

Séquence 7 : Suites Numériques

Activité 1 : Généralités sur les suites numériques

Activité : Monsieur SOUGANE économise 100 000F le mois de janvier 2024; 150 000F le mois de Février 2024 ainsi de suite il économise 50 000F de plus par rapport au mois précédent.

- 1) Détermine le montant qu'il aura économisé au mois de Décembre 2024.
- 2) Détermine le montant total de l'économie du Monsieur au cours de l'année 2024.
- 3) Son objectif étant de financer les frais du Hadj dont le montant s'élève à 4 500 000F. Pourra-t-il atteindre son objectif en une année c'est-à-dire au mois de Décembre 2024? Sinon détermine en quelle année et en quel mois pourra-t-il atteindre son objectif?

SOLUTION

1) Le montant économisé en Décembre est :

-Janvier 2024 : 100000fcfa

-Février 2024 : 150000fcfa

-Mars 2024 : 200000fcfa

Avril 2024 : 250000

-Mai 2024 : 300000fcfa

-Juin 2024 : 350000fcfa

-Juillet 2024 : 400 000fcfa

-Août 2024 : 450 000fcfa

-Septembre 2024 : 500 000fcfa

-Octobre 2024 : 550 000fcfa

-Novembre 2024 : 600 000fcfa

-Décembre 2024 : 650 000fcfa

Ou $(50\,000F \times 10) + 150\,000F = 650\,000F$

2) Le montant total économisé en 2024 est : 4 500 000f

3) Oui il pourra atteindre son objectif en une année précisément au mois de Décembre 2024. Il a atteint son objectif.

1.1. Définition

On appelle suite numérique toute application u d'une partie non vide I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Remarque

- La suite numérique u d'ensemble de définition E est notée $(u_n)_{n \in E}$
- $u(n)$ est l'image de l'entier naturel n par la suite u .
- $u(n)$ est simplement noté u_n et se lit : « u indice n ».
- u_n est appelé le **terme général** de la suite u .
- $u_{n+1} \neq u_n + 1$

Exemple : $u_n = 2n - 5$ est une suite .

$u_0 = 2(0) - 5 = -5$ est le 1^{er} terme ou terme d'indice 0.

$$u_1 = 2(1) - 5 = -3 \text{ est le 2}^{\text{ème}} \text{ terme}$$

$$u_2 = 2(2) - 5 = -1 \text{ est le 3}^{\text{ème}} \text{ terme}$$

$$u_3 = 2(3) - 5 = 1 \text{ est le 4}^{\text{ème}} \text{ terme}$$

1.2. Différentes formes de définition d'une suite

Une suite numérique peut être définie par sa formule explicite c'est-à-dire lorsqu'elle est exprimée en fonction de n ou par sa formule de récurrence c'est à dire lorsqu'il y a une relation liant deux termes consécutifs et son 1^{er} terme donné.

➤ Suite définie par sa formule explicite

Exemple : $u_n = \sqrt{n-2}$

$$u_2 = \sqrt{2-2} = 0 \text{ est le 1}^{\text{er}} \text{ terme}$$

$$u_3 = \sqrt{3-2} = 1 \text{ est le 2}^{\text{ème}} \text{ terme}$$

$$u_4 = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \text{ est le 3}^{\text{ème}} \text{ terme}$$

$$u_{18} = \sqrt{18-2} = 4 \text{ est le 16}^{\text{ème}} \text{ terme}$$

➤ Suite définie par sa formule de récurrence

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$ Calcule les 5 premiers termes.

$$u_0 = 8$$

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 6 = \frac{1}{2}(8) + 6 = 4 + 6 = 10$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = \frac{1}{2}(10) + 6 = 5 + 6 = 11$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = \frac{1}{2}(10) + 6 = 5 + 6 = 11$$

$$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 6 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{2}\right) + 6 = \frac{23}{4} + 6 = \frac{23+24}{4} = \frac{47}{4}$$

1.3. Représentation graphique des termes d'une suite

➤ Sur un axe

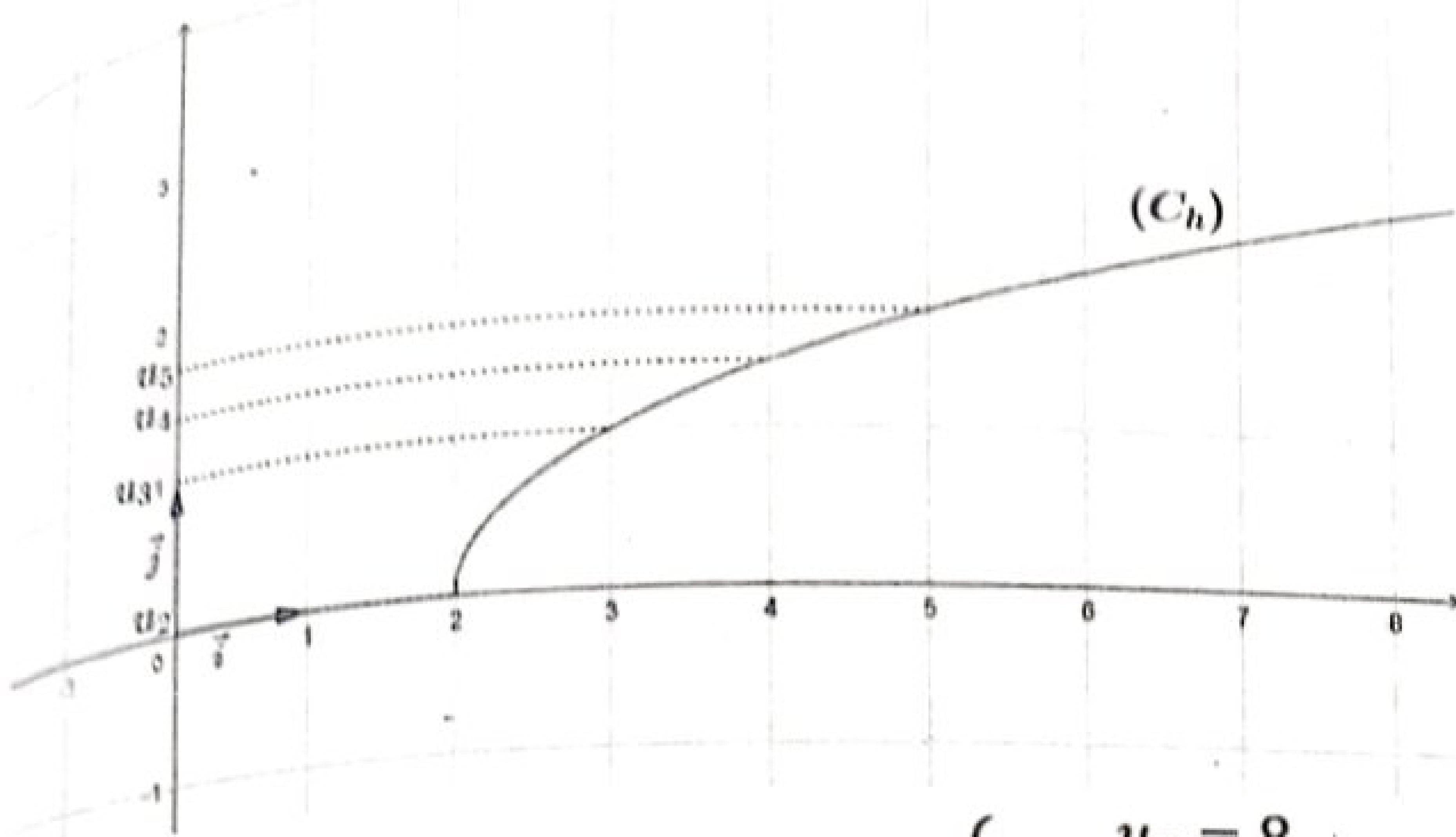
Exemple : Représente sur un axe les 4 premiers termes de chacune des suites :

$$u_n = \sqrt{n-2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$$

Construction des 4 premiers termes de : $u_n = \sqrt{n-2}$

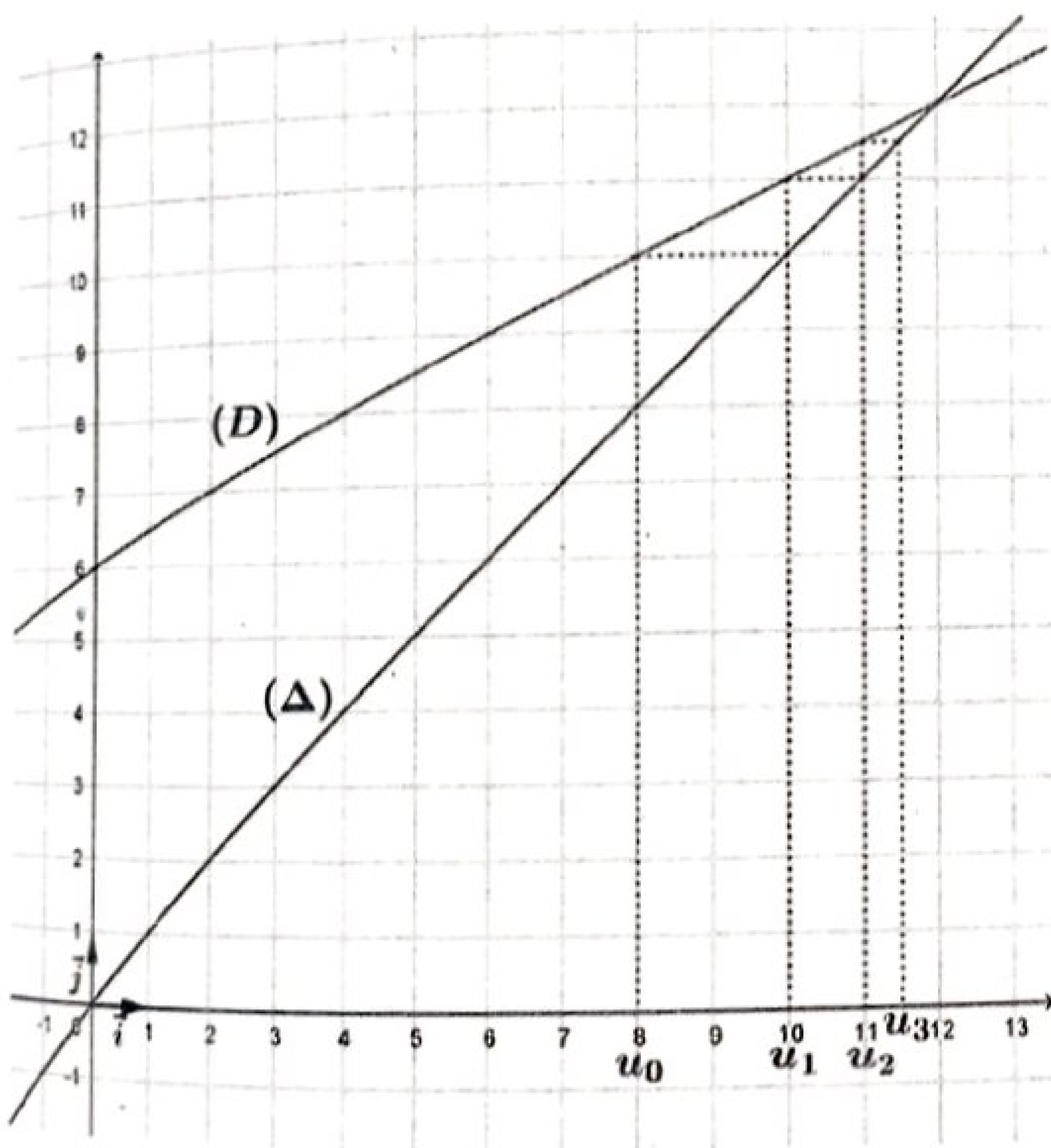
Soit (C_h) la courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction

h définie par : $h(x) = \sqrt{x-2}$



Construction des 4 premiers termes de : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$

Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 6$ et (Δ) la première bissectrice d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1.4. Principe de raisonnement par récurrence

Soient n et n_0 deux entiers naturels et $P(n)$ une proposition dépendant de n .

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0 , on peut procéder comme suit :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie (Initialisation) ;
- Supposer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ et montrer que $P(n+1)$ est vraie (Hérédité) ;
- Pour tout $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie (Conclusion).

Exemple : Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

SOLUTION

1) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

◦ Pour $n = 1$ on a $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie

◦ Supposons que la relation est vraie au rang n c'est-à-dire

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

◦ Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire

◦ $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{CQFD}$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

◦ Pour $n = 1$ on a : $1^2 = \frac{1(2)(3)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie

◦ Supposons que la relation est vraie au rang n c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right]$$

$$= (n+1) \left(\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{6} \right) (2n^2 + 7n + 6)$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{CQFD}$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.5. Suite minorée, Suite majorée, Suite bornée

Soit (u_n) une suite numérique, m et M deux nombres réels.

◦ Si $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \leq M$ alors (u_n) est majorée par M

◦ Si $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \geq m$ alors (u_n) est minorée par m

- (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n); m \leq u_n \leq M$.

Exemple : Montre que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ est minorée, majorée, bornée.

Solution

$$u_n = \frac{n+1+1}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Leftrightarrow n+2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{n+2} \geq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} \geq 1 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{la suite } (u_n) \text{ est minorée par } \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Leftrightarrow n+2 \geq 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n < 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est majorée par } 1.$$

(u_n) étant majorée par 1 et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle est bornée.

1.6. Sens de variation d'une suite

Soit (u_n) une suite numérique.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ alors (u_n) est croissante
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ alors (u_n) est décroissante
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0$ alors (u_n) est constante

Exemple : Etudie le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1) $u_n = 2n - 7$ 2) $w_n = \frac{n+1}{n+2}$ 3) $v_n = -5n + 14$

Solution

1) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 7 - (2n - 7) = 2n + 2 - 7 - 2n + 7 = 2 > 0,$

$u_{n+1} - u_n > 0$ alors (u_n) est croissante

2) $w_{n+1} - w_n = \frac{n+1+1}{n+1+2} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$

$w_{n+1} - w_n > 0$ alors (w_n) est croissante

3) $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) + 14 - (-5n + 14) = -5n - 5 + 14 + 5n - 14 = -5 < 0$

$v_{n+1} - v_n < 0$ alors (v_n) est décroissante

NB: Une suite est monotone lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante.

1.7. Convergence d'une suite :

Soit (u_n) une suite numérique et l un réel.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors la suite (u_n) est convergente et converge vers l .
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ alors la suite (u_n) n'est pas convergente. Elle est donc divergente.

Toute suite qui n'est pas convergente est divergente.

NB: Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Activité 2 : Suites arithmétiques

2.1. Définition

On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) définie par:

$u_{n+1} - u_n = r$ ou $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la raison.

NB : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$; (u_n) est croissante
- Si $r < 0$; (u_n) est décroissante
- Si $r = 0$; (u_n) est constante

2.2. Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme U_1 .

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r$$

$$u_4 = u_3 + r = u_1 + 2r + r = u_1 + 3r$$

⋮

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

$u_n = u_1 + (n - 1)r$ est l'expression du terme général si u_1 est le 1^{er} terme.

NB : Si u_p est le 1^{er} terme alors $u_n = u_p + (n - p)r$ est la formule générale de l'expression du terme général u_n en fonction de n où p est un entier naturel.

Pour u_0 le 1^{er} terme on a : $u_n = u_0 + nr$.

2.3. Somme des termes consécutifs

(u_n) suite arithmétique de raison r et 1^{er} terme u_p désignant par S la somme de termes consécutifs.

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

Remarques :

R1 : 3 nombres a, b, c sont en progression arithmétique ou sont trois nombres d'une suite arithmétique si et seulement si $a + c = 2b$

R2 : x, y, z, t sont en progression arithmétique $\Leftrightarrow y - x = z - y = t - z = r$ avec $r = \text{raison}$

R3 : Pour insérer k moyenne arithmétique entre deux réels a et b , on calcule la raison $r = \frac{b-a}{k+1}$ et on insère les k moyens arithmétiques.

R4 : Un placement est à intérêt simple lorsqu'à chaque période il produit les mêmes intérêts. Dans ce cas l'intérêt n'est pas capitalisé et on utilise les suites arithmétiques pour faire les calculs.

Activité 3 : Suites géométriques

3.1. Définition

(u_n) est dite géométrique lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \text{ ou } u_{n+1} = q \times u_n$$

q est un réel non nul fixé appelé la raison de la suite géométrique.

NB: Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_p

Si $u_p > 0$ et $\begin{cases} q \in]0; 1[\text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \\ q = 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est constante} \\ q > 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \end{cases}$

Si $u_p < 0$ et : $\begin{cases} q \in]0; 1[\text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ q = 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est constante} \\ q > 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$

Si $|q| \in]0; 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

3.2. Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_1

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = q \times u_1$$

$$u_3 = q \times u_2 = q \times q \times u_1 = q^2 \times u_1$$

$$u_4 = q \times u_3 = q \times q^2 \times u_1 = q^3 \times u_1$$

$\vdots$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ est l'expression du terme général si u_1 est le 1^{er} terme.

NB: Si u_p est le 1^{er} terme alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$ est la formule générale de l'expression du terme général u_n en fonction de n où p est un entier naturel.

Pour u_0 le 1^{er} terme on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

3.3. Somme des termes consécutifs

Désignons par S la somme des termes consécutifs d'une suite :

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Remarques

R1 : $a; b; c$ sont en progression géométrique ou sont trois termes consécutifs d'une suite si

et seulement si $a \times c = b^2$

R2 : $x; y; z$ et t sont des nombres consécutifs d'une suite géométrique alors

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{t}{z} = q \text{ avec } q = \text{raison}$$

R3 : Pour insérer k moyen géométrique entre 2 réels a et b on calcule la raison

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}} \text{ et on insère les } k \text{ moyens géométriques.}$$

R4 : Un placement est à intérêt composé lorsque l'intérêt produit de l'intérêt d'une période à une autre. Dans ce cas on dit que l'intérêt est capitalisé. Pour les placements à intérêt composé, on utilise les suites géométriques pour faire les calculs.

Evaluation

Exercice 1

- I) Détermine trois nombres en progression arithmétique croissante sachant que leur somme est 45 et leur produit est 3240.
- II) Détermine trois nombres en progression arithmétique sachant que leur somme est 42 et la somme de leur carré est 638.
- III) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$
 - 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - 2) Précise le sens de variation de (u_n) .
 - 3) Exprime (u_n) en fonction de n .
 - 4) Calcule : $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{54}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$;
 $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
- IV) Soit (u_n) une suite arithmétique croissante de 1^{er} terme u_0 et raison r définie par $u_{17} = 89$ et $u_{83} = 419$.
 - 1) Détermine le 1^{er} terme u_0 et la raison r .
 - 2) Exprime u_n en fonction de n .
- V) On veut insérer 3 moyen arithmétique entre 100000 et 120000.
 Détermine la raison puis insérer (intercaler) les moyens.
- VI) Une dame place au 1^{er} Janvier 2017 une somme de 1000000 dans une banque à intérêt simple au taux annuel de 5%. On désigne par (C_n) la valeur acquise par cette somme au 01/01/2017+n.
 - 1) Calcule la valeur acquise au 01/01/2018 puis au 01/01/2019.
 - 2) Exprime C_{n+1} en fonction de C_n .
 - 3) Déduis - en la nature de C_n et précise ses éléments caractéristiques.
 - 4) Exprime C_n en fonction de n .
 - 5) Quel sera son capital au 01/01/2035 ?
 - 6) Détermine au 01/01/ de quelle année son capital sera 3 100 000fcfa.

Exercice 2

- I) Déterminer 3 nombres en progression géométrique croissante sachant que leur somme est 49 et leur produit est 2744.
- II) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$
 - 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - 2) Exprime (u_n) en fonction de n .
 - 3) Quel est le sens de variation de U_n .
 - 4) Calcule $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- III) On définit la suite géométrique (U_n) tel que $u_2 = 175$; $u_5 = 21875$
 - 1) Détermine le 1^{er} terme u_0 et la raison q .
 - 2) Exprime u_n en fonction de n .

IV) Une dame place au 1^{er} Janvier 2017 une somme de 1000000 dans une banque à intérêt composé au taux annuel de 5%. On désigne par (C_n) la valeur acquise par cette somme au 01/01/2017+n.

- 1) Calcule la valeur acquise au 01/01/2018 puis au 01/01/2019.
- 2) Exprime C_{n+1} en fonction de C_n .
- 3) Déduis - en la nature de C_n et précise ses éléments caractéristiques.
- 4) Exprime C_n en fonction de n .
- 5) Quel sera son capital au 01/01/2035 ?

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite de terme générale $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

- 1) Détermine deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
- 2) Calcule en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
- 3) Calcule la limite de la suite (S_n) .

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

- 1) Construis les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.
- 2) a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$
 b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
- 3) a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$
 b) Déduis-en $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 c) Calcule la limite de la suite (u_n)

Solution 1

1) Soit $A + B + C = 45$; $A \times B \times C = 3240$

$$A + C = 2B \Leftrightarrow 2B + B = 45 \Leftrightarrow 3B = 45 \Leftrightarrow B = \frac{45}{3} = 15 \Leftrightarrow B = 15$$

$$A + C = 30 = S$$

$$A \times C = \frac{3240}{B} = 216 = P$$

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 30X + 216 = 0$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4(216) = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$X_1 = \frac{30 - 6}{2} = 12 \quad X_2 = \frac{30 + 6}{2} = 18$$

Les trois nombres sont : $A = 12$; $B = 15$; $C = 18$

II) Soit $A + B + C = 42$; $A^2 + B^2 + C^2 = 638$

$$A + C = 2B \Leftrightarrow 2B + B = 42 \Leftrightarrow 3B = 42 \Leftrightarrow B = \frac{42}{3} = 14 \Leftrightarrow B = 14$$

$$A + C = 42 - 14 = 28 = S$$

$$A^2 + C^2 = 638 - B^2 \Leftrightarrow A^2 + C^2 = 442$$

$$(A + C)^2 = 28^2$$

$$A^2 + 2AC + C^2 = 784 \Leftrightarrow 442 + 2AC = 784 \Leftrightarrow 2AC = 784 - 442 \Leftrightarrow AC = 171 = p$$

$$X^2 - 28X + 171 = 0$$

$$\Delta = (-28)^2 - 4(1)(171) = 100$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$$

$$X_1 = \frac{28 - 10}{2} = 9 \quad X_2 = \frac{28 + 10}{2} = 19$$

$$A = 9 \quad B = 14 \quad C = 19 \quad \text{ou} \quad A = 19 \quad B = 14 \quad C = 9$$

III) $\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

1) (U_n) est une suite arithmétique car $U_{n+1} = U_n + r$ avec $r = 4$
 $r = 4$ est la raison et le 1^{er} terme est $U_0 = 13$

2) Sens de variation

$r = 4 > 0$ alors (U_n) est croissante

3) Exprimons U_n en fonction de n

$$U_n = U_p + (n - p)r = U_0 + nr = 13 + 4n$$

$$U_n = 13 + 4n$$

4) Calculons

$$S = U_3 + U_4 + \dots + U_{54} = \left(\frac{54 - 3 + 1}{2} \right) (U_3 + U_{54})$$

$$U_3 = 13 + 4(3) = 23$$

$$U_{54} = 13 + 4(54) = 229$$

$$S = \left(\frac{54 - 3 + 1}{2} \right) (23 + 229) = 6604$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \left(\frac{n - 0 + 1}{2} \right) (U_0 + U_n) = \left(\frac{n + 1}{2} \right) (13 + 13 + 4n)$$

$$= \left(\frac{n + 1}{2} \right) (26 + 4n) = (n + 1)(13 + 2n)$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \left(\frac{n - 1 + 0 + 1}{2} \right) (U_{n-1} + U_0)$$

$$U_{n-1} = 13 + 4(n - 1) = 13 + 4n - 4 = 9 + 4n$$

$$S_n = \left(\frac{n}{2} \right) (26 + 9 + 4n) = \left(\frac{n}{2} \right) (35 + 4n)$$

IV) $U_{17} = 89$ et $U_{23} = 419$

1) Déterminons le 1^{er} terme U_0 et la raison r

$$U_n = U_0 + nr$$

$$\begin{cases} U_{17} = U_0 + 17r \\ U_{23} = U_0 + 23r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 + 17r = 89 \\ U_0 + 23r = 419 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -U_0 - 17r = -89 \\ U_0 + 23r = 419 \end{cases} \Leftrightarrow 66r = 330 \Leftrightarrow r = \frac{330}{66} = 5 \Leftrightarrow r = 5$$

Dans 1 on a :

$$U_0 + 17(5) = 89 \Leftrightarrow U_0 = 89 - 85 = 4 \Leftrightarrow U_0 = 4$$

2) Exprimons U_n en fonction de n

$$U_n = U_0 + nr \Leftrightarrow U_n = 4 + 5n$$

3) Déterminons la raison

$$r = \frac{b - a}{k + 1} = \frac{120000 - 100000}{3 + 1} = 5000$$

Insertion

100000 ; 105000 ; 110000 ; 115000 ; 120000

4) Calculons la valeur acquise
01/01/2018

$$C_0 = 1000000$$

$$I = \frac{C_0 \times t}{100} = \frac{(1000000 \times 5)}{100} = 50\,000$$

01/01/2018, elle a $C_1 = C_0 + I = 1\,050\,000$ son capital est 1 050 000 F

Au 01/01/2019

$C_2 = C_1 + I = 1\,050\,000 + 50\,000 = 1\,100\,000$ son capital est 1 100 000 F

2) Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n

$$C_1 = C_0 + 50\,000$$

$$C_2 = C_1 + 50\,000$$

⋮

$$C_{n+1} = C_n + 50\,000 \Leftrightarrow C_{n+1} = C_n + 50\,000$$

3) La nature et caractéristiques

$C_{n+1} = C_n + 50\,000$ alors (C_n) est une suite arithmétique de raison $r = 50\,000$ et de 1^{er} terme $C_0 = 1\,000\,000$

4) Exprimons C_n en fonction de n

$$C_n = C_0 + nr = 1\,000\,000 + 50\,000n \Leftrightarrow C_n = 1\,000\,000 + 50\,000n$$

5) Son capital au 01/01/2035

$$2035 - 2017 = 18$$

$$C_{18} = C_0 + 50\,000 \times 18 = 1\,900\,000 \Leftrightarrow C_{18} = 1\,900\,000 \text{ F}$$

Son capital sera 1 900 000 F

6) Au 01/01/quel année son capital sera 3 100 000 F

$$C_n = 3\,100\,000 \Leftrightarrow 1\,000\,000 + 50\,000n = 3\,100\,000$$

$$\Leftrightarrow 50\,000n = 3\,100\,000 - 1\,000\,000 \Leftrightarrow n = 42$$

$$2017 + 42 = 2059$$

Au 01/01/2059 son capital sera de 3 100 000 fcfa

Solution 2

1)

Soit A , B et C trois nombres

$$\text{Soit } A + B + C = 49 ; A \times B \times C = 2744$$

$$A \times C = B^2$$

$$A \circ C = \frac{2744}{14} = 196 = P \quad A + C = 49 - 14 = 35 = S$$

$$X^2 - 35X + 196 = 0$$

$$\Delta = (-35)^2 - 4(1)(196) = 441 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{441} = 21$$

$$X_1 = \frac{35 - 21}{2} = 7 \quad X_2 = \frac{35 + 21}{2} = 28$$

$$A = 7 \quad B = 14 \quad C = 28$$

II) 1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (U_n)

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \text{ alors } (U_n) \text{ est suite géométrique de raison } q = \frac{1}{2} \text{ et de 1er terme } U_0 = 8$$

2) Exprimons (u_n) en fonction de n

$$U_n = U_0 \times q^n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3) Sens de variation de U_n

$$\frac{1}{2} \in [0; 1] \text{ et } U_0 > 0 \text{ alors } (U_n) \text{ est décroissante}$$

4) Calculons

$$S = U_0 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 8 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 16 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$S = 16 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

III) $U_2 = 175 \quad U_5 = 21875$

$$1) U_2 = U_0 \times q^2 \Rightarrow 175 = U_0 \times q^2$$

$$U_5 = U_0 \times q^5 \Rightarrow 21875 = U_0 \times q^5$$

$$U_0 = U_0 \Leftrightarrow \frac{175}{q^2} = \frac{21875}{q^5} \Rightarrow \frac{q^5}{q^2} = \frac{21875}{175} \Rightarrow q^5 \times q^{-2} = \frac{21875}{175} \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = \sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow q = 5$$

$$U_0 = \frac{175}{25} = 7 \Rightarrow U_0 = 7$$

Autre méthode

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

$$\text{Donc } U_5 = U_2 \times q^{5-2} \Rightarrow q^3 = \frac{U_5}{U_2} = 125 \Rightarrow q = \sqrt[3]{125} = 5$$

2) Exprimons (u_n) en fonction de n

$$U_n = U_0 \times q^n = 7 \times 5^n \Rightarrow U_n = 7 \times 5^n$$

IV) 1) Calculons la valeur acquise

$$C_0 = 1\,000\,000$$

$$C_1 = C_0 + C_0 \times \frac{t}{100} = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Rightarrow C_1 = 1\,000\,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) \Rightarrow C_1 = 1\,050\,000$$

Son capital du 01/01/2018 est 1 050 000f

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1\,102\,500f$$

01/01/2019 son capital sera 1 102 500

2) Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$C_{n+1} = C_n \left(1 + \frac{5}{100}\right) \Leftrightarrow C_{n+1} = 1,05C_n$$

3) C_n est une suite géométrique de raison 1,05 et de 1^{er} terme $C_0 = 1\,000\,000$

4) Exprimons C_n en fonction de n

$$C_n = C_0 \times q^n \Leftrightarrow C_n = 1\,000\,000 \times 1,05^n$$

5) Son capital le 01/01/2035

$$2035 - 2017 = 18$$

$$C_{18} = 1\,000\,000 \times 1,05^{18} = 2\,406\,619,23$$

Son capital sera 2 406 619,23 fcfa

Solution 3

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1) Déterminons deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

$$U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{na + a + nb}{n(n+1)} = \frac{n(a+b) + a}{n(n+1)}$$

$$U_n = U_n \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(a+b) + a}{n(n+1)} \Rightarrow 1 = n(a+b) + a$$

Par identification :

$$a + b = 0$$

$$a = 1$$

$$1 + b = 0$$

$$b = -1$$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

2) Calculons en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Après simplification on a

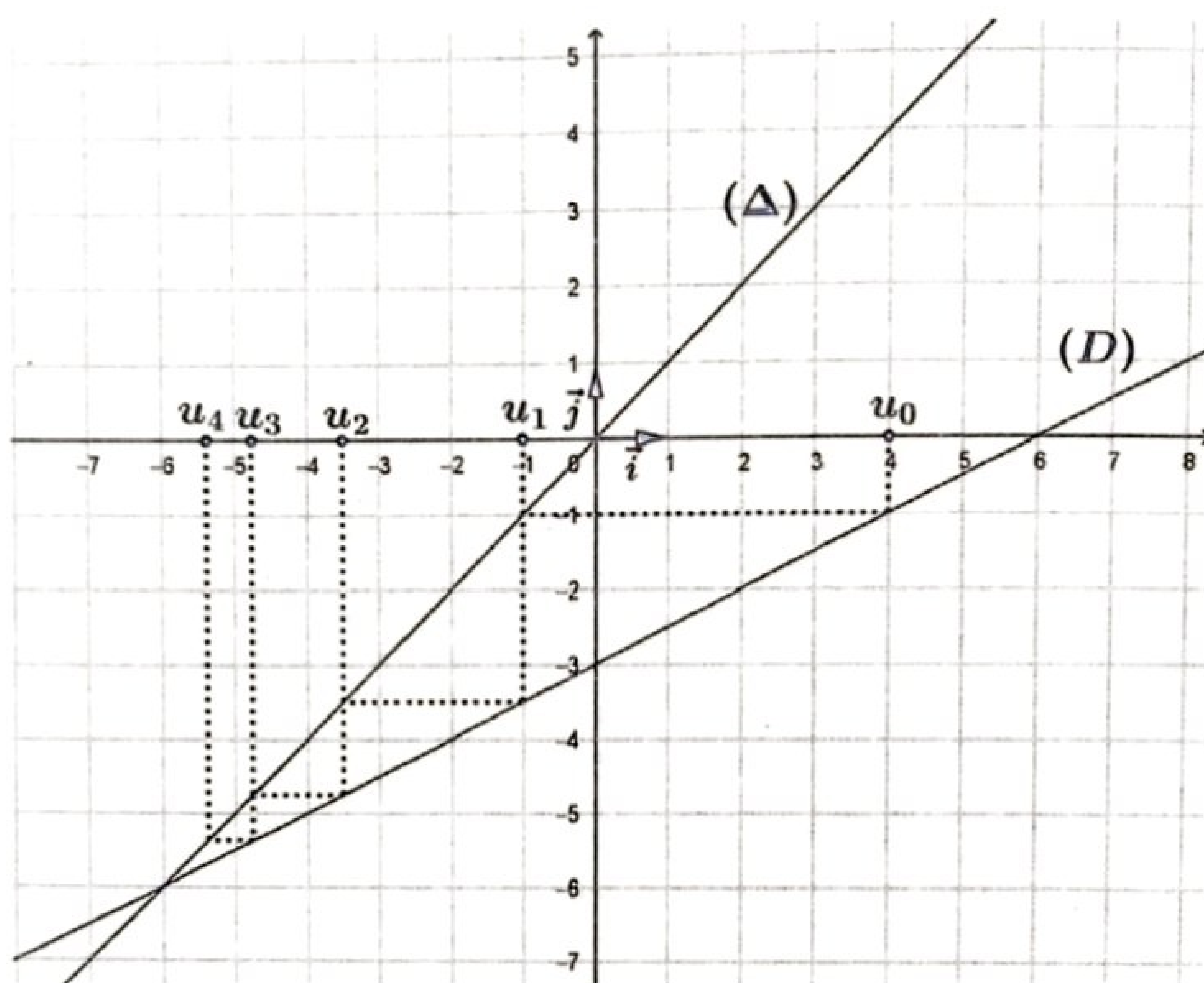
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Solution 4

1) Construction des 5 premiers

Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$ et (Δ) la première bissectrice d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.


 2) a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad (1)$$

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} - 3 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 3 - \left(\frac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$$

 b) Déduisons en que $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On sait que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)$$

$$u_3 - u_2 = \frac{1}{2}u_2 - u_1$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$$

En simplifiant membre à membre on a

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1} (u_1 - u_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1 - 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5) \text{ car } u_0 = 4 \text{ et } u_1 = -1$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5)$$

c) Le sens de variation

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5) < 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante}$$

4) a) Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

$$\text{On sait que } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \frac{1}{2}U_{n-1} - 3$$

$$u_n + 6 = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3 \Leftrightarrow u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

b) Dédisons en $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On sait que

$$u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

$$u_1 + 6 = \frac{1}{2}(u_0 + 6)$$

$$u_2 + 6 = \frac{1}{2}(u_1 + 6)$$

$$u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$$

En multipliant membre on a

$$u_n + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1} (u_0 + 6) \Leftrightarrow u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Calculons la limite de (u_n)

$$u_n = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 = 0 - 6 = -6 \text{ car } \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$$

Évaluation générale

Exercice 1

A. Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > n.$

2. $\forall n > 4, \text{ on a : } 2^n > n^2.$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; a \in \mathbb{R}_+^*; (1+a)^n > (1+na).$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$; déduis - en $S = \sum_{k=7}^{20} k^3.$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

B. Démontre que pour tout entier naturel n :

a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 ; b) 3 divise $4^n - 1$; c) 11 divise $9^{n+1} + 2^{6n+1}.$

C. Calcule les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{3^{23}}$$

Exercice 2

- 1) Trouve trois nombres réels en progression arithmétique croissante sachant que leur somme est égale à 45 et leur produit 3240.
- 2) Trouve la progression arithmétique de quatre termes dont le premier terme est 5 et le quatrième terme est 14
- 3) Trouve la progression géométrique de cinq termes dont le deuxième est 7, le quatrième est 63 et tous les termes sont positifs.
- 4) Trouve trois nombres réels positifs a, b, c constituant dans cet ordre une progression arithmétique croissante et vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :
 $a + b + c = 12$ et $a^2, 3b, c^2$ constituent dans cet ordre une progression géométrique.
- 5) Trouve trois nombres en progression géométrique de somme 777 et de produit 343 000.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$

- 1) Démontre par récurrence que, on : $0 \leq u_n \leq 3.$
- 2) Démontre que la suite (u_n) est strictement croissante.
- 3) Déduis - en que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 4

On définit la suite (U_n) par : $U_n = \frac{2^n - 4n + 5}{4}$ et la suite (V_n) par : $V_n = \frac{2^n + 4n - 5}{4}.$

1. Montre que la suite (a_n) définie : par $a_n = U_n + V_n$ est géométrique et calculer $A_{10} = a_0 + a_1 + \dots + a_{10}$.
2. Montrer la suite (b_n) définie par $b_n = U_n - V_n$ est arithmétique et calculer $B_{10} = b_0 + b_1 + \dots + b_{10}$.
3. En déduire la somme $S_{10} = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$ puis $T_{10} = V_0 + V_1 + \dots + V_{10}$.

Exercice 5

- I. Soient les suites numériques (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ V_n = U_n - \frac{5}{3} \end{cases}$$

- 1) Montre que la suite (V_n) est géométrique.
- 2) Exprime V_n et U_n en fonction de n .
- 3) Calcule $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

- II. Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1).

1. Exprime V_n en fonction de n et montrer que V_n est une suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison.
2. Calcule $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.
3. Utilise la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n . En déduire U_n en fonction de n . Calculer la limite de U_n .

Exercice 6

Une suite (U_n) est définie par son premier terme $U_1 = \frac{2}{7}$ et par la relation $U_{n+1} = \frac{U_n}{3-U_n}$

(On admettra que $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n \neq 0$ et $U_n \neq 3$)

1. Calcule U_2 et U_3 .
2. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \frac{1}{U_n}$. Calcule V_1 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = 3V_n - 1$.
3. Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = V_n - \frac{1}{2}$. Détermine W_{n+1} en fonction de W_n et calcule W_1 . Quelle est la nature de W_n ? Calculer W_n en fonction de n .
4. Déduis - en l'expression de U_n en de n .

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

- 1) Calcule u_4
- 2) (u_n) est-elle une suite arithmétique ? justifie la réponse.
- 3) Démontre, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 4$.
- 4) On pose $v_n = u_n - 4$. Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme.
- 5) Exprime v_n puis u_n en fonction de n . Déduis en les limites des deux suites (v_n) et (u_n) .
- 6) Etudie le sens de variation de la suite (u_n) .

- 7) Calcule $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ puis $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 8) Calcule les limites de S_n et S'_n .

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$

- 1) Détermine u_0 pour que (u_n) soit une suite constante.
- 2) On pose $u_0 = -4$ et $v_n = u_n - \alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - a) Détermine α pour que (v_n) soit une suite géométrique.
 - b) Exprime v_n en fonction n puis déduis en que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = 4 - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$;
 - c) $\forall n \in \mathbb{N}$; on note $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Trouve l'expression de S_n puis de S'_n en fonction n .
 - d) Détermine les limites des suites (u_n) ; (v_n) ; (S_n) et (S'_n) .

Exercice 9

On considère les suite (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$; $u_{n+1} = \frac{u_n+4}{u_n+1}$ et $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}$

- 1) Calcule u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2 .
- 2) Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont on caractérisera.
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) Détermine les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 10

Soit (u_n) une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$

- 1) Calcule le premier terme u_0 et la raison r de cette suite, puis exprime le terme général u_n en fonction de n .
- 2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 2^{u_n}$.

Montre que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera v_0 et q .

Exercice 11

Soit (U_n) une suite géométrique telle que :

$$4(U_1 + U_2 + U_3) = 7 \quad ; \quad U_3 + U_4 + U_5 = \frac{7}{16}$$

- 1) Calcule le premier terme U_1 et la raison q de cette suite.
- 2) Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite.
- 3) Trouve le plus petit entier naturel p tel que $|S_p - 2| \leq 10^{-6}$

Exercice 12

Soient les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_1 = 12 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$$

1. On pose $w_n = v_n - u_n$.
Détermine les 3 premiers termes de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .
2. a. Démontre que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n .
b. Exprime en fonction de n

- $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.
3. a. Démontre que la suite (u_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
 - b. Déduis - en u_n et v_n en fonction de n
 4. On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$.
 - a. Démontre que (t_n) est constante.
 - b. Calcule t_n .

Exercice 13

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite de terme générale $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- 1) Détermine les réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
 - 2) Calcule en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
 - 3) Calcule la limite de la suite (S_n) .

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

- 5) Construis les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

- 6) a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

- b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

- 7) a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$

- b) Déduis-en $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- c) Calculons la limite de la suite (u_n)

Exercice 15

1. Insère 8 termes entre 7 et 61 de manière à obtenir une progression arithmétique.
2. insère 3 termes entre 3 et 48 de manière à obtenir une progression géométrique.

Exercice 16

A l'entreprise Orange Mali, les employés ont le choix entre deux contrats : le salaire initial est toujours de 100 000F par mois, puis une augmentation de 1000F tous les mois pour le contrat A, et une augmentation de 0,5% tous les mois pour le contrat B. On appelle a_n le salaire mensuel d'un employé au bout de n mois avec le contrat A, b_n avec le contrat B.

- a. Calcule les salaires des trois premiers mois pour chaque contrat.
- b. Précise la nature de chaque suite ? Exprimez alors a_n et b_n en fonction de n .
- c. M. TRAORE est en CDD de 18 mois. Quel contrat doit-il choisir ?
- d. M. DIARRA et M. Haïdara ont passé 40 ans dans l'entreprise, mais DIARRA avait le contrat A et Haïdara le contrat B. Quelles sommes ont -il gagnées en tout ?

Exercice 17

Un fonctionnaire dispose au 1er janvier 2014 d'un capital $C_0 = 1\,000\,000\text{F}$ qu'il place à la BOA à un taux de 6% l'an. Au bout de chaque année le capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par C_n la valeur du capital au bout de n années.

- 1) Calcule C_1, C_2 et C_3 .
- 2) Démontre que (C_n) est une suite géométrique puis exprime C_n en fonction de n .
- 3) Au bout de combien de temps n le capital aura-t-il doublé ? (on pourra utiliser une calculatrice)
- 4) En supposant le prix du marché stable, en quelle année ce fonctionnaire pourra-t-il s'offrir une maison dont le prix est 25 000 000F ? (on pourra utiliser une calculatrice)

Exercice 18

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il

décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

- 1°/ a) Détermine le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
- b) Exprime X_{n+1} en fonction de X_n .
- 2°/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$
- a) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1er terme.
- b) Exprime U_n en fonction de n . Déduis-en X_n en fonction de n .
- c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
- d) Calcule la limite de la suite (X_n) . Conclus.

Exercice 19

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an. En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets. Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$. On a alors $r_0 = 40\,000$.

1. Calcule r_1 et r_2 .
2. Justifie que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$.
3. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$
 - a. Démontre que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprime (S_n) en fonction de n . Déduis en que, pour tout entier naturel n , on a : $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.
 - c. La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifie.
 - d. Détermine la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.
 - e. Calcule une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.