

FICHE DE SEQUENCE

Classe : 10ème commune

Durée : 3heures

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Compétences :

- Résoudre une situation problème ;
- Mettre à profit ces connaissances scientifiques et technologiques

Composantes ; Contenus : Suites numériques.

- Généralité sur les suites ;
- Etude d'une suite numérique ;
- Suites convergentes –suites divergentes ;
- Propriétés des limites ;
- Suites arithmétiques ; suites géométriques

Manifestation :

- Pouvoir donner la définition d'une suite numérique ;
- Savoir si une suite est croissante ou décroissante ;
- Savoir si une suite est convergente ou divergente ;
- Pouvoir utiliser les propriétés des limites d'une suite numérique ;
- Une suite étant donnée, prouver que c'est une suite arithmétique ou géométrique.

Ressources éducatives :

Ressources matérielles : matérielle didactique (règle, équerre, compas, rapporteur, tableau, craie, cahier de recherche)

Stratégie d'animation : travail en groupe (partager la classe en groupe de travail).

Déroulement des activités

R. L. P : Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; I ; J)$, étudier la fonction polynôme suivante : $f(x) = 2x^2 + x$

Situation d'apprentissage (Méthode, pédagogie active)

I-Généralité sur les suites

Activité1 : On donne le segment $[OA_1]$; $[OA_2]$; $[OA_3]$ de sorte que :

- Les triangles OA_0A_1 , OA_1A_2 , OA_2A_3 soient rectangles respectivement en A_0 , A_1 , A_2 ;
- $OA_0 = A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = 1$

Construis de la même manière [OA4] , [OA5], calculer OA1, OA2, OA3, OA4

N étant un nombre entier naturel, formuler une conjoncture pour OAn

Solution :

Synthèse partielle : A chaque nombre entier naturel n, on peut associer la distance OAn. On définit ainsi une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, appelé suite numérique ;

Synthèse générale :

2) définition : On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U(n)$$

On note cette suite : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est noté plus simplement (U_n)

On note U_n l'image de n par U ; c'est le terme d'indice n aussi appelé le terme général de la suite.

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$0 \longmapsto U(0) = U_0$ est le premier terme de la suite U.

$1 \longmapsto U(1) = U_1$ est le deuxième terme de la suite U.

.

.

.

$n \longmapsto U(n) = U_n$ est le terme général de la suite U.

3) Mode de définition d'une suite :

Une suite numérique peut se définir de différentes façon.

a) Suite définie par $U_n = f(n)$:

Ce sont des suites définies par la donnée explicite du terme général U_n en fonction de n.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 2n$. Calculer les 4 premiers termes.

Même travail pour $W_n = 1/n^2$ et $V_n = 2n + 5$

b) Suite récurrentes :

Ce sont des suites définies par la donnée de son 1er terme et d'une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ liant deux termes consécutifs de la suite : (où f est une fonction) .

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et représenter graphiquement les termes de cette suite.

Solution :

$$n = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = 4, \dots$$

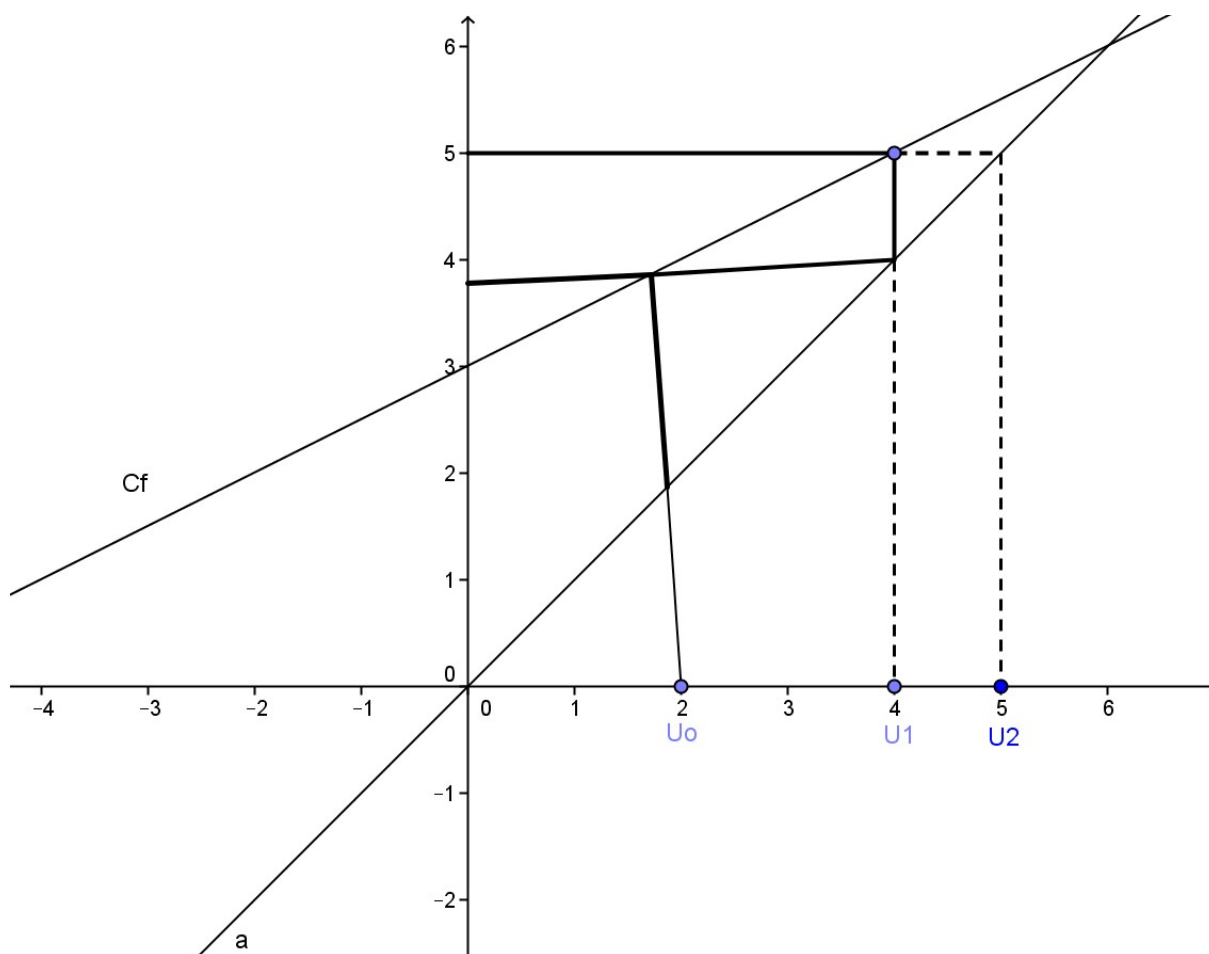
Représentations les termes de cette suite graphiquement

Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ la fonction associée à la suite (U_n) .

$$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2}U_n + 3 \text{ et } U_0 = 2 ;$$

$$U_1 = f(U_0) = 4; U_2 = f(U_1) = 5; U_3 = f(U_2) = \frac{11}{2}; U_4 = f(U_3) = \frac{23}{4}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on trace la courbe (Cf.) de f et la droite d'équation : $y = x$



4-Sens de variation d'une suite :

a)Définitions :

- On dit que la suite (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \text{ ou } U_n \leq U_{n+1}$$

- On dit que la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \text{ ou } U_{n+1} \leq U_n$$

- On dit que la suite (U_n) est constante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} = U_n$$

- On dit que la suite (U_n) est stationnaire à partir du rang n_0 ;

Si pour tout entier naturel n dès que $n \geq n_0$ alors $U_n = U_{n_0}$

- On dit que la suite (U_n) est à termes positifs, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_n \geq 0; n \in \mathbb{N}$$

Remarques : Si $U_n \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$.

$$[(U_n) \text{ est croissante}] \left[\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \right].$$

$$[(U_n) \text{ est décroissante}] \left[\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \right];$$

5-Suites bornées :

- On dit qu'une suite numérique (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que :
 $n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$. M est un majorant de la suite (U_n)
- On dit qu'une suite numérique (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que :
 $n \in \mathbb{N}, m \leq U_n$. m est un minorant de la suite (U_n) .
- Une suite numérique (U_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée
 c'est-à-dire : $n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$.

Exemple : Soit U la suite définie par sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1 \end{cases}$$

Montrer que U est borné par -2 et 1 .

Solution : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$;

$$(U \text{ est borné par } -2 \text{ et } 1) \quad (n \in \mathbb{N}; -2 \leq U_n \leq 1)$$

Démonstrations

$$n = 0; U_0 = 1 \text{ on a : } -2 \leq U_0 \leq 1 \text{ vraie}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que : $-2 \leq U_p \leq 1$; montrons que $-2 \leq U_{p+1} \leq 1$ avec

$$U_{p+1} = \frac{1}{2}U_p - 1; \quad -2 \leq U_p \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2}U_p \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}U_p - 1 \leq -\frac{1}{2} \leq 1. \text{ Vrai à l'ordre } (p+1).$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence

$(n \in \mathbb{N}, -2 \leq U_n \leq 1)$ D'où la suite U est bornée par -2 et 1

II-Suites convergentes -Suites divergentes :

Activité2 : On donne la suite numérique (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+5}$.

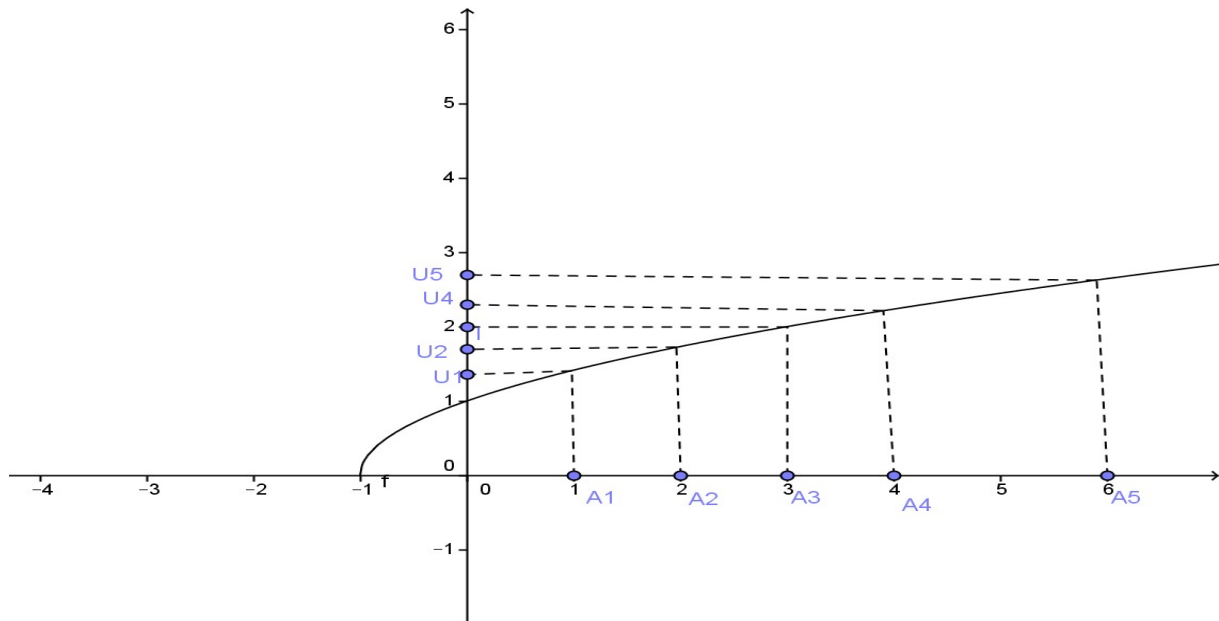
On veut étudier le comportement de (U_n) pour les grandes valeurs de n

Solution :

La suite U_n est du type : $U_n = f(n)$

f étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$

La droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à la représentation graphique (Cf.)



Les termes $U_1; U_2; U_3; U_4$ et U_5 sont de plus en plus proches de 3. La distance entre U_n et 2 devient aussi petite que l'on veut dès que n est un nombre entier suffisamment grand. $U_n \rightarrow 2$. On dit que la suite (U_n) est une suite convergente et qu'elle converge vers 2.

Synthèse générale :

$$\left((U_n) \text{ converge } \right) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$$

(Si $l = +\infty$ ou $-\infty$ ou n'existe pas) Alors (u_n) diverge

III-Propriétés des limites :

a) Théoreme1 :

Si (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes respectivement vers l et l' .

Alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = l + l'$ avec $l' \neq 0$

b) Theoreme2 : (des gendarmes)

Soient (U_n) ; (V_n) et (W_n) trois suites telles que (U_n) et (V_n) convergent vers l et

c) Theoreme3 : (admis)

- ❖ Toute suite croissante et majorée est convergente ;
- ❖ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

IV-Suites Arithmétiques :

1-Definition : On appelle suite arithmétique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $U_{n+1} = U_n + r$; où r est un réel appelé raison de la suite (U_n) .

Exemples : a) Soit (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de la suite (U_n)

b) Déterminer la suite de raison $r = -3$ dont le terme d'indice 4 égale à 30.

Remarque : une suite arithmétique (U_n) est croissante si r est positive et décroissante si r est négative.

2) Expression du terme général U_n :

Soit une suite arithmétique (U_n) de 1er terme U_1 et de raison r .

$$U_1; U_2 = U_1 + r;$$

$$U_3 = U_2 + r = U_1 + 2r$$

$$U_4 = U_3 + r = U_1 + 3r$$

.

.

$$U_n = U_p + (n-p)r \quad U_n - U_p = (n-p)r; \quad (\forall p \in \mathbb{N}, p \leq n)$$

- Si 1er terme est u_0 alors $U_n = U_0 + nr$
- Si 1er terme est U_1 alors $U_n = U_1 + (n-1)r$

Exemples : a) Trouver le 50^e terme de la suite arithmétique 12 ; 16 ; 20 ;

b) Trouver le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... ; n

3-Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit (U_n) une suite arithmétique de 1er terme U_0 et de raison r . Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S_n = U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + (U_0 + 3r) + \dots + (U_0 + nr)$$

$$S_n = U_0 + U_0 + \dots + U_0 + (1 + 2 + 3 + \dots + n)r$$

$U(n+1 \text{ fois})$

$$S_n = (n+1)U_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

$$S_n = \frac{(n+1)}{2} [2U_0 + nr] \text{ ou } S_n = \frac{(n+1)}{2} [U_0 + U_n]$$

(Somme des $n+1$ premiers termes)

$$\text{Si } \leq 1^{\text{er}} \text{ terme est } U_1 \text{ alors on a : } S_n = \frac{n}{2} [2U_1 + (n-1)r] \text{ ou } S_n = \frac{n}{2} [U_1 + U_n]$$

(Somme des n premiers termes)

Exemples : Calculer la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ...

V-Suites géométriques :

1- Définition : On appelle suite géométrique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $U_{n+1} = qU_n$ où q est un réel appelé raison de la suite.

2-Expression du terme général U_n :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q .

$$U_1; q$$

$$U_2 = q * U_1$$

$$U_3 = q * U_2 = q^2 * U_1$$

.

.

.

$$U_n = U_p * q^{n-p} \quad (\forall p \in \mathbb{N}; p < n)$$

- Si $\leq 1^{\text{er}} \text{ terme est } U_0 \text{ alors } U_n = U_0 * q^n; (p=0)$
- Si $\leq 1^{\text{er}} \text{ terme est } U_1 \text{ alors } U_n = U_1 * q^{(n-1)}; (p=1)$

Exemple : Déterminer le sixième terme de la progression géométrique : $1/2$; 1 ; 2 ; ...

3-Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1er terme U_0 et de raison q . Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ qS_n &= qU_0 = qU_1 + qU_2 + \dots + qU_n \end{aligned}$$

$$(1-q)S_n = U_0 - qU_0 + U_1 - qU_1 + \dots + U_n - qU_n \quad (1-q)S_n = U_0 - qU_n$$

$$(1-q)S_n = U_0 - qU_0 \cdot q^n \quad (1-q)S_n = U_0(1 - q^{n+1})$$

$$S_n = U_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{— Si } q \neq 1 \text{ 1er terme est } U_1 \text{ alors: } S_n = U_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ avec } q \neq 1$$

D'une manière générale on a la formule

$$S_n = U_p \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ avec } q \neq 1$$

$$\text{— Si } q = 1 \text{ alors on a: } S_n = nU_1$$

4-Limites d'une suite géométrique :

Soit une suite géométrique de raison q et de terme général U_n .

- Si $|q| < 1$ alors (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$;
- Si $|q| \geq 1$ alors (U_n) diverge

5-Limites de la somme des termes d'une suite géométrique :

- Si $q = 1$ alors $S_n = nU_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_1 = +\infty$;
- Si $q \neq 1$ alors $S_n = U_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$;
- Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{U_1}{1 - q}$

6-Progressions Arithmétiques et géométriques :

Soit la progression de trois termes x ; y ; z

$$(x ; y ; z \text{ sont en progression arithmétique}) \quad (x + z = 2y)$$

$$(x; y; z \text{ sont en progression géométrique}) \quad (x * z = y^2)$$