant des limites en a

: si $f \geq g$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

NB : cette propriété ne permet pas de calculer des limites mais de les comparer ;

Calcul de limites par comparaison

Propriétés : a et l sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$,

f et g des fonctions.

– si $f \geq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

– si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

– si $g \leq f \leq h$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(Théorème des gendarmes)

Consigne 2 :

1- Soit $f: x \mapsto x + 3 \cos x$,

- a) Montre que $x - 3 \leq x + 3 \cos x \leq x + 3$
- b) en déduis les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$;

2 – calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x)$

Activité 7 : Etudier la continuité d'une fonction f en un point d'abscisse x_0 :

Consigne 1:

1- soit $f(x) = \frac{x-2}{2x}$,

- a) Détermine D_f puis en déduis si f est définie en 1 et en 0 ;
- b) Calcule la limite de f en 1 et en 0 ;
- c) Compare limite de f en 1 et $f(1)$;
- d) Si f est définie en x_0 et limite de f en x_0 est égale à $f(x_0)$ alors f est continue en x_0 . La fonction f est elle continue en $x_0 = 1$? ; en $x_0 = 0$, ?

2- Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$

- a) Déterminer le domaine de définition de f ;
- b) f est-elle continue en $x_0 = 2$?

Synthèse partielle :

Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition D_f . On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de D_f si et seulement si $f(x_0)$ est définie et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\left(\begin{array}{c} x \text{ est continue au point} \\ x_0 \text{ de } D_f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} f(x_0) \text{ définie} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right)$$

Continuité à gauche et continuité à droite : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue à droite en a (respectivement à gauche en a) si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \left(\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \right)$$

si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ alors f est continue en a

Prolongement par continuité en un point x_0 :

Définition :

$\left(\begin{array}{l} f \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité au point } x_0 \end{array} \right)$ si et seulement si $\begin{cases} x_0 \notin Df \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \end{cases}$

Son prolongement est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Consigne 2 :

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$; f est-elle prolongeable par continuité en $x_0 = 1$? si oui détermine son prolongement g .

b) Soit f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Consigne 3 : étudie la continuité au point x_0 donné dans chaque cas

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ f(1) = 2 \end{cases}$; $x_0 = 1$; 2) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} & \text{si } x \in]1, 3] \end{cases}$; $x_0 = 1$

Consigne 4 : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x \in]-1; 1] \\ f(x) = b(x^2 - 1) & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- Détermine a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$;
- Pouvez-vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Synthèse partielle

Continuité d'une fonction sur un intervalle $I = [a ; b]$

Une fonction f est continue sur $I = [a ; b]$, si elle est continue en tout point de $I = [a ; b]$.

Théorème 1:

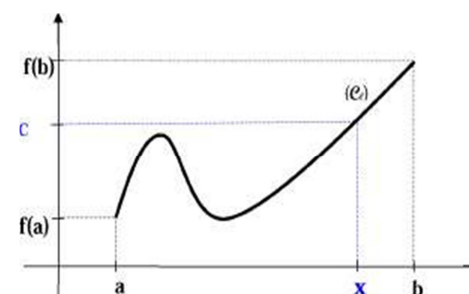
- ☞ Une fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- ☞ Une fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.

Théorème 2 :

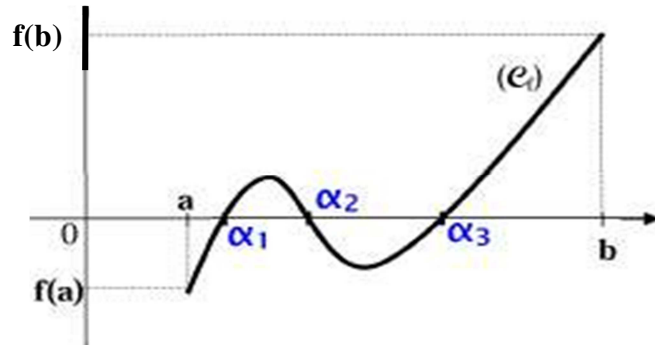
- ☞ Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $f + g$; $f \cdot g$ et λf où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont continues sur I .
- ☞ Et si en plus g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I, g(x) \neq 0$) alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- ☞ Si f est fonction continue en un point x_0 et g une fonction continue au point $f(x_0)$ alors la composée $g \circ f$ est continue au point x_0 .

Théorème des valeurs intermédiaires 3 :

Énoncé du théorème 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a ; b]$ et c un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$ inclusivement ; alors il existe au moins une valeur x dans l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(x) = c$

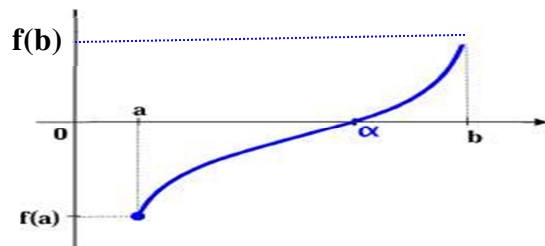


Conséquence du Théorème 3 : Si f est une fonction continue sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



Théorème de la bijection : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$ alors f réalise une bijection de $I = [a ; b]$ sur $f(I)$ où $f(I)$ est un intervalle.

De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



Propriétés : Image d'un intervalle par une fonction continue :

- ☞ L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f sur I est un intervalle.
- ☞ Si f est continue et croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
- ☞ Si f est continue et décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Activité 7 : Calcul de nombre dérivé d'une fonction en point d'abscisse x_0 donné:

Soient f et h deux fonctions définies par : $f(x) = ax + b$ et

$$h(x) = x^2 + x + 1$$

Consigne 1:

1) calcule $f(3)$; $h(2)$; $f(x) - f(3)$ puis $h(x) - h(2)$;

2) Détermine $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{h(x) - h(2)}{x - 2} \right)$ puis

interprète les résultats

Consigne 2 : Etudie la dérivabilité de f dans les cas suivants :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ et } x_0 = 2 ;$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ et } x_0 = -1$$

Synthèse partielle :

Définition : Soit f une fonction définie en un point x_0 , on dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

Cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 .

Nombre dérivé à droite $f'_d(a)$, nombre dérivé à gauche $f'_g(a)$: f est dérivable au point a si et seulement si on a simultanément :

- ☞ f est dérivable à droite en a ,
- ☞ f est dérivable à gauche en a ,
- ☞ $f'_d(a) = f'_g(a)$

Consigne 3 :

Étudie la dérivabilité de f au point x_0 donné dans chaque cas

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} ; x_0 = 1 ; \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} & \text{si } x \in]1, 3] \end{cases} ; x_0 = 1$$

Consigne 3 :

Détermine a et b pour que f soit continue et dérivable en x_0 donnée

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} ; x_0 = 1 ;$$

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases} , x_0 = -2$$

Remarque : Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses en x_0 .

Activité 8 : calcul la fonction dérivée d'une fonction f donnée

Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles :

Formules usuelles ;

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = nax^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = (ax + b)^n$	$f'(x) = na(ax + b)^{n-1}$
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = ku$	$f' = ku'$
$f = uv$	$f' = u'v + v'u$
$f = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Consigne 1 : Dans chacun des cas suivants, calcule la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$; 2) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 100$;
 3) $f(x) = (2x - 1)^2$ 4) $f(x) = (-5x + 3)^4$; 5) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$
 6) $f(x) = \frac{-4}{x^2-3x+4}$; 7) $f(x) = x + 2 + \frac{8}{x}$; 8) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
 ;9) $f(x) = (x^2 - 2x)(3x + 1)$; 10) $f(x) = (x - 2)^2(1 - 2x)$
 11) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 12) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$; 13) $f(x) = \sqrt{-x^3 + 2x}$

Consigne 2 :

Soient f et g deux fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 4 \text{ et } g(x) = (-3x + 5)^2$$

- 1) Détermine les fonctions dérivées $f'(x)$; $g'(x)$; $g'(f(x))$ et $f'(x) \times g'(f(x))$
- 2) Détermine $g \circ f(x) = g(f(x))$ puis en déduis $(g \circ f)'(x)$
- 3) Compare $f'(x) \times g'(f(x))$ et $(g \circ f)'(x)$

Synthèse partielle :

Dérivée de la composée de deux fonctions :

Théorème 6 :

- ☞ Si f est une fonction dérivable en un point x_0 et g une fonction dérivable au point $f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$
- ☞ Si f est une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J et si f est dérivable sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est

dérivable sur J et on a : $\forall x \in J (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$;

Consigne 3 : Soient f et h deux fonctions définies sur leur ensemble de définition respectif

$Df = \mathbb{R}$ et $Dh = \mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = 2x^2 - 3$ et $h(x) = \frac{3x}{x-1}$

- a) Détermine $Dh \circ f$ puis $(h \circ f)'(x)$ sur $Dh \circ f$;
- b) Montre que h est une bijection sur un intervalle I que tu préciseras ;
- c) Calcule la fonction dérivée $(f^{-1})'(x)$

Activité 9 : Dérivée des fonctions trigonométriques usuelles

Dérivées de fonctions circulaires :

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \cotan x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cotan^2 x)$
$f(x) = \tan(ax + b)$	$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax + b))$

Consigne : Pour chacune des fonctions suivantes, la fonction dérivée.

- 1) $f(x) = \sin(3x)$; 2) $f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{5}\right)$; 3) $f(x) = x^3 \sin x$;
 4) $f(x) = \tan(-2x + 5)$; 5) $f(x) = \cotan(2x)$; 6) $g(x) = \sin^3 x$
 7) $h(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x$, 8) $h(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$; 9) $g(x) = \sin(x^3)$

Activité 10 : Inégalités des Accroissements Finis :

Soit f une fonction dérivable sur $I = [a ; b]$ où a et b sont des réels.

Première Forme :

Si $a \leq b$ et si les réels m et M sont tels que : $\forall x \in [a ; b]$

$$m \leq f'(x) \leq M \text{ alors } m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

• **Deuxième Forme :** Si k est un réel tel que : $\forall x \in [a ; b] = I$,

$$|f'(x)| \leq k \text{ alors } |f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$$

Consigne :

- 1- soit f la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

Démontrer que pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$; on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

- 2- On donne $f: \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = \sin x$ Montre que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$;

- 3- On donne $f(t) = \sqrt{t}$, pour tout $t \in [x ; x + 1]$: démontre que

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} ;$$

Activité 10 : Application de la dérivée :

Dérivée et tangente : soit f une fonction de courbe représentative C_f , A un point de C_f , d'abscisse x_0 . Lorsque f est dérivable en x_0 , une équation de la tangente en A à la courbe C_f est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

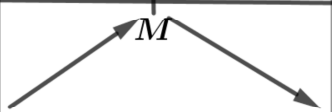
Dérivée et sens de variation :

Propriétés : soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I .

- Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I ;
- Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I ;
- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I

Dérivée et extremum :

Propriétés : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a ; b[$ et x_0 un élément de $]a ; b[$, si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum relatif en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

f admet un minimum relatif M en x_0

Dérivée et continuité :

Propriétés :

Si f est dérivable sur intervalle I alors elle est continue sur cet intervalle

Asymptote oblique :

si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors il y a possibilité d'asymptote oblique en $\pm\infty$

Si $f(x)=ax+b+C(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

· La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est dite asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$; si et seulement, si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

Pour étudier la position de la courbe (Cf) de f par rapport à son asymptote oblique (D) d'équation : $y = ax + b$; on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ dans Df.

1^{er} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] < 0$ alors la courbe est en dessous de (D).

2^{ème} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] > 0$ alors la courbe est au-dessus de (D)

3^{ème} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la courbe (Cf) coupe (D) en un point d'abscisse x_0 .

Consigne 1: Soient les fonctions f et h définies par

$$f : x \mapsto -x^3 + x - 2 \text{ et } h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

- Calcule l'ensemble de définition de f et h puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f et de h ;
- Etudier les variations de f et h ;
- Dresse le tableau de variation de f et h ;
- Déterminer une équation de la tangente (T) à Cf au point A d'abscisse -2 et Ch au point d'abscisse 1

Consigne 2 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur par : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$

On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unité 1cm.

1) Détermine le domaine de définition de f Df puis les limites aux bornes de Df

2)a) Vérifier que $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$ sur Df.

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C)

c) Préciser la position relative de (C) et (Δ).

3)a) Calculer $f'(x)$ et prouver que : $f'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f ;

c) Donne une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$

Activité 12 : étude locale d'une fonction numérique

Consigne 1 : On considère les fonctions ci – dessous données

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-7}} ; f(x) = \frac{x^2}{1-3x^2} ; h(x) = -2x^2 - 5 ; q(x) = x^3 + 3x$$

Compare

$g(-x)$ et $g(x)$; $h(-x)$ et $h(x)$; $f(-x)$ et $f(x)$; $q(-x)$ et $q(x)$

Consigne 2 : soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 ; g(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

- Détermine l'ensemble de définition de f Df
- Soit $x = a$, en posant $a = 1$
 - Démontre que $f(a - x) = f(a + x)$
 - Démontre que $f(2a - x) = f(x)$
- Détermine l'ensemble de définition de g Dg
- Soit $I(a ; b)$ en posant $a = 3$ et $b = 2$

a) Montre que $f(a - x) + f(a + x) = 2b$

b) Montre que $f(2a - x) + f(x) = 2$

Consigne 3 : soient trois fonctions f ; g et h définies respectivement :

a) $f(t) = 3 \cos(3t)$; b) $g(\theta) = \sin(-\theta + 5)$; c) $h(x) = 5 \tan x$

Montre que $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = f(t)$; $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$ et $h(x + \pi) = h(x)$

Synthèse partielle :

Quelques propriétés géométriques

Fonctions paires : Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite paire si, et seulement si

$$\forall x \in D_f \text{ et } \forall (-x) \in D_f, f(-x) = f(x).$$

La courbe (C_f) de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Fonction impaire : Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite impaire si, et seulement si

$$\forall x \in D_f, \forall (-x) \in D_f, f(-x) = -f(x).$$

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f dans un repère cartésien.

Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation $x = a$, ($a \in \mathbb{R}$) est axe de symétrie pour la courbe (C_f) de f , si et seulement si

$$f(2a - x) = f(x) \text{ ou } f(a - x) = f(a + x)$$

Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point $I(a ; b)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f si et seulement si,

$$f(2a - x) + f(x) = 2b \text{ ou bien } f(a - x) + f(a + x) = 2b$$

Fonctions périodiques : Une fonction numérique f est périodique si, seulement si, il existe un réel strictement positif t tel que

$\forall x \in D_f, f(x+t) = f(x)$. On dit alors que t est une période de f .

☞ Si $f(x) = \cos(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;

☞ Si $f(x) = \sin(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;

☞ Si $f(x) = \tan(ax + b)$ alors la période $T = \frac{\pi}{|a|}$;

Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

- ✓ Déterminer l'ensemble de définition (étudier la continuité)
- ✓ Etudier éventuellement la parité. Recherche de la période, des symétries afin de réduire l'intervalle d'étude.
- ✓ Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- ✓ Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation.
- ✓ Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
- ✓ Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction
- ✓ Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
- ✓ Points d'inflexion etc.

Evaluation 1 : Soit la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; i ; j)$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe (C_f)
- 2) Trouver le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) Quels sont les extremums locaux de f ? Donner leurs natures.
- 4) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $x = 2$

Evaluation 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+4}{-x+1}$. Soit (C_f) la courbe de f .

- 1) Etudier les variations de la fonction f .
- 2) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $x = 0$;
- 3) Quel est le coefficient directeur de la tangente (T)
- 4) Tracer la courbe (C_f) de f .
- 5) Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$

Evaluation 3 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a ; b et c sont des réels.

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Déterminer les réels a , b , c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
- 3) Etudier la fonction f .
- 4) Tracer la courbe (C_f) de f .

Evaluation 4 : soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-5x+15}{x-2}$

- a) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$;
- b) Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique (D) à préciser ;
- c) Etudier la fonction f ;
- d) Montrer que le point $I(2 ; -1)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f ;
- e) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) ;
- f) Construire (D) et (C_f) dans un repère orthonormé.

Evaluation 5 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2-6x+8}{x-3}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f et calculer les limites en ses bornes. En déduire l'équation de l'asymptote verticale (Γ) à (C) .
- 2) a) Montrer que $\forall x \in D_f; f(x) = 2x + \frac{8}{x-3}$.
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C)
c) Préciser la position de (Δ) par rapport à (C) .
- d) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 3) Montrer que le point $I(3 ; 6)$ est centre de symétrie de (C) .
- 4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 0$.
- 5) Montrer que la restriction g de f à $[5 ; +\infty[$ est une bijection de $[5 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
- 6) Soient g^{-1} la réciproque de g et (C') la courbe représentative de g^{-1} . Calculer $g(7)$ puis $g^{-1}(16)$ et $(g^{-1})'(16)$ sans expliciter g^{-1} .
- 7) Construire $(\Delta), (\Gamma), (C)$ et la première bissectrice d'équation $y = x$; puis tracer (C') sur le même repère .

Evaluation 6 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$, et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal

- 1) On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$
- a) Etablir les variations de g ; et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude $0,1$

- b) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x
- 2) a) Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f ,
b) Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis
c) dresse le tableau de variation de
- 3) a) Montre qu'il existe quatre réels a ; b ; c et d tels que
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

b) En déduis que C admet une asymptote oblique Δ et étudie la position de C par rapport à Δ . Vérifie en particulier que C rencontre Δ en un point unique A
4) Détermine les abscisses des points B et B' de C admettant une tangente parallèle à Δ .
5) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$
6) Construis la courbe

Evaluation 7 :

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

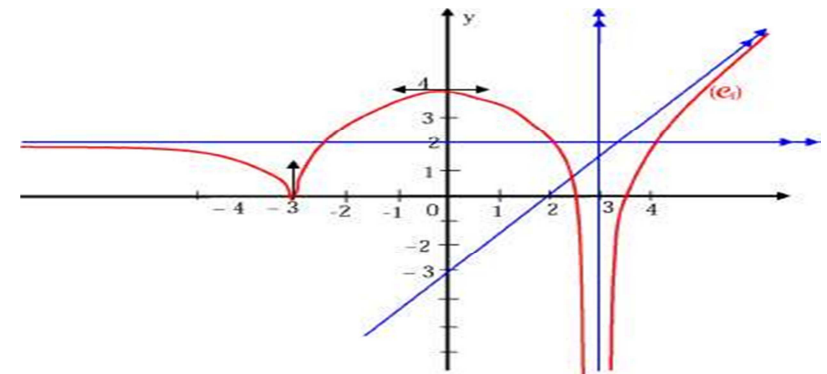
- 1) calcule $f'(x)$. Trouver les coefficients a ; b et c en utilisant les données du tableau.

- 2) Montre que la courbe (Cf) admet une droite asymptote oblique (D) . Étudier la position de (Cf) par rapport à (D) .
3) Donne le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f
4) Trace la courbe (Cf) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Evaluation 8 :

Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous

- Déterminer l'ensemble de définition Df de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de Df .
- Dresser le tableau de variation de f .
- La fonction f est-elle continue ; dérivable en $x = -3$? Justifier votre réponse
- Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) en $x = 0$.
- Montrer que la restriction g de f à $[0;3[$ est une bijection de $[0;3[$ sur une partie J de Df que l'on précisera.
- Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (Cf) de f .
- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.



Evaluation 9 : étudie chacune des fonctions ci – dessous :

$$f(t) = 3 \cos(3t) ; g(x) = -2 \sin x$$

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE VI : SUITES NUMERIQUES

Compétences :

☞ **Composantes, manifestations :**

Contenu(s) : Suites numériques 2

- ☞ Initiation au raisonnement par récurrence. Les exemples de démonstration par récurrence devront être simples ; mais on insistera sur l'exigence des deux hypothèses pour pouvoir conclure
- ☞ Suites arithmétiques, suites géométriques.

On veillera à relier l'étude des suites arithmétiques et géométriques aux situations concrètes qu'elles permettent de décrire.

- ✓ Définition d'une suite numérique.– Suite monotone.– Comparaison de deux suites.– Suite convergente. On admettra les théorèmes généraux sur les limites. (Somme, produits quotient).
- ✓ Sensibilisation aux méthodes numériques (encadrement de nombres réels, approximation des zéros d'une fonction numérique).
- ✓ Suites dont le terme général tend vers l'infini.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles :**
- **Ressources financières :**

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation :

$$\text{Soit } f: \begin{matrix} IN & \mapsto & IR \\ n & \mapsto & n^2 + \frac{1}{n+1} \end{matrix} \quad g: \begin{matrix} IR & \mapsto & IR \\ U_n & \mapsto & \frac{2}{3}U_n + 5 \end{matrix}$$

1°) Calcule $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(n-1)$; $f(n+1)$;

2°) on donne $U_0 = -5$; $g(U_n) = U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 3$ Calcule $g(U_0)$; $g(U_1)$; $g(U_3)$; $g(U_4)$

Activité 1 : Enoncer le principe du raisonnement par récurrence

Consigne 1 : soit $n \in N, P(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$;

$$Q(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

1-Compare $P(1)$ et $Q(1)$; $P(2)$ et $Q(2)$; $P(3)$ et $Q(3)$; $P(5)$ et $Q(5)$

2-D'après la 1^{ère} question que penses-tu de $P(n)$ et $Q(n)$

Synthèse partielle :

Principe de récurrence

Soit P_n un prédicat sur N . On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que :

H1) P_{n_0} est vrai.

H2) $\forall n \geq n_0, P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Alors P_n est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Méthode d'application

On veut prouver que pour tout $n \in N$ une propriété donnée P_n est vraie.

- 1) On montre que P_0 est vraie.
- 2) Soit $n \in N$.
- 3) On suppose que P_n est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence. On montre que P_{n+1} est vraie.

- 4) D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Consigne 2 : Démontre par récurrence les égalités $P(n)$ suivantes :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n): \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n): \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Activité 1 : Définir une suite et étudier son sens de variation

Consigne : Soient U ; V ; W définies par :

$$U: \begin{matrix} \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \\ n \mapsto U_n = 2n \end{matrix}, V: \begin{matrix} \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \\ n \mapsto V_n = \frac{2n-3}{n+1} \end{matrix}, W: \begin{cases} U_0 = 2 \\ W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n + 3 \end{cases}$$

1-Calculer U_0 ; U_1 ; U_3 ; U_{10} ; V_0 ; V_2 ; V_4 ; W_0 ;
 W_1 ; W_2 ; W_4 ; W_6

2-Quelle définition peux-tu donner à U ; V et W ?

Synthèse partielle :

Définition : On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers

$$\mathbb{R} \quad U: \begin{matrix} \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \\ n \mapsto U_n \end{matrix}$$

On note cette suite : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est noté plus simplement (U_n) . On note U_n l'image de n par U ; c'est le terme d'indice n aussi appelé le terme général de la suite.

$$U: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

0 $\longrightarrow$ $U(0) = U_0$ est le premier terme de la suite U .

1 $\longrightarrow$ $U(1) = U_1$ est le deuxième terme de la suite U .

.

$n \longrightarrow U(n) = U_n$ est le terme général de la suite U .

Mode de définition d'une suite :

Une suite numérique peut se définir de différentes façons.

Suite définie par $U_n = f(n)$: Ce sont des suites définies par la donnée explicite du terme général U_n en fonction de n .

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 2n$. Calculer les 4 premiers termes.

Même travail pour $W_n = \frac{1}{n^2}V_n = 2n + 5$

Suite récurrentes : Ce sont des suites définies par la donnée de son 1er terme et d'une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ liant deux termes consécutifs de la suite : (où f est une fonction) .

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

Calculer U_1 ; U_2 ; U_4 et représenter graphiquement les termes de cette suite.

Solution : $n = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = 4, \dots$

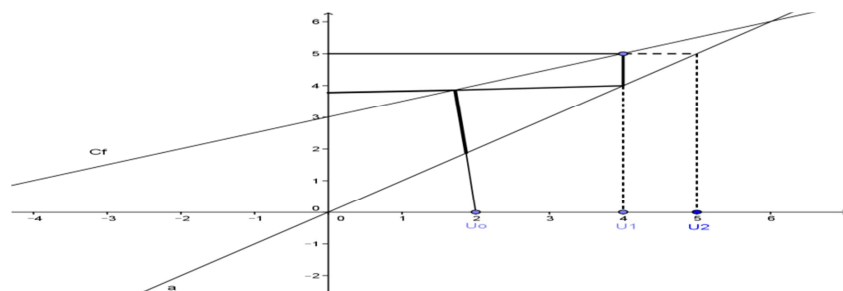
Représentations les termes de cette suite graphiquement

Soit $f: x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ la fonction associée à la suite (U_n) .

$$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2}U_n + 3 \text{ et } U_0 = 2 ;$$

$$U_1 = f(U_0) = 4 ; U_2 = f(U_1) = 5 ; U_3 = f(U_2) = \frac{11}{2} ; U_4 = f(U_3) = \frac{23}{4}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on trace la courbe (Cf.) de f et la droite d'équation : $y = x$



Activité 2 : Etudier le sens de variation d'une suite :

Consigne 1 : Soit (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n}{n+1}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- 1- Calcule puis compare les résultats $U_0 ; U_1 ; U_2$
- 2- Détermine U_{n+1}
- 3- Compare U_{n+1} et U_n
- 4- la suite (U_n) est – elle croissante ou décroissante sur $]0 ; +\infty[$?

Consigne 2 : On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}.$$

- 1- Démontrer par récurrence : pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $U_n < 3$.
- 2- Etudier le sens de variation de la suite U

Consigne 3 : Etudie la variation de W définie par :

$$w_0 = 6 \text{ et } w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$$

Synthèse partielle :

Définitions :

- ☞ On dit que la suite (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} - U_n \geq 0$ ou $U_n \leq U_{n+1}$

- ☞ On dit que la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} - U_n \leq 0$ ou $U_n \geq U_{n+1}$
- ☞ On dit que la suite (U_n) est constante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} = U_n$
- ☞ On dit que la suite (U_n) est stationnaire à partir du rang n_0 ; Si pour tout entier naturel n dès que $n \geq n_0$ alors $U_n = U_{n_0}$
- ☞ On dit que la suite (U_n) est à termes positifs, si pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$

Remarques : Si $U_n > 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$.

$$[(U_n) \text{ est croissante}] \Leftrightarrow \left[\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \right].$$

$$[(U_n) \text{ est décroissante}] \Leftrightarrow \left[\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \right];$$

Théorème :

Soit (u_n) une suite définie par $U_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$

Si f est strictement croissante, alors (U_n) est strictement croissante.

Si f est strictement décroissante, alors (U_n) est strictement décroissante.

NB : Ce théorème ne s'applique pas si la suite (U_n) est définie par récurrence ($U_{n+1} = f(U_n)$). Les variations de la fonction f et de la suite (U_n) ne sont pas toujours les mêmes.

Activité 3 : comparaison de deux suites

Consigne : Soient deux U et V définies par :

$$a) U_n = \frac{2n-1}{n-2} \text{ et } V_n = \frac{3}{n-2}$$

$$b) U_n = \frac{1}{n^2} \text{ et } V_n = \frac{1}{2n+1}$$

Compare U et V dans les cas ci – dessus

Synthèse partielle :

Définition : U et V sont des suites de même ensemble de définition, n_0 un nombre entier naturel. Lorsque pour tout nombre entier naturel n supérieure à n_0 , $U_n \geq V_n$,

- ☞ On dit que : U est supérieure à V à partir de n_0 .
- ☞ On dit aussi que : V est inférieure à U à partir de n_0

Activité 4: Suites minorées, majorées et bornées

Consigne 1 :

- 1- soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$.
Démontre par récurrence que $U_n \leq 5$;
- 2- soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\frac{3n}{n+1}$
 - a) montre que la suite U_n est positive ;
 - b) Démontre que la suite (U_n) est majorée par 3

Consigne 2 :

- 1- On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = 1 + \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 - 2U_n + 4} \end{cases}$$
 - a) Calculer U_1 ; U_2
 - b) Justifier que $\forall n > 1, U_n \geq 1$;
- 2- soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général: $n^2 - 2n - 2$
 - a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = (n - 1)^2 - 3$
 - b) En déduis que la suite (V_n) est minorée par - 3

Consigne 3 :

Soit W la suite définie par sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} W_0 = 1 \\ W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n - 1 \end{cases}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq W_n \leq 1$

Solution : $W_0 = 1$ et $W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n - 1$;

$$(U \text{ est borné par } -2 \text{ et } 1) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} ; -2 \leq W_n \leq 1)$$

Démonstrations

$$n = 0 ; W_0 = 1 \text{ on a : } -2 \leq W_0 \leq 1 \text{ vraie}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $-2 \leq W_n \leq 1$;

montrons que $-2 \leq W_{n+1} \leq 1$ avec

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n - 1 ; \quad -2 \leq W_n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2}W_n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq \frac{1}{2}W_n - 1 \leq -\frac{1}{2} \leq 1. \text{ Vrai à l'ordre } (n+1) .$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq W_n \leq 1) \Leftrightarrow \text{D'où la suite } W \text{ est bornée par } -2 \text{ et } 1$$

Synthèse partielle :

Définitions : Suites majorées ; minorées et bornées :

- ☞ On dit qu'une suite numérique (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$; M est un majorant de la suite (U_n)
- ☞ On dit qu'une suite numérique (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n$; m est un minorant de la suite (U_n) .
- ☞ Une suite numérique (U_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$.

Activité 5 : Suites Arithmétiques :

Consigne 1 : Le 01/01/2017 un journal de sensibilisations pour les reboisements compte 12000 abonnés. Le service d'abonnement a noté que, chaque mois, 1000 abonnements arrivent à l'échéance. Sur ces 1000 abonnés, 750 sont renouvelés. De plus chaque mois 320 nouveaux abonnements sont souscrits. On note u_1 le nombre d'abonnés à la date

du 01/01/2017, u_2 le nombre d'abonnés à la date du 01/02/2018, et ainsi de suite, de mois en mois.

- 1) Donne les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 ;
- 2) Justifie que la variation absolue lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant est constante. Quelle est cette variation ;
- 3) Est-ce que ce journal risquerait de perdre un jour ses abonnés ? justifie ta réponse

Consigne 2 : Pour préparer une course et bien maintenir sa santé, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive. Il commence par courir 3000 m. Après 1 jour d'entraînement, il court 3150 m. Après 2 jours, il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille. On note u_n la distance parcourue après n jours d'entraînement.

- 1) Calculer u_3 et u_4 .
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 3) Donner la variation de la suite (u_n) .
- 4) Exprimer u_n en fonction de n .
- 5) calcule puis conclus $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$ et $\frac{10}{2} \times (u_1 + u_{10})$
- 6) Quelle distance aura-t-il parcourue au total après 10 jours d'entraînement ?

Synthèse partielle !

Définition : On appelle suite arithmétique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme :

$U_{n+1} = U_n + r$; où r est un réel appelé raison de la suite (U_n) .

Sens de variations : Une suite arithmétique (U_n) est croissant si r est positive ; décroissante si r est négative et constante si r est nulle

Expression du terme général U_n en fonction de U_p ; n et r :

Soit une suite arithmétique (U_n) de 1^{er} terme U_p et de raison r .

$$U_n = U_p + (n - p)r \Leftrightarrow U_n - U_p = (n - p)r ; (\forall p \in \mathbb{N}; p \leq n)$$

- Si le 1er terme est U_0 alors $U_n = U_0 + nr$
- Si le 1er terme est U_1 alors $U_n = U_1 + (n - 1)r$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit (U_n) une suite arithmétique de 1er terme U_0 et de raison r .

Posons : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$S_n = U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + (U_0 + 3r) + \dots + (U_0 + nr) \Leftrightarrow$$

$$S_n = U_0 + U_0 + \dots + U_0 + (1 + 2 + 3 + \dots + n)r \Leftrightarrow$$

U_0 à $n + 1$ fois

$$S_n = (n + 1)U_0 + \frac{n(n + 1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{(n + 1)}{2} [2U_0 + nr] \text{ ou } S_n = \frac{(n + 1)}{2} [U_0 + U_n]$$

(Somme des $n + 1$ premiers termes)

Si le 1er terme est U_1 alors on a :

$$S_n = \frac{n}{2} [2U_1 + (n - 1)r] \text{ ou } S_n = \frac{n}{2} [U_1 + U_n]$$

(Somme des n premiers termes)

D'une façon générale : Soit (U_n) une suite arithmétique de

1^{er} terme U_p et de raison r

$$S_n = \frac{(n - p + 1)}{2} [2U_p + (n - p)r] \text{ ou } S_n = \frac{(n - p + 1)}{2} [U_p + U_n]$$

Evaluation 1 : Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 5$; $U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2}$ pour tout entier naturel n . On définit les termes de la suite (U_n) par la relation : $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ pour tout entier naturel n .

1. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$
2. Pour tout entier naturel ; exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .
3. En déduire la limite de la suite (U_n)
4. Calcule la somme de 15 premiers termes de la suite (V_n)

Evaluation 2 : un jardinier doit arroser les pieds de chacun des arbres formant une rangée de la plantation. La distance entre le deux arbres consécutif est 5 m et le puits est situé à 8 m de premier arbre

- 1) Quelle est la distance du puits au premier arbre ? au 2^e arbre ? au 3^e arbre ? au 4^e arbre ?
- 2) On désigne par d_n la distance de puits au nième arbre.
 - a) Donne la nature de la suite d_n en précisant son premier terme et sa raison ;
 - b) Calcule d_{n+1} en fonction de d_n . puis d_n en fonction de n
- 3) Le jardin fait un trajet aller – retour au puits pour chaque arbre : calculer la distance qu’il doit parcourir pour arroser les sept arbres et revenir au puits

Activité 6 : Suites géométriques :

Consigne 1 : Un capital de 12800 euros est placé le 01/01/2014 avec un taux d’intérêt annuel de 6,25%. Tous les ans les intérêts sont cumulés au capital. Pour tout entier n , on note C le capital correspondant au 1^{er} janvier 2014 + n .

- 1) Donner les valeurs de C_0 ; C_1 ; C_2 ; C_4 ;
- 2) Démontrer que pour tout entier n , le quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ est constant.

- 3) Que pensez – vous du sens de variations de la suite (C_n) ?

Consigne 2 : On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s’élèvent à 4% par an. On note u_n la valeur du capital après n années.

- 1) Calcule u_1 ; u_2 et u_3 .
- 2) Exprime u_{n+1} en fonction de u_n .
- 3) Donne la variation de la suite (u_n) .
- 4) Exprime u_n en fonction de n .

- 5) calcule la somme $S = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_{20}$ et $u_5 \times \frac{1 - (1,04)^{15}}{1 - 1,04}$

Synthèse partielle :

Définition : On appelle suite géométrique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $U_{n+1} = qU_n$ où q est un réel appelé raison de la suite.

Expression du terme général U_n :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1^{er} terme U_p et de raison q .

$$U_n = U_p * q^{n-p} \quad (\forall p \in \mathbb{N}; p < n)$$

- Si le 1^{er} terme est U_0 alors $U_n = U_0 * q^n$; ($p = 0$)
- Si le 1^{er} terme est U_1 alors $U_n = U_1 * q^{n-1}$; ($p = 1$)

Somme des termes consécutifs d’une suite géométrique :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1^{er} terme U_0 et de raison q .

Posons : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$-qS_n = -qU_0 - qU_1 - qU_2 - \dots - qU_n$$

$$(1 - q)S_n = U_0 - qU_0 + U_1 - qU_1 + \dots + U_n - qU_n$$

$$\Leftrightarrow (1-q)S_n = U_o - qU_n$$

$$\Leftrightarrow (1-q)S_n = U_o - qU_o * q^n \Leftrightarrow (1-q)S_n = U_o(1 - q^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow S_n = U_o * \frac{[1-q^{n+1}]}{1-q}$$

☞ Si le 1^{er} terme est U_1 alors : $S_n = U_1 * \frac{1-q^n}{1-q}$ avec $q \neq 1$

D'une manière générale on a la formule

$$S_n = U_p * \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1$$

☞ Si $q = 1$ alors on a : $S_n = nU_1$

Limites d'une suite géométrique :

Soit une suite géométrique de raison q et de terme général U_n .

Si $|q| < 1$ alors (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

Si $|q| > 1$ alors (U_n) diverge

Limites de la somme des termes d'une suite géométrique :

* **Si $q = 1$ alors $S_n = nU_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_1 = +\infty$**

* **Si $q > 1$ alors $S_n = U_1 * \frac{1-q^n}{1-q}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$**

* **Si $q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{U_1}{1-q}$**

Progressions Arithmétiques et géométriques :

Soit la progression de trois termes x ; y ; z

$(x ; y ; z \text{ sont en progression arithmétique}) \Leftrightarrow (x + z = 2y)$

$(x ; y ; z \text{ sont en progression géométrique}) \Leftrightarrow (x * z = y^2)$

Evaluation 1 :

On souhaite étudier la suite (U_n) de premier terme $U_o=5$ définie par la relation de récurrence suivante : $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; On définit la suite $V_n = U_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
2. Exprimer V_n en fonction du rang n .
3. En déduire l'expression de U_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de la suite (U_n)

Evaluation 2 : Un paysan possède un où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir, il décide de vendre chaque année les 5% de pieds existants et plante 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50000 pieds en 2015. En désignant X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

- 1) a) Détermine le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 ? Et en 2017 ?
b) Exprime X_{n+1} en fonction de X_n
- 2) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60000 - X_n$
a°) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et 1^{er} terme ;
b°) Exprime U_n en fonction de n puis en déduis X_n en fonction de n ;
c°) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
d°) Calcule la limite de la suite (X_n) . Conclure

Activité 7 : Suites convergentes –Suites divergentes :

$$((U_n) \text{ converge}) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$$

(Si $l = +\infty$ ou $-\infty$ ou n'existe pas) Alors (U_n) diverge

Suites définies par $U_n = f(n)$:

Dans ce cas on calcule directement la limite en $+\infty$.

Suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$:

Si (U_n) a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est une solution de l'équation : $f(x) = x$. (la solution de l'équation $f(x) = x$ est la limite éventuelle de (U_n))

Etude de quelques suites récurrentes :

$U_{n+1} = a U_n + b$; ($a \neq 0$; $b \neq 0$) : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = ax + b$.

Soit α la solution de l'équation $f(x) = x$. On pose $V_n = U_n - \alpha$. On étudie la convergence de (V_n) puis on déduit celle de (U_n) .

Consigne 1 :

- 1- On donne la suite numérique (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+5}$.
étudier le comportement de (U_n) pour les grandes valeurs de n ;
- 2- Soit $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$
 - a) Déterminer la limite éventuelle α de cette suite (U_n) ;
 - b) On pose $V_n = U_n - \alpha$. Etudier la convergence de (U_n) .

Consigne 2 :

Etudier la convergence de la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \end{cases}$

Solution : La suite U_n est du type : $U_n = f(n)$. f étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$

La droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à la représentation graphique (Cf

Les termes U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 sont de plus en plus proches de 3. La distance entre U_n et 2 devient aussi petite que l'on veut dès que n est un

nombre entier suffisamment grand. $U_n \rightarrow 2$. On dit que la suite (U_n) est une suite convergente et qu'elle converge vers 2.

Synthèse partielle :

Théorème 1 : (admis)

- ❖ Toute suite croissante et majorée est convergente ;
- ❖ Toute suite décroissante et minorée est convergente ;
- ❖ Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$;
- ❖ Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$;

Théorèmes généraux étendus à $\overline{\mathbb{R}}$

On considère deux suites (U_n) et (V_n) . On suppose que :

Si (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes respectivement vers l et l' .

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = l + l' \text{ sauf si } (l + l') \text{ est une forme indéfinie}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n \times V_n) = l \times l' \text{ sauf si } (l \times l') \text{ est une forme indéfinie}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n} \right) = \frac{l}{l'} \text{ sauf si } \frac{l}{l'} \text{ est une forme indéfinie}$$

Théorème 2 : Soient (U_n) et (V_n) deux suites

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = +\infty$$

Théorème 3 : (comparaison des limites de deux suites)

Soient (U_n) ; (V_n) deux suites. on suppose que à partir d'un

certain rang $U_n \leq V_n$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$$

Théorème 4 :(Gendarmes)

Soient (U_n) ; (V_n) et (W_n) trois suites telles que (U_n) et (V_n) convergent vers l et

$U_n \leq W_n \leq V_n$, alors la suite (W_n) converge vers l .

Evaluation 1: On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 1 \end{cases}$$

- 1) représente graphiquement les cinq premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe n des abscisses.
- 2) On pose $V_n = U_n - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{R}$)
 - a) Déterminer α pour que (V_n) soit une suite géométrique.
 - b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4 - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$
 - c) $\forall n \in \mathbb{N}$; on note $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Trouver l'expression de S en fonction n .
 - d) Déterminer les limites des suites (u_n) et (S_n) .

Evaluation 2 :

- 1-L'Opération Puits, une entreprise de forage estime le coût d'un puits à grand diamètre comme suit :
 - ✓ le premier mètre creusé coûte 1000 F ;
 - ✓ le second mètre creusé coûte 1050 F et chaque mètre creusé coûte 50 F de plus que le précédent. Quelle serait la profondeur maximale de ce puits si le crédit alloué à l'entreprise est de 519.750 F ?
- 2- Une société Forestière décide de créer un bosquet (Petit bois, touffe d'arbres) à chaque kilomètre entre deux villes A et B distant de 300 Km.

- ✓ Au premier kilomètre le bosquet compte 15 arbres ;
- ✓ Au second kilomètre le bosquet compte 22 arbres et à chaque kilomètre qui suit le bosquet compte 7 arbres de plus que le précédent.

- a) Quel est le nombre d'arbres que compte le dernier bosquet ?
- b) Quel est le nombre total d'arbres que la société doit planter ?

Evaluation 3 : Un épargnant dispose au 1^{er} janvier 2006 d'un capital $C_0 = 10\,000\text{F}$ qu'il place à la Bank of Africa (BOA) à un taux de 6% l'an. Au bout de chaque année le capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par C_n la valeur du capital au bout de n années.

- 1) Calculer C_1 ; C_2 ; C_3 .
- 2) Démontrer que : $C_n = C_0(1,06)^n$
- 3) Au bout de combien de temps n le capital C_0 aura-t-il doublé ?
- 4) En supposant le prix du marché stable, en quelle année son capital peut payer une voiture dont le prix est 20 000F ?

Evaluation 4 : Un fonctionnaire consacre 80% de son revenu à une épargne. Ce fonctionnaire voit son revenu annuel augmenter de 3% par an et décide de diminuer la part de l'épargne dans son revenu annuel de 2,5% par an. Le revenu initial du fonctionnaire est $R_0 = 400\,000\text{ F}$. On désigne par R_n le revenu annuel du fonctionnaire et E_n l'épargne annuelle au bout de n années ($n \in \mathbb{N}$).

- 1) Calculer l'épargne initiale E_0 du fonctionnaire.
- 2) Calculer le revenu R_1 et l'épargne E_1 de l'année suivante ($n = 1$) ;
- 3) Calculer le revenu R_2 et l'épargne E_2 de l'année suivante ($n = 2$) ;
- 4) Exprimer R_1 en fonction de R_0 et n ; puis E_n en fonction de E_0 et n
- 5) Calculer la limite de E_n quand n tend vers $+\infty$.

Evaluation 5 : On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son terme général : $U_n = \frac{(-1)^{n \times 5}}{2^n}$

- 1) Calcule $U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5$.
- 2) Montre que cette suite est la suite géométrique dont on précisera la raison
- 3) Exprime U_n en fonction de U_1 et de n .
- 4) Calcule $\sum_{i=1}^9 U_i$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Evaluation 6 : On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_n = \frac{1}{4}U_{n-1} + 3 \\ U_0 \text{ donné} \end{cases}$$

- 1) Etudie le cas où $U_0 = 4$.
- 2) On suppose $U_0 \neq 4$. Montrer qu'il existe une suite géométrique (W_n) telle que $U_n - W_n$ soit indépendante de n . Exprime U_n en fonction de n et U_0 . En déduis la limite de (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$

Evaluation 7 : (U_n) est une suite géométrique de raison 3 et $U_1 = 2$.

- a) Calcule U_n en fonction de n ;
- b) Calcule la somme $U_1 + U_2 + \dots + U_7$.
- c) (V_n) est une suite arithmétique de raison r et $V_1 = 2$.

Exprime V_n en fonction de n puis calcule : $V_{30} + V_{31} + V_{32}$

Evaluation 8 :

(U_n) est une suite arithmétique définie par $U_3 = 2$ et $U_7 = 14$

- a) Déterminer la raison r de cette suite, puis exprimer U_n en fonction de n .
- b) Calculer $S = U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_{20}$

Evaluation 9 : soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

- a) Exprime V_n en fonction de n et montre (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1er terme et la raison.
- b) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$.
- c) Utilise la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n . En déduis U_n en fonction de n . calcule la limite de U_n .

Evaluation 10 : Une observation faite par un journal sur ses abonnés a permis de constater, pour chaque année un taux de réabonnement de 80% ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés. On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

- 1) Explique pourquoi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 5000$
- 2) Soit (U_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 25000 - a_n$.
 - a) Exprime U_{n+1} en fonction de U_n .
 - b) Déduis que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. c) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprime U_n en fonction de n . En déduis l'expression de a_n en fonction de n .

Evaluation 11 : Soit la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = e^{2n+1}$.

- a) Calcule U_0, U_1, U_2 .
- b) Précise la nature et la raison de la suite (U_n) .
- c) Calcule en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Evaluation 12 : Soit la suite (U_n) définie par $U_1 = \frac{2}{3}$ et pour tout $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2}$$

- 1) Calcule U_2 et U_3 (U_n) est – elle une suite arithmétique ? Est – elle une suite géométrique ?

- 2) Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = 3 - U_n$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
- 3) Exprime V_n en fonction de n . En déduis U_n en fonction de n .
Calcule la limite de U_n en $+\infty$

Evaluation 13 : Soit a et b deux réels strictement positifs.

On définit la suite (U_n) , pour tout entier naturel n , par $U_0 = a$; $U_1 = b$;
 $U_{n+2} = U_{n+1} + 6U_n$.

On considère les suites (V_n) et (W_n) définies, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = U_{n+1} - 3U_n \text{ et } W_n = U_{n+1} + 2U_n$$

- 1) Montre que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $V_0 = b - 3a$. Déterminer, pour tout entier naturel n , V_n en fonction de n , a et b .
- 2) Montrer aussi que (W_n) est une suite géométrique et exprimer W_n en fonction de n , a et b .
- 3) En déduire U_n en fonction de n , a et b .
- 4) Montrer que si (U_n) est une suite géométrique, alors sa raison ne peut être que $q = -2$ ou $q = 3$.
- 5) déterminer la limite de la suite (U_n) .

Evaluation 14 :

I- On considère la suite (V_n) définie par :
$$\begin{cases} V_1 = 1 \\ 5V_{n+1} = V_n + 8 \end{cases}$$

- 1) Calcule V_2 ; V_3 ;
- 2) On pose $U_n = V_n - 2$. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.
- 3) Démontrer que la suite (V_n) est convergente et trouver sa limite
- 4) Calcule. $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$;
- 5) Calcule la limite de S_n

II – Soient a, b, c, d, e cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r telle que :
$$\begin{cases} a + b + d + e = 60 \\ d + e = 42 \end{cases}$$
.

- 1) Exprimer a, b, d et e en fonction de c et r .
- 2) Déterminer les nombres réels a, b, c, d, e .

Evaluation 15 : On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008. Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5% par an depuis le 1^{er} janvier 2008.

- 1) Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 2008 et le 1^{er} janvier 2014. Donner une réponse à 0,1 % près.
- 2) À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1^{er} janvier à l'aide d'une suite : Pour tout entier naturel n , on note un le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année 2008 + n . Au 1er janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.
 - a) Que vaut U_0 ?
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = 1,035^n$.
 - c) Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier

Evaluation 16 : On ne suppose qu'un pin d'un âge supérieur à 10 ans à une croissance régulière annuelle de 40 cm de hauteur. On note (h_n) la hauteur en mètre du pin) l'âge n (pour $n \geq 0$)

- 1) En supposant dans cette question que $h_{10} = 22$, calculer h_{11} et h_{12}
- 2) Montrer que la suite (h_n) $n \geq 0$ est une suite arithmétique
- 3) On suppose qu'un pin de 10 ans à une hauteur de 17 m. quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 22 ans ?

- 4) On ne suppose qu'un pin de 28 ans à une hauteur de 25 m. quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 18 ans ?
- 5) Représenter graphiquement pour n compris entre 10 et 30, la hauteur d'un pin que mesure 15m à 10ans

Evaluation 17 : Mme Tranquille souhaite avoir une activité physique, elle choisit la marche. Elle décide de marcher 15 minutes le 1^{er} jour, 30 minutes le 2^e jour, 45minutes le 3^e jour et ainsi de suite. Son apport énergétique journalier avant toute activité physique est $U_1 = 8.500$ kj. Sachant que 15 minutes de marche consomment 250 kj, elle augmente son apport nutritionnel en correspondance avec son activité.

- 1) Calculer les apports nutritionnels journaliers : U_2 et U_3 correspondants à 15 et 30 minutes de marche.
- 2) Donne en justifiant la nature de la suite formée par les nombre U_1 ; U_2 ; U_3
- 3) Déterminer à l'aide d'un tableau ou d'une calculatrice l'apport nutritionnel correspondant à 2h 30 mn et à 05h 00 de marche.

Evaluation 20 : Les suites numériques (U_n) et (V_n) définies par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n + 3V_n) \\ V_0 = 4 \text{ et } V_{n+1} = \frac{1}{4}(V_n + 3U_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1) Soit la suite $W_n = U_n + V_n$. Montrer que W_n est une suite constante. Donner sa valeur numérique.
- 2) Soit la suite $X_n = U_n - V_n$;
 - a) Montrer que la suite X_n est une suite géométrique. Exprimer X_n en fonction de n .
 - b) Etudier la convergence de X_n ;
 - c) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

Evaluation 21 : On donne la suite (U_n) définie par : $U_n = 5^n + 3 - n$

- 1) Calcule les 5 premiers termes de cette suite.
- 2) Démontrer qu'elle n'est ni arithmétique ni géométrique. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
- 3) a) Soit V_n la suite définie par n $V_n = 5^n$. On pose $S'n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$. Calculer $S'n$ en fonction de n .
 b) soit $W_n = 3 - n$. On pose $S''n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$. Calculer $S''n$ en fonction de n .
 c) En déduire S_n en fonction de n .

Evaluation 22

- 1) On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n} \end{cases}$
 - a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n on a, $U_n > 0$
 - b) Calculer U_1, U_2, U_3, U_4 .
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose $T_n = \frac{1}{U_n}$.
 - a) Calcule $T_0; T_1; T_2; T_3; T_4$
 - b) Montrer que la suite (T_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c) En déduire une expression de U_n en fonction de n . Calculer U_{2003} .

Evaluation 23 : On considère la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $U_n = \frac{n}{e} + e^{-n}$.

- 1) Montrer que la suite (V_n) définie pour tout nombre entier naturel par $V_n = \frac{n}{e}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 2) Montrer que la suite (W_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $W_n = e^{-n}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

- 3) Calculer en fonction de n : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $S'_{n1} = W_0 + W_1 + \dots + W_n$. En déduis $S_{n2} = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
Etudier lorsqu'elles existent, les limites respectives de S_n , S'_{n1} , S_{n2} lorsque n tend vers l'infini.

Evaluation 24 : À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de $1\,500\text{ m}^2$ entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20% de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse.

Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon. Pour tout nombre entier naturel n , on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

- 1) Calculer U_1 .
- 2) Justifier que, pour entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8 U_n + 50$.
- 3) On considère la suite (V_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $V_n = U_n - 250$.
 - a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison. ;
 - b) Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.
 - c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
- 4) Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que : $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$. Interpréter le résultat obtenu.

Evaluation 25 :

Partie A : On considère la suite (u_n) définie par $U_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,9U_n + 1,2$.

- 1) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 12$.
 - a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer V_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
- 2) Déterminer la limite de la suite (V_n) et en déduire celle de la suite (U_n) .

Evaluation 26 : Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.

En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.

On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$.

On a donc $U_0 = 40\,000$. On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 9\,600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).

- 1) La valeur de U_1 est : (a) 6 200 (b) 35 000 (c) 36 200 (d) 46 200
- 2) La suite (V_n) est : (a) géométrique de raison $-12,5\%$
(b) géométrique de raison $-0,875$ (c) géométrique de raison $0,875$
(d) géométrique de raison $-9\,600$.
- 3) La suite (U_n) a pour limite : (a) $+\infty$; (b) 0 ; (c) 1 200 ; (d) 9 600

Evaluation 27 : On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville. Chaque année, 30% des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au

club. De plus, chaque année, 10% des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club. On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'est pas inscrite. La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20% des habitants de la ville se sont inscrits. On a donc $g_0 = 0,2$.

- 1) Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?
- 2) (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1$.
- 3) Pour tout entier naturel, on pose $Un = g_n - 0,125$. Montrer que la suite (un) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 4) Déterminer le sens de variation de la suite (Un) .
- 5) Montrer que, pour tout entier n , $g_n = 0,125 + 0,075 \times 0,2^n$.
Comment la proportion de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années

Evaluation 28 : Un jardinier veut creuser un puits dans son jardin. Il s'adresse à deux groupes d'ouvriers qui lui proposent le marché suivant :

Groupe A : Le 1^{er} mètre est creusé à 5000F, pour chaque mètre supplémentaire, le coût de creusement augmente de 600F. (Exemple : le coût du 2^e mètre est 5600F)

Groupe B : Le 1^{er} mètre est creusé à 5000F, pour chaque mètre supplémentaire, le coût de creusement augmente de 10% par rapport au coût de mètre précédent (Exemple : Le coût du 2^e mètre est $5000 + 5000 \times 10\% = 5500$)

- 1) Calcule le coût de creusement des 3^e ; 4^e ; et 5^e mètres par chacun de deux groupes (les résultats seront arrondis au franc près)
- 2) Si le jardinier a un puits de 3m de profondeurs, quel groupe choisira – t – il pour faire le travail ? justifie votre réponse.
- 3) A partir de quelle profondeur le coût de creusement du mètre par le groupe A sera moins cher que pour le groupe B ?
- 4) Quel est le coût total de creusement d'un puits de 5m par chacun des groupes ?

Evaluation 29 : (U_n) est une suite numérique de premier terme U_0 . On considère les cas suivants :

- 1) Si (U_n) est une suite géométrique du premier terme $U_0 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$
 - a) Calcule U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4 ;
 - b) Pour quelle valeur de n a – t – on : $U_n = \frac{1}{2}$? , $U_n = \frac{1}{8}$? ;
- 2) si (U_n) est une suite arithmétique de raison r telle que : $U_0 = 1$; $U_1 = 3$; $U_2 = 5$;
 - a) Calcule la raison r de cette suite, b) Calcule U_3 ; U_4 ; U_5 et U_6

Evaluation 30: Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par : $U_1 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n$;

(V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$ et $V_5 = -20$

- 1°) a) calcule U_2 ; U_3 et U_4 ;
b) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Précise sa raison.
- 2°) a) Détermine le premier terme V_1 de la suite (V_n) ;
b) Donne l'expression de (V_n) en fonction de n puis calcule V_{10}

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE VII : DENOMBREMENT – PROBABILITE

Compétences :

☞ **Composantes, manifestations :**

Contenu(s) : Dénombrement – Probabilité

I- Dénombrement

☞ Etude d'exemples simples et variés de dénombrement.

On mettra en place des techniques de dénombrement par calcul direct (sans faire intervenir de formule) : Schéma arborescent, utilisation des suites à p éléments distincts ou autres techniques permettant de dénombrer tous les cas possibles. Puis on mettra en évidence l'intérêt de donner des formules qui permettent de résoudre un certain nombre d'exercices se ramenant au dénombrement d'applications injectives, de bijections, de parties d'un ensemble.

☞ Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini, nombre d'applications injectives d'un ensemble fini à p éléments dans un ensemble fini à n éléments (arrangement : notation A_n^p), nombre de bijections d'un ensemble fini à n éléments dans un ensemble fini à n éléments (permutations, notation : $n!$) ; nombre de parties à p éléments d'un ensemble de n éléments

(combinaisons, notation C_n^p)

On fera vérifier les relations : $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Triangle de Pascal

II- Probabilité

- ☞ Sur des exemples simples on introduira le vocabulaire : Épreuve ; Univers, Éventualité ainsi que les notions d'Événement, d'Événement réalisé, d'Événement certain, d'Événement impossible, d'Événement contraire d'un événement, d'Événements incompatibles.
- ☞ Pour une épreuve donnée on étudiera la probabilité qu'un événement se réalise. On calculera à partir des dénombrements cette probabilité en se limitant au cas de l'équiprobabilité des éventualités.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles :**
- **Ressources financières :**

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation :

Définis les mots et expressions suivants en donnant un exemple dans chaque cas : Ensemble ; élément ; Ensemble fini ; Cardinal d'un ensemble ; Intersection ; Réunion ; Inclusion ; Complémentaire d'un ensemble :

Réponse

Un ensemble est une collection d'objectifs distincts. Les objets de cet ensemble sont appelés les **éléments**.

Exemple 1: $F = \{a, b, c, d\}$ est un ensemble et a, b, c, d sont des éléments.

Exemple 2 : Un troupeau de mouton est un ensemble dont les éléments sont des moutons

Remarque : Un ensemble ne contenant pas d'élément est un ensemble vide noté $\emptyset$ ou $\{\}$

- Un ensemble contenant un élément est un singleton,
- Un ensemble peut contenir d'autre ensemble.

Exemple : $\mathbb{N}$ contient l'ensemble des nombres pairs $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

Un ensemble fini : un ensemble est dit fini lorsqu'on peut compter le nombre d'éléments

Exemple : $A = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$ est un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini :

Définition : cardinal d'un ensemble fini E est le nombre de ses éléments. On note $\text{Card}(E)$

Exemple : $A = \{0 ; 1 ; 2 ; \}$; $B = \{a ; b ; c ; d\}$; $\text{Card}(A)=3$; $\text{Card}(B)=4$; $\text{Card}(\emptyset)=0$

Intersection : Soit A et B deux ensembles, on appelle l'**intersection** de A et B ; on note $A \cap B$ et se lit A inter B . l'ensemble des éléments communs à A et à B .

Exemple : $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 2, 5, 10, 15\}$; $C = \{a ; b ; c ; d\}$
 $A \cap B = \{0, 2, 5\}$; $A \cap C = \emptyset$

Remarque : $A \cap B = \emptyset$. On dit que A et B sont disjoints.

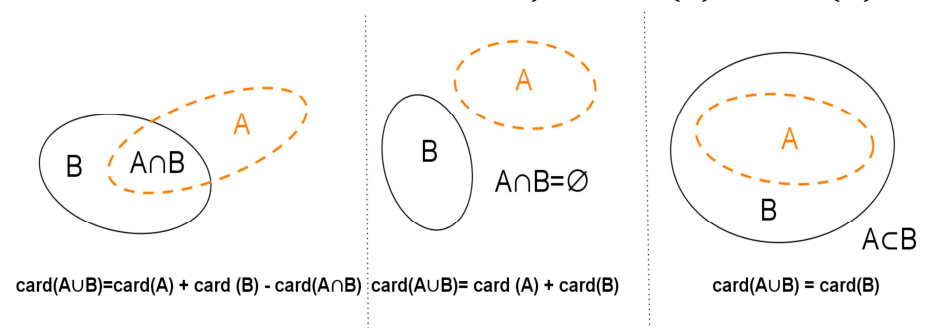
Réunion : On appelle **réunion** de deux ensembles A et B notée $A \cup B$ et se lit A union B l'ensemble des éléments appartenant A ou B .

Exemple : $A = \{0, 1, 2, a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$; $C = \{3 ; 4 ; 5 ; d\}$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, a, b, c\} ; A \cup C = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; a ; b ; c ; d\}$$

Propriétés : Soient A et B deux ensembles. On a :

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- **si** $A \cap B = \emptyset$ **alors** $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$



Inclusion : un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A est élément de B , on note $A \subset B$, qui se lit A **inclus** dans B . on dit que A est un sous ensemble de B ou une partie de B

Exemple : $A = \{a ; b ; c\}$; $B = \{1 ; 2 ; a ; b ; c\}$ alors $A \subset B$

Complémentaire d'un ensemble: A étant un sous ensemble de E , on appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A noté $C_E^A = \bar{A} = \{x \in E ; x \notin A\}$

Exemple : $E = \{a ; b ; c ; d ; e\}$; $A = \{b ; c\}$; $C_E^A = \bar{A} = \{a ; d ; e\}$

Remarque : si A et B sont des sous-ensembles de E , $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

Complément sur les ensembles

Ensemble des parties d'un ensemble :

L'ensemble des parties d'un ensemble E noté $P(E)$

Exemple : $E = \{a ; b ; c\}$; $P(E) = \{\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a ; b\} ; \{a ; c\} ; \{b ; c\} ; \{a ; b ; c\}\}$

Remarque: soit E un ensemble fini de $\text{Card}(E)=n$, alors $\text{Card}(P(E))=2^n$

Partition d'un ensemble :

Définition : les parties d'un ensemble E forment une partition E si :

- Elles sont disjointes deux à deux
- Elles sont non vides. Leur réunion égale à E

Propriétés : Soit E un ensemble fini et $E_L : E_2 \rightarrow E_p$ des ensembles formant une partition de E : on a :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}E_1 + \text{Card}E_2 + \text{Card}E_3 + \dots + \text{Card}E_p$$

Produit cartésien : Soient A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A et B on note $A \times B$ se lit A croix B, l'ensemble des couples (a ; b) tel que $a \in A$ et $b \in B$.

$$\text{On a: } A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Remarque: si $A = B$; $A \times B = A^2 = B^2$ alors $\text{Card}(A^2) = (\text{Card}A)^2$

Exemple : $A = \{1 ; 2\}$; $B = \{a ; b ; c\}$

A\B	A	b	C
1	(1 ; a)	(1 ; b)	(1 ; c)
2	(2 ; a)	(2 ; b)	(2 ; c)

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 2 \times 3 = 6$$

Situation problème :

Dans une classe de 11^{ème}S il y'a 30 élèves. 15 élèves étudient l'arabe et 18 élèves étudient l'allemand. Sachant que chaque élève étudie au

moins l'une des deux langues, déterminer le nombre d'élèves qui

- a) L'arabe et l'allemand à la fois ;
- b) L'allemand seulement ;
- c) L'arabe seulement ;

Activité 1 : Permutations – Arrangement - P-uplets –Combinaison

Consigne 1 :

- 1) Donne toutes les permutations des objets de l'ensemble (a ; b ; c)
- 2) Quel est le nombre de permutations possibles ?

Consigne 2 :

- 1) Donne tous les nombres de deux chiffres qu'on peut former avec les chiffres {1 ; 3 ; 4 ; 7} sans répéter un chiffre ;
- 2) Quel est le nombre de nombres de deux chiffres trouvés ?

Consigne 3 :

- 1) Range 2 à 2 avec répétitions l'ensemble d'objets {a, b, c} ;
- 2) Détermine le nombre de rangements possibles avec répétition ;

Consigne 4 :

Mamadou souhaite choisir trois lettres parmi A ; B ; C et D ;

- 1) Fais l'ensemble des combinaisons possibles de choix sans répétitions ;
- 2) Quel est le nombre de combinaisons possibles ?

Consigne 5 :

- 1) Donne toutes les combinaisons 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble {a, b, c} ;
- 2) Quel est le nombre de combinaisons possibles avec répétitions

Synthèse partielle :

Permutations

Notations : Le produit des n premiers nombres entiers positifs est appelé n factoriel et se note : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$

Convention : On a $0! = 1$.

Permutations d'objets distincts : Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de n objets distincts. Une permutation consiste à donner un ordre à ces n objets. Autrement dit une permutation est une suite.

Exemple : Voici toutes les permutations des objets de l'ensemble $\{a, b, c\}$: (a ; b ; c) (a ; c ; b) (b ; a ; c) (b ; c ; a) (c ; a ; b) (c ; b ; a)

Théorème : Le nombre de permutations de n objets, noté P_n est donné par : $P_n = n!$

Arrangements :

Définition : Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre entre 1 et n . Un arrangement des n objets pris k à k sans répétitions est un choix ordonné de k objets distincts parmi les n objets.

Exemple : Voici tous les arrangements 2 à 2 sans répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$: (a ; b) (a ; c) (b ; a) (b ; c) (c ; a) (c ; b)

Remarque : On choisit un objet dans l'ensemble d'objets, puis un deuxième qui doit être différent. L'ordre de sélection est important !

Théorème : Le nombre d'arrangements de n objets pris k à k sans répétitions, noté A_n^k par la formule suivante : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Propriétés : $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n!$; $A_n^1 = n$; $A_n^{n-1} = n!$

P-uplets d'un ensemble ou Arrangements avec répétitions

Définition : Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre naturel. Un arrangement des n objets pris k à k avec répétitions est un choix ordonné de k objets parmi les n objets. Il est possible de choisir plusieurs fois le même objet.

Exemple : Voici tous les arrangements 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble d'objets $\{a, b, c\}$: (a ; a) (a ; b) (a ; c) (b ; a) (b ; b) (b ; c) (c ; a) (c ; b) (c ; c)

Remarque : On choisit deux objets, pas forcément distincts, dans l'ensemble d'objets. L'ordre de sélection est important.

Théorème : Le nombre d'arrangements de n objets pris k à k avec répétitions, noté $\overline{A}_n^k$ est donné par la formule suivante : $\overline{A}_n^k = n^k$

Combinaison sans répétition

Définition : Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre entre 1 et n . Une combinaison de n objets pris k à k sans répétitions est un choix non ordonné de k objets distincts parmi les n objets.

Exemple : Voici toutes les combinaisons 2 à 2 sans répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$: $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$

Remarque : On choisit un objet dans l'ensemble d'objets, puis un deuxième qui doit être différent. L'ordre de sélection n'est pas important !

Théorème : Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k sans répétitions, noté C_n^k est donné par la formule suivante : $C_n^k = \frac{A_n^k}{p!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Propriétés : Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$

$$\text{On a : } C_n^{n-p} = C_n^p$$

Si de plus $0 < p < n$, alors on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

$$C_n^0 = 1 \quad ; \quad C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^1 = n \quad ; \quad C_n^{n-1} = n$$

Combinaisons avec répétitions

Définition : Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre naturel.

Une combinaison des n objets pris k à k avec répétitions est un choix non ordonné de k objets parmi les n objets. Il est possible de choisir plusieurs fois le même objet.

Exemple Voici toutes les combinaisons 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$: $\{a, a\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, b\}$; $\{b, c\}$; $\{c, c\}$

On choisit deux objets, pas forcément distincts, dans l'ensemble d'objets. L'ordre de sélection n'est pas important !

Théorème

Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k avec répétitions, noté $\overline{C}_k^n$ est donné par la formule suivante : $\overline{C}_k^n = C_{n+k-1}^k$ ou $\overline{C}_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Formule du Binôme de Newton : Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul. On a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$

Triangle de Pascal:

Ce triangle permet de retrouver les coefficients de la formule du binôme : C_n^p

Problème de Dénombrement:

Soit E un ensemble à n éléments

Tirages des boules dans une urne

Modélisation	Les p éléments ordonnés	Les p éléments distincts	Outils	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	OUI	NON	P listes	n^p
Tirages successifs sans remise	OUI	OUI	Arrangement	A_n^p
Tirages simultanés sans répétition	NON	OUI	Combinaison	C_n^p
Tirages simultanés avec répétition	NON	NON	combinaison	C_{n+p-1}^p

Evaluation 1 :

- 1) Un comité se compose de 7 membres. De combien de manières peut-on nommer le bureau comprenant le président, le vice-président, le secrétaire et le trésorier si les fonctions ne peuvent pas être cumulées ?
- 2) On considère les chiffres : 0, 4, 2, 3, 1 et 7.
Combien de nombres peut-on créer si on utilise tous les chiffres disponibles une seule fois ?
Combien de nombres à 4 chiffres peut-on créer si on utilise une seule fois les chiffres ci-dessus ?

Evaluation 2 :

- 1) Au sport-toto, on doit pronostiquer le résultat de 13 matches (gagné, perdu ou nul). Combien de pronostics différents existe-t-il ?
- 2) On considère les chiffres : 0, 4, 2, 3, 1 et 7.
Combien de nombres à 5 chiffres peut-on créer si on utilise les chiffres ci-dessus autant de fois que l'on veut ?
Combien de nombres à 8 chiffres peut-on créer si on utilise les chiffres ci-dessus autant de fois que l'on veut ?

Evaluation 3 :

- 1) On lance deux dés à 6 faces à partir d'un Goblet à dés. Combien y a-t-il de possibilités ?
- 2) On lance dix dés à 6 faces à partir d'un Goblet à dés. Combien y a-t-il de possibilités ?

Evaluation 4 : Développer les expressions suivantes :

$$(x + y)^4 ; (a - c)^3 ; (x + y)^5 ; (a + b)^7 ; (a - b)^6$$

Evaluation 5 : Une urne contient 7 boules noires, 5 boules rouges et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
- 2) Quel est le nombre de possibilités d'avoir :
 - a) 3 boules de couleurs différentes ?
 - b) 3 boules de même couleur ?
 - c) Au moins une boule blanche ?
 - d) Au plus deux boules rouges ?
 - e) Aucune boule noire

Evaluation 6 : Une boîte contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires.

Dénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boîte et que :

- a) le tirage est simultané
- b) le tirage est successif et sans remise
- c) le tirage est successif et avec remise

Activité 2 : Introduction de la probabilité

Consigne : A l'aide de vos connaissances antérieures, définis une expérience aléatoire puis cite quelques modèles

Synthèse partielle !

Expériences aléatoires et modèles

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un de ... sont des expériences aléatoires, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard.

A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé univers. Ses éléments sont appelés éventualités.

- ✓ Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés événements.
- ✓ Les événements formés d'un seul élément sont appelés événements élémentaires.
- ✓ Etant donné un univers Ω , l'événement Ω est l'événement certain.
- ✓ L'ensemble vide est l'événement impossible.
- ✓ L'événement forme des éventualités qui sont dans A et dans B est noté $A \cap B$ et se lit A inter B.
- ✓ L'événement forme des éventualités qui sont dans A ou dans B est noté $A \cup B$ et se lit A union B.

- ✓ Etant donné un univers Ω et un événement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitué un événement appelé événement contraire de A, note $\bar{A}$.
- ✓ A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

NB : Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un modèle de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé probabilité

Consigne 2 : Une urne contient deux boules rouges (R_1 et R_2) et deux boules blanches (B_1 et B_2), on tire simultanément 2 boules de cette urne

- a) Quel est l'univers Ω de cette expérience, quel est $\text{card } \Omega$
- b) Quel est l'évènement A 'tire une boule blanche'
- c) Quel est l'évènement B 'tire 2 boules de même couleur'
- d) Quel est l'évènement C 'tire 2 boules de même numéro'
- e) Quel est l'évènement D 'tire 2 boules telles que la somme de leur numéro soit = 2'
- f) Quel est l'évènement E 'tire 2 boules telles que la somme de leur numéro soit = 3'
- g) Quel est l'évènement F 'tire 2 boules telles que la somme de leur numéro soit = 5'

Solution

$$\Omega = \{(R_1 R_2); (R_1 B_1); (R_2 B_1); (R_2 B_2); (R_1 B_2); (B_1 B_2)\}; \text{card } \Omega = 6$$

$$A = \{(R_1 B_1); (R_2 B_1); (R_2 B_2); (R_1 B_2)\}; \text{card } A = 4$$

$$B = \{(R_1 R_2); (B_1 B_2)\}; \text{card } B = 2$$

$$C = \{(R_1 B_1); (R_2 B_2)\}; \text{card } C = 2; D = \{(R_1 B_1)\}; \text{card } D = 1$$

$$E = \{(R_1 R_2); (R_2 B_1); (R_1 B_2); (B_1 B_2)\}; \text{card } E = 4$$

$$F = \{\} = \emptyset \quad \text{card } F = 0, F \text{ est un événement impossible}$$

Activité 3 : Probabilités sur un ensemble fini

Consigne 1 : On lance deux fois de suite un dé équilibré.

- 1) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.
- 2) Calculer la probabilité des événements :

A : « on obtient un double » ; B : « on obtient 2 numéros consécutifs »

C : « on obtient au moins un 6 » ; D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

Synthèse partielle :

Définition : Soit $\Omega = \{R_1; R_2; R_3; \dots; R_n\}$ l'ensemble des réalisations possibles d'une expérience, $\text{card } \Omega = n$. Une probabilité sur Ω est la donnée des réels $P_1; P_2; \dots; P_n$ associées respectivement aux éventualités $R_1; R_2; \dots; R_n$ de Ω

- a) Chaque P_i est compris entre 0 et 1
- b) La somme de P_i est égale 1 i.e. $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

Parties de E	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\emptyset$	Événement impossible	$P(\emptyset) = 0$
E	Événement certain	$P(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ est l'événement contraire de A	$P(\bar{A}) = P(E) - P(A) = 1 - P(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A, B	A et B sont indépendants	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Evaluation 1 : On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

- A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »
- B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »
- C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap C)$ et $p(A \cup C)$.

Evaluation 2 : Soit P une probabilité définie sur un univers de possible Ω et soient A et B deux événements indépendants.

- 1) Démontre que A et $\bar{B}$ sont indépendants et qu'il en est de même de $\bar{A}$ et B et de $\bar{A}$ et $\bar{B}$;
- 2) On suppose que $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,6$. Calcule $p(A \cup B)$, $p(A \cup \bar{B})$; $p(\bar{A} \cup B)$ et $p(\bar{A} \cup \bar{B})$

Activité 4 : Calculs de probabilités :

Consigne 1 : on lance un dé cubique parfaitement équilibré

- 1) Déterminer l'univers Ω
- 2) Calculer la probabilité A « obtenir un résultat impair »
- 3) Calculer la probabilité B « obtenir un multiple de 3 »
- 4) Calculer la probabilité C « obtenir le chiffre 1 »

Synthèse partielle :

Définition1 : Soit Ω un univers et E un évènement de Ω la probabilité de E noté $P(E) = \frac{\text{card}E}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombredecasfavorable}}{\text{nombredecaspossibles}}$

Equiprobabilité :

Lorsque toutes les réalisations ont la même probabilité de se produire. On dit que l'expérience vérifie l'hypothèse de l'équiprobabilité : la probabilité de chaque élément (élémentaire) est $\frac{1}{\text{card}\Omega}$

Consigne 2 :

Une urne contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleues et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Calcule la probabilité des événements suivants

- 1) A="les trois boules sont rouges" ;
- 2) B="on a tiré une boule de chaque couleur" ;
- 3) C="aucune des trois boules n'est rouge" ;
- 4) D="au moins une des trois boules est rouge" ;
- 5) E="au moins une des trois boules est bleue" ;
- 6) F="au plus une des trois boules est bleue».

Consigne 3 : Une urne contient vingt boules numérotés de 1 à 20 ; les cinq premières sont rouges, les sept suivantes sont bleues, les huit suivantes sont jaunes.

- 1) Déterminer les probabilités suivantes :
 - a) A : "La boule tirée porte un numéro pair" ;
 - b) B : "La boule tirée est rouge" ;
 - c) C : "La boule tirée est rouge ou porte un numéro pair" ;
 - d) D : "La boule tirée est rouge et porte un numéro pair".
- 2) Que peut-on dire de l'égalité suivante ? $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Activité 5 : CONDITIONNEMENT

Arbres pondérés

Règles de construction : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.

La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Probabilités conditionnelles : Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B. $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Indépendance : Deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors :

$$\begin{cases} P_B(A) = P(A) \\ P_A(B) = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarque : Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

- 2 événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
- 2 événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Consigne 1 : Tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un test de certification en Anglais.

80% ont réussi le test. Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé. Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les événements T : « L'élève a réussi le test » et D : « L'élève a déjà redoublé ».

Représente cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré, en respectant certaines règles.

Consigne 2 : Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

- Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

- 1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
- 2) Quelle est la probabilité
 - a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?
 - b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?
 - c) qu'il ait un test positif ?
 - d) qu'il ait un test négatif ?
- 3) Calculer la probabilité
 - a) qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
 - b) qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?
- 4) Interpréter les résultats obtenus aux questions 3a et 3b.

Consigne 3 : On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jaunes numérotés 1 et 2, et un bleu numéroté 1.

On désigne respectivement par R, U et D les événements :

« Le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

Activité 6 : Probabilités totales

Définition : Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier ≥ 2 . Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- Pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, $A_i \neq \emptyset$.
- Pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1; 2; \dots; n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

Formule des probabilités totale : Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω .

Alors : $p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$

Ou $p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

Consigne 1: Trois machines M_1, M_2 , et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production d'une entreprise. On estime à 1,5%, 2% et 1% les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3 . On choisit une pièce au hasard dans la production. Calculer la probabilité de l'évènement B : « La pièce est bonne ».

Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'évènement : « La pièce est produite par M_i ». On peut illustrer la situation par un arbre pondéré :

Consigne 2 : Dans une usine d'automobiles, trois machine « a » ; « b » et « c » fournissent respectivement 25% ; 35% et 40% de la production de moteurs.

Certains de ces moteurs sont écartés comme défectueux, dans les proportions suivantes : 5% pour la chaîne « a », 4% pour la chaîne « b » et 1% pour la chaîne « c ».

On prend au hasard un moteur et on définit les événements suivants :

A : « le moteur est issu de la machine de la machine « a » »

B : « le moteur est issu de la machine de la machine « b » »

C : « le moteur est issu de la machine de la machine « c » »

D : « le moteur est défectueux »

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près

- 1) Traduis les données de l'énoncé en utilisant les notations de probabilités et trace un arbre pondéré illustrant la situation ;
- 2) Calcule $p(D)$;
- 3) Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la machine « a » sachant qu'il est défectueux ?
- 4) Calcule la probabilité qu'un moteur sorte de la machine « c » sachant qu'il n'est pas défectueux ?

Activité 7 : Loi de probabilité - Variables aléatoires

Définition :

- ☞ Une variable aléatoire X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P , a valeurs dans $\mathbb{R}$.
- ☞ X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ définies par : $p_i = p(X = x_i)$.
- ☞ L'affectation des p_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée P_X , est appelée loi de probabilité de X
- ☞ Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	P_3		P_n

Remarque : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$. On appelle respectivement espérance mathématique de X , variance de X et écart-type de X , les nombres suivants :

- ☞ l'espérance mathématique est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n (p_i x_i) ;$$

☞ la variance est le nombre V défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i + E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

☞ l'écart - type est le nombre $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$;

Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x , la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F : x \mapsto p(X \leq x)$

N.B : Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$; $F(x) = 1$ pour $x > x_n$

La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

Consigne 1 : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat « pile » et on perd 1 € pour chaque résultat « face ».

- 1) Quel est l'ensemble E des issues possibles ?
- 2) Soit X l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.
- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b) Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Consigne 2 : Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.

- 1) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.
- 2) Le jeu est-il favorable au joueur ?

Consigne 3 : Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
P(X = x_i)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

- a) Calculer l'espérance mathématique
- b) Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
- c) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

Activité 8 : Epreuve de Bernoulli – Loi binomiale

Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité $q = 1 - p$.

Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Pour une loi Binomiale n et p désignent de paramètres

La valeur moyenne (espérance) de X est $E(x) = np$

L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Consigne 1 : On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie non équilibrée 50 fois de suite et de manières indépendantes.

On considère que la probabilité de faire "pile" avec cette pièce est p (pile) = 80%

Soit X le nombre de lancers parmi les 50 lancers où l'on a obtenu le résultat "pile"

- 1) justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres
- 2) calculer les probabilités :
 - a) d'obtenir exactement 39 piles
 - b) d'obtenir exactement 41 piles
 - c) d'obtenir entre 39 et 41 piles
 - d) d'obtenir au plus, 2 piles
 - e) d'obtenir au moins, 2 piles
- 3) calculer $E(X)$ et interpréter la valeur obtenue
- 4) calculer $\sigma(X)$

Consigne 2 : Un garagiste choisit douze pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus

est suffisamment important pour assimiler ce choix de douze pneus à un tirage avec remise de douze pneus. On sait que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est 0,065.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de douze pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
- 2) Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut. Arrondir à 10^{-4} .

- 3) Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut. Arrondir à 10^{-4} .
- 4) est-il vrai que s'il change les 4 pneus d'une voiture, alors, il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un des pneus ait un défaut ? (justifier)

Evaluation 1: On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

- 1) combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
- 2) combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2 as peut – on constituer ?
- 3) combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

Evaluation 2 : Une association comprenant 20 personnes dont 12 hommes et 8 femmes désirent former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouver de combien de façon l'on peut former ce comité dans chaque cas :

- 1) chaque membre de l'association accepte de faire partir du comité
- 2) deux des hommes refusent d'en faire partir
- 3) monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble

Evaluation 3 : Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

- I) Dénombrer les cas possible à cette épreuve si :
 - 1) le tirage est simultané
 - 2) le tirage est successif sans remise
 - 3) le tirage est successif avec remise.
- II) Dénombrer les cas favorables ainsi que la probabilité dans chaque cas si :
 - 1) le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes

- 2) le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 verts et 1 jaune.
- 3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
- 4) Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
- 5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

Evaluation 4 : Dans une classe de 40 élèves :

- ☞ 25 aiment la mathématique
- ☞ 30 aiment le français
- ☞ 17 aiment la mathématique et le français

Trouver le nombre d'élève :

- a) qui aiment uniquement le français
- b) qui aiment uniquement la mathématique
- c) qui aiment la mathématique ou le français
- d) qui n'aiment aucune des deux matières

Evaluation 5 : Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

- 1) calculer la probabilité de chacune des évènements suivants :
 - a) aucune boule rouge n'est tirée
 - b) une boule rouge et une seule est tirée
 - c) deux boules rouges et deux seulement sont tirées
 - d) une boule rouge au moins est tirée
 - e) deux boules blanches au plus sont tirées
- 2) soit x la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
 - a) Donner la loi de probabilité de x ;
 - b) Calcule l'espérance mathématique et la variance de x ;
 - c) Calcule la probabilité de l'événement $1 \leq x \leq 2$

Evaluation 6 :

Dans tout l'exercice on suppose les tirage équiprobables ($n > IN$)

- 1) Une urne contient $(n + 1)$ boules vertes et $(n - 1)$ boules rouges
Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :
 - ☞ Si la boule est rouge, le joueur perd
 - ☞ Si la boule est verte, le joueur gagne
 - a) Quelle est la probabilité P_1 que le joueur gagne ?
 - b) Quelle est la probabilité P_2 que le joueur perd ?
- 2) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA. On définit la variable aléatoire x qui à chaque tirage associe le gain en FCFA. (le gain pouvant être négatif).
 - a) Déterminer la loi de probabilité de x
 - b) Calculer l'espérance mathématique de x
 - c) Pour quelle valeur de n , le jeu est – il équitable ? (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable x est nulle).

Evaluation 7

- 1) combien y'a-t-il de groupes possibles de deux personnes parmi 16 ?
- 2) combien y'a-t-il de groupes de 3 chevaux parmi 15 ?
- 3) combien de groupes de 6 billes parmi 49 ?
- 4) on lance 5 fois une pièce de monnaie avec pile = "succès"
combien - a-t-il de façons d'obtenir exactement 3 succès parmi les 10 lancers ?
- 5) on lance 7 fois un dé avec 6 = "succès" combien y'a-t-il de façons d'obtenir exactement 4 succès parmi les 7 lancers ?

Evaluation 8 : Un élève répond au hasard et avec indépendance à chacune des dix questions d'un Q.C.M. Pour chaque question, il y a trois propositions dont une seule est "bonne"

Soit X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'élève (chaque question est sur un point)

- 1) justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres
- 2) calculer la probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse
- 3) compléter le tableau suivant à 10^{-3} près

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
P(x=k)	0,017		0,195		0,228		0,057	0,016	0,003	0	0	1

- 4) quelle est la probabilité que l'élève ait la moyenne ?
- 5) quelle est la probabilité que l'élève n'ait pas la moyenne ?
- 6) calculer $E(X)$ et interpréter cette valeur

Evaluation 9 : Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5.

Quelle probabilité y a-t-il...

- e) que la première salle soit libre ?
- f) que les deux salles soient libres ?
- g) que l'une des deux salles au moins soit libre ?
- h) qu'une seule salle soit libre ?
- i) que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?
- j) Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
 A : « La première salle est occupée ».
 B : « La seconde salle est occupée ».

Evaluation 10 : Un caméléon daltonien pose sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est pose sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.

Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois cotes rouges visible, deux fois sur trois cotes vert visible.

Un couple de caméléons daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

- a) Calculez la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
- b) Les événements « le caméléon male est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
- c) Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculez la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

Evaluation 11 : Des lycéens préparent le BAC blanc de mathématique. Trois professeurs X ; Y et Z sont susceptibles de donner le sujet. D'après les statistiques des années précédentes et d'autres contraintes, les lycéens évaluent à :

- * 0,35 la probabilité pour que ce soit X qui choisisse le sujet;
- * 0,4 la probabilité pour que ce soit Y ;
- * 0,25 la probabilité pour que ce soit Z .

Par ailleurs, les lycéens redoutent qu'un certain chapitre noté r ne soit donné à l'examen. Ils pensent qu'ils ont 1 chance sur 10 que le sujet porte sur r si X le choisit, 2 chances sur 5 si c'est Y qui le choisit et enfin 41 chances sur 50 si c'est Z qui fait le choix du sujet.

- 1) Quelle est la probabilité que le sujet porte sur le chapitre r ?
- 2) Au BAC blanc, le sujet porte effectivement sur le sujet r . Quelle est alors la probabilité pour que le sujet ait été choisi par :
a) par X ? b) par Y ? c) par Z ?

Evaluation 12 : Un établissement scolaire comporte 55% de filles et 45% de garçons. 20% des filles et 40% des garçons utilisent un moyen de transport individuel pour se rendre à l'établissement ; les autres utilisent des cars de ramassage scolaire qui arrivent tous à 8 heures à l'établissement.

- 1) Quel est le pourcentage des élèves de l'établissement utilisant un moyen de transport individuel ?
- 2) On aperçoit la silhouette d'un élève descendant d'un car. Quelle est la probabilité pour que ce soit : a) une fille ; b) un garçon

Evaluation 13 : Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire x prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

n	0	1	2	3	4	5 et plus
$P(x = k)$	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

- 1) Dresser le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire x et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
- 2) Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ et la variance $V(x)$ de la variable x .

Evaluation 14 : Une urne contient cinq boules portant le numéro 2, quatre boules portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4.

On tire simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

- 1) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

A : « Tirer au moins une boule portant le numéro 3 »

B : « Tirer trois boules portant des numéros tous différents »

C : « Tirer trois boules portant le même numéro »

D : « Tirer trois boules dont exactement deux portent le même numéro »

- 2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées.

- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

- 3) On appelle un succès l'évènement $E : \{X \geq 10\}$

- a) Calculer la probabilité de E .
- b) On répète trois fois l'expérience de manière indépendante. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

Evaluation 15 : Une urne contient 3 boules noires ; 2 boules jaunes ; et 5 blanches. On tire au hasard 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir

- 1) des boules de couleurs différentes
- 2) des boules de même couleur
- 3) une boule jaune et 2 boules noires.
- 4) deux boules blanches et une boule noires.
- 5) des boules jaunes et blanches

Evaluation 16 : Résous dans $\mathbb{IN}$, les équations suivantes :

- a) $C_n^2 = 5n$; $A_{n+1}^3 = n(n^2 - 1)$
- b) $A_n^2 = n(2n + 6)$; $A_n^2 = C_n^3$
- c) $C_n^2 = 45$; $C_n^3 = 2n$; $C_{2n}^2 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n$
- d) $C_n^1 + C_n^2 = 10$; $n^2 + 3C_n^2 = 1$;
- e) $A_n^2 \times C_n^3 + C_n^1 \times A_n^3 = n^4$; $A_n^1 + C_n^2 = 2C_n^3$

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE VIII : STATISTIQUES

Compétences :

☞ Composantes, manifestations :

Contenu(s) : Statistique

- ✓ Introduction du vocabulaire et des notions statistiques: distribution ou série statistique, effectifs, effectifs cumulés, fréquences, fréquences cumulées
- ✓ Caractéristiques de position (Mode, Moyenne, Médiane)
- ✓ Mode de représentation d'une distribution statistique
- ✓ Dépouillement, calcul de fréquences, de moyenne.
- ✓ Caractéristiques de dispersion
- ✓ Variance, Écart-type.
- ✓ Problèmes pratiques justifiant les éléments d'une série statistique.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines** : Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles** :
- **Ressources financières** :

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation :

Activité 1 : Définir la statistique et quelques vocabulaires statistiques

Consigne : Définir les mots et les expressions suivants puis donner un exemple dans chaque cas : la statistique ; la population statistique ; l'unité statistique ; un caractère qualitatif ; un caractère quantitatif ; variable statistique discrète ; variable statistique continue ;

Synthèse partielle :

Définitions :

La statistique peut être vue comme l'ensemble des méthodes et des techniques permettant de traiter les données (informations chiffrées) associées à une situation ou un phénomène.

Par exemple : le recensement de la population ; le produit agricole d'un pays ; l'efficacité d'un remède contre telle maladie, rendement d'une nouvelle variété du riz.

La population statistique est un ensemble étudié concernant un phénomène donné par la statistique. Exemple : l'ensemble des élèves de la 11^{ème} SES.

Un élément de l'ensemble étudié s'appelle **unité statistique ou individu**

Chaque unité statistique peut être étudiée suivant un ou plusieurs caractères (**qualitatif ou quantitatif**).

Caractère qualitatif : les modalités du caractère ne sont pas mesurables. Exemple : ethnie ; sexe ; religion ; nationalité ; race ; couleur des cheveux etc... ;

Caractère quantitatif ou variable statistique : les modalités du caractère sont mesurables ou repérables. Exemple : le nombre d'enfants ; taille ; poids ; température.

Variable statistique discrète : elle est discrète lorsque les valeurs sont isolées (des nombres entiers).

Exemple : le nombre d'enfants ; nombre de mangues ;

Variable statistique continue : elle est continue lorsque les valeurs sont comprises entre deux valeurs distinctes (des nombres décimaux).

Exemple : taille ; poids ;

Activité 2 : Méthode d'observation

Consigne :

Quelles sont les méthodes d'observation en statique ?

Donner les procédures de chaque méthode

Synthèse partielle :

Il existe deux méthodes d'observations :

Une méthode directe : nous nous adressons directement à la population statistique : recensement exhaustif et enquête partielle ;

Une méthode indirecte : on soumet à l'observation statistique les documents qui ont été élaborés dans le but autre que statistique : les registres d'Etat civil ;

Activité 3 : Dépouillement et présentations de résultats statistiques

Le dépouillement consiste à regrouper les résultats d'une enquête statistique dans un tableau dans le but de faciliter son exploitation.

Consigne 1 : Dépouillement

Une enquête portant sur la situation matrimoniale des employés d'une entreprise a donné.

C	C	C	M	C	M	V	C	M	M	M	M	C	M	V	C	C
C	C	V	C	D	C	M	C	C	M	C	C	M	D	M	C	C
C	M	V	C	C	V	C	M	D	M	D	C	C	M	C	M	

C : Célibataire ; M : Marié ; D : Divorcé ; V : Veuf ;

- 1) Quelle est la nature du caractère étudié ?
- 2) Faire le dépouillement dans un tableau statistique en y figurant les effectifs et les fréquences ;
- 3) Tracer le graphique par secteur circulaire ;
- 4) Tracer le graphique à colonne ou tuyau d'orgue

Synthèse partielle :

a) **la fréquence** $(f_i) = \frac{\text{Effectif}(n_i)}{\text{Effectif total}(N)} \Leftrightarrow f_i = \frac{n_i}{N}$

b) *la fréquence peut être exprimé en % dans ce cas*

$$f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$$

c) *la somme des fréquences est toujours égale à 1 ou 100%*

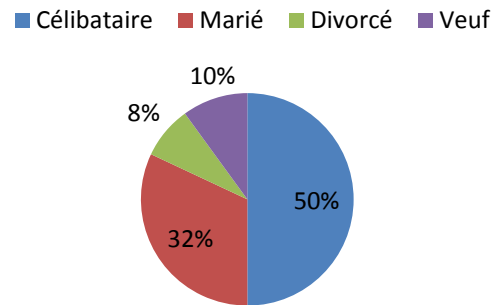
$$\Leftrightarrow \sum f_i = 1$$

d) Graphique à secteur circulaire :

Pour construire ces graphiques, on utilise un cercle 360°. On délimite le cercle en secteur de sorte les aires des secteurs soient proportionnelles aux effectifs des différentes modalités du caractère.

$$\text{Angles} = 360^\circ \times \text{fréquence} ;$$

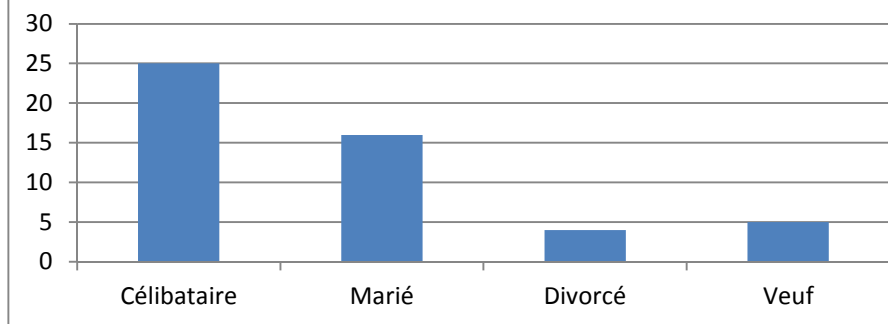
Secteur circulaire



e) Graphique à colonne ou tuyau d'orgue :

Dans un repère rectangulaire on fait correspondre à chaque modalité un rectangle dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif (ou fréquence) de la modalité. Les rectangles sont de même largeur

Graphique à colonne ou tuyau d'orgue



Consigne 2 : Dépouillement/cas de variables discrètes

Une enquête portant sur le nombre d'enfants des employés d'une entreprise a donné les résultats: 1, 0, 0, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 1, 0, 2, 2, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 3, 3, 1, 3, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2,

- 1) Quelle est la nature de la variable statistique ?
- 2) Faire le dépouillement dans un tableau statistique en y figurant les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes et décroissantes ;
- 3) Tracer le diagramme en bâton et le polygone statistique ;
- 4) Tracer la courbe cumulative ;
- 5) Quel est le pourcentage d'employés qui ont : Au moins un enfant ; Au plus deux enfant ; Moins de deux enfants ; Plus d'un enfant :

Synthèse partielle :

Effectifs cumules et fréquences cumulées :

La fréquence cumulée est obtenue par la somme des fréquences des scores inférieurs ou égaux au score considéré $f_k \uparrow = \sum_{i=1}^k f_i$

L'effectif cumulé est donné par le nombre d'individu ayant un score inférieur ou égal $n_k = \sum_{i=1}^k n_i$

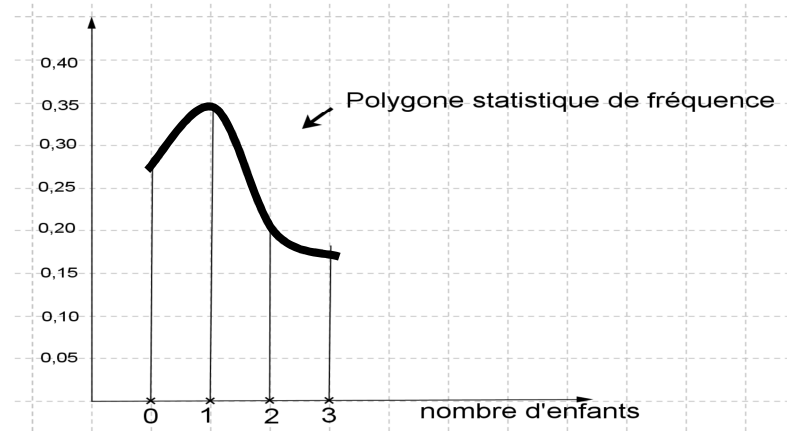
Soient $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k$ les valeurs d'une variable statistique ;

$n_1 ; n_2 ; \dots ; n_k$ les effectifs associés.

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ effectif total.

Valeur x_i	Effectifs n_i	Fréquences $f_i = \frac{n_i}{n}$	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
x_1	n_1	$f_1 = \frac{n_1}{n}$	n_1	$\frac{n_1}{n}$
x_2	n_2	$f_1 = \frac{n_2}{n}$	$n_1 + n_2$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n}$
x_3	n_3	$f_1 = \frac{n_3}{n}$	$n_1 + n_2 + n_3$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n}$
.	.	.	.	.
x_k	n_k	$f_1 = \frac{n_k}{n}$	$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = 1$

Diagramme en bâtons : Dans un repère rectangulaire, on représente chaque valeur du caractère par un bâton verticale dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif de la valeur. On appelle polygone de fréquence la ligne brisée qui joint les sommets des bâtons.



Courbe cumulative : Cas de variables discrètes

On appelle courbe cumulative ou fonction de répartition de la fonction

$$\mathcal{R} \rightarrow [0 ; 1]$$

$$x \rightarrow F(x) = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

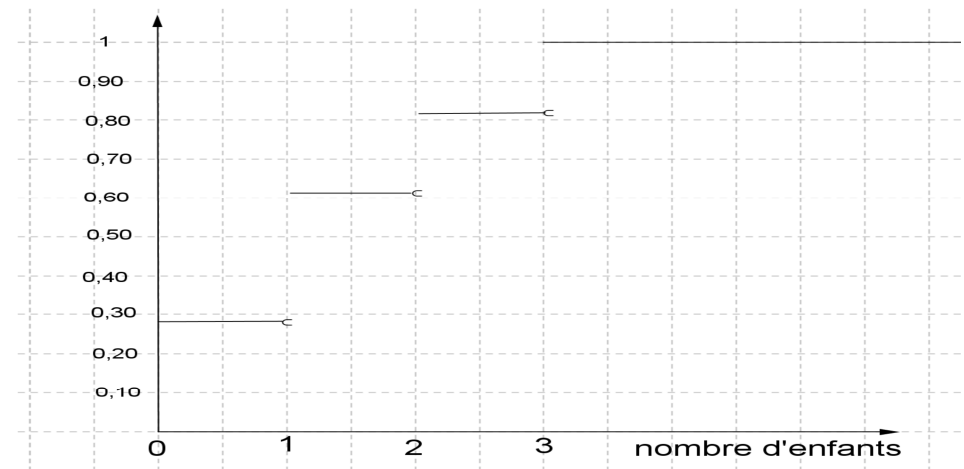
$$x < x_1 \Rightarrow F(x) = 0$$

$$x_1 \leq x < x_2 \Rightarrow F(x) = f_1$$

$$x_1 \leq x < x_2 \Rightarrow F(x) = f_1 + f_2 . \text{ Ainsi de suite jusqu'à}$$

$$x_i \leq x \Rightarrow F(x) = 1$$

C'est une fonction en escalier non décroissante



NB : la courbe cumulative est une fonction en escalier tracée en fonction des fréquences cumulées croissantes

Comprendre les expressions : « au moins » ; « moins de » ; « au plus » ; « plus de »

➤ Au moins veut dire « supérieur ou égal » « au min » $\geq$;

- Moins de veut dire « inférieur » <
- Au plus veut dire « inférieur ou égal » « au max » ≤ ;
- Plus de veut dire « supérieur » > ;

Consigne 3 : dépouillement/cas de variables continues

Une enquête sur le poids des élèves d'une classe a donné les résultats suivants : 59 52 60 70 65 74 55 76 66 77 75 53 80 55 82 57 68 70 69 75 75 96 58 72 84 64 78 73 63 87 85 67 74 66 54 86 69 95 86 79 76 56 61 70 62 63 73 73 70 72

- 1) Quelle est la nature de la variable statistique ?
- 2) Effectuer le dépouillement suivant les classes : [50 ; 60[; [60 ; 70[; [70 ; 80[; [80 ; 90[; [90 ; 100[;
- 3) Dresser le tableau statistique des effectifs, fréquences, fréquences cumulées ;
- 4) Tracer l'histogramme (cas d'amplitude égale) et le polygone statistique des fréquences
- 5) Tracer la courbe cumulative (cas variable continue) ;
- 6) Quel est le pourcentage d'élèves qui ont les poids suivants : au moins 70 kg ; au plus 75 kg ; moins de 80 kg

Synthèse partielle :

Remarque : Dans le cas des variables continues, les valeurs du caractère sont des intervalles de classes [a ; b [où a est inclus et b est exclus. La différence entre les deux bornes s'appelle **amplitude**. Par exemple [50 ; 60 [amplitude est 60 – 50 = 10

Histogramme :

Cas d'amplitude égale : On porte en abscisse les bornes des intervalles de classes. On construit des rectangles juxtaposés ayant pour largeur

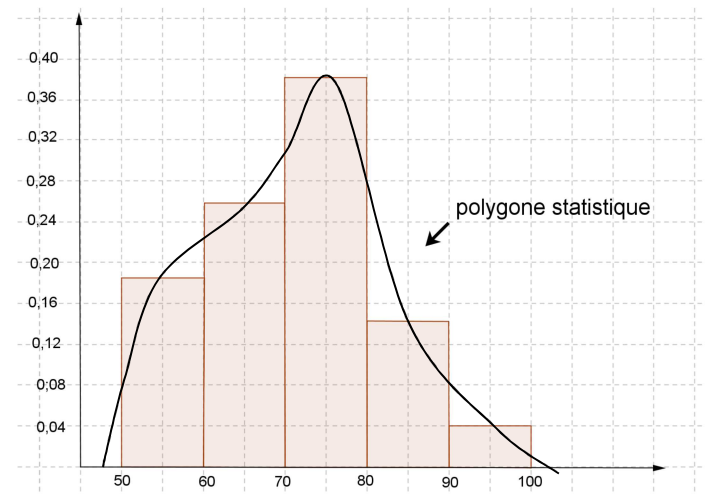
l'amplitude de la classe et pour hauteur une longueur proportionnelle à l'effectif (ou fréquence) de la classe. L'histogramme est la ligne polygonale entourant les rectangles. Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs.

Cas d'amplitude inégale : Pour cela on choisit une classe étalon d'amplitude **a₀** (la plus petite amplitude). On calcule pour chaque classe les fréquences (ou effectifs) rectifiés.

$$\text{Effectif rectifié} = \frac{\text{Effectif} \times \text{plus petite amplitude}}{\text{amplitude de la classe}} \Leftrightarrow n'_i = \frac{n_i \times a_0}{a_i}$$

$$\text{Fréquence rectifiée} = \frac{\text{Fréquence} \times \text{plus petite amplitude}}{\text{amplitude de la classe}} \Leftrightarrow f'_i = \frac{f_i \times a_0}{a_i}$$

L'histogramme est tracé avec des effectifs (ou fréquences) rectifiés



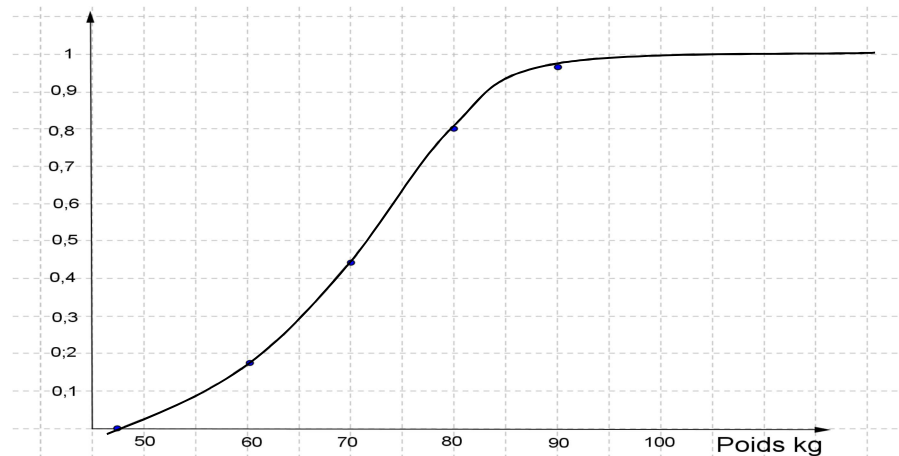
Courbe cumulative : (cas des variables continues)

C'est la fonction de répartition continue non décroissante de

$$\mathbb{R} \rightarrow [0 ; 1]$$

$$x \rightarrow F(x) = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

NB : Elle est tracée en fonction des fréquences cumulées croissantes en considérant les bornes supérieures des intervalles.



Consigne 4 : variable continues/amplitudes inégales

La répartition des quatre-vingt travailleurs d'une entreprise suivant leurs âges est donnée par le tableau suivant :

Âges année	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 60[
Fréquences	0,25	0,0625	...	0,125	0,375

- 1) Reconstituer les effectifs rectifiés ;
- 2) Calculer les fréquences cumulées croissantes ;
- 3) Tracer l'histogramme et le polygone des fréquences ;
- 4) Tracer la courbe cumulative.

Synthèse partielle :

Histogramme : amplitude inégale

Pour tracer l'histogramme, il faut commencer par rectifier les fréquences (ou effectifs) lorsque ces amplitudes sont inégale.

Noter bien : La fréquence rectifiée est utilisée exclusivement dans le cas de l'histogramme ou du calcul de mode

Activité 4 : calcul du mode et de la médiane

Le mode ou le dominant (caractéristique de position)

C'est la valeur qui correspond à la plus grande fréquence (ou effectif). Dans le cas des caractères continus, on a la classe modale « modale » mais on doit faire attention aux amplitudes de classe. Si les classes sont d'amplitudes inégales on prendra comme classe modale la classe qui a la fréquence (ou effectif) rectifiée la plus élevée

La médiane (caractéristique de position)

La médiane est la valeur du caractère qui correspond à l'unité statistique placée au milieu de la population statistique.

Cas des variables statistiques discrètes :

- Si l'effectif total est impair, $N = 2k + 1$, la médiane est la valeur du $(k + 1)^{\text{ème}}$ individu (à partir des effectifs cumulés croissants)
- Si l'effectif total est pair, $N = 2k$ la médiane n'est pas une valeur du caractère mais elle vaut $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

Cas des variables statistiques continues

La médiane est la valeur du caractère pour laquelle la courbe cumulative prend la valeur (1/2)

$$\text{la médiane } M_{\hat{e}} = x_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{\frac{1}{2} - f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

A partir des fréquences cumulées croissantes on détermine un encadrement de $\frac{1}{2}$:

$$f(x_i) < \frac{1}{2} < f(x_{i+1}) \text{ et la classe médiane } [x_i ; x_{i+1}[:$$

$$x_i < M_{\hat{e}} < x_{i+1}$$

Consigne 1 :

On donne la répartition des élèves suivants, le nombre de frères

Nombre de frères	1	2	3	4	5	Total
Effectif s	10	5	15	7	8	45

- 1) Quelle est la nature de la variable statistique ?
- 2) Déterminer le mode et la médiane

Consigne 2 :

On donne la répartition des élèves suivants le nombre de sœurs

Nombre de sœurs	1	2	3	4	5	6	7	Total
Effectifs	10	20	8	6	2	4	8	58
Effectifs cumulés	10	30	38	44	46	50	58	X

Calculer le mode et la médiane

Consigne 3 : on donne la répartition des élèves suivants la taille en cm

Taille en cm	150 – 155	155 – 160	160 – 165	165 – 175	175 – 190
Effectif	17	10	18	20	15
Fréquences					
Fréquences cumulées					
Fréquences rectifiées					

- 1) Compléter le tableau ci – dessus ;
- 2) Calculer le mode et la médiane (algébriquement) ;

Activité 5 : calcul des quartiles, décile et centiles (caractères de positions)

Les quartiles : c'est la division d'une distribution statistique en quatre parties égales : Q_1 (1/4) ; Q_2 (1/2) ; Q_3 (3/4)

$$Q_i = x_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{\frac{i}{4} - f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

NB : Q_2 = médiane

Remarque : (caractère de dispersion)

- **Ecart interquartile absolu :** $e_a = Q_3 - Q_1$
- **Ecart interquartile relatif :** $e_r = (Q_3 - Q_1)/Q_2$

Si e_r est grand on peut dire que la population est dispersée

Les déciles : c'est la division d'une distribution statistique en dix parties égales : $D_1 ; D_2 ; D_3 ; D_4 ; D_5 ; D_6 ; D_7 ; D_8 ; D_9$

$$D_i = a + (b - a) \frac{\frac{i}{10} - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Les centiles : c'est la division d'une distribution statistique en cent parties égales : $C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; \dots ; C_{100}$

$$C_i = a + (b - a) \frac{\frac{i}{100} - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Consigne : A partir de la consigne 3 ;

- 1) calculer les écarts interquartiles absolu et relatif ;
- 2) Calculer les déciles et les centiles ;

Activité 6 : Les moyennes (caractéristique de tendance centrale : position)

On appelle moyenne une résultante de toutes les valeurs observées substituée à chacune d'elles laissent la valeur globale du caractère inchangé

La moyenne arithmétique $\bar{X}$

Soient les valeurs $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$; $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$

Cas des tableaux statistiques : $\bar{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$

NB : Dans le cas des variables continues c'est-à-dire des intervalles de classes le caractère x_i sera le centre x_i . $[a ; b]$ centre $x_i = \frac{a+b}{2}$

La moyenne géométrique $\bar{X}_G$: Soient les valeurs

$x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$; $\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n}$

Cas de tableaux statistiques : $\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} \times x_3^{n_3} \times \dots \times x_k^{n_k}}$

Dans la pratique, on utilise $\ln \bar{X}_G = \frac{\sum n_i \ln x_i}{n}$

NB : $\ln$ "logarithme népérien" $\ln X = a \Rightarrow X = e^a$

La moyenne harmonique $\bar{X}_H$: Soient les valeurs $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$;

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Cas de tableaux statistiques : $\bar{X}_H = \frac{n}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \frac{n_3}{x_3} + \dots + \frac{n_k}{x_k}} = \frac{n}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$

La moyenne quadratique $\bar{X}_q$: Soient les valeurs : $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$

$$\bar{X}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Cas de tableaux statistiques : $\bar{X}_q = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{n}}$

Caractéristiques de dispersion

Ecart moyen : Soit une série statistique $(x_i, n_i) \ 1 \leq i \leq p$ de moyen $\bar{X}$.

L'écart moyen est le réel noté e_m . $e_m = \frac{\sum_i n_i |\bar{X} - x_i|}{N}$

Variance : Variance notée $V(X)$

$$V(X) = \frac{\sum_i n_i (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_i n_i x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

Ecart-type : notée $\delta(X) = \sqrt{V(x)}$

Evaluation 1: Le tableau ci – dessous donne la répartition des abattages des bovins du mois d'avril dernier dans un abattoir suivant le poids des carcasses en kg.

- 1) Construire l'histogramme des fréquences de cette distribution et la courbe cumulative ;
- 2) Déterminer le mode et la médiane ;
- 3) Calculer les quatre moyennes ;
- 4) Calculer l'écart interquartile ;
- 5) Calculer l'écart moyen ; la variance et l'écart -type ;

Poids	150-165	165-170	170-175	175-180	180-185	185-190	190-195	195-200	200-215
effectifs	45	37	48	35	23	18	17	12	15

Evaluation 2 : Le relevé des poids en kg des élèves des classes de seconde Technique Industrie est donné dans le tableau ci-dessous :

68 ; 84 ; 75 ; 82 ; 68 ; 90 ; 62 ; 88 ; 76 ; 93 ; 73 ; 79 ; 88 ; 73 ; 60 ; 93 ; 71 ; 59 ; 85 ; 75 ; 61 ; 65 ; 75 ; 87 ; 74 ; 62 ; 95 ; 78 ; 63 ; 72 ; 66 ; 78 ; 82 ; 75 ; 94 ; 77 ; 69 ; 74 ; 68 ; 60 ; 96 ; 78 ; 89 ; 61 ; 75 ; 95 ; 60 ; 79 ; 83 ; 71 ; 79 ; 62 ; 67 ; 97 ; 78 ; 85 ; 76 ; 65 ; 71 ; 75 ; 65 ; 80 ; 73 ; 57 ; 83 ; 78 ; 62 ; 76 ; 53 ; 74 ; 86 ; 67 ; 73 ; 81 ; 72 ; 63 ; 76 ; 75 ; 85 ; 77 ;

- 1) Procéder au dépouillement en dressant un tableau statistique comportant les effectifs, les effectifs cumulés croissants et décroissants. On regroupera les valeurs en classes d'amplitude 4 ; la première étant [50, 54[.
- 2) Quel est le nombre d'élèves ayant :
 - Un poids strictement inférieur à 78 kg ?
 - Un poids supérieur ou égal à 62 kg ?
 - Un poids compris entre 53 kg et 75 kg (inclusivement)
- 3) Déterminer le mode et la médiane de cette série.

Evaluation 3 :

On donne les notes d'Amadou pendant l'année scolaire 2007.

Au 1^{er} trimestre il a eu : 10 ; 7 ; 14

Au 2^e trimestre il a eu : 12 ; 9 ; 7

Au 3^e trimestre il a eu : 10 ; 11 ; 13 ; 12 ; 15 ; 16.

- 1) Calculer les moyennes $\bar{X}_1$; $\bar{X}_2$ et $\bar{X}_3$ lors des trois trimestres.
- 2) Calculer la moyenne annuelle de Amadou (la moyenne de ses notes de l'année).
- 3) Pour calculer la moyenne, le Censeur calcule la moyenne des trois moyennes trimestrielles. Amadou n'est pas content qu'en pensez-vous ?
- 4) Quels coefficient C_1 ; C_2 et C_3 faut-il affecter à chaque note du trimestre pour que la moyenne annuelle soit la moyenne pondérée des moyennes $\bar{X}_1$; $\bar{X}_2$ et $\bar{X}_3$ affectés de leurs coefficients ?

Evaluation 4 : Les 33 élèves d'une classe ont obtenu les notes suivantes lors d'un devoir :

Note	2	4	5	8	10	11	12	14	15	18	20
Effectif	1	2	1	4	2	7	6	3	4	2	1

- 1) Déterminer l'étendue et le mode de cette série.
- 2) Calculer la moyenne de cette série.
- 3) Construire un tableau donnant les effectifs cumulés, les fréquences et les fréquences cumulées.
- 4) Déterminer la médiane de cette série.
- 5) Quel est le nombre d'élèves ayant une note strictement inférieure à 8 ?

- 6) Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note supérieure ou égale à 10 ?

Evaluation 5 : Dans un groupe d'étude, on a relevé la taille de chacun des élèves. Ce qui nous a permis d'obtenir la série statistique suivante

1m62 ; 1m55 ; 1m58 ; 1m51 ; 1m60 ; 1m73 ; 1m69 ; 1m65

1m62 ; 1m54 ; 1m66 ; 1m56 ; 1m59 ; 1m60 ; 1m64

- 1) Donnez l'effectif total de ce groupe.
- 2) Calculez la taille moyenne de ce groupe ; on arrondira cette valeur au centimètre près.
- 3) On construit des classes d'amplitude cinq centimètre.

Compléter le tableau suivant

Classe	[1,5 ; 1,55[	[1,55 ; 1,60[	[1,60 ; 1,65[	[1,65 ; 1,70[	[1,70 ; 1,75[
Effectif					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					
Fréquence en %					
Fréquence cumulée décroissante en %					

- 4) a. Combien de personnes mesurent au plus 1m65 ?
- b. Combien de personnes mesurent plus de 1m65 ?
- c. Combien de personnes mesurent au moins 1m60 ?

Evaluation 6 : On a relevé la taille, en centimètre, de vingt athlètes :

178 - 176 - 172 - 184 - 182 - 182 - 174 - 176 - 184 - 180

180 - 176 - 180 - 174 - 172 - 176 - 180 - 182 - 176 - 180

- 1) Calculer la taille moyenne de cette série statistique (*arrondir au dixième près*).
- 2) a. Ordonner l'ensemble des tailles relevées.
- b. En déduire la valeur médiane de cette série statistique.
- 3) En regroupant les tailles relevées en classe de 5 cm d'amplitude : [170; 175[; [175; 180[; [180; 185[; [185; 190[

Construire l'histogramme associé.

Evaluation 7 : la répartition des 80 travailleurs d'une entreprise suivant leurs âges est donnée par le tableau suivant :

Âges en année	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40[	[40-45[	Total
Fréquences	0,25	0,0625	0,1875	0,375	?	1

- 1) Reconstruire les effectifs
- 2) Calculer les fréquences cumulées croissantes
- 3) Tracer histogramme et le polygone des fréquences
- 4) Tracer les courbes cumulatives

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE VII : GEOMETRIE PLANE

Compétences :

☞ Composantes, manifestations :

Contenu(s) : Géométrie plane

- ✓ Rappels sur l'ensemble des vecteurs du plan.
- ✓ Barycentre dans le plan
- ✓ Produit scalaire ; définition, propriétés, base orthonormée, orthogonale, expression dans une base orthonormée. Applications du produit scalaire
- ✓ Projection, Isométries, Similitudes : Propriétés géométriques, Expression analytique, Image de figures simples,
- ✓ Utilisation de ces applications du plan pour la résolution de problèmes de construction ou de configuration.

Ressources éducatives

- **Ressources humaines** : Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles** :
- **Ressources financières** :

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré – évaluation : Soient les points

$A(-2; 3)$; $B(4; 2)$; $C(-1; 5)$; $D(-2; -3)$; $E(2; 0)$; $F(0; -4)$

- 1) Place ces points ci – dessus dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

- 2) Trace les segments $[AB]$; $[CE]$; $[OF]$; $[EF]$; $[OC]$;

Situation problème :

Une rivière coule droit vers le sud à raison de 125 m/mn. Un bateau à moteur se déplaçant à 475 m/mn en eau calme, est dirigé droit vers l'Est pour atteindre l'autre coté de la rivière.

- a) Trouve la direction selon laquelle se déplace le bateau ainsi que sa vitesse.
- b) Dans quelle direction le bateau doit – il être dirigé pour qu'il se déplace droit vers l'Est et quelle est sa vitesse de cette direction ?

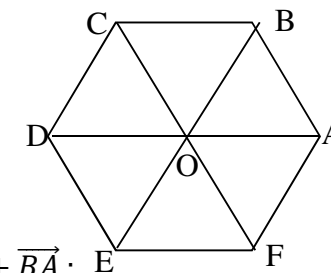
NB : tu pourras faire le schéma pour illustration de 2 questions

Activité 1 : Vecteurs du plan

Consigne 1 :

- 1) Place des points $A(-2; 3)$, $B(-3; -6)$, $C(0; 5)$, $D(4; 0)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$;
- 2) Trace des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$;
- 3) Place les points E, F, et G tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$
- 4) Place les points M ; N ; P ; Q tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{EP}$; $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DQ}$; $\overrightarrow{AO} = -3\overrightarrow{CN}$;

Consigne 2 : On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O. les vecteurs considérés ici sont ceux qu'on peut écrire avec deux points distincts de la figure

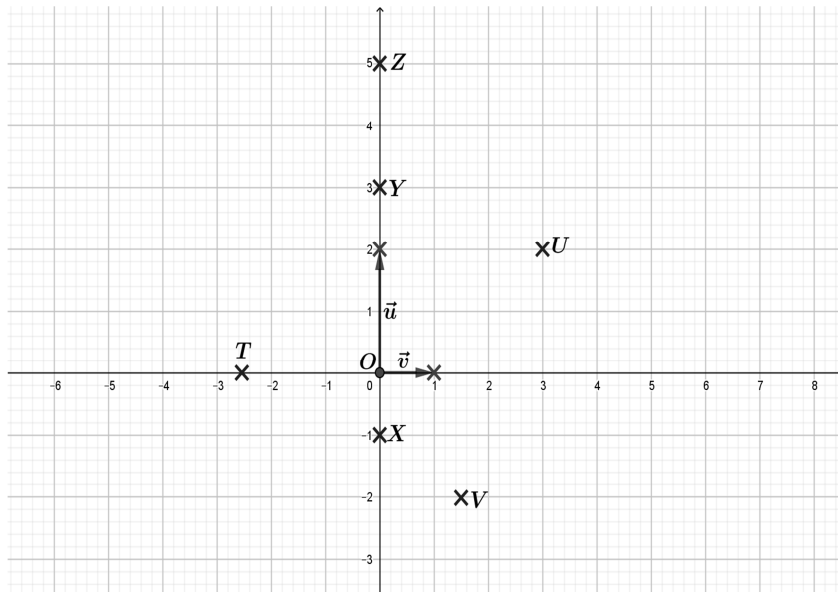


- 1- Notons $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Cite tous les vecteurs égaux à $\vec{u}$ (justifier)
- 2- Notons $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{CA}$.
Cite tous les vecteurs égaux à $\vec{v}$ (justifier)
- 3- Simplifier les sommes: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$;

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF}; \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

Consigne 3 :

- 1- Construis le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{u}$ sachant que $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$;
- 2- Construis le point C tel que $\overrightarrow{OB} = -3\vec{v}$ sachant que $-3\vec{v} = 3 \times (-\vec{v})$
- 3- Construire le point C tel que $\overrightarrow{OC} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$;
- 4- Construire le point D tel que $\overrightarrow{OD} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ sachant que $2\vec{u} - 3\vec{v} = (2\vec{u}) + (-3\vec{v})$
- 5- exprime en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{OX}$; $\overrightarrow{OY}$; $\overrightarrow{OZ}$; $\overrightarrow{OT}$; $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$
- 6- Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = 2,5(\vec{u} + \vec{v})$ et $\overrightarrow{OF} = 2,5\vec{u} + 2,5\vec{v}$; Que constate – t – on ?
- 7- Construis les points G et H tels que $\overrightarrow{OG} = (-2) \times (3\vec{v})$ et $\overrightarrow{OH} = -6\vec{v}$.Que constate – t – on ?

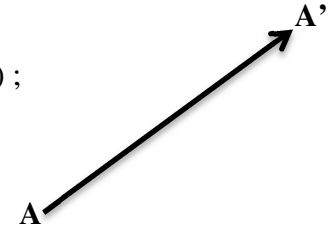


Synthèse partielle :

Caractérisation des vecteurs du plan :

Deux points A et A', pris dans cet ordre représentent un vecteur qu'on note $\overrightarrow{AA'}$. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a :

- Une direction : celle de la droite (AA') ;
- Un sens : de A vers A' ;
- Une longueur : la longueur AA'



On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont égaux lors qu'ils ont la même direction ; le même sens et la même longueur

Calcul vectoriels ;

Somme de deux vecteurs : La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur construit de la façon suivante

Choisir un point K ;

Construire L tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$;

Construire M tel que $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CD}$;

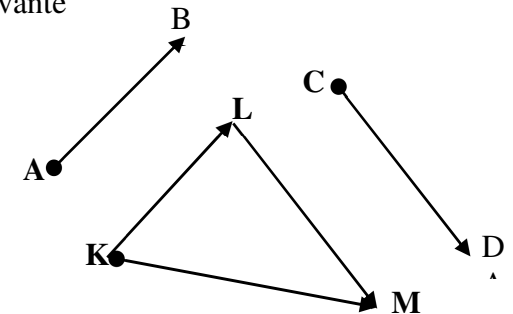
Alors on dit que $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

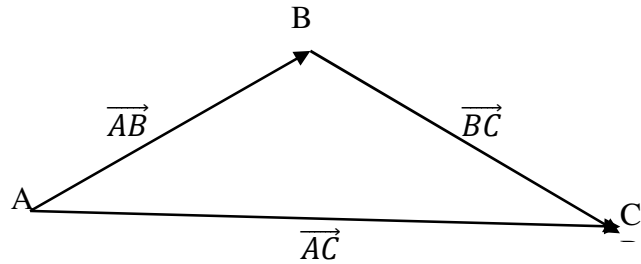
$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AB} +$$

NB : Pour ajouter deux vecteurs, on peut les mettre « l'un au bout de l'autre ».

Propriété de Chasles :

Pour tous les points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

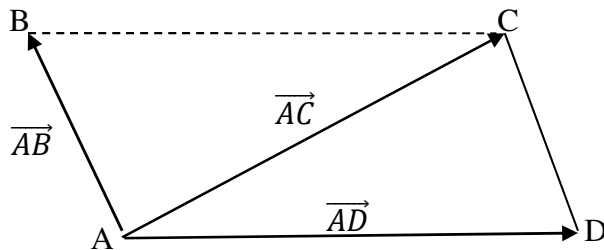




Remarque : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Propriétés de la diagonale d'un parallélogramme :

Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



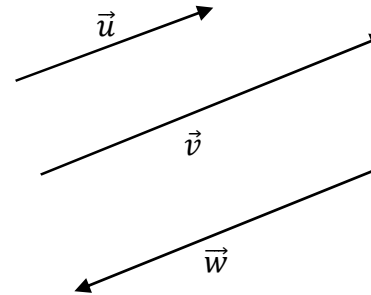
Remarque : Cette propriété donne un moyen simple pour construire la somme de deux vecteurs représentés à partir d'une même origine.

Combinaison linéaire,

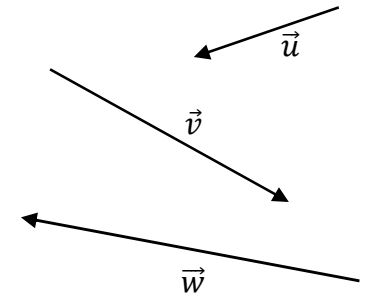
Dans toute la suite $\mathbf{V}$ désigne l'ensemble de tous les vecteurs de plan

Définition : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Tout vecteur $\vec{w}$ de la forme $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Vecteurs colinéaires : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$



$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires



ils ne sont pas colinéaires

Remarque :

- Si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ;
- Si $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires ;
- $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$;

Parallélisme : Soit deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a : $d \parallel d'$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Alignement : Pour trois points A, B et C du plan, on a : A, B et C alignés équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;

Propriétés : Soit α et β des réels et soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs

- 1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- 2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- 3) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- 4) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- 5) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- 6) $1 \times \vec{u} = \vec{u}$; 7) $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;

Activité 2 : Décomposition, base.

Consigne 1 : Tout couple $(\vec{i}; \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires appelé base de $\mathcal{V}$. Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ signifie que $\vec{u}$ est de coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ et on note $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dans chacun des cas ci – dessous, démontrer que le couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$ après avoir déterminé les coordonnées de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -9\vec{i} + 6\vec{j}$;

b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; c) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$;

Consigne 2 : $\mathbf{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$; on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel noté :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) \text{ tel que : } \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (x)(y') - (x')(y)$$

Le plan vectoriel $\mathbf{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer : $\det(\vec{u}; \vec{v})$; $\det(\vec{v}; \vec{u})$; $\det(\vec{u}; \vec{w})$;
- 2) Calcule les coordonnées de $-\vec{v}$; $\vec{v} - \vec{w}$; $\vec{u} + 3\vec{w}$; $2\vec{v} - 4\vec{w}$ puis en déduire $\det(\vec{u}; -\vec{v})$; $\det(\vec{u}; \vec{v} - \vec{w})$; $\det(\vec{u} + 3\vec{v}; 2\vec{v} - 4\vec{w})$

Consigne 3 : Le plan vectoriel $\mathbf{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

- 1) Démontrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathbf{V}$.
- 2) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$;
- 3) Soit $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}; \vec{j})$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$?

Evaluation :

1°) Dans chaque cas, dire si $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base.

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j} - \vec{i}$;

b) $\vec{u} = \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i}$

c) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3(\vec{j} - \vec{i})$;

2°) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont – ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?

Synthèse partielle :

Définition d'une base : Tout couple $(\vec{i}; \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires appelé base de $\mathcal{V}$.

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ signifie que $\vec{u}$ est de coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ et on note $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Déterminant de deux vecteurs dans une base ; $\mathbf{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$; on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel noté : $\det(\vec{u}; \vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (x)(y') - (x')(y)$$

Propriété : $\mathbf{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$; on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ puis deux réels α et λ alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}; \quad \alpha\vec{u} + \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \lambda x' \\ \alpha y + \lambda y' \end{pmatrix};$$

Théorème : Étant donnée une base $(\vec{u}; \vec{v})$ de $\mathbf{V}$, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbf{V}$.

$$\Rightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow (\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0)$$

$$\Rightarrow ((\vec{u}; \vec{v}) \text{ est une base de } \mathbf{V}) \Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$$

Evaluation 1 : Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tels que :

$$\vec{U} \times \vec{V} = 2; \|\vec{U}\| = 2 \text{ et } \|\vec{V}\| = 3$$

- 1) $A = (3\vec{U}) \times (-4\vec{V})$; 2) $B = \left(\frac{1}{2}\vec{U}\right) \times \left(\frac{4}{3}\vec{V}\right)$;
 3) $C = \vec{U} \times (\vec{U} + \vec{V})$; 4) $D = (\vec{U} + 3\vec{V}) \times (\vec{U} - 2\vec{V})$;
 5°) $(\vec{U} + 2\vec{V}) \times (\vec{U} - \vec{V}) + (3\vec{U} - \vec{V}) \times (\vec{U} + \vec{V})$

Evaluation 2 : Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tels que :

$$\vec{U} \times \vec{V} = \frac{-1}{2} ; \|\vec{U}\| = 1 \text{ et } \|\vec{V}\| = 1 .$$

On pose $\vec{W} = \vec{U} + X\vec{V}$ où X est un réel.

- 1) Exprimer $(\vec{W})^2$ en fonction de X ;
- 2) Déterminer x de telle sorte que $\vec{W}$ soit un vecteur unitaire ;

Activité 3 : Barycentre de deux points pondérés ;

Consigne 1 : Dans le plan P muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne deux points : $C(2 ; -1)$; $D(-3 ; 4)$ et deux réels 3 et -6. Soit $G(-8 ; 9)$ un autre point du plan P ; $(C ; 3)$ et $(D ; -6)$ appelés points pondérés.

- 1- Montrer que $3\vec{GC} - 6\vec{GD} = \vec{0}$;
- 2- En déduire que $\vec{CG} = 2\vec{CD}$. On pourra poser $\vec{GD} = \vec{GC} + \vec{CD}$;
- 3- Soit $\alpha = 3$ et $\beta = -6$, vérifier que $\vec{CG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \vec{CD}$ si $\alpha + \beta \neq 0$;
- 4- Vérifier que les coordonnées de G sont égales :
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_C + \beta x_D}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_C + \beta y_D}{\alpha + \beta} \end{cases}$$
- 5- Construire les points C ; D et G . Que remarques - tu ?

Consigne 2 : Dans le plan P muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne deux points : $A(0 ; 2)$; $B(-5 ; 3)$

- 1- Soient les points pondérés $(A;1)$ et $(B;-3)$. Construire le barycentre G du système : $\{(A;1) \text{ et } (B;-3)\}$;

2- Trouve les coordonnées du barycentre G des points pondérés ci - dessus

Synthèse partielle :

Définition 1 : On appelle point pondéré tout couple $(A; \alpha)$ formé d'un point A du plan et d'un réel α . Le réel α est appelé le coefficient de pondération du point A .

(A, α) se lit « A affecté du coefficient α » ou plus simplement « A affecté de α »

Définition 2 : Soit $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$. On appelle barycentre de (A, α) et (B, β) , l'unique point G du plan tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$.

$$[G \text{ barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta)] \Leftrightarrow \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

Propriétés

- 1) Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta)$ alors les points G, A et B sont alignés.
- 2) Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta)$ alors G est le barycentre de $(A; k\alpha); (B; k\beta)$ pour tout $k \neq 0$

NB : Le barycentre G de $(A; \alpha); (B; \alpha)$ est appelé l'isobarycentre des points A et B

Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et soit $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha); (B; \beta)$

$$\text{sont : } x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Activité 4 : Barycentre de trois points pondérés ;

Consigne 1 : On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB = 8\text{cm}$ et $AC = 4\text{cm}$. Construire le barycentre G des points $(A, 3)$; $(B, -1)$; $(C, 2)$.

Consigne 2 : Dans le plan P muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne quatre points : $A(0; 2)$; $B(-5; 3)$; $C(2; -1)$

Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés : $(A, -1)$; $(B, 2)$; $(C, 3)$;

Synthèse partielle :

Définition : Soit $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$ trois points pondérés. On appelle barycentre de $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$, l'unique point G du plan tel que : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$

$[G \text{ est le barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)] \Leftrightarrow \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{BC}$$

Propriétés

☞ Si G est le barycentre de $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$ alors G est dans le plan ABC ;

☞ Si G est le barycentre de $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$ et si H est le barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ alors G est le barycentre de $(H; \alpha + \beta)$ et $(C; \gamma)$

Remarque : Construire le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \alpha)$; $(C; \alpha)$ revient à construire la somme $\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$

NB : Le barycentre G des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \alpha)$; $(C; \alpha)$ est l'isobarycentre des points A ; B ; C

Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et soient $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Activité 5 : Barycentre de quatre points pondérés ;

Consigne 1 : Dans le plan P muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne quatre points : $A(0; 2)$; $B(-5; 3)$; $C(2; -1)$ et $D(-3; -6)$

- 1) Construis le barycentre G des points $(A, 3)$; $(B, -1)$; $(C, 2)$
- 2) Trouve les coordonnées du barycentre G des points pondérés : $(A, -1)$; $(B, 2)$; $(C, -3)$; $(D, 3)$

Evaluation 2 : Soit le parallélogramme ABCD.

- 1) Trouve le barycentre G des points pondérés : $(A, 2)$; $(B, -5)$; $(C, 3)$; $(D, -1)$
- 2) Trouve les coordonnées de G relativement au repère (A, B, D)
- 3) Construis G

Synthèse partielle :

Définition : Soit $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$; $(D; \mu)$ quatre points pondérés. On appelle barycentre de $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$; $(D; \mu)$, l'unique point G du plan tel que : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} + \mu\vec{GD} = \vec{0}$

[G est le barycentre de $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$]

$$\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \mu \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{AC} + \frac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{BC} + \frac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{CB} + \frac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{CD}$$

Propriétés

☞ Si G est le barycentre de (A; α); (B; β); (C; γ); (D; μ) alors G est dans le plan ABCD;

☞ Si G est le barycentre de (A; α); (B; β); (C; γ); (D; μ) et si G_1 est le barycentre de (A; α) et (B; β) et G_2 le barycentre de (C; γ) et (D; μ) alors G est le barycentre de (G_1 ; $\alpha + \beta$) et (G_2 ; $\gamma + \mu$)

Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan et soient

$A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; $C(x_C; y_C)$; $D(x_D; y_D)$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A; α); (B; β); (C; γ); (D; μ) sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \mu x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \mu y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \mu}$$

Activité 6 : Caractérisation du produit scalaire de deux vecteurs dans le plan ;

Consigne 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\text{mes}(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha$

- 1) trace les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que le secteur angulaire $(\vec{u}; \vec{v})$ soit aigu
- 2) trace les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ formant un secteur angulaire obtus ;

- 3) Trace la droite (OA) puis H le projeté orthogonal de B sur la droite dans les deux cas : questions 1) et 2) ;
- 4) Exprime le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$ puis déduis – en que $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \cos \alpha$ en utilisant le triangle OAH rectangle en H

Consigne 2 : On considère le triangle ABC équilatéral dont les côtés mesurent 6 cm ; on note I, J, K les milieux respectifs des milieux [BC], [AC], [AB]; M est le centre de gravité du triangle ABC,

- 1) Déterminer la longueur du segment [BJ] et [BM] ;
- 2) Déterminer la valeur des différents produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{MC} * \overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{CM} * \overrightarrow{MI}$

Consigne 3 : Le plan vectoriel $\mathbf{V}$ est muni d'une base ($\vec{i}$; $\vec{j}$). Soit les points $A(\frac{2}{3})$; $B(\frac{2}{-4})$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbf{V}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ puis la distance $d(A; B)$

Consigne 4 : Soient les vecteurs $\vec{U}(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2})$; $\vec{V}(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$; $\vec{W}(1; 1)$ dans une base orthonormée (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Calcule :

- 1) $\|\vec{U}\|$; $\|\vec{V}\|$; $\|\vec{W}\|$
- 2) $\vec{U} \times \vec{V}$; $\vec{U} \times \vec{W}$; $\vec{V} \times \vec{W}$
- 3) $(2\vec{U} + 5\vec{V}) \times (-\vec{U} + 3\vec{W})$
- 4) $\|\vec{U} + \vec{V}\|$; $\|2\vec{V} + \vec{W}\|$; $\|\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}\|$

Synthèse partielle :

Produit scalaire de deux vecteurs : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls
- Autre expression du produit scalaire, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Expression algébrique : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan



On appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel noté : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OB}$ où H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB).

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OB}$. (Expression algébrique du produit scalaire)

Expression géométrique : En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire et le triangle AOH rectangle en H. On a alors $OH = OA \times \cos \alpha$ puis on déduit que : $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = OA * OB \cos \alpha$.

(Expression trigonométrique du produit scalaire)

Propriétés de produit scalaire :

On démontre et on admettra les propriétés suivantes

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
- 3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- 4) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et si $\vec{u} \neq 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$;
- 5) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

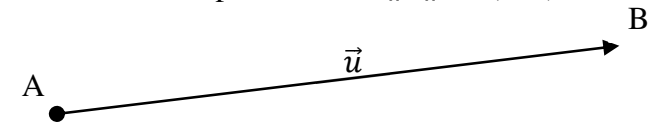
Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et « on lit carré scalaire de $\vec{u}$ »

Orthogonalité de deux vecteurs dans une base orthonormée :

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0$$

Norme d'un vecteur : $\vec{u}$ étant un vecteur de représentant le bipoint (A;B), on appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel positif noté : $\|\vec{u}\| = d(A;B)$.



$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A;B) = AB$$

Vecteur unitaire :

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1 ($\|\vec{u}\| = 1$)

Propriétés : Soit V l'ensemble des vecteurs du plan

$$P_1) : \forall \vec{u} \in V, \|\vec{u}\| > 0$$

$$P_2) : \forall \vec{u} \in V, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$$

$$P_3) : \forall \vec{u} \in V, \forall \vec{v} \in V, \forall k \in R, \text{ si } \vec{u} = k \times \vec{v} \text{ alors } \|\vec{u}\| = |k| \|\vec{v}\|$$

Repère orthonormé, base orthonormale

- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et unitaires. Autrement dit : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé signifie $\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \Leftrightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$
- On dit alors que la $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale ;

Etude analytique du produit scalaire

☞ **Expression du produit scalaire dans une base orthonormée**

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

☞ **Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée**

Soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

☞ **Droites perpendiculaires** : Soit deux droites D et D' d'équations respectives $ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$ et les vecteurs directeurs respectifs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. Les droites D et D' sont perpendiculaires équivalents à $aa' + bb' = 0$

Activité 7 : Relations métriques dans un triangle

Consigne 1 : Soient trois points O ; A et B quelconques non alignés représentant les 3 sommets d'un triangle ;

- 1) Trace le triangle OAB
- 2) Calcule le carré scalaire de $(\vec{OA} - \vec{OB})^2$
- 5) Montre que $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ puis déduis - en $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ en fonction OA^2 , OB^2 et AB^2 ;
- 6) En déduis que $AB^2 = OA^2 + OB^2 - OA \times OB \cos(\widehat{AOB})$

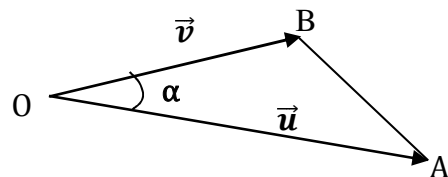
Consigne 2 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$ cm ; $AC = 2$ cm et $BC = 5$ cm

Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$; $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$

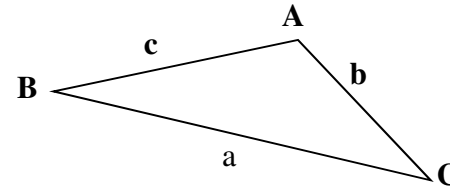
Synthèse partielle :

Produit scalaire et triangle : Soit O, A, B trois points non alignés du plan tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$



$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}$$

Théorème d'Al Kashi :



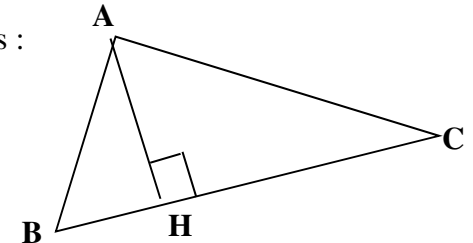
Soit ABC un triangle quelconque.
On pose : $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.
On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

Relations métriques dans un triangle rectangle :

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur [BC].

Les énoncés suivants sont équivalents :

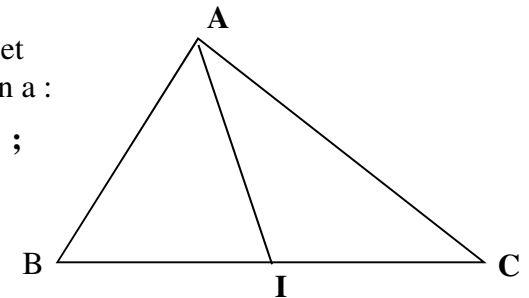
- 1) ABC est rectangle en A ;
- 2) $BC^2 = AB^2 + AC^2$;
- 3) $BA^2 = BH \times BC$;
- 4) $AH^2 = -HB \times HC$



Théorème de la médiane :

Soit ABC un triangle quelconque et [AI] la médiane relative à [BC]. On a :

- 1) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$;
- 2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$



Calcul du sinus d'un angle orienté

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs dans la base **B** ($\vec{i}; \vec{j}$) et α une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$. Nous avons les formules suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \text{ et } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Evaluation 1 : Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 4$ et $BC = 3$;
Calcule la longueur de chacune des médianes.

Evaluation 2 : Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$; $AC = 7$;
 $\widehat{A} = 120^\circ$. Calcule BC. Détermine les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Calcule la
longueur de chacune des médianes.

Evaluation 3 : ABC est un triangle tel que : $AB = AC = 2BC$.
Détermine les mesures des angles de ce triangle ;

Evaluation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \hat{i}; \hat{j})$ on
considère les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$; $B\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; $C\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$. Démontre que ABC est un
triangle rectangle en A. Détermine les longueurs de trois côtés et les
mesures en degrés des trois angles de ce triangle.

Evaluation 5 : Soit ABC un triangle, I le milieu de [BC], H le projeté
orthogonal de A sur [BC].

- 1) Démontre que : $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}$;
- 2) En déduis que : $AC^2 - AB^2 = -2\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{IH}$

Activité 8 : Lignes de niveau :

$$MA^2 + MB^2 = k \quad ; \quad MA^2 - MB^2 = k \quad ; \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

Consigne 1 : soient AB = 6 et I milieu de [AB] ;

D'après Chasles : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$;

- 1) En utilisant le théorème donné, démontre que :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

- 2) En déduis MI puis l'ensemble de points M dans les cas suivants :

$$MA^2 + MB^2 = 18 \quad ; \quad MA^2 + MB^2 = 68 \quad ; \quad MA^2 + MB^2 = 7$$

Consigne 2 : soient AB = 7 et I milieu de [AB] ;

D'après Chasles : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$;

- 1) En utilisant le théorème donné, démontre que :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

- 2) Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) alors

$2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$. En déduis l'ensemble de points M dans
les cas suivants puis construis cet ensemble :

$$MA^2 - MB^2 = 0 \quad ; \quad MA^2 - MB^2 = 68 \quad ;$$

Consigne 3 : soient AB = 6 et I milieu de [AB] ;

D'après Chasles : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$;

- 1) En utilisant le théorème donné, démontre que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

- 2) En déduis MI puis l'ensemble de points M dans les cas

suivants : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7 \quad ; \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9 \quad ; \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Synthèse partielle :

Théorème de la médiane : Soient A et B deux points du plan et I
milieu de [AB] ; pour tout point M du plan on a :

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} ;$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} ;$$

Lignes de niveaux : On appelle ligne de niveau K de l'application f,
l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=K$

Lignes de niveau $MA^2 + MB^2 = K$

$$I \text{ milieu } [AB] ; MA^2 + MB^2 = K \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = K$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 = K - \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{2K - AB^2}{4} = \alpha$$

- ☞ Si $\alpha > 0$ alors M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\alpha}$
- ☞ Si $\alpha < 0$ impossible
- ☞ Si $\alpha = 0$ alors M = I

Lignes de niveau $MA^2 - MB^2 = K$

Soient A et B deux points distincts, I milieu [AB]. Soit M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB).

$$MA^2 - MB^2 = K \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = K \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = K$$

L'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 - MB^2 = K$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) au point H

Lignes de niveau : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = K$

$$I \text{ milieu } [AB] ; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = K \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = K$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = K + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4K + AB^2}{4} = \alpha$$

- ☞ Si $\alpha > 0$ alors M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\alpha}$
- ☞ Si $\alpha < 0$ impossible
- ☞ Si $\alpha = 0$ alors M = I

Evaluation :

- 1) Soit AB = 6cm ; déterminer et construire $MA^2 - MB^2 = 48$
- 2) Soient A et B deux points du plan tels que AB = 8cm; détermine et construis $MA^2 + MB^2 = 60$
- 3) Soit AB = 5cm ; déterminer et construire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$

Activité 9 : Lignes de niveau : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$; $\frac{MA}{MB} = k$

Consigne 1 : Soient A et B deux points distincts tels que AB = 4 et Soit M un point du plan tel que $3MA^2 - 2MB^2 = 48$

- 1) Soit I barycentre de points pondérés (A, 3) et (B, -2), exprime le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$;
- 2) Montre que $3MA^2 - 2MB^2 = MI^2 + 3IA^2 - 2IB^2$;
- 3) En déduis MI^2 en fonction de IA^2 et IB^2 puis MI^2 en fonction de AB^2
- 4) En déduis puis construis l'ensemble de points M tel que $3MA^2 - 2MB^2 = 48$

Consigne 2 : Soient A et B deux points distincts tels que AB = 4 et Soit M un point du plan tel que $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$

- 1) Démontre les égalités suivantes en utilisant : $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$;
 - a) $9MA^2 - 4MB^2 = 0$;
 - b) $(3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0$;
- 2) Soit I le barycentre de points pondérés (A ; 3) et (B ; 2) ; J le barycentre de points (A ; 3) et (B ; -2)
 - a) Montre que $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MI}$ puis $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ}$
 - b) En déduis que $9MA^2 - 4MB^2 = 5\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$ puis $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$;
 - c) En déduis puis construis l'ensemble de points M tel que $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$

Synthèse partielle :

Lignes de niveau : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = K$$

- ☞ Si $\alpha + \beta = 0$ (voir Lignes de niveau $MA^2 - MB^2 = K$)
- ☞ Si $\alpha + \beta \neq 0$ alors $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 = K$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{\alpha + \beta} (K - \alpha GA^2 - \beta GB^2) = r$$
 - ✓ Si $r < 0$ impossible
 - ✓ Si $r = 0$ alors M = I
 - ✓ Si $r > 0$ alors M $\in$ C (G ; $\sqrt{r}$)

Lignes de niveau : $\frac{MA}{MB} = k$

- ☞ Si $k = 0$ alors $M = A$;
- ☞ Si $k = 1$ alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$;
- ☞ Si $k \neq 1$ alors $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$

(Voir Lignes de niveau : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ avec $\alpha = 1$; $\beta = -k^2$)

$$MA^2 - k^2 MB^2 = (1 - k^2) MG^2 + GA^2 - k^2 GB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{1-k^2} (-GA^2 + k^2 GB^2)$$

On sait que $\overrightarrow{GA} - k^2 \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow GA^2 = k^4 GB^2$ alors

$$MG^2 = \frac{k^2(1-k^2)}{1-k^2} GB^2 \Leftrightarrow MG^2 = k^2 GB^2 \Leftrightarrow MG = kGB$$

Alors M appartient au cercle de centre G et de rayon kGB ;

Ou bien

- ☞ Si $k \neq 1$ alors $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$
- $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$;

Soit I le barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) et J barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k)$

$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{MI} \cdot (1-k^2)\overrightarrow{MJ} = 0$$

$$(1-k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

Alors M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$

NB : G est le barycentre de points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$

Evaluation : Soient A et B deux points distincts, construis l'ensemble de points tels que : $MA^2 - MB^2 = 2AB^2$; $MA^2 + MB^2 = AB^2$ et $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Activité 10 : Projections

Consigne 1 : soient D et Δ deux droites non parallèles du plan P , soient E ; F et G trois points non situés sur aucune de ces deux droites.

- a) Tracer les droites D et Δ puis placer les points E , F et G ;
- b) Soient E' , F' et G' les projetés respectifs de E , F et G sur Δ parallèlement à la droite D , placer les points E' , F' et G'

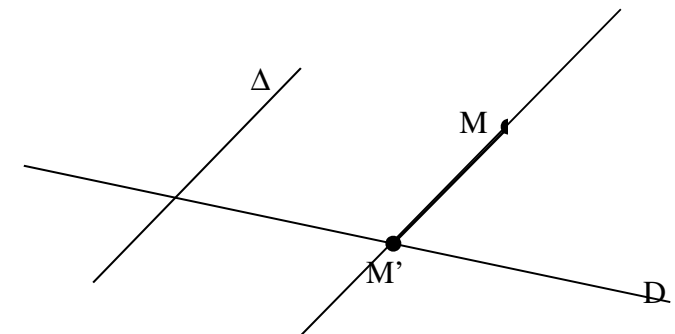
Consigne 2 : soit (d) une droite d'un plan P et A ; B ; C trois points distinctes du plan non situés sur (d) .

Placer les points A' ; B' ; C' sur la droite (d) tels que (AA') ; (BB') et (CC') soient perpendiculaire à la droite (d)

Synthèse partielle :

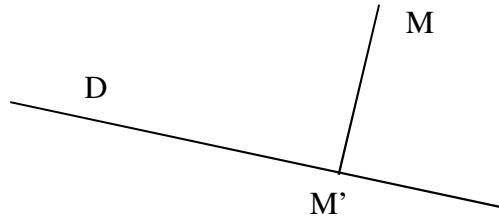
Définition 1: (La projection axiale)

On appelle projection d'axe Δ l'application du plan sur la droite D qui à tout point, M du plan associe le point M' de la droite D intersection de la parallèle à Δ passant par M et de la droite D . L'axe Δ n'est pas parallèle à D



Définition 2 : (Cas particulier : la projection orthogonale)

C' est l'application du plan sur la droite D qui à tout point M du plan associe M' de D intersection de D et de la perpendiculaire à D issue de M



La droite (D') est appelée projectante de M sur D du plan, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ , $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u} \\ M' \in (D) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Caractérisation : Une application affine p est une projection si et seulement si $pop = p$

NB : Une projection n'est pas une bijection

L'application linéaire ϕ associée à une projection est appelée projection vectorielle ; elle est caractérisée par : pour tout vecteur $\vec{u}$,

$$\phi \circ \phi(\vec{u}) = \phi(\vec{u})$$

Expression analytique de la projection

$$\text{Soit } p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u} \\ M' \in (D) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} ; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ; M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \lambda a \\ y' - y = \lambda b \\ a'x' + b'y' + c' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \lambda a \\ y' = y + \lambda b \\ a'x' + b'y' + c' = 0 \end{cases}$$

expression analytique $\vec{v} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D)

NB : écrire λ en fonction de x et y puis remplacer λ par sa valeur dans l'expression analytique

Activité 11 : Introduire les isométries

Consigne : Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on place les points A (4 ; 2), B (-2 ; 3), C (1 ; -1).

Construire le triangle ABC et son image :

- Par la symétrie de centre B ;
- Par la symétrie d'axe (BA) ;
- Par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$;
- Par la rotation de B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$;

Activité 12 : Isométries

Soit A ; B deux points distinctes d'un plan et A' ; B' les images respectives de A et B

Consigne 1 : soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque distincte du bipoint (A ; B), construire A' ; B' par la translation du vecteur $\vec{v}$ puis comparer AB et A'B' ;

Consigne 2 : soit O un point distincte de A et B ; construire A' et B' par la symétrie de centre O puis comparer AB et A'B' ;

Consigne 3 : soit Δ une droite quelconque, construire A' et B' les images respectives de A et B par la symétrie d'axe (Δ) puis comparer d(A, B) et d(A', B').

Consigne 4 : soit r (O ; 50°) une rotation de centre O un point quelconque distincte de A et B et d'angle géométrique 50 degré, construire l'image de A et B par la rotation r (O, 50°) puis comparer les deux longueurs AB et A'B' ;

Consigne 5 : soit h (O ; 2) une homothétie de centre O et de rapport k =2, construire l'image de A et B par h (O ; 2) puis comparer la longueur AB et son image ;

Synthèse partielle :

Définition 1 : La racine grecque tient lieu de définition « Iso » : même ; « métron » : mesure. C'est une bijection qui conserve les distances.

Définition 2 : Une application du plan P est une transformation de f de P telle que : pour tout M et N de P, $M'N' = MN$ où l'on note $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ (on dit qu'une isométrie du plan P est une transformation de P qui conserve les distances)

Exemples d'isométries :

- ☞ Les symétries ;
- ☞ La translation ;
- ☞ La rotation ;

Activité 13 : les angles géométriques et les angles orientés

Consigne : soit $\widehat{EFG}$ un secteur angulaire aigu quelconque de mesure géométrique α ; construire le secteur angulaire $\widehat{E'F'G'}$ et son image

- a) Par la symétrie de centre O un point quelconque choisi ;
- b) Par la symétrie d'axe (d) une droite ;
- c) Par la translation de vecteur $\vec{u}$;
- d) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
- e) Conclure ;

Synthèse partielle :

Propriété 1 : Les isométries conservent les angles géométriques

NB : Une réflexion (symétrie d'axe ou axiale) change un angle orienté en un angle orienté de mesure opposée ;

Activité 14 : colinéarité, alignement.

Consigne 1 : soit A ; B et C trois points distinctes alignés d'un plan

Construire A ; B et C et leurs images respectives :

- a) Par la symétrie de centre O un point quelconque choisi ;
- b) Par la symétrie d'axe (d) une droite ;
- c) Par la translation de vecteur $\vec{u}$;
- d) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
- e) Conclure ;

Synthèse partielle :

Propriété 2 : Les isométries conservent les relations de colinéarité, l'alignement et les rapports de longueurs ...

Activité 15 : droites, parallélisme et orthogonalité

Consigne : soient (d) et (d') deux droites parallèles et (g) et (g') deux droites orthogonales. Construire les images de droites parallèles et perpendiculaires dans chacun de cas suivants :

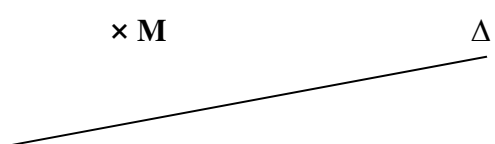
- a) Par la symétrie de centre O un point quelconque choisi ;
- b) Par la symétrie d'axe (Δ) une droite ;
- c) Par la translation de vecteur $\vec{u}$;
- d) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
- e) Conclure ;

Propriété 3 : Par une transformation des isométries:

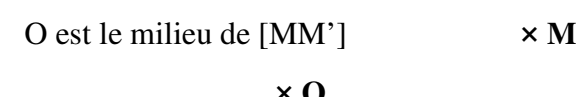
- ☞ l'image d'une droite est une droite.
- ☞ deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
- ☞ deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.
- ☞ Les isométries conservent le parallélisme et l'orthogonalité.

Les isométries (symétries ; translation ; rotation) :

➤ **Symétrie orthogonale ou réflexion d'axe Δ :**

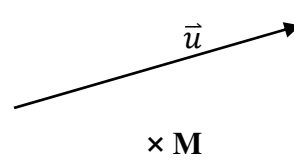
M a pour image M' signifie	• Si $M \in \Delta$, alors $M' = M$; • si $M \notin \Delta$, alors d est la médiatrice de $[MM']$. 
Notation	La réflexion d'axe Δ est notée S_{Δ} . M'est appelé le symétrique de M par rapport à Δ .
Points invariants	Les points de la droite Δ
Transformation réciproque	La transformation réciproque de S_{Δ} est S_{Δ} elle-même.

➤ **Symétrie centrale :**

M a pour image M' signifie	O est le milieu de $[MM']$ 
-----------------------------------	---

Notation	La symétrie de centre O est notée S_O . M'est appelé le symétrique de M par rapport à O .
Points invariants	Le centre O est le seul point invariant par S_O .
Relation vectorielle Caractéristique	Quels que soient les points M et N, on a : $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$
Transformation réciproque	La transformation réciproque de S_O est S_O elle-même.

➤ **Translation de vecteur $\vec{u}$:**

M a pour image M' signifie	
Notation	La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée $t_{\vec{u}}$
Points invariants	▪ Aucun, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ▪ Tous les points, si $\vec{u} = \vec{0}$
Relation vectorielle Caractéristique	Quels que soient les points M et N, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
Transformation réciproque	La transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$, notée $t_{-\vec{u}}$

➤ Rotation du plan orienté

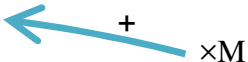
Jusqu'à présent pour définir une rotation, il était nécessaire de définir un sens de rotation ; la notion d'angle orienté nous permet de donner une autre définition ...

Dans tout le paragraphe, le plan est orienté.

Définition : Soit O un point du plan et α un réel.

La rotation de centre O et d'angle α , notée $r(O, \alpha)$, est la transformation du plan définie par :

- ❖ l'image de O est O ;
- ❖ l'image d'un point M distinct de O est le point M' tel que

$$OM' = OM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$$


O ×

Activité 16 : Expression analytique des isométries

Soit M (x ; y) un point quelconque du plan P et M'(x' ; y') son image

Consigne 1 : soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque du plan, placer le point M puis construire son image M' par la translation du vecteur $\vec{v}$. Ecrire les coordonnées de M' en fonctions de celles de M et $\vec{v}$.

Consigne 2 : soit O (a ; b) un point du plan P, construire M et son image M' par la symétrie de centre O puis écrire les coordonnées de M' en fonction de coordonnées de M et O.

Synthèse partielle :

Soi f une isométrie du plan P ; M'(x' ; y') et M(x ; y)

D'une manière générale, l'expression analytique des isométries dans le plan est :

$$f(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Remarque:

- Si $\theta = 0$ et $a, b \neq 0$ alors $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ expression analytique de la translation
- Si $\theta = \pi$ alors $\begin{cases} x' = -x + a \\ y' = -y + b \end{cases}$ expression analytique de la symétrie centrale
- Si f admet une droite (D) comme ensemble de point invariants alors f est symétrie orthogonale d'axe (D)
- Si f admet un seul point invariant alors f est la rotation de centre O (point invariant) et d'angle orienté $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \theta$

Activité 17 : Image de figures simples

Consigne : construire l'image par les isométries de :

- ☞ Un segment [AB] ;
- ☞ Un cercle de centre O et de rayon r ;
- ☞ Des triangles (isocèle, rectangle, équilatéral) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) ;
- ☞ Le milieu d'un segment et le centre de gravité d'un triangle ;
- ☞ Les points de contact ou d'intersection ;

Synthèse partielle :

Soit f une transformation isométrique :

- ☞ Le segment [AB] a pour image le segment [f(A) f(B)] ;

- ☞ L'image d'un cercle de centre O et de rayon r est un cercle de centre f (O) et de rayon r ;
- ☞ La nature des triangles (isocèle, rectangle, équilatéral) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée
- ☞ Le milieu d'un segment (conservation **du milieu**) et le centre de gravité d'un triangle sont conservés.
- ☞ Les points de contact ou d'intersection sont conservés.
- ☞ Les symétries, les translations et les rotations **conservent les aires** ;
- ☞ Les isométries conservent le produit scalaire ;

NB : on appelle isométrie directe ou déplacement toute isométrie de P pouvant se décomposer comme produit de deux symétries orthogonales. Ce sont les isométries qui conservent les angles orientés (translation ; rotation) ;

On appelle isométrie indirecte ou antidéplacement, toute isométrie de P, soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissée.

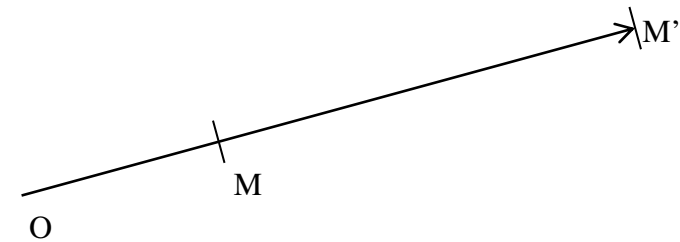
Activité 18 : similitudes

Consigne 1 : construire un segment $[AB]$ et son image $[A'B']$ par l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$

Consigne 2 : construire un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par les isométries puis construire les images de A' ; B' et C' par une homothétie de centre B' et de rapport $k = -3$; conclure.

Synthèse partielle :

Définition 1 : L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application du plan vers lui-même qui à tout point M du plan associe M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$



☞ **Homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) :**

M a pour image M' signifie	$\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$ L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O.
Notation	L'homothétie de centre O et de rapport k est notée $h(O, k)$. M' est appelé l' homothétique de M .
Points invariants	• Si $k = 1$, tous les points sont invariants • Si $k \neq 1$, le centre O est le seul point invariant
Relation vectorielle Caractéristique	Quels que soient les points M et N, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$
Transformation réciproque	La transformation réciproque de $h_{O,k}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$ notée $h(O, \frac{1}{k})$

Propriétés : Par une homothétie

- L'image d'une droite d est une droite d' parallèle à d .
- L'image d'un segment $[MN]$ est un segment $[M'N']$ tel que $M'N' = |k|MN$.
- L'image d'un triangle LMN est un triangle $L'M'N'$ dont les côtés sont parallèles et proportionnels à ceux de LMN .
On a $\frac{L'M'}{LM} = \frac{L'N'}{LN} = \frac{M'N'}{MN} = |k|$. On dit que LMN et $L'M'N'$ sont homothétiques
- L'image d'un cercle C de centre C et de rayon R est le cercle C' de centre $C' = h(C)$ et de rayon $|k| \times R$

Propriété : Si une homothétie de rapport k transforme une figure F en une figure F' , alors :

- ☞ Les dimensions de F' s'obtiennent en multipliant celles de F par $|k|$
- ☞ L'aire de F' s'obtient en multipliant celle de F par k^2 .

Définition 2 : Une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Propriétés : Une similitude conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et les angles. Une similitude conserve les rapports : il s'agit toujours d'une modélisation géométrique de la proportionnalité.

Activité 19 : expression analytique d'une similitude

Consigne : soient $O(1; 2)$; $M(x; y)$; $M'(x'; y')$ et $h_{(O; k)}$ une homothétie de centre O et de rapport $k = -\frac{2}{3}$. placer le O ; M et M' puis écrire les coordonnées de M' en fonction de coordonnées de M et de O .

Synthèse partielle :

Soit f une similitude du plan P telle que $f(M) = M'$

L'expression analytique d'une similitude peut être écrite sous la forme :

$$f(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} x' = kx \cos \theta - ky \sin \theta + p \\ y' = kx \sin \theta + ky \cos \theta + q \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Remarque :

☞ Si $\theta = 0$ alors f est une homothétie de centre

$$O\left(\frac{p}{1-k}; \frac{q}{1-k}\right) \text{ et rapport } k \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

☞ Si $\theta = \pi$ alors f est une homothétie de $O\left(\frac{p}{1+k}; \frac{q}{1+k}\right)$ et

$$\text{rapport } k' = -k; k \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow \begin{cases} x' = -kx + p \\ y' = -ky + q \end{cases}$$

Activité 20 : Utilisation de ces applications du plan pour résoudre de problèmes de construction ou de configuration.

Consigne 1 : ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.

- 1) Démontrer que : $S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = S_{(OB)} \circ S_{(OC)}$;
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$ et $S_{(OB)} \circ S_{(OC)}$

Consigne 2 : ABCD est un carré. Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de $[AB]$ et $[BC]$. Déterminer les images des points A, B, C et D par la transformation $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$. Quelle est la nature de cette transformation ?

Consigne 3 : ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$.

Démontrer que $h'oh$ est une homothétie et préciser son rapport.

Consigne 4 : ABCD est un carré de centre O et de sens direct. On considère les rotations : $r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$; $r_2 = r(A, \frac{\pi}{2})$. Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$

Synthèse partielle :

Propriété 1 : composée de deux translations

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$. On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$

Propriété 2 : composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ') , la composée $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$, des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$

Propriété 3 : composée de symétries orthogonales d'axes sécants

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes, O un point, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La composée $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$, des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Propriété 4 : composée de deux rotations de même centre

Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' . $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Propriété 5 : composée de deux rotations de centres distincts

Soit r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et α'

☞ Si $\alpha + \alpha' \neq 0$ alors $r' \circ r$ est la rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

☞ $\alpha + \alpha' = 0$ alors $r' \circ r$ est une translation.

Propriété 6 : composée de deux homothéties de même centre

Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' , $h'oh$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k'k$.

Propriété 7 : composée de deux homothéties de centres distincts O et O'

Soit $h_{(O,k)}$ et $h_{(O',k')}$ deux homothéties de centres O et O'.

- Si $k'k \neq 1$, alors $h'oh$ est homothétie de rapport $k'k$;
- Si $k'k = 1$, alors $h'oh$ est une translation.

Evaluation Formative :

Evaluation 1 : le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit h et h' les homothéties dont les expressions analytiques sont

$$\text{respectivement : } \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$$

- 1- Démontrer que les transformations $h'oh$ et hoh' sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques dans le repère (O, I, J)
- 2- Déterminer les coordonnées des centres de ces homothéties

Evaluation 2 : le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit h l'homothétie de centre $\Omega (-2,1)$ et rapport -3, t la translation de vecteur $\vec{v}\left(\frac{1}{3}\right)$ et σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Déterminer les expressions analytiques de homothéties h et $h \circ t$. Déterminer les expressions analytiques de similitudes $\sigma \circ h$ et $h \circ \sigma$.

Evaluation 3 : ABCD est un losange de sens direct tel que $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $f = S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$; $g = S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$.
2. Démontrer que : $g \circ f = f \circ g = t_{\vec{AC}}$

Evaluation 4 : quelle est l'image par une isométrie d'un carré ? D'un rectangle ? D'un losange ? Justifier chaque réponse.

Evaluation 5 :

1. Déterminer les symétries orthogonales qui laissent globalement invariant un cercle (C) de centre O.
2. Déterminer les rotations qui laissent globalement invariant un cercle (C) de centre O

Evaluation 6 : ABC est un triangle inscrit dans un cercle (Γ) de centre O, H est un orthocentre, I milieu du segment $[BC]$.

1. On considère le point M du plan tel que : $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
 - a) Démontrer que : $\vec{AM} = 2\vec{OI}$; en déduire que le point appartient à la hauteur issue de A.
 - b) Démontrer que les points M et H sont confondus.
2. Soit P la symétrie du point H par rapport à la droite (BC).

- a) Déterminer l'image du point P par la transformation définie par : $f = t_{\vec{HA}} \circ S_{(BC)}$.
- b) Déterminer la droite (Δ) telle que $t_{\vec{HA}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)}$.
- c) En déduire que le point P est sur le cercle (Γ). Énoncer le théorème ainsi démontré.

Evaluation 7: Soient A ; B ; C trois points du plan tels que

AB = AC = 5 et BC = 6

- 1) Construire le triangle ABC et Calculer $\vec{AB} \times \vec{AC}$
- 2) Soit G barycentre des points (A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3) ; construire le barycentre G

Evaluation 8 : Soit le parallélogramme ABCD.

- 1) Trouver le barycentre G des points pondérés (A, 2) ; (B, -5) ; (C, 3) ; (D, -1)
- 2) Trouver les coordonnées de G relativement au repère (A, B, D)
- 3) Construire G

Evaluation 9 : Dans chaque cas, déterminer la valeur des coefficients α ; β ; γ afin que le point G soit barycentre du système :

$G\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta) ; (C ; \gamma)\}$. Les points A, B, C vérifient les relations :

- a) $3\vec{GA} - 2\vec{AB} + \vec{GC} = \vec{0}$;
- b) M représente un point quelconque du plan : $5\vec{MG} = 2\vec{MA} - \vec{BC} + 3\vec{MC}$

Evaluation 10 : Soient les vecteurs

$\vec{U}\left(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\vec{V}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\vec{W}(1; 1)$ dans une base orthonormée (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Calculer :

- 5) $\|\vec{U}\|$; $\|\vec{V}\|$; $\|\vec{W}\|$
- 6) $\vec{U} \times \vec{V}$; $\vec{U} \times \vec{W}$; $\vec{V} \times \vec{W}$
- 7) $(2\vec{U} + 5\vec{V}) \times (-\vec{U} + 3\vec{W})$
- 8) $\|\vec{U} + \vec{V}\|$; $\|2\vec{V} + \vec{W}\|$; $\|\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}\|$

Evaluation 11 : Déterminer les longueurs des côtés du triangle ABC et les mesures des angles A ; B ; C dans les cas suivants :

- 1°) A (2 ; 3) ; B (5 ; 1) ; C (4 ; 0)
- 2°) A (5 ; -1) ; B (1 ; 4) ; C (-7 ; 2)
- 3°) A (1 ; 1) ; B (3 ; 2) ; C (2 ; 4).

Evaluation 12 : Le couple $(\vec{U}, \vec{V})$ de vecteurs forment-ils une base orthonormée de $\mathcal{V}$?

$$\vec{U} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \text{ et } \vec{V} = -\sqrt{3}\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{U} = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \vec{V} = 4\vec{i} - 3\vec{j};$$

$$\vec{U} = -5\vec{i} + 12\vec{j} \text{ et } \vec{V} = \frac{-3}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$$

Evaluation 13 : Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tels que :

$$\vec{U} \times \vec{V} = 2; \|\vec{U}\| = 2 \text{ et } \|\vec{V}\| = 3$$

- 1°) $A = (3\vec{U}) \times (-4\vec{V})$; 2°) $B = \left(\frac{1}{2}\vec{U}\right) \times \left(\frac{4}{3}\vec{V}\right)$;
- 3°) $C = \vec{U} \times (\vec{U} + \vec{V})$; 4°) $D = (\vec{U} + 3\vec{V}) \times (\vec{U} - 2\vec{V})$;
- 5°) $(\vec{U} + 2\vec{V}) \times (\vec{U} - \vec{V}) + (3\vec{U} - \vec{V}) \times (\vec{U} + \vec{V})$

Evaluation 14 : Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tels que :

$$\vec{U} \times \vec{V} = \frac{-1}{2};$$

$\|\vec{U}\| = 1$ et $\|\vec{V}\| = 1$. On pose $\vec{W} = \vec{U} + X\vec{V}$ où X est un réel.

- 3) Exprimer $(\vec{W})^2$ en fonction de X ;
- 4) Déterminer x de telle sorte que $\vec{W}$ soit un vecteur unitaire ;

Evaluation 14 : ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. Soient P, Q et R des points du plan tels que : $\vec{CP} = \frac{1}{2}\vec{CA}$; $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AB}$; $\vec{BR} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

On pose $G = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$

- 1) Fais la figure;
- 2) Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

Evaluation 15 : ABC est un triangle quelconque, G le milieu de [AB], E et F deux points définis par : $\vec{EB} = -\frac{1}{4}\vec{BC}$ et $3\vec{FA} + \vec{FC} = \vec{0}$

- 1) Exprimer E et F comme barycentres des systèmes de points pondérés à préciser.
- 2) Montrer que les droites (AE), (BF) et (CG) passent par un point commun qu'on précisera.
- 3) Soit H le barycentre de $\{(B, 3); (C, -1)\}$; Montrer que H, F et G sont alignés.

Evaluation 16 : Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4cm.

- 1) Construire le barycentre I des points pondérés (A, 1) et (B, 3) puis le barycentre J des points pondérés (A, 3) et (C, 1) .
- 2) Soit M un point du plan. Construire l'ensemble des points du plan tel que :
 - a) $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 4$; b) $\|3\vec{MA} + \vec{MC}\| = 12$;
 - c) $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|3\vec{MA} + \vec{MC}\|$

Evaluation 17 : On considère le segment [AB] de longueur 4 cm ; I son milieu.

- Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI^2 .
- Déterminer l'ensemble des positions du point M puis représenter si possible lorsque :

a) $MA^2 + MB^2 = 8$; b) $MA^2 + MB^2 = -9$; c) $MA^2 + MB^2 = 0$

Evaluation 18 ; Soient A et B deux points du plan tel que $AB = 5\text{cm}$. On désigne par I le milieu de $[AB]$.

- Détermine et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 25$.
- Détermine l'ensemble (D) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = 0$.
- Détermine l'ensemble (D) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = -20$.

Evaluation 19 : ABC est un triangle rectangle en C tel que $BC=2$ et $AC=3$. I est le barycentre du système $\{(A, 2)(B, 5); (C, -3)\}$ et j le point du plan tel que : $\vec{BJ} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$;

- Montrer que le point J est barycentre des points B et C affectés des coefficients que l'on précisera.
- Montrer que les points A, I et J sont alignés.
- Placer les points I et J.
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $AM^2 + JM^2 = 35$.
 - Tracer (C)

Evaluation 20 : On donne un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- On donne les points A (2 ; -1), B (1 ; 3) et C (-1 ; -2). Détermine l'expression analytique de chacune des transformations suivantes :
 - f est la translation de vecteur $\vec{AB}$.
 - f est la symétrie orthogonale d'axe (BC)
 - f est l'homothétie de centre A et de rapport -2.

d) f est la symétrie centrale de centre C.

- Détermine la nature et les éléments géométriques caractéristiques de l'application f du plan dans lui-même définie analytiquement par :

a) $f: \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$; b) $f: \begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y \end{cases}$; c) $f: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$;

d) $f: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$; e) $f: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$; f) $f: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

- Pour chacune des applications de la question 2), détermine les images des points A, B et C.

Evaluation 21 : On donne deux segments $[AA']$ et $[BB']$ tels que les droites (AA') et (BB') soient sécantes et (AB) parallèle à $(A'B')$.

Montre qu'il existe une homothétie h qui transforme A en A' et B en B'. Construis son centre O.

Evaluation 22 : ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm et de centre de gravité I.

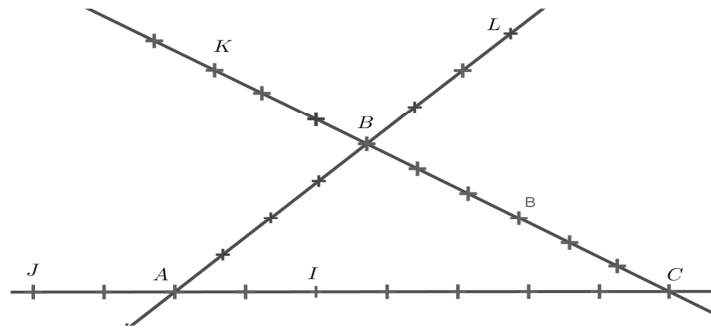
- Construis le cercle (C1) circonscrit à ABC et le cercle (C2) inscrit à ABC.
- Détermine une homothétie transformant (C1) en (C2).
- Combien d'homothéties répondent à cette question ?

Evaluation 23 : On considère un parallélogramme ABCD de centre O. Soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[DC]$, (DI) et (BJ) se coupe en G.

- Montre que G est le centre d'une homothétie transformant I en D, J en B et A en C.
- Exprime l'aire du quadrilatère AIGJ en fonction l'aire du quadrilatère BGDC.

Evaluation 24 : On donne la figure ci-contre ; les graduations sur les droites sont régulières et de même pas.

- 1) Détermine le rapport de l'homothétie h dans chacun des cas suivants
 - a) h a pour centre B et $h(C) = K$.
 - b) h a pour centre C et $h(K) = B$
 - c) h a pour centre A et $h(J) = C$.
- 2) Détermine le centre I de l'homothétie h dans chacun des cas suivants :
 - a) $h(B) = C$ et le rapport de h est 3 ; b) $h(C) = K$ et le rapport de h est $-\frac{1}{2}$
 - c) $h(B) = L$ et le rapport de h est $\frac{7}{4}$; d) $h(B) = A$ et le rapport de h est $\frac{7}{2}$
 - e) $h(I) = J$ et le rapport de h est -1 .

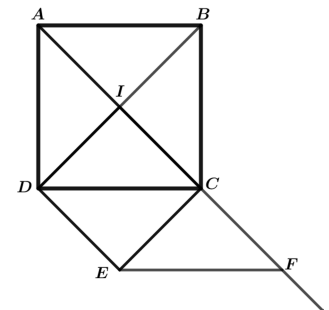


Evaluation 25 : Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de centre I . $ICED$ est un parallélogramme de même que $CDEF$. f est une application du plan orienté dans lui-même.

Dans chacun des cas suivants, donne la nature si possible de f (rotation, translation, symétrie orthogonale, homothétie ou symétrie centrale) ; précise le cas échéant les éléments géométriques caractéristiques de f .

NB: on ne considérera que les transformations dont les éléments caractéristiques n'utilisent que les points indiqués sur la figure.

- a) $f(A) = B$ et $f(D) = C$; b) $f(A) = B$ et $f(B) = C$;
- c) $f(A) = C$, $f(B) = D$ et $f(D) = D$;
- d) $f(A) = E$, $f(D) = D$ et $f(B) = B$
- e) $f(I) = I$ et $f(A) = F$:
- f) $f(I) = I$; $f(B) = D$ et $f(A) = F$;
- g) $f(A) = C$; h) $f(A) = A$, $f(C) = C$, $f(E) = E$.

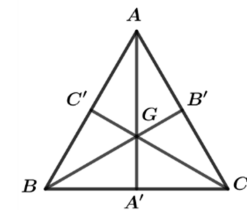


Evaluation 26 : Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G . g est une application du plan orienté dans lui-même.

Dans chacun des cas suivants, donne la nature possible de g (rotation, translation, symétrie orthogonale, homothétie ou symétrie centrale) ; précise le cas échéant les éléments géométriques caractéristiques de f .

NB: on ne considérera que les transformations dont les éléments caractéristiques n'utilisent que les points indiqués sur la figure.

- a) $g(A) = B$ et $g(B) = C$; b) $g(C) = B$;
- c) $g(A') = C$; d) $g(B) = B'$
- e) $g(B) = G$ f) $g(C') = A$;
- g) $g(G) = G$, $g(B) = A$ et $g(A) = A'$.



Evaluation 27 : Sur la figure d'évaluation 26, ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G .

- 1) Trouve les applications f (rotation, translation, symétrie orthogonale, homothétie ou symétrie central) utilisant pour leur définition seulement les points indiqués sur la figure dans chacun

des cas suivants. Donne le cas échéant les éléments géométriques caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :

- a) f transforme le triangle AGB' en $GC'B$;
 - b) f transforme le triangle $AA'C$ en ABB' ;
 - c) f transforme le triangle $B'GC$ en $C'GB$.
 - d) f transforme le triangle $AB'C'$ en BAC ;
 - e) f transforme le triangle ABC en $A'C'B$;
 - f) f transforme le triangle $A'B'C$ en $AB'C'$.
- 2) a) Trouve deux symétries orthogonales dont la composée transforme le triangle AGB' en $GC'B$.
 - b) Trouve une translation t et une rotation r dont la composée dans cet ordre (rot) transforme le triangle équilatéral $A'B'C$ en $BC'A'$, triangle équilatéral.

Evaluation 28 : On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et le cercle (C) de centre O et circonscrit au triangle ABC .

Le cercle (C') de diamètre $[OC]$ recoupe (AC) en I , (OI) coupe en E le demi-cercle de diamètre $[BC]$ contenant A . La médiatrice de $[AB]$ coupe en F le demi-cercle de diamètre $[BC]$ ne contenant pas A .

Détermine les images des points A , B et E par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et déduis-en que $(AC) \parallel (OF)$.

Evaluation 29 : $ABCD$ est un losange. On considère les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) telles que :

- (d_1) passe par B et est parallèle à (AC)
- (d_2) passe par D et est parallèle à (AC)
- (d_3) est le symétrique de (AC) par rapport au point B .

Détermine les images respectives des droites (d_1) et (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ et déduis-en que (d_2) est parallèle à (d_3) .

Evaluation 30 : On donne un demi-cercle de diamètre $[AB]$, O le milieu de $[AB]$. On veut construire un carré $IJKL$ tel que : I et J appartiennent à $[AB]$, K et L appartiennent au demi-cercle.

- 1) On suppose un tel carré construit. Montre que I et J sont symétriques par rapport à O .
- 2) On considère le carré $ABEF$ tel que E et F soient dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le demi-cercle. On appelle K le point d'intersection de (OF) avec le demi-cercle. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme F en K . On pose $L = h(E)$, $I = h(B)$ et $J = h(A)$.
 - a) Construis les points I , J et L .
 - b) Montre que $IJKL$ est un carré répondant à la question.
- 3) Montre que I et J sont symétriques par rapport à O .

Evaluation 31 : On donne trois droites strictement parallèles (d_1) , (d_2) et (d_3) . On veut construire un triangle équilatéral ABC tel que $A \in (d_1)$, $B \in (d_2)$ et $C \in (d_3)$.

- 1) On suppose un tel triangle construit.
 - a) Montre que B est l'image de C par une rotation r de centre A dont tu donneras l'angle.
 - b) Soit Δ l'image de (d_3) par la rotation r . Montre que $B \in \Delta$.
- 2) Déduis de ce qui précède un programme de construction d'un triangle ABC répondant à la question posée.
- 3) Combien de triangles répondant aux contraintes peut-on construire ?

Evaluation 32 : On donne un cercle (C) de diamètre $[AB]$, O le milieu de $[AB]$. Une droite passant par A recoupe (C) en M . Soit M' le projeté orthogonal de O sur (AM) . Détermine l'ensemble des points M' (lieu géométrique de M') lorsque M décrit (C) .

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

CHAPITRE IX : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Compétences :

☞ Composantes, manifestations :

Contenu(s) : Géométrie dans l'espace

- ✓ Espace et parallélisme. Il s'agit de consolider la représentation de l'espace vue en 10^{ème}.
- ✓ Repérage d'un point de l'espace.
- ✓ Orthogonalité dans l'espace : Droites orthogonales, droites et plans orthogonaux, plans perpendiculaires.
- ✓ Vecteurs de l'espace: définition, opérations, base.
- ✓ Barycentre dans l'espace

Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles :**
- **Ressources financières :**

Stratégies d'animation : groupe de 5 élèves ou par table

Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

Pré-évaluation : Construis et note un cube et un parallélépipède en identifiant les dimensions et les faces

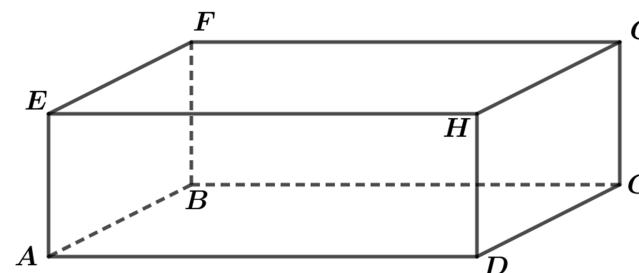
Situation problème: Mamadou souhaiterait construire un magasin sous forme d'un parallélépipède rectangle dans son champ pendant la saison pluvieuse dans laquelle il se repose. et conserve les semences.

Pour estimer le nombre de briques à confectionner pour construction du magasin, le maçon a demandé les dimensions du magasin qu'il souhaite construire. Desquelles dimensions parle – t – il ?

En connaissant ces dimensions, comment peut – il déterminer le nombre de briques ?

Activité 1 : Espace et parallélisme. Il s'agit de consolider la représentation de l'espace vue en 10^{ème}.

Consigne 1 : Pour les deux questions suivantes, utilise le parallélépipède ABCDEFGH représenté ci – dessous.



1) Vrai ou faux ? (avec deux droites)

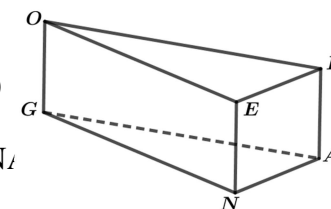
- a) (FH) est parallèle à (BD) ;
- b) (EB) est parallèle à (GD) ;
- c) (HD) est orthogonale à (DC) ;

2) Vrai ou faux ? (avec un plan et une droite)

- a) (EB) est parallèle au plan (CDHG) ;
- b) (HC) est parallèle au plan (CDHG) ;
- c) (FH) est parallèle au plan (CDHG) ;

Consigne 2 : voici un prisme droit

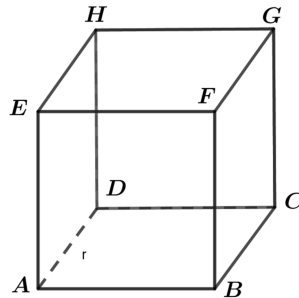
- a°) Cite les arêtes parallèles à la droite (GO) ;
- b°) Cite les arêtes orthogonales à la droite (EN)
- c°) Cite les arêtes parallèles au plan (NARE)
- d°) Cite les arêtes perpendiculaires au plan (GN)



Consigne 3 : on considère un cube ABCDEFGH

Cite :

- 1) Deux droites sécantes ;
- 2) Deux droites strictement parallèles ;
- 3) Deux droites non coplanaires ;
- 4) Deux plans sécants ;
- 5) Deux plans strictement parallèles ;
- 6) Une droite sécante à un plan ;
- 7) Une droite strictement parallèle à un plan ;
- 8) Une droite contenue dans un plan ;



Consigne 4 : Dans le cube de la figure précédente, indique (sans justifier) les positions relatives :

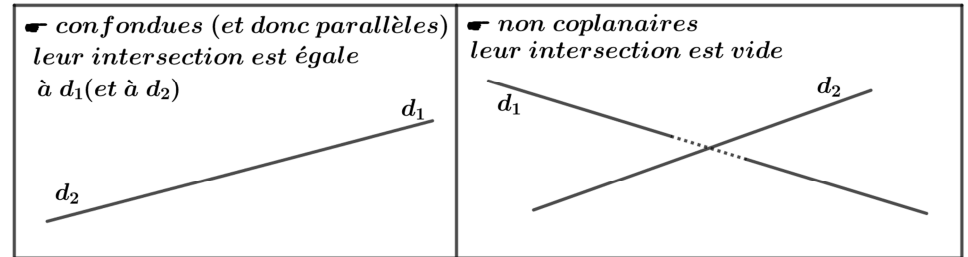
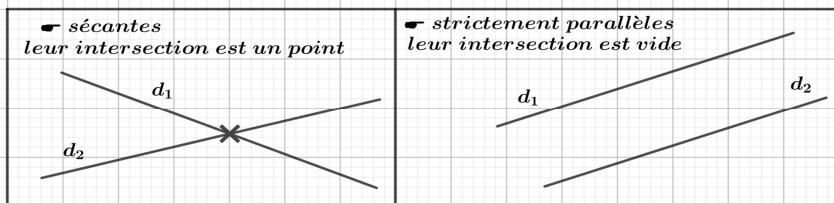
- 1) Des plans (EFA) et (GCD) ;
- 2) Des droites (EF) et (HC) ;
- 3) De la droite (DG) et du plan (ABE) ;
- 4) Des plans (CDF) et (ABG) ;
- 5) Du plan (EHB) et de la droite (DF) ;
- 6) Des droites (AG) et (BH) ;

Synthèse partielle :

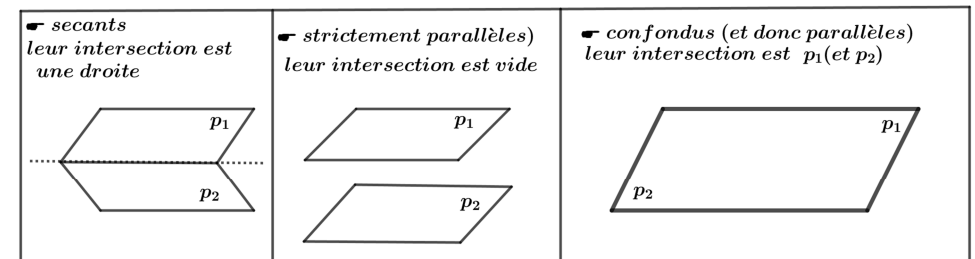
Droites et plans de l'espace

Positions et intersection de droites et de plans

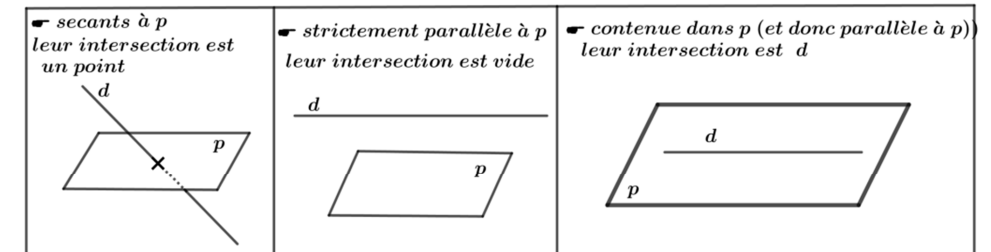
☞ Deux droites d_1 et d_2 de l'espace peuvent être :



☞ Deux plans p_1 et p_2 peuvent être :



☞ Par rapport à un plan p , une droite d peut être :

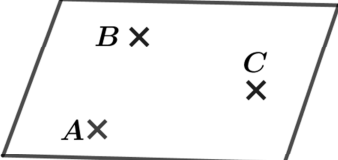
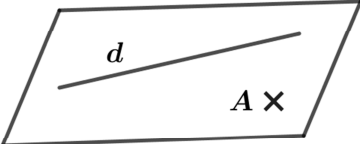
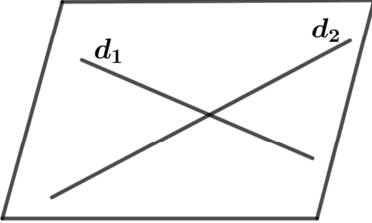
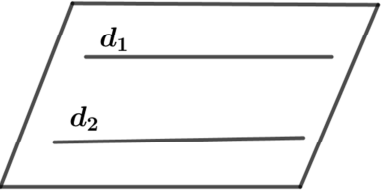


Remarque :

- Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement parallèles ;
- Il n'est pas possible que deux plans aient un seul point commun ;

Caractérisation d'un plan

☞ Dans l'espace il existe un seul plan p

☛ passant par trois points A ; B et C non alignés 	☛ passant par un point A et contenant la droite d qui ne passe pas par A 
☛ contenant deux droites sécantes d_1 et d_2 	☛ contenant deux droites strictement parallèles d_1 et d_2 

☞ Parallélisme de droites et de plans

- ✓ Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles à une même droite d_3 alors d_1 et d_2 sont parallèles entre elles ;
- ✓ Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles alors tout plan contenant d_2 est parallèle à d_1 ;
- ✓ Si deux plans p_1 et p_2 sont parallèles, toute droite d contenue dans p_1 est parallèle à p_2 ;
- ✓ Si deux plans p_1 et p_2 sont sécants suivant une droite δ ; toute droite d parallèle à p_1 et à p_2 est parallèle à δ ;

- ✓ Si deux plans p_1 et p_2 sont parallèles; toute droite d sécante à p_1 et aussi sécante à p_2 ;
- ✓ Si deux plans p_1 et p_2 sont parallèles; tout plan p_3 sécant à p_1 et aussi sécant à p_2 et les droites d'intersection sont parallèles.
- ✓ Pour que deux plans p_1 et p_2 soient parallèles ; il suffit que p_1 contiennent deux droites sécantes d_1 et d'_1 respectivement parallèles à deux droites sécantes d_2 et d'_2 de p_2 ;
- ✓ Pour qu'une droite d soit parallèle à un plan p , il suffit que d soit parallèle à une droite de p ;
- ✓ Si deux plans p_1 et p_2 sont parallèles à un même plan p_3 alors p_1 et p_2 sont parallèles entre eux ;
- ✓ Etant donné un plan p et un point A , il existe un et un seul plan p' passant par A et parallèle à p , ce plan contient toutes les droites passant par A et parallèles à p ;

Théorème du toit :

Si deux droites parallèles d et d' sont dans des plans p et p' sécants suivant une droite δ , alors d et d' sont parallèles à δ ;

Attention :

Si d est parallèle à p et si d' est parallèle à p , on ne peut pas en déduire que d est parallèle à d' ;

Evaluation : On considère le cube ABCDEFGH

1°) justifie que les quatre points A , D , F et G sont coplanaires ;

(C'est – à – dire qu'ils appartiennent à un même plan)

2°) Démontre que les droites (CE) et (BH) sont sécantes ;

3°) a) Justifie que les droites (BD) et (FH) sont parallèles ;

b) Soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$;

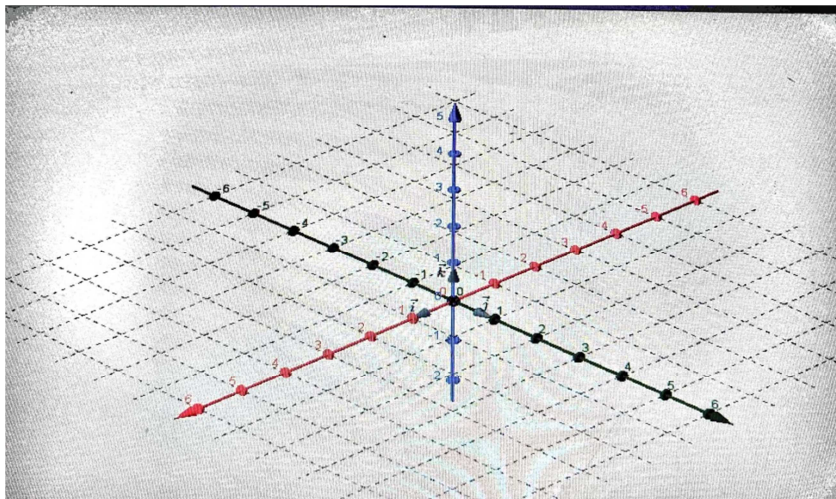
Démontre que les droites (IJ) et (FH) sont parallèles ;

4°) Démontre que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes.

Soit Ω leur point d'intersection. Démontre que ΩAHD est un parallélogramme et donne la position de Ω par rapport à A et à E :

Activité 2 : Repérage d'un point de l'espace.

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Soit les points $A(1 ; 2 ; -3)$, $B(-2 ; 4 ; 0)$, $C(3 ; 0 ; -2)$, $D(4 ; -1 ; 2)$ et $E(1 ; 2 ; -3)$ et $F(2 ; 1 ; 2)$



Consigne ;

- 1) Représente graphiquement les points A ; B ; C ; D ; E et F dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$;
- 2) Déterminons les coordonnées de A' , B' et C' , les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ puis place les

Synthèse partielle :

Repérage d'un point de l'espace :

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.

Le quadruplet $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est appelé repère de l'espace.

On dit que $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est la base du repère.

O est appelé l'origine du repère.

Le repère est dit orthonormé lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$.

Tout vecteur $\vec{u}$ peut se décomposer de sorte que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x , y et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y; z)$.

Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x , y et z sont les coordonnées du point M .

x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M .

On note $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $M(x; y; z)$.

Représentation d'un point dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

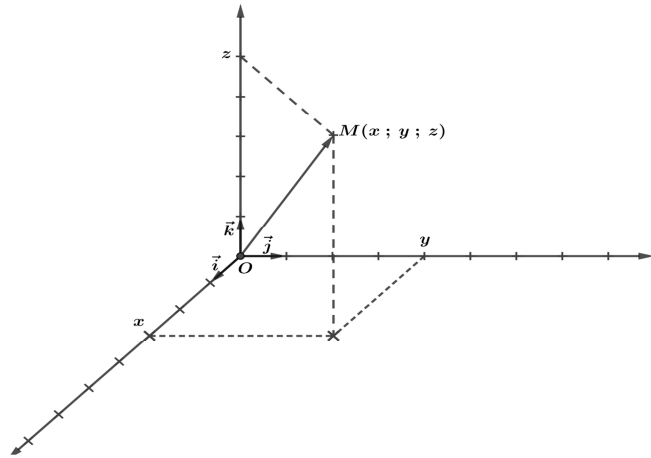
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace (voir repère)

Les coordonnées du milieu d'un segment :

Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace muni

d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Alors on a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont :
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

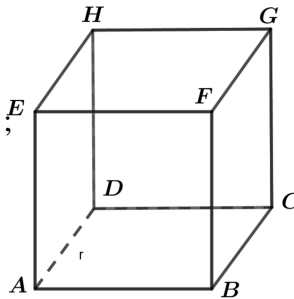


Activité 3 : Orthogonalité dans l'espace : Droites orthogonales, droites et plans orthogonaux, plans perpendiculaires.

Consigne 1 : Soit ABCDEFGH un cube. On désigne par I ; J et K les milieux respectifs des segments [BF] ; [FG] et [AE] :

Démontre que :

- La droite (IK) est orthogonale au plan (ADF) ;
- La droite (BE) est orthogonale au plan (ADG) ;
- La droite (DE) est orthogonale au plan (IJK) ;
- Les droites (AC) et (CF) sont orthogonales ;
- Les droites (IK) et (CF) sont orthogonales ;
- Les droites (IJ) et (ED) sont orthogonales ;



Consigne 2 : Soit ABCDEFGH un cube. Démontre que les plans suivants sont perpendiculaires

- (ABC) et (EAC) ;
- (EAC) et (HDB) ;
- (FCH) et (AGE)

On pourra utiliser cette définition : Deux plans sont perpendiculaires lors que l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre

Synthèse partielle :

Définition : Deux droites de $\mathcal{E}$ sont orthogonales lorsque, un point de $\mathcal{E}$ étant choisi, les parallèles à ces droites passant par ce point sont perpendiculaires

« « ($\mathcal{D}$) est orthogonale à ($\mathcal{D}'$) » » se note ($\mathcal{D}$) $\perp$ ($\mathcal{D}'$)



Remarque : Deux droites de $\mathcal{E}$ perpendiculaires lorsqu'elles sont sont orthogonales et sécantes

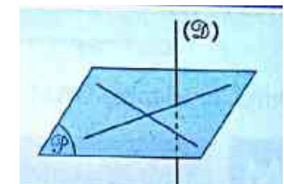
Propriétés :

- ☞ Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. $\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \\ (\Delta) \parallel (\mathcal{D}) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (\mathcal{D}')$
- ☞ Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. $\begin{cases} (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \\ (\Delta) \perp (\mathcal{D}) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (\mathcal{D}')$

Droite et plan orthogonaux : Une droite ($\mathcal{D}$) et un plan ($\mathcal{P}$) sont orthogonaux, lorsque la droite ($\mathcal{D}$) est

orthogonale à deux droites sécantes du plan ($\mathcal{P}$)

On note ($\mathcal{D}$) $\perp$ ($\mathcal{P}$) ou ($\mathcal{P}$) $\perp$ ($\mathcal{D}$)

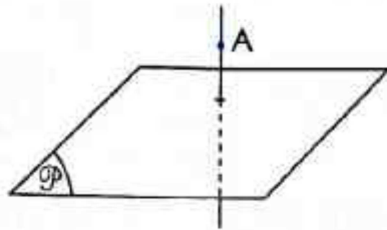


Remarque :

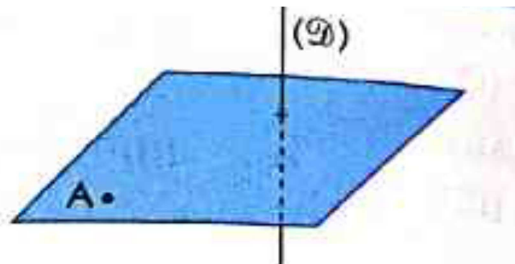
- On dit également que $(\mathcal{D})$ est orthogonale à $(\mathcal{P})$ ou que $(\mathcal{P})$ est orthogonal à $(\mathcal{D})$;
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est sécante à ce plan ; elle est dite orthogonale au plan en ce point ;
- Une droite peut être orthogonale à deux droites parallèles d'un plan sans être orthogonale à ce plan

Propriétés :

- ☞ Etant donné un point A et un plan $(\mathcal{P})$, il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$



- ☞ Etant donné un point A et une $(\mathcal{D})$, il existe un unique plan passant par A et orthogonale à $(\mathcal{D})$



Propriété fondamentale : Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan

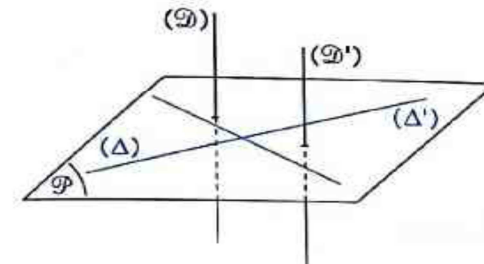
Méthode : Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l'une d'elles est orthogonale à un plan contenant l'autre ;

Autres propriétés :

Propriété 1 :

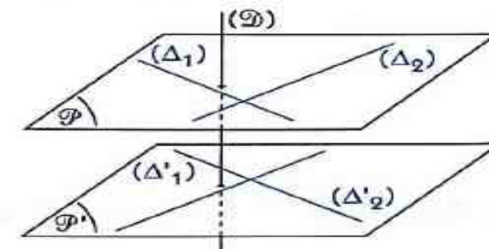
- ✓ Si deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles, tout plan $(\mathcal{P})$ orthogonal à $(\mathcal{D})$ est orthogonal à $(\mathcal{D}')$

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}') \perp (\mathcal{P}).$$



- ✓ Si deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles, toute droite $(\mathcal{D})$ orthogonale à $(\mathcal{P})$ est orthogonale à $(\mathcal{P}')$

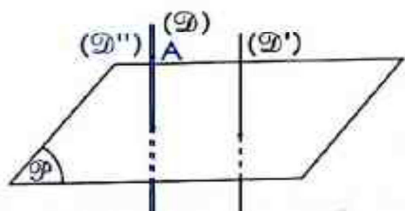
$$\begin{cases} (\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}') \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}').$$



Propriété 2 :

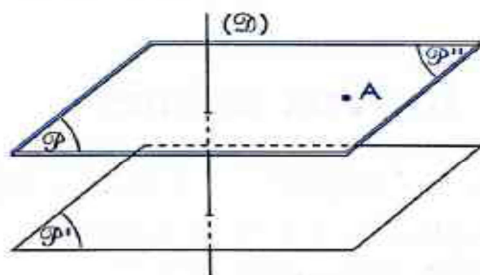
- ✓ Si deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales à un même plan $(\mathcal{P})$ alors elles sont parallèles

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}') \perp (\mathcal{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}').$$



- ✓ Si deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont orthogonaux à une même droite $(\mathcal{D})$ alors ils sont parallèles

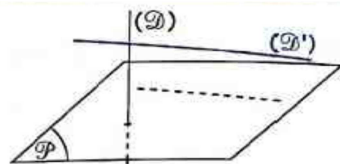
$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}') \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}').$$



Propriété 3 :

- ✓ Soit $(\mathcal{D})$ une droite orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, toute droite $(\mathcal{D}')$ orthogonale à $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}') \parallel (\mathcal{P}).$$



Méthode :

Pour démontrer que deux droites sont parallèles, il suffit de démontrer qu'elles sont orthogonales à un même plan ;

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de démontrer qu'ils sont orthogonaux à une même droite

Plans perpendiculaires : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

« $(\mathcal{P})$ est orthogonale à $(\mathcal{P}')$ » se note $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$

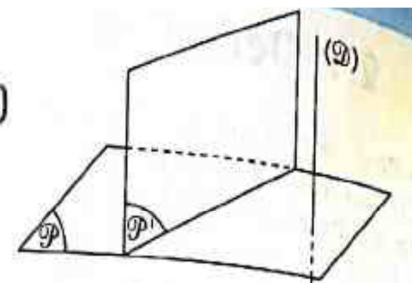
Remarque : Si deux plans sont perpendiculaires, ils sont sécants

Conséquences :

- Si une droite $(\mathcal{D})$ est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, tout plan parallèle à $(\mathcal{P})$ est perpendiculaire à $(\mathcal{D})$;
- Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}') \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$$

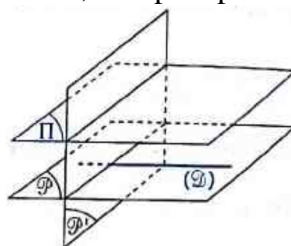
$$\begin{cases} (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}').$$



Remarque : Si deux plans sont perpendiculaires, une droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre (il suffit seulement de considérer par exemple leur droite d'intersection)

Propriétés : Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre

$$\begin{cases} (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \\ (\mathcal{P}) // (\Pi) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{P}') \perp (\Pi).$$



Remarque :

- ✓ Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre ;
- ✓ Deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas forcément parallèles entre eux. ;

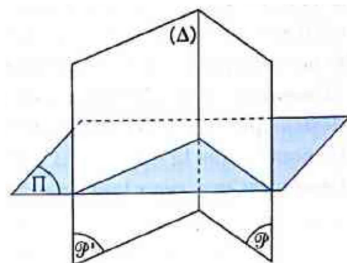
Méthode : Pour démontrer que deux plans sont perpendiculaires, on peut utiliser un des procédés suivants :

- ☞ Trouver une droite de l'un qui est orthogonale à l'autre ;
- ☞ Trouver une droite parallèle à l'un et orthogonale à l'autre ;
- ☞ Trouver un plan parallèle à l'un et perpendiculaire à l'autre ;

Orthogonalité dans l'espace :

Propriété :

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est orthogonal à leur droite d'intersection



Evaluation 1 : On considère un cube ABCDEFGH

- 1) Justifie que les droites (HE) et (EB) sont perpendiculaires ;
- 2) Les droites (GE) et (EB) sont – elles perpendiculaires ?
- 3) Que peut – on dire des droites (HE) et (FA) ?
- 4) Justifie que la droite (EG) est parallèle au plan (ABCD) ;

- 5) Justifie que la droite (DB) est perpendiculaire au plan (EAG) ;
- 6) Justifie que la droite (HB) est sécante au plan (EGC). Construis leur intersection ;
- 7) Soient I et J les milieux de [AB] et [AE] ;
 - a) Justifie que (IJ) est parallèle au plan (BCH) ;
 - b) Justifie que (IJ) et (BF) sont sécantes. Construis leur intersection.
 - c) Justifie que (IJ) est sécante au plan (DBF). Construis leur point d'intersection ;

Evaluation 2 : Soit ABCD un tétraèdre régulier. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1. Démontre que le plan (ABJ) est perpendiculaire aux plans (ACD) et (BCD).
2. Détermine les faces du tétraèdre dont les plans sont perpendiculaires au plan (CDI).
3. Démontre que les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires.

Activité 4 : Vecteurs de l'espace: définition, opérations, base.

Consigne 1 : L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit A $(-1 ; 1 ; 2)$; B. $(2 ; 1 ; 1)$; et $\vec{u}(-6 ; 0 ; 2)$

- 1) Construis les points A ; B et le vecteur $\vec{u}$;
- 2) Montre qu'il un réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{u}$;
- 3) Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ ont – ils le même sens ?
- 4) Calcule les distances ou les normes suivantes : $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{u}\|$;
- 5) Détermine les coordonnées du point D tel que $\vec{BD} = \vec{u}$;
- 6) Montre que $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$;
- 7) Calcule puis compare $\|\vec{AB}\| + \|\vec{BD}\|$ et $\|\vec{AD}\|$;

Consigne 2 : l'espace est rapporté à un repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère les points A (-1 ; 3 ; 1) ; B (3 ; 1 ; -1) ; C (1 ; -3 ; -1) et D (-5 ; 0 ; 2)

- 1) Justifie que ABC est un triangle rectangle ;
- 2) Montre que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires c'est – à – dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{CD}$;
- 3) Exprime $\vec{AC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ puis déduis- en que les points A ; B ; C et D sont coplanaires ;
- 4) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
- 5) Détermine les coordonnées du centre du quadrilatère ABCD ;

Consigne 3 : l'espace est rapporté à un repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère les points A (0 ; 2 ; 1) ; B (-2 ; 3 ; 1) ; C (1 ; 2 ; -1) ;

- 1) Justifie que les points A ; B et C ne sont pas alignés c'est – à – dire par exemple les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires ;
- 2) Détermine les coordonnées du milieu I de [AB] et du centre de gravité du triangle ABC

Consigne 4 : l'espace est rapporté à un repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

- 1) Soient les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont – ils colinéaires ? ; $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont – ils colinéaires ?
 $\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont – ils colinéaires ?
- b) Détermine les coordonnées de vecteur $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
- c) Que peut – on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$?
- 2) les points A (2 ; 3 ; -1) ; B (1 ; -3 ; 1) et C (4 ; 2 ; 1) sont – ils alignés

Synthèse partielle :

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Egalité de vecteurs : les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme ;

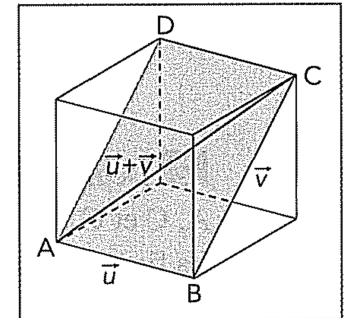
Somme de vecteurs : soit $\vec{j}$ et $\vec{k}$ deux vecteurs dans l'espace.

On considère les points A ; B et C tels que

$$\vec{u} = \vec{AB} \text{ et } \vec{v} = \vec{BC}$$

$$\text{Par définition, } \vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$$

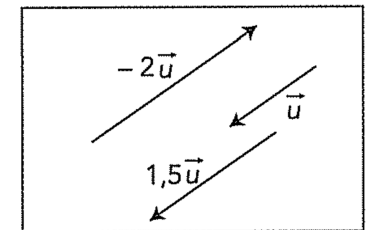
En particulier, la relation de Chasles reste vraie dans l'espace



Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Si $\vec{u} = \vec{AB}$ est un vecteur de l'espace et k un nombre réel, on définit le vecteur $k\vec{u}$ par $k\vec{u} = \vec{AM}$ où M est le point de la droite (AB) tel que

- ☞ si $k > 0$, $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ ont le même sens et $AM = kAB$;
- ☞ si $k < 0$, $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ ont de sens contraire et $AM = -kAB$;
- ☞ si $k = 0$; on pose $k\vec{u} = \vec{0}$



Cas particulier :

Si $k = 0$, M = A. le vecteur $\vec{AA}$ s'appelle le vecteur nul et se note $\vec{0}$

Coordonnées cartésiennes et calcul vectoriel

Théorème (Admis) : l'espace est rapporté à un repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

- 1) Soit $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$. le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x' - x; y' - y; z' - z)$
- 2) Les vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont égaux si et seulement si $x = x'; y = y'$ et $z = z'$
- 3) Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$
- 4) Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ alors $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$ pour tout réel k ;

Coordonnées cartésiennes et distance (Norme d'un vecteur):

Théorème : l'espace est rapporté à un repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soit le vecteur $\vec{u}(x; y; z)$ et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Vecteurs colinéaires :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Pour savoir si des vecteurs sont colinéaires, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes ;

Vecteurs colinéaires et droites parallèles :

Propriétés : Soit A, B, C et D quatre points du plan (A différent de B, C différent de D). Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Cas particuliers : Si A = C, les points A, B et D sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;

Remarque : Trois points A ; B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On peut alors utiliser la propriété ci – dessous : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_A) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_A) \\ z_B - z_A = k(z_C - z_A) \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

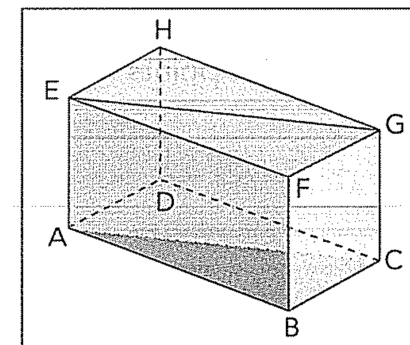
Vecteurs coplanaires :

On prolonge la notion de vecteurs colinéaires du plan à celle de vecteurs coplanaires de l'espace. Celle – ci fournit un outil vectoriel pour les points coplanaires.

Exemple :

ABCDEFGH est un pavé. Soit P le plan (ACE). Ce plan admet comme repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ car les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires

Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$, le point G appartient au plan P.



Plus généralement pour tout point M du plan P, il existe des réels a et b tels $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AE}$

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si $\vec{w}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec a et b réels.

Remarque :

Quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont toujours colinéaires ;

Pour savoir si des vecteurs sont coplanaires, on peut utiliser des coordonnées cartésiennes

Caractérisation vectorielle des plans de l'espace :

Propriété : Soit A, B, C et D quatre points. Ces points sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple : Dans la figure ci – dessus, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires sinon le point E appartiendrait au plan défini par A, B et D, ce qui n'est pas le cas.

Remarque : Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, ... restent valides.

Lorsque trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, on dit que les trois vecteurs sont dépendants

S'ils ne sont pas coplanaires, on dit que les trois vecteurs sont indépendants ou libres, (**forment une base dans l'espace**)

Evaluation 1 : Soient A ; B ; C et D quatre points de l'espace.

- 1) Soient I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Démontre que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ;
- 2) Soient K et L définis par $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k \in \mathbb{R}$; Démontre que $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- 3) A quel théorème de géométrie classique ces résultats peuvent – ils être associés ?

Evaluation 2 : On considère un tétraèdre ABCD. On appelle I, J ; K et L les points définis respectivement par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} ;$$

- 1) Place I ; J ; K et L sur le dessin.
- 2) Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis en fonction de $\overrightarrow{AC}$;
- 3) Justifie que les points I ; J ; K et L sont coplanaires et que la droite (AC) est parallèle au plan (IJKL) ;
- 4) Démontre que la droite (BD) est parallèle au plan (IJKL) ;

Evaluation 3 : On considère un cube ABCDEFGH.

- 1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont – ils coplanaires ?;
- 2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont – ils coplanaires ?
- 3) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont – ils coplanaires ?
- 4) Les vecteurs $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont – ils coplanaires ?

Evaluation 4 : On considère un tétraèdre ABCD

- 1) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base dans l'espace ;
- 2) Soit I milieu de [AD] ; J milieu de [BC] ; K défini par $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CA}$ et L défini par $\overrightarrow{BL} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
 - a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{JL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$;

- b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$;
 c) Existe – t – il une valeur de k pour laquelle $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires

Activité 5 : Barycentre dans l'espace

Consigne 1 : Dans l'espace E muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne deux points : C (2 ; -1 ; 0) ; D (-3 ; 4 ; -2) et deux réels 3 et - 6.

Soit G (-8 ; 9 ; -2) un autre point du plan P ; (C ; 3) et (D ; -6) appelés points pondérés.

- 1) Montrer que $3\overrightarrow{GC} - 6\overrightarrow{GD} = \vec{0}$;
- 2) En déduire que $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CD}$. On pourra poser $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD}$;
- 3) Soit $\alpha = 3$ et $\beta = -6$, vérifier que $\overrightarrow{CG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{CD}$ si $\alpha + \beta \neq 0$;
- 4) Vérifier que les coordonnées de G sont égales :
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_C + \beta x_D}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_C + \beta y_D}{\alpha + \beta} \\ z_G = \frac{\alpha z_C + \beta z_D}{\alpha + \beta} \end{cases}$$
- 5) Construire les points C ; D et G. Que remarques – tu ?

Consigne 2 : Dans l'espace E muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$,

On donne deux points : A (0 ; 2 ; 1) ; B (-5 ; 3 ; 0)

- 1) Soient les points pondérés (A;1) et (B;-3). Construire le barycentre G du système : {(A;1) et (B;-3)} ;
- 2) Trouve les coordonnées du barycentre G des points pondérés ci – dessus

Consigne 3: On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 8cm et AC = 4cm. Construire le barycentre G des points (A, 3) ; (B, -1) ; (C, 2).

Consigne 4 : Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne quatre points : A (0 ; 2 ; 3) ; B (-5 ; 3 ; -4) ; C (2 ; -1 ; -2) ;

Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés : (A, -1) ; (B, 2) ; (C, 3) ;

Consigne 5 :

Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne quatre points :

A (0 ; 2 ; 4) ; B (-5 ; 3 ; -1) ; C (2 ; -1 ; 0) et D (-3 ; 0 ; -6)

- 1) Construis le barycentre G des points (A, 3) ; (B, -1) ; (C, 2)
- 2) Trouve les coordonnées du barycentre G des points pondérés : (A, -1) ; (B, 2) ; (C, -3) ; (D ; 3)

Synthèse partielle :

Définition 1 : Soit (A; α) et (B; β) deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$.

On appelle barycentre de (A, α) et (B, β), l'unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

$$[G \text{ barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta)] \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

Propriétés

- 3) Si G est le barycentre de (A; α); (B; β) alors les points G, A et B sont alignés.
- 4) Si G est le barycentre de (A; α); (B; β) alors G est le barycentre de (A; $k\alpha$); (B; $k\beta$) pour tout $k \neq 0$

NB : Le barycentre G de (A; α); (B; α) est appelé l'isobarycentre des points A et B

Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et soit

$A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B)$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha); (B; \beta)$

sont : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}; z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

Définition 2: Soit $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ trois points pondérés. On appelle barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$, l'unique point G du plan tel que : $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$

$[G \text{ est le barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)] \Leftrightarrow \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{BC}$$

Propriétés

☞ Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ alors G est dans le plan ABC ;

☞ Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ et si H est le barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ alors G est le barycentre de $(H; \alpha + \beta)$ et $(C; \gamma)$

Remarque : Construire le barycentre des points pondérés $(A; \alpha);$

$(B; \alpha); (C; \alpha)$ revient à construire la somme $\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$

NB : Le barycentre G des points pondérés $(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \alpha)$ est l'isobarycentre des points A ; B ; C

Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et soient

$A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés

$(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Définition 3: Soit $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma); (D; \mu)$ quatre points pondérés. On appelle barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma); (D; \mu)$, l'unique point G du plan tel que : $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} + \mu \vec{GD} = \vec{0}$

$[G \text{ est le barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)]$

$$\Leftrightarrow \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} + \mu \vec{GD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{AC} + \frac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{AD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{BC} + \frac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{BD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{CB} + \frac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \vec{CD}$$

Propriétés

☞ Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma); (D; \mu)$ alors G est dans le plan ABCD;

☞ Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma); (D; \mu)$ et si G_1 est le barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ et G_2 le barycentre de $(C; \gamma)$ et $(D; \mu)$ alors G est le barycentre de $(G_1; \alpha + \beta)$ et $(G_2; \gamma + \mu)$

Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et soient

$A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B); C(x_C; y_C; z_C); D(x_D; y_D; z_D)$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés
(A; α); (B; β); (C; γ); (D; μ) sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \mu x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \mu}; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \mu y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \text{ et } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \mu z_D}{\alpha + \beta + \gamma + \mu}$$

Evaluation 1 : Soit ABCD un tétraèdre.

1. Soit G le barycentre de (A, 1), (B, 1) et (C, 1).
Quelle est la nature du quadrilatère ACBG ?
Représente ABCD en perspective et place G ;
2. a. Démontre que pour tout point M de l'espace on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DG}$
b. Soit I barycentre de (A, 1), (B, 1) et (D, -1). Démontre que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DG}$
c. Soit J barycentre de (A, 1), (C, -1) et (D, -1). Démontre que $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{DG}$
d. Soit K barycentre de (B, 1), (C, -1) et (D, -1). Démontre que $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{DG}$
3. a. Complète la figure obtenue à la question 1 en utilisant les résultats de la question 2.
b. Représente en couleur les tétraèdres AIBG et KCDI. Que peut-on dire de ces tétraèdres ?

Evaluation 2 : Dans l'espace E muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$,

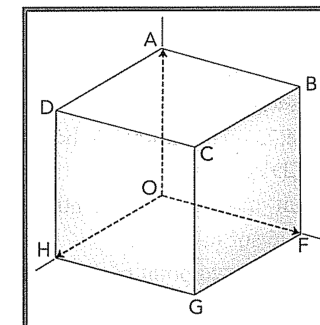
Soit A (-2 ; 1 ; 0), B (2 ; 3 ; 0), C (1 ; -1 ; 0) et S (1 ; 1 ; 5)

1. Représente les points A ; B ; C et S
2. Soit G_1 le barycentre de (S, 1), (A, 1) et (B, 1). G_2 le barycentre de (S, 1), (B, 1) et (C, 1). Démontre que les points G_1 ; G_2 ; A et C sont coplanaires.
Indication : On pourra, à l'aide de calculs de coordonnées, démontrer que $\overrightarrow{G_1 G_2}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. Reprend la question 2 sans utiliser les calculs de coordonnées

Evaluation 3 : Dans l'espace E muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$,

On considère le cube ABCDOFGH tel que

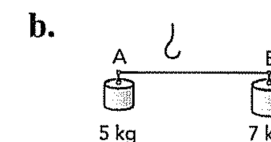
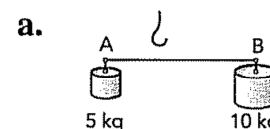
$\overrightarrow{OH} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = \vec{k}$ (voir figure).



1. Précise les coordonnées de chacun des 8 sommets du cube.
2. On donne les points $M(0; 1; \frac{1}{4})$;
 $N(1; 1; \frac{2}{3})$ et $P(1; \frac{2}{5}; 1)$
Précise sur quelle arête se trouve chacun de ces points. La suite de ce problème consiste à s'intéresser à la section du cube par le plan (MNP).
3. Soit Q le barycentre de (M, 3), (N, -5) et (P, 5).
a) Détermine les coordonnées du point Q.,
b) Démontre que Q est l'intersection du plan (MNP) et de l'arête (OA).
4. Soit R le barycentre de (M, 8), (N, -18) et (P, 24). Démontre que R est l'intersection du plan (MNP) et de l'arête (AD) ;
5. Le plan (MNP) peut-il couper une autre arête du cube ? justifie ta réponse.

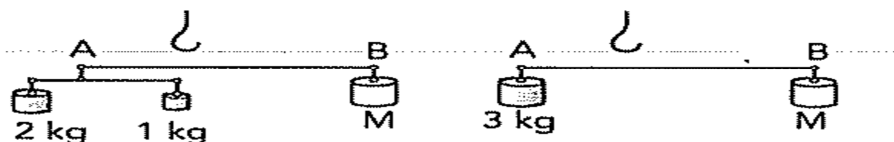
Evaluation 4 : Trouver un équilibre

Pour chacun de deux cas suivants, où faut-il placer le crochet pour réaliser l'équilibre (les masses des triangles sont négligeables)



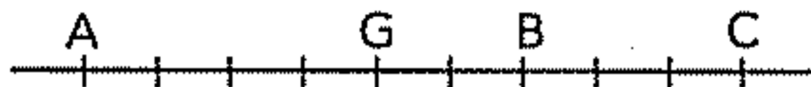
Evaluation 5 : Trouver un équilibre

On veut placer le crochét pour réaliser l'équilibre. Compare l'emplacement du crochét dans les deux cas représentés.

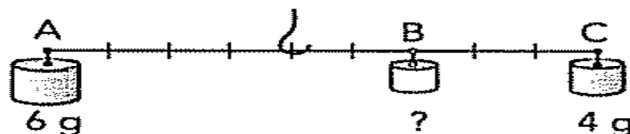


Evaluation 6 : Trouver un équilibre

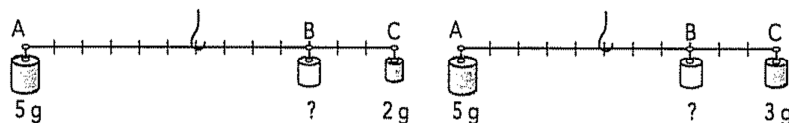
- a) Quelle relation doit vérifier b pour que G soit barycentre des points (A, 6) ; (B, b) ; (C, 4)



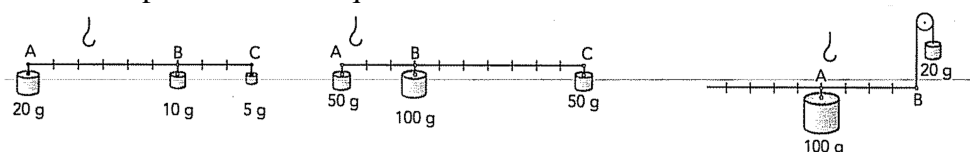
- b) Quelle masse faut-il placer en B pour que le système représenté soit en équilibre ?



- c) Même énoncé que la question b pour les systèmes suivants



- d) Pour chacun des trois cas suivants, où faut-il placer le crochét pour réaliser l'équilibre



Activité 6 : systèmes paramétriques d'une droite et du plan

Consigne 1 : l'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

On considère les points A (3 ; 1 ; -1) ; B (0 ; 2 ; -2) et M(x ; y ; z)

- 1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$;
- 2) Soit $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, exprime les coordonnées de M en fonction de k
- 3) Le point C(-3 ; 3 ; 1) appartient-il à la droite (AB) ?

Consigne 2 : l'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

Soient A un point de coordonnées (-1 ; 2 ; 3) ; $\vec{u}$ (1 ; 3 ; 4) et $\vec{v}$ (3 ; 1 ; 5)

- 1) Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;
- 2) Soit M(x ; y ; z) un point du plan, détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$
- 3) On pose $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$; exprime les coordonnées de M en fonction de k et t

Synthèse partielle :

Propriétés : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

Soit A des coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de coordonnées (a ; b ; c).

M(x ; y ; z) est sur la droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}$

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t \times a \\ y = y_A + t \times b \\ z = z_A + t \times c \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est un système d'équations paramétriques de la droite (A ; $\vec{u}$) ou une représentation paramétrique de la droite (A ; $\vec{u}$)

Remarque :

Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points distincts

$M(x ; y ; z)$ appartient à la droite (AB)

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- ☞ Il existe une infinité de systèmes d'équations paramétriques d'une droite, puisqu'on peut choisir d'une infinité de façons un vecteur directeur et un point de la droite ;
- ☞ Dans le plan, une droite est caractérisée par une équation cartésienne (relation entre x et y).
- ☞ Dans l'espace, une droite est caractérisée par un système d'équations paramétriques (relation entre x et le paramètre t ; relation entre y et le paramètre t ; relation entre z et le paramètre t)

Propriétés : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

Soient A des coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$; $\vec{u}(a ; b ; c)$ et $\vec{v}(a' ; b' ; c')$ un couple de vecteurs non colinéaires.

$M(x ; y ; z)$ appartient au plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs $(\vec{u} ; \vec{v})$

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + k\vec{v} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t \times a + k \times a' \\ y = y_A + t \times b + k \times b' \\ z = z_A + t \times c + k \times c' \end{cases}$$

On dit que ce système est un système d'équations paramétriques du plan $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ ou une représentation paramétrique du plan $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$

Evaluation 1 : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

Soient A (3 ; 1 ; -1) et B (0 ; 2 ; -2).

- 1) Donne une représentation paramétrique de la droite (AB) ;

- 2) Le point C (-3 ; 3 ; 1) appartient – il à la droite (AB) ?

Evaluation 2 : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

On considère les points A (2 ; -1 ; 5) ; B (1 ; -3 ; 2).et C (2 ; 3 ; 9) et un vecteur $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$

- 1) Donne une représentation paramétrique de la droite (AB) et une représentation paramétrique de la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$;
- 2) Détermine si ces deux droites sont sécantes et donne éventuellement les coordonnées de leur point d'intersection.

Evaluation 3 : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

- 1) Justifie que l'ensemble de points $M(x ; y ; z)$ tels que $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, est une droite d que l'on précisera ;
- 2) Justifie que l'ensemble de points $M(x ; y ; z)$ tels que $\begin{cases} x = 5 - 6t' \\ y = 1 - 4t' \\ z = -2 + 8t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$, est une droite d' que l'on précisera ;
- 3) Que peut – on dire des positions relatives de d et d' ?
- 4) Justifie que l'ensemble de points $M(x ; y ; z)$ tels que $\begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est une droite δ que l'on précisera
Donne deux points distincts de δ ;
- 5) Que peut – on dire des positions relatives de d et δ ;

Evaluation 4 : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

On considère les points A (1 ; 2 ; 0) ; B (-1 ; 2 ; 3).et C (1 ; -2 ; 1)

- 1) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
En déduis qu'il existe un et un seul plan p contenant les points A ; B et C.
- 2) Soit $M(x ; y ; z)$. Montre que $M \in p \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t' \\ z = 3t + t' \end{cases}$$
- 3) On dit que le système $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t' \\ z = 3t + t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan p . Soit $D(3 ; 2 ; 1)$. Montre que $D \notin p$;
- 4) Soit $E(-3 ; 5 ; 6)$. Montre que $E \in p$. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Evaluation 5 : On considère le tétraèdre ABCD

Soit I milieu de [AB] et J milieu de [AD] et K milieu de [CI]

- 1) Justifie que la droite (DK) est sécante au plan (BCJ) en un point L.
- 2) Exprime le vecteur $\overrightarrow{DL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$;

Activité 7 : produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

Consigne 1 :

- 1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontre l'égalité : $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2$
- 2) En déduis que dans un parallélogramme la somme des carrés des quatre cotés est égale la somme des carrés des deux diagonales.
- 3) Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC]. Démontre que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Consigne 2 : Soit un triangle ABC rectangle en A. on désigne par A' le milieu de [BC], par H le pied de la hauteur issue de A et par I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC).

- 1) Démontre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$;
- 2) Démontre que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires

Consigne 3 : On considère un cube ABCDEFGH

L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$

1°) a) Donne les coordonnées de A ; F ; C et H

Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CH}$

Les droites (AF) et (CH) sont – elles orthogonales ?

b) En remarquant que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$; retrouve le résultat précédent.

2°) a) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FD}$

Les droites (EC) et (FD) sont – elles orthogonales ?

b) En remarquant que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$; retrouve le résultat précédent.

Consigne 4 : On considère le tétraèdre régulier ABCD

On pose $AB = AC = AD = BC = BD = CD = a$

- 1) Calcule en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$. Justifie que (AD) es orthogonale à (BC)
- 2) Montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
- 3) Déduis de calculs précédents le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$;
- 4) Calcule $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$. Que peut – on en conclure

Consigne 5 : L'espace est rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

- 1) Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 1 - k \end{cases}$
avec $k \in \mathbb{R}$, Donne un point et un vecteur directeur d ;
- 2) Soit d' la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases}$
avec $k \in \mathbb{R}$, ; Montre que d et d'sont orthogonales.
Sont – elles perpendiculaires ?
- 3) On donne A (2 ; -1 ; -5) ; B (3 ; 1 ; -4) ; C (4 ; 6 ; 9) et D (5 ; 7 ; 6)
Montre que les droites (AB) est orthogonale à la droite (CD). Ces droites sont – elles perpendiculaires ?

Synthèse partielle :

Produit scalaire de deux vecteurs : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls
- Autre expression du produit scalaire, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Expression algébrique : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan



On appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel noté : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$ où H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB).

$$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OB} . \text{ (Expression algébrique du produit scalaire)}$$

Remarque :

- ☞ Si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$;
- ☞ Si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$

Expression géométrique : En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire et le triangle AOH rectangle en H. On a alors $OH = OA \times \cos \alpha$ puis on déduit que : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \alpha$.

(Expression trigonométrique du produit scalaire)

Propriétés de produit scalaire :

On démontre et on admettra les propriétés suivantes

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
- 3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- 4) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et si $\vec{u} \neq 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$;
- 5) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

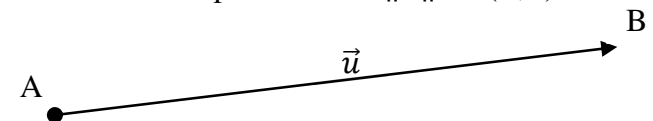
Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et « on lit carré scalaire de $\vec{u}$ »

Orthogonalité de deux vecteurs dans une base orthonormée :

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = 0$$

Norme d'un vecteur : $\vec{u}$ étant un vecteur de représentant le bipoint (A;B), on appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel positif noté : $\|\vec{u}\| = d(A;B)$.



$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A;B) = AB$$

Propriétés : Soit V l'ensemble des vecteurs dans l'espace

$$P_1) : \forall \vec{u} \in V, \|\vec{u}\| \geq 0$$

$$P_2) : \forall \vec{u} \in V, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$P_3) : \forall \vec{u} \in V, \forall \vec{v} \in V, \forall k \in R, si \vec{u} = k \times \vec{v} alors \|\vec{u}\| = |k| \|\vec{v}\|$$

Repère orthonormé, base orthonormale

- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux et unitaires deux à deux. Autrement dit : $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé signifie

$$\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{k} \perp \vec{j} \text{ et } \vec{i} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$$

- On dit alors que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale ;

Etude analytique du produit scalaire

☞ Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$On a: \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

☞ Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

$$\text{Soit le vecteur } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ on a } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

☞ Plans orthogonaux ou perpendiculaires : Soit deux plans P et P' d'équations cartésiennes respectives

$$P: ax + by + cz + d = 0 ; P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

et les vecteurs normaux respectifs

$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Les plans P et P' sont orthogonaux ou perpendiculaires équivalents à $aa' + bb' + cc' = 0$;

NB : On appelle un vecteur normal $\vec{u}$ (ou orthogonal) à un plan P, tout vecteur $\vec{u}$ non nul, orthogonal à tous les vecteurs de P

Evaluation 1 : L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère les points A (3 ; 2 ; 1) ; B (1 ; -1 ; 1) et C (5 ; 2 ; 3)

- 1) Détermine l'équation cartésienne du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{BC}$;
- 2) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC)

Evaluation 2 : L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient P le plan d'équation $-x + 2y + z - 15 = 0$ et P' le plan d'équation $3x - y + 2z + 18 = 0$;

- 1) Justifie que A (-1 ; 7 ; 0) est un point de P ;
- 2) Détermine une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire à P en A.
- 3) Justifie que B (62 ; 4 ; -4) est un point de P' ;
- 4) Détermine une représentation paramétrique de la droite d' perpendiculaire à P' en B.
- 5) Les droites d et d' sont-elles orthogonales ?

Evaluation 3 : L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère le plan P d'équation $x + 3y - 2z + 1 = 0$ et le plan P' d'équation $4x - 2y - z = 0$;

- 1) Donne les coordonnées de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ à P et à P'
- 2) Justifie que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
- 3) En déduis que P et P' sont des plans perpendiculaires