

## Chapitre 8

# Les suites numériques

Du niveau de base au niveau concours

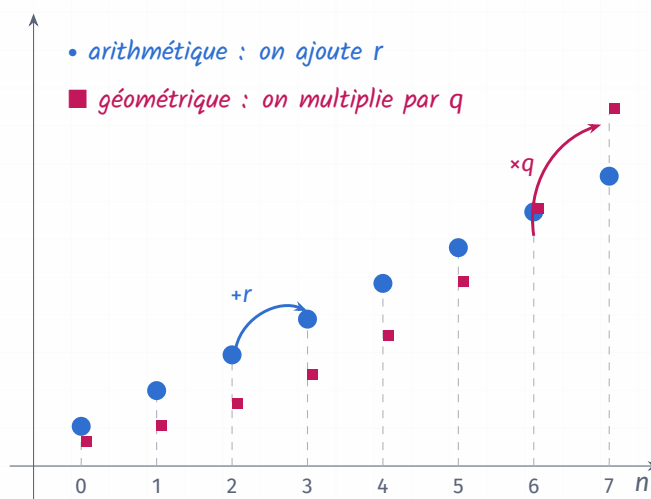
À connaître par cœur

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad v_n = v_p q^{n-p}$$

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Défi de concours

$$u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} : u_{2026} = ?$$



Ajouter ou multiplier : les deux grandes familles de suites

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

# Sommaire

|                                        |    |                                    |    |
|----------------------------------------|----|------------------------------------|----|
| Test d'entrée : par où commencer ?     | 4  | 19 Niveau 4 · Concours             | 27 |
| 1 Notion de suite                      | 5  | 20 Modes de définition             | 29 |
| 2 Représentation graphique             | 6  | 21 Suites bornées et monotones     | 31 |
| 3 Suites majorées, minorées, bornées   | 7  | 22 Suites arithmétiques            | 32 |
| 4 Monotonie d'une suite                | 8  | 23 Suites géométriques             | 34 |
| 5 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$        | 9  | 24 Suites récurrentes              | 35 |
| 6 Suites arithmétiques                 | 11 | 25 Défis de concours               | 37 |
| 7 Suites géométriques                  | 12 | 26 Corrigés du niveau 1            | 39 |
| 8 Suites arithmético-géométriques      | 13 | 27 Corrigés du niveau 2            | 41 |
| 9 Suites auxiliaires                   | 15 | 28 Corrigés du niveau 3            | 44 |
| 10 Sommes et télescopage               | 16 | 29 Corrigés du niveau 4            | 46 |
| 11 Modéliser avec une suite            | 17 | 30 Corrigés : modes de définition  | 48 |
| 12 Pour aller plus loin                | 18 | 31 Corrigés : bornes et monotonie  | 52 |
| 13 Les pièges classiques               | 19 | 32 Corrigés : suites arithmétiques | 55 |
| 14 Les astuces des concours            | 20 | 33 Corrigés : suites géométriques  | 57 |
| 15 L'essentiel du chapitre en une page | 22 | 34 Corrigés : suites récurrentes   | 60 |
| 16 Niveau 1 · Bases                    | 23 | 35 Corrigés : défis de concours    | 64 |
| 17 Niveau 2 · Bac                      | 24 | 26 Corrigé du test d'entrée        | 68 |
| 18 Niveau 3 · Approfondissement        | 26 |                                    |    |

## Comment utiliser ce livret

### Les 4 niveaux d'exercices

#### Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

#### Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

#### Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

#### Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

### Les encadrés du cours

**Définition** : à savoir par cœur.

**Propriété / Théorème** : les outils.

**Méthode** : la démarche pas à pas.

**Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

**Piège** : l'erreur classique à éviter.

**Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

**Ce livret est « intelligent »** : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Modes de définition, Suites bornées et monotones, Suites arithmétiques, Suites géométriques, Suites récurrentes, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

**Conseil** : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

# La carte du chapitre



## À la fin du chapitre, je sais...

- |                                                                        |                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> calculer les termes d'une suite ;             | <input type="checkbox"/> utiliser une suite arithmétique ;           |
| <input type="checkbox"/> représenter : nuage, escalier, spirale ;      | <input type="checkbox"/> utiliser une suite géométrique ;            |
| <input type="checkbox"/> montrer qu'une suite est bornée ;             | <input type="checkbox"/> utiliser $2b = a + c$ et $b^2 = ac$ ;       |
| <input type="checkbox"/> encadrer une suite par récurrence ;           | <input type="checkbox"/> traiter $u_{n+1} = au_n + b$ (point fixe) ; |
| <input type="checkbox"/> étudier la monotonie (trois méthodes) ;       | <input type="checkbox"/> exploiter une suite auxiliaire ;            |
| <input type="checkbox"/> trouver un intervalle stable, un point fixe ; | <input type="checkbox"/> calculer une somme, télescoper ;            |
| <input type="checkbox"/> étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ;        | <input type="checkbox"/> modéliser : intérêts, populations.          |

# Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point : bloc 1, les calculs utiles au chapitre ; blocs 2 et 3, tes acquis des chapitres 4 et 1. Aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : page 68.

## Bloc 1 • Calculs et puissances

\_\_\_ / 4

① **Puissances** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrire  $2 \times 5^{n+1} - 5^n$  sous la forme  $a \times 5^n$ , puis simplifier  $(2^{n+1} \times 4^n)/8^n$ .

② **Fractions** (a) Calculer  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ .  
(b) Pour  $x \neq -2$ , réduire  $\frac{5x+1}{x+2} - 2$  et factoriser.

③ **Identités et équation** (a) Factoriser  $9x^2 - 12x + 4$ , puis  $x^2 - 49$ .  
(b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ .

④ **Pourcentages** (a) +25 % puis -20 % : quel est le coefficient multiplicateur global ?  
(b) Soldé à -20 %, un article coûte 360 DH : son prix initial ?

## Bloc 2 • Fonctions (chapitre 4)

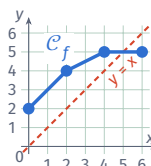
\_\_\_ / 4

⑤ **Taux d'accroissement**  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$  sur  $I = ]-3, +\infty[$ . (a) Calculer le taux de  $f$  entre  $a \neq b$  de  $I$ . (b) En déduire ses variations.

⑥ **Une parabole**  $f(x) = x^2 - 8x + 13$ . (a) Écrire  $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$  et donner les variations de  $f$ . (b) Encadrer  $f(x)$  si  $4 \leq x \leq 6$ .

⑦ **Majorant, minorant**  $f(x) = |x+2| - |x-2|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). (a) Montrer que  $-4 \leq f(x) \leq 4$ . (b) 4 est-il le maximum de  $f$  ? -4 est-il son minimum ?

⑧ **Courbe et composée** Ci-contre : la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $y = x$ . (a) Lire  $f(0)$ ,  $f(f(0))$  et  $f(f(f(0)))$ .  
(b) Résoudre graphiquement  $f(x) = x$ .



## Bloc 3 • Récurrence et sommes (chapitre 1)

\_\_\_ / 4

⑨ **La notation  $\Sigma$**  (a) Écrire sans  $\Sigma$ , puis calculer  $\sum_{k=2}^5 (k^2 - k)$ . (b) Combien de termes compte  $\sum_{k=3}^n (k^2 + 1)$  ( $n \geq 3$ ) ?

⑩ **Sommes connues** Calculer  $S = 4 + 8 + 12 + \dots + 80$  et  $T = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^5$ .

⑪ **Récurrence et égalité** Montrer par récurrence : pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$ .

⑫ **Récurrence et inégalité** (a) Pour quels  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  a-t-on  $2^n \geq 2n+1$  ? (b) Le démontrer par récurrence pour  $n \geq 3$ .

## Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi page 68.

Bloc 1

\_\_\_ / 4

+

Bloc 2

\_\_\_ / 4

+

Bloc 3

\_\_\_ / 4

=

Mon score

\_\_\_ / 12

# Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

## 1 Notion de suite

Une **suite** est une liste **infinie** de nombres **numérotés** par des entiers : le capital d'un compte année après année, l'effectif d'une population mois après mois, les résultats successifs d'un calcul que l'on répète. Ce chapitre apprend à **définir** une suite, à **étudier** (bornes, sens de variation) et à calculer des **sommes** ; presque tous les raisonnements reposent sur la **récurrence** du chapitre 1.

### Définition : suite numérique

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Une **suite numérique** est une application  $u$  de  $\mathbb{N}$ , ou de  $\{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ , dans  $\mathbb{R}$ . L'image  $u(n)$  de l'entier  $n$  se note  $u_n$  : c'est le **terme d'indice  $n$**  (ou **terme général**). La suite se note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ; son **premier terme** est  $u_0$ , ou  $u_{n_0}$ .

**Ne pas confondre** :  $(u_n)$  est la **suite** (une application, une liste infinie) ;  $u_n$  est **un nombre**. On dit « la suite  $(u_n)$  est croissante », « le terme  $u_n$  est positif ». De même,  $u_{n+1}$  est le terme **qui suit**  $u_n$  (on remplace  $n$  par  $n+1$ ), alors que  $u_n + 1$  est le nombre  $u_n$  augmenté de 1.

### Définition : trois façons de définir une suite

- 1. Explicitement** :  $u_n = f(n)$ , où  $f$  est une fonction définie sur  $[n_0, +\infty[$  : chaque terme se calcule **directement**.
- 2. Par récurrence** : on donne le premier terme  $u_0$  et une relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : chaque terme se calcule à partir du **précédent**.
- 3. Par une récurrence double** : on donne  $u_0, u_1$  et une relation  $u_{n+2} = g(u_{n+1}, u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : chaque terme se calcule à partir des **deux** précédents.

### Exemple : cinq suites, qui reviendront dans tout le cours

- **Explicite.**  $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $u_1 = \frac{2}{3}$ ,  $u_2 = \frac{5}{4}$ ,  $u_{10} = \frac{29}{12}$  ; et  $u_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+2} = \frac{3n+2}{n+3}$ . Comme  $3n-1 = 3(n+2)-7$  :  $u_n = 3 - \frac{7}{n+2}$ . **Indice de départ** :  $v_n = \sqrt{n-3}$  n'a de sens que pour  $n \geq 3$  ; la suite  $(v_n)_{n \geq 3}$  commence par  $v_3 = 0$ , puis  $v_4 = 1, \dots, v_7 = 2, \dots, v_{12} = 3$ .
- **Le fil rouge du cours.**  $h_0 = 0$  et  $h_{n+1} = \frac{4h_n + 2}{h_n + 3}$  :  $h_1 = \frac{2}{3}$ ,  $h_2 = \frac{8/3+2}{2/3+3} = \frac{14}{11}$ ,  $h_3 = \frac{78}{47}$ ,  $h_4 = \frac{406}{219}$ . Pour obtenir  $h_{10}$ , il faut calculer  $h_1, \dots, h_9$ , tant qu'on n'a pas de formule explicite (section 9) ; et il faut s'assurer que  $h_n \neq -3$  à chaque étape (section 5).
- **Récurrence double : la suite de Fibonacci.**  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , d'où les termes

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... ( $F_{12} = 144$ ).

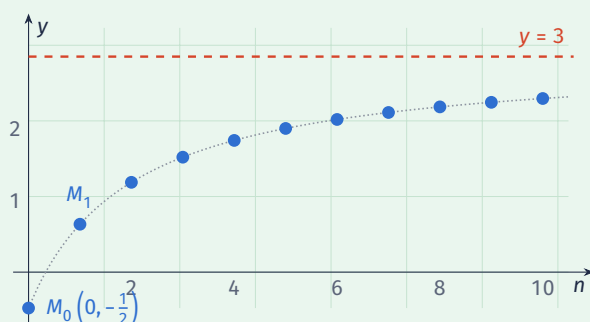
- **Une suite définie par une somme.**  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$  ( $n \geq 1$ ):  $S_1 = \frac{1}{2}$ ,  $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ ,  $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$ . Quand  $n$  augmente, **tous** les termes de la somme changent.

**Remarque. Un peu d'histoire.** Dans son *Liber abaci* (1202), **Léonard de Pise**, dit **Fibonacci**, pose le problème des lapins : un couple devient adulte au bout d'un mois, puis engendre un nouveau couple chaque mois ; combien de couples aura-t-on au bout d'un an, en partant d'un seul couple ? Les effectifs mensuels 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... obéissent à la règle « chaque nombre est la somme des deux précédents », et la réponse est 377. Quant au jeune **Carl Friedrich Gauss**, son maître lui aurait demandé, vers 1786, la somme  $1 + 2 + \dots + 100$  ; il aurait répondu presque aussitôt 5050, en groupant  $1 + 100$ ,  $2 + 99$ , ...,  $50 + 51$  : 50 paires de somme 101 (section 6).

## 2 Représentation graphique

### Définition : nuage de points

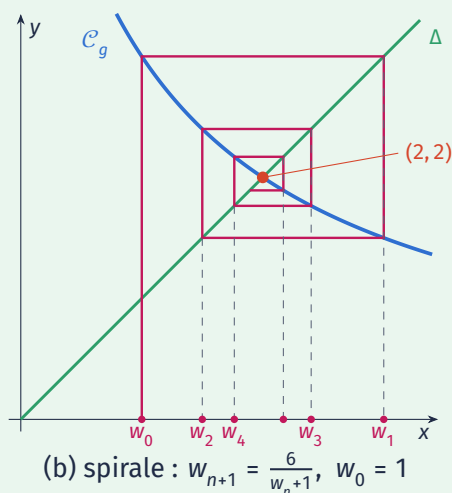
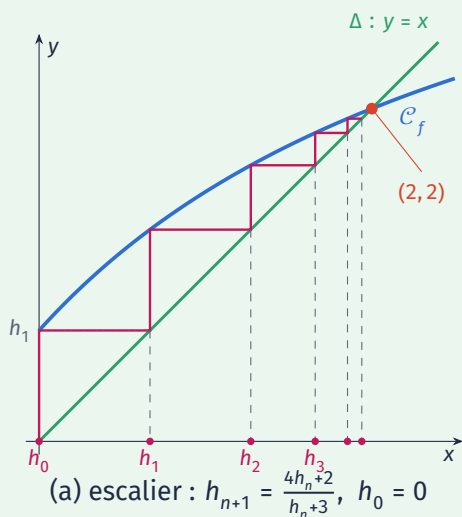
Dans un repère, la **représentation graphique** de  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est l'ensemble des points  $M_n(n, u_n)$ , pour  $n \geq n_0$  : un **nuage de points isolés**. On ne les relie pas : entre  $n$  et  $n+1$ , la suite n'existe pas.



**Lecture :**  $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$ . Les points « montent » et restent **sous** la droite  $y = 3$  : on **conjecture** que  $(u_n)$  est croissante et majorée par 3. Une figure ne **démontre** rien : on le prouvera aux sections 3 et 4. Les points sont sur la courbe (en pointillés) de  $x \mapsto 3 - \frac{7}{x+2}$ , mais seuls ceux d'abscisse **entière** représentent la suite.

### Méthode : Comment construire les termes de $u_{n+1} = f(u_n)$

**1.** Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta : y = x$ . **2.** Placer  $u_0$  sur l'axe des abscisses. **3.** Aller **verticalement** jusqu'à  $\mathcal{C}_f$  : on atteint le point  $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$  ;  $u_1$  est son ordonnée. **4.** Aller **horizontalement** jusqu'à  $\Delta$  : on atteint  $(u_1, u_1)$ , dont l'abscisse est  $u_1$  ; on la reporte sur l'axe des abscisses (pointillés). **5.** Recommencer à partir de  $u_1$ , puis de  $u_2$ ... Si  $f$  est **croissante**, on obtient un « **escalier** » ; si  $f$  est **décroissante**, une « **spirale** » autour du point où  $\mathcal{C}_f$  coupe  $\Delta$ .



**Lecture.** (a)  $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$  est croissante : les  $h_n$  augmentent et restent sous 2, abscisse du point commun à  $C_f$  et  $\Delta$  (section 5). (b)  $g(x) = \frac{6}{x+1}$  est décroissante :  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 3$ ,  $w_2 = \frac{3}{2}$ ,  $w_3 = \frac{12}{5}$ ,  $w_4 = \frac{30}{17}$ ,  $w_5 = \frac{102}{47}$  sont alternativement à gauche et à droite de 2 :  $(w_n)$  n'est pas monotone.

3

## Suites majorées, minorées, bornées

### Définition : suite majorée, minorée, bornée

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** lorsque  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$  ( $M$  est un majorant) ; **minorée** lorsque  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$  ; **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée. Pour une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$ , on remplace «  $\forall n \in \mathbb{N}$  » par «  $\forall n \geq n_0$  ». Graphiquement, le nuage est sous la droite  $y = M$ , au-dessus de  $y = m$ , ou dans la bande comprise entre elles.

**Propriété.**  $(u_n)$  est bornée  $\iff \exists K \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$  (même démonstration qu'au chapitre 4 :  $K = \max(|m|, |M|)$ ).

**Négation :**  $(u_n)$  n'est pas majorée  $\iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$ . L'ordre des quantificateurs compte : «  $\forall n, \exists M, u_n \leq M$  » est vrai pour toute suite ( $M = u_n$ ) ; un majorant ne dépend pas de  $n$ . Un majorant n'est pas unique (tout réel plus grand convient) ; si un majorant est **atteint** ( $M = u_{n_1}$ ), c'est le **plus grand terme** de la suite.

### Méthode : Comment majorer, minorer, encadrer une suite

**1. Encadrement direct :** partir de  $n \geq 0$  (ou  $n \geq n_0$ ) et construire l'encadrement **étape par étape** ; formes utiles :  $a + \frac{b}{n+c}$  (après une division), carré  $(n-a)^2 \geq 0$  (forme canonique). **2. Somme de N termes :** encadrer **chaque** terme, puis additionner. **3. Suite récurrente :** raisonner par **récurrence** (méthode suivante). **4. Non majorée :** « Soit  $M \in \mathbb{R}$  », puis **construire** un entier  $n$  (qui dépend de  $M$ ) tel que  $u_n > M$ .

### Exemple : trois encadrements

**1.**  $u_n = 3 - \frac{7}{n+2}$  : pour  $n \in \mathbb{N}, n+2 \geq 2$ , donc  $0 < \frac{7}{n+2} \leq \frac{7}{2}$ , et  $-\frac{1}{2} \leq u_n < 3$  :  $(u_n)$  est bornée ;  $-\frac{1}{2} = u_0$  est son plus petit terme, et 3 est un majorant **non atteint**.

2.  $b_n = n^2 - 6n = (n - 3)^2 - 9 \geq -9 = b_3$  :  $(b_n)$  est minorée (plus petit terme  $b_3 = -9$ ). Elle n'est **pas majorée** : soit  $M \in \mathbb{R}$  ; l'entier  $n = \max(7, E(|M|) + 1)$  vérifie  $n - 6 \geq 1$ , donc  $b_n = n(n - 6) \geq n > |M| \geq M$ .
3.  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  ( $n \geq 1$ ) : pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $n+1 \leq n+k \leq 2n$ , donc  $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$  ; en additionnant ces  $n$  encadrements :  $\frac{n}{2n} \leq S_n \leq \frac{n}{n+1}$ , soit  $\boxed{\frac{1}{2} \leq S_n < 1}$ .

### Méthode : Comment majorer par récurrence

Pour  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on ne connaît pas  $u_n$  : on démontre l'encadrement **par récurrence**, en trois étapes nommées.

**0.** Énoncer  $P(n)$  : «  $m \leq u_n \leq M$  » (conjecture tirée des premiers termes ou de la figure). **1. Initialisation** : vérifier  $P(0)$ . **2. Hérédité** : « Supposons  $P(n)$  vraie pour un entier  $n \geq 0$  et montrons  $P(n+1)$  » ; partir de  $m \leq u_n \leq M$  et encadrer  $u_{n+1} = f(u_n)$  **étape par étape** (ou par les variations de  $f$  sur  $[m, M]$ ) : on doit **retomber** dans  $[m, M]$ . **3. Conclusion** : « D'après le principe de récurrence,  $m \leq u_n \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . »

**Exemple** :  $c_0 = 2$  et  $c_{n+1} = \frac{c_n^2 + 4}{5}$

**Conjecture.**  $c_1 = \frac{8}{5}$ ,  $c_2 = \frac{164}{125} \approx 1,31$ ,  $c_3 \approx 1,14$  : on conjecture  $P(n)$  : «  $1 < c_n \leq 2$  ».

**Initialisation.**  $c_0 = 2$  et  $1 < 2 \leq 2$  :  $P(0)$  est vraie. **Hérédité.** Supposons  $1 < c_n \leq 2$  pour un entier  $n \geq 0$ . Les nombres étant positifs, on peut élever au carré :  $1 < c_n^2 \leq 4$ , puis  $5 < c_n^2 + 4 \leq 8$ , et  $1 < c_{n+1} = \frac{c_n^2 + 4}{5} \leq \frac{8}{5} \leq 2$  :  $P(n+1)$  est vraie. **Conclusion.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{1 < c_n \leq 2}$  :  $(c_n)$  est bornée.

### Attention, piège !

Avec la seule hypothèse «  $c_n \leq 2$  », l'hérédité **échoue** : de  $c_n \leq 2$  on ne déduit pas  $c_n^2 \leq 4$  (penser à  $c_n = -3$ ). Pour majorer un carré, il faut aussi une **minoration** : on renforce l'hypothèse de récurrence en un encadrement.

## 4 Monotonie d'une suite

### Définition : sens de variation d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(u_n)$  est **croissante** lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$  ; **strictement croissante** lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$  ; **décroissante** lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$  ; **strictement décroissante** lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$ . Elle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante ; **constante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$  ; **stationnaire** si elle est constante **à partir d'un certain rang** :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} = u_n$ . De même, « croissante à partir du rang  $N$  » signifie  $\forall n \geq N, u_{n+1} \geq u_n$ .

**Propriété.**  $(u_n)$  est croissante  $\iff \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$ . En particulier, une suite croissante est **minorée par son premier terme**, une suite décroissante est majorée par son premier terme.

**Démonstration.**  $(\Leftarrow)$  Prendre  $p = n + 1$ .  $(\Rightarrow)$  Fixons  $n$  et montrons par récurrence sur  $p \geq n$  que  $u_n \leq u_p$  : c'est vrai pour  $p = n$  ; si  $u_n \leq u_p$ , alors  $u_n \leq u_p \leq u_{p+1}$ .  $\square$

**Méthode : Comment étudier la monotonie d'une suite**

**1. Différence :** étudier le **signe** de  $u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n$  (réduire au même dénominateur, factoriser). **2. Quotient :** si **tous les termes sont strictement positifs**, comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 (pratique avec des puissances et des produits). **3. Fonction :** si  $u_n = f(n)$  et si  $f$  est monotone sur  $[n_0, +\infty[$ , alors  $(u_n)$  a le **même** sens de variation (chapitre 4 : taux d'accroissement, opérations, composée). **4. Récurrence :** pour  $u_{n+1} = f(u_n)$  (section 5).

*Justifications.* **2.**  $u_{n+1} - u_n = u_n \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$  a le signe de  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$  car  $u_n > 0$ . **3.** Si  $f$  est croissante,  $n < n+1$  donne  $f(n) \leq f(n+1)$ . **La réciproque est fautive** (section 13).

**Exemple : cinq études**

- **Différence.**  $u_n = 3 - \frac{7}{n+2}$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{n+2} - \frac{7}{n+3} = \frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0$  :  $(u_n)$  est **strictement croissante** (la conjecture de la section 2 est démontrée). Pour  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ , attention :  $S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$  perd le terme  $\frac{1}{n+1}$  et en gagne deux :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 :$$

$(S_n)$  est **strictement croissante** (et  $\frac{1}{2} \leq S_n < 1$ ).

- **Quotient.**  $p_n = n \left( \frac{2}{3} \right)^n$  pour  $n \geq 1$  : tous les termes sont  $> 0$  et  $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2(n+1)}{3n}$  ; or  $\frac{2(n+1)}{3n} \leq 1 \iff 2n+2 \leq 3n \iff n \geq 2$ , avec égalité si et seulement si  $n = 2$ . Donc  $p_1 = \frac{2}{3} < p_2 = \frac{8}{9} = p_3 > p_4 > p_5 > \dots$  :  $(p_n)$  est **décroissante à partir du rang 2**, et son plus grand terme est  $\frac{8}{9}$ .
- **Fonction.**  $e_n = \frac{n+3}{2n+1}$  :  $f(x) = \frac{x+3}{2x+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4x+2}$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$  (inverse d'une fonction strictement croissante et positive) :  $(e_n)$  est **strictement décroissante** :  $e_0 = 3 > e_1 = \frac{4}{3} > e_2 = 1 > \dots$ , et  $\frac{1}{2} < e_n \leq 3$ .
- **Avec un encadrement.**  $c_{n+1} - c_n = \frac{c_n^2 - 5c_n + 4}{5} = \frac{(c_n - 1)(c_n - 4)}{5} < 0$ , car  $1 < c_n \leq 2$  (section 3) :  $(c_n)$  est **strictement décroissante** et minorée par 1.
- **Stationnaire.**  $z_n = E\left(\frac{4n}{n+1}\right) = E\left(4 - \frac{4}{n+1}\right)$  :  $z_0 = 0, z_1 = 2, z_2 = E\left(\frac{8}{3}\right) = 2$  ; pour  $n \geq 3, 0 < \frac{4}{n+1} \leq 1$ , donc  $3 \leq \frac{4n}{n+1} < 4$  et  $z_n = 3$  :  $(z_n)$  est croissante et **stationnaire à partir du rang 3**. Enfin  $((-1)^n)$  n'est **pas monotone** :  $1 > -1 < 1$ .

5

**Les suites  $u_{n+1} = f(u_n)$** **Définition : intervalle stable, point fixe**

Soit  $f$  une fonction et  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$ .  $I$  est **stable par  $f$**  lorsque  $\forall x \in I, f(x) \in I$  (on note  $f(I) \subset I$ ). Un réel  $\ell$  est un **point fixe** de  $f$  lorsque  $f(\ell) = \ell$  : la courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe la droite  $y = x$  au point  $(\ell, \ell)$ .

**Théorème (intervalle stable)**

Si  $I$  est stable par  $f$  et  $u_0 \in I$ , la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ . Si  $u_0 = \ell$  est un point fixe, la suite est constante, égale à  $\ell$ .

**Démonstration.** Récurrence sur  $P(n)$  : «  $u_n$  est défini et  $u_n \in I$  ».  $P(0)$  est vraie. Si  $P(n)$  est vraie,  $u_n \in I \subset D_f$ , donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  est défini, et il appartient à  $I$  car  $I$  est stable.  $\square$

### Théorème (sens de variation, $I$ stable par $f$ , $u_0 \in I$ )

1. Si  $f(x) \geq x$  pour tout  $x \in I$ ,  $(u_n)$  est croissante ; si  $f(x) \leq x$  pour tout  $x \in I$ , elle est décroissante.
2. Si  $f$  est **croissante** sur  $I$ ,  $(u_n)$  est **monotone** : croissante si  $u_0 \leq u_1$ , décroissante si  $u_0 \geq u_1$ .

**Démonstration.** 1.  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ , car  $u_n \in I$ . 2. Si  $u_0 \leq u_1$ , posons  $P(n)$  : «  $u_n \leq u_{n+1}$  ».  $P(0)$  est vraie. Si  $u_n \leq u_{n+1}$ , ces deux nombres sont dans  $I$ , où  $f$  est croissante :  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ . Le cas  $u_0 \geq u_1$  est identique.  $\square$

**Attention :** si  $f$  est **décroissante**, la suite n'est en général **pas** monotone (spirale de la section 2 ; voir la section 12).

### Méthode : Comment étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1. **Étudier  $f$**  : variations (taux d'accroissement, forme réduite : chapitre 4), points fixes ( $f(x) = x$ ), signe de  $f(x) - x$ .
2. **Trouver un intervalle stable  $I$**  contenant  $u_0$  : si  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ , avec  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$ , alors  $[a, b]$  est stable (car  $a \leq f(a) \leq f(x) \leq f(b) \leq b$ ).
3. **Récurrence** :  $u_n \in I$  pour tout  $n$  (suite bien définie et bornée).
4. **Monotonie** : signe de  $f(x) - x$  sur  $I$ , ou  $f$  croissante et comparaison de  $u_0$  et  $u_1$ .
5. **Conclure** : « croissante et majorée » est cette année un résultat complet.

### Exemple : une étude complète : le fil rouge $h_0 = 0$ , $h_{n+1} = f(h_n)$ , $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$

**1. La fonction.** Sur  $] -3, +\infty[$ ,  $f(x) = 4 - \frac{10}{x+3}$  ; pour  $x \neq y$ ,  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{10}{(x+3)(y+3)} > 0$  :  $f$  est **strictement croissante**. Points fixes :  $f(x) = x \iff 4x+2 = x^2+3x \iff x^2-x-2=0 \iff x=2$  ou  $x=-1$ . Et

$$f(x) - x = \frac{4x+2-x^2-3x}{x+3} = \frac{(2-x)(x+1)}{x+3}.$$

**2. Un intervalle stable.**  $f(0) = \frac{2}{3} \geq 0$  et  $f(2) = 2 \leq 2$  :  $[0, 2]$  est stable par  $f$ .

**3. Encadrement.** Montrons par récurrence  $P(n)$  : «  $0 \leq h_n < 2$  ». **Initialisation** :  $h_0 = 0$ . **Hérédité** : si  $0 \leq h_n < 2$ , comme  $f$  est strictement croissante,  $f(0) \leq f(h_n) < f(2)$ , soit  $\frac{2}{3} \leq h_{n+1} < 2$  :  $P(n+1)$  est vraie. **Conclusion** :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq h_n < 2$  ; en particulier  $h_n \neq -3$  : **la suite est bien définie**.

**4. Monotonie.**  $h_{n+1} - h_n = f(h_n) - h_n = \frac{(2-h_n)(h_n+1)}{h_n+3} > 0$ , car  $2 - h_n > 0$ ,  $h_n + 1 > 0$  et  $h_n + 3 > 0$ . (Autre voie :  $f$  est croissante et  $h_0 = 0 < h_1 = \frac{2}{3}$ .)

**5. Conclusion.**  $(h_n)$  est **strictement croissante** et  $0 \leq h_n < 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : l'escalier de la section 2 est justifié. La section 9 donnera la formule de  $h_n$ , et la section 14 mesurera l'écart  $2 - h_n$ .

**Une fonction décroissante** :  $w_0 = 1$ ,  $w_{n+1} = g(w_n)$ ,  $g(x) = \frac{6}{x+1}$ .  $g$  est strictement décroissante sur  $] -1, +\infty[$  (inverse d'une fonction strictement croissante et positive) ; si  $1 \leq x \leq 3$ , alors  $g(3) \leq g(x) \leq g(1)$ , soit  $\frac{3}{2} \leq g(x) \leq 3$  :  $[1, 3]$  est stable, donc  $1 \leq w_n \leq 3$  pour tout  $n$  (récurrence). Points fixes :  $x^2 + x - 6 = 0$ , soit 2 et -3. Mais  $w_0 = 1 < w_1 = 3 > w_2 = \frac{3}{2}$  :  $(w_n)$  est bornée et **pas monotone** (spirale).

6

## Suites arithmétiques

### Définition : suite arithmétique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmétique** lorsqu'il existe un réel  $r$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$  : on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre  $r$ , la **raison**. Autrement dit :  $(u_n)$  est arithmétique  $\iff$  la différence  $u_{n+1} - u_n$  ne dépend pas de  $n$ .

### Théorème (terme général)

Si  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  :  $u_n = u_0 + nr$  et, plus généralement,  $u_n = u_p + (n - p)r$  pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ . Réciproquement, une suite  $u_n = an + b$  est arithmétique de raison  $a$ .

**Démonstration.** Récurrence :  $u_0 = u_0 + 0 \times r$  ; si  $u_n = u_0 + nr$ , alors  $u_{n+1} = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r$ . Puis  $u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = (n - p)r$ . Réciproque :  $u_{n+1} - u_n = a$ .  $\square$

**Conséquences.** Les points  $M_n(n, u_n)$  sont **alignés** sur la droite  $y = rx + u_0$ , de coefficient directeur  $r$ . Si  $r > 0$ ,  $(u_n)$  est strictement croissante et non majorée ( $u_n > M$  dès que  $n > \frac{M - u_0}{r}$ ) ; si  $r < 0$ , strictement décroissante et non minorée ; si  $r = 0$ , constante.

### Théorème (somme de termes consécutifs)

Pour  $p \leq n$  :  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$

**nombre de termes  $\times$  moyenne du premier et du dernier.** En particulier  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Démonstration (l'idée du jeune Gauss).** Notons  $S$  la somme et  $N = n - p + 1$  son nombre de termes. On l'écrit dans les deux sens :

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n \quad \text{et} \quad S = u_n + u_{n-1} + \dots + u_p.$$

Les termes placés l'un sous l'autre ont la même somme :  $u_{p+k} + u_{n-k} = (u_p + kr) + (u_n - kr) = u_p + u_n$  pour  $0 \leq k \leq n - p$ . En additionnant les deux lignes :  $2S = N(u_p + u_n)$ .  $\square$

### Trois termes consécutifs

$a, b, c$  sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique  $\iff$   $2b = a + c$  ( $b$  est la **moyenne** de  $a$  et  $c$ ).

**Démonstration.**  $(\Rightarrow)$   $b = a + r$  et  $c = b + r$ , donc  $b - a = c - b$ .  $(\Leftarrow)$  Avec  $r = b - a$  :  $b = a + r$  et  $c = 2b - a = b + r$ .  $\square$

### Exemple : quatre situations

- **Reconnaître.**  $u_n = (n + 1)^2 - (n - 2)^2 = 3(2n - 1) = 6n - 3$  : arithmétique de raison 6, de premier terme  $u_0 = -3$ .  $v_n = n^2 + n$  :  $v_1 - v_0 = 2$  et  $v_2 - v_1 = 4$  : **pas** arithmétique (un contre-exemple suffit).
- **Deux termes donnés.**  $u_5 = 17$  et  $u_{12} = 38$  :  $u_{12} - u_5 = 7r = 21$ , donc  $r = 3$ , puis  $u_0 = u_5 - 5r = -8$  :  $u_n = 3n - 8$ ,  $u_{100} = 302$ . Somme :  $u_5 + u_6 + \dots + u_{20}$  compte  $20 - 5 + 1 = 16$  termes :  $16 \times \frac{17+62}{2} = \boxed{632}$ .
- **Les multiples de 7 entre 100 et 500.** Ce sont les  $7k$  avec  $15 \leq k \leq 71$  ( $7 \times 14 = 98$  et

$7 \times 72 = 504$ ) :  $71 - 15 + 1 = 57$  termes, en progression arithmétique de raison 7 :  $57 \times \frac{105+497}{2} = 57 \times 301 = \boxed{17157}$ .

- **Trois termes inconnus.** Trois nombres en progression arithmétique ont pour somme 27 et pour produit 585. On les écrit **symétriquement** :  $a - r, a, a + r$ . Alors  $3a = 27$ ,  $a = 9$ , et  $9(81 - r^2) = 585$ , d'où  $r^2 = 16$  : ce sont  $\boxed{5, 9, 13}$ .

## 7 Suites géométriques

### Définition : suite géométrique

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **géométrique** lorsqu'il existe un réel  $q$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = q v_n$  : on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre  $q$ , la **raison**. Si aucun terme n'est nul :  $(v_n)$  est géométrique  $\iff$  le quotient  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  ne dépend pas de  $n$ .

### Théorème (terme général et somme)

1.  $v_n = v_0 q^n$  et  $v_n = v_p q^{n-p}$  pour  $n \geq p$ . Réciproquement, une suite  $v_n = a b^n$  est géométrique de raison  $b$ .

2. Pour  $q \neq 1$  et  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  ; pour  $q = 1$ , elle vaut  $n + 1$ .

Plus généralement :  $v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$  : **premier terme**  $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$ .

**Démonstration.** 1. Récurrence :  $v_0 = v_0 q^0$  ; si  $v_n = v_0 q^n$ , alors  $v_{n+1} = q v_0 q^n = v_0 q^{n+1}$ . De même à partir du rang  $p$ . 2. Soit  $S = 1 + q + \dots + q^n$ . Alors  $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$  ; dans la différence, tous les termes intermédiaires s'en vont :

$$S - qS = (1 + q + \dots + q^n) - (q + \dots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1},$$

et l'on divise par  $1 - q \neq 0$ . Enfin  $v_p + \dots + v_n = v_p (1 + q + \dots + q^{n-p})$ .  $\square$

**Conséquence (factorisation).** Pour tous réels  $a, b$  :  $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$  (développer et voir les termes s'annuler deux à deux) ; ainsi  $a - b$  divise  $a^{n+1} - b^{n+1}$  pour des entiers  $a, b$ .

### Trois termes consécutifs ( $a \neq 0$ )

$a, b, c$  sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique  $\iff \boxed{b^2 = ac}$ .

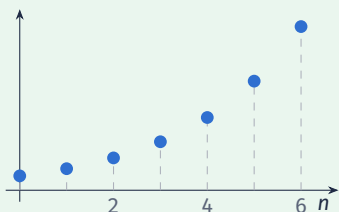
**Démonstration.**  $(\implies)$   $b = aq$  et  $c = aq^2$ , donc  $b^2 = a^2 q^2 = ac$ .  $(\impliedby)$  Avec  $q = \frac{b}{a}$  :  $aq = b$  et  $bq = \frac{b^2}{a} = c$ . (Sans l'hypothèse  $a \neq 0$  : 0, 0, 5 vérifient  $b^2 = ac$  sans être en progression géométrique.)  $\square$

### Théorème (signe et sens de variation de $v_n = v_0 q^n$ , avec $v_0 \neq 0$ )

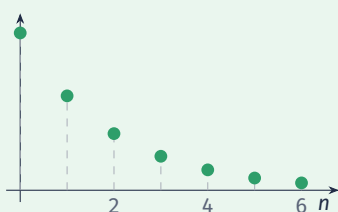
$q > 1$  : strictement croissante si  $v_0 > 0$ , strictement décroissante si  $v_0 < 0$ .  $0 < q < 1$  : strictement décroissante si  $v_0 > 0$ , strictement croissante si  $v_0 < 0$ .  $q = 1$  : constante ;  $q = 0$  : nulle à partir du rang 1 (stationnaire).  $q < 0$  : les termes changent de signe à chaque rang :

la suite **n'est pas monotone**.

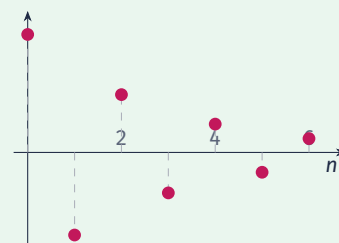
**Démonstration.**  $v_{n+1} - v_n = v_0 q^n (q - 1)$  ; si  $q > 0$ ,  $q^n > 0$ , et le signe est celui de  $v_0 (q - 1)$ . Si  $q < 0$ ,  $v_{n+1} v_n = q v_n^2 < 0$  : deux termes consécutifs sont de signes contraires ; et  $v_2 - v_1 = q(v_1 - v_0)$  est du signe contraire de  $v_1 - v_0 \neq 0$ .  $\square$



(a)  $0,5 \times 1,5^n$  :  $q > 1$



(b)  $4 \times 0,6^n$  :  $0 < q < 1$



(c)  $3 \times (-0,7)^n$  :  $q < 0$

### Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel  $q \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $q^n \geq 1 + n(q - 1)$ . Conséquence : si  $q > 1$ , la suite  $(q^n)$  **n'est pas majorée**.

**Démonstration.** Récurrence :  $q^0 = 1 \geq 1$ . Si  $q^n \geq 1 + n(q - 1)$ , on multiplie par  $q \geq 0$  :  $q^{n+1} \geq q + nq(q - 1) = 1 + (n + 1)(q - 1) + n(q - 1)^2 \geq 1 + (n + 1)(q - 1)$ . Si  $q > 1$  et  $M \in \mathbb{R}$ , tout entier  $n > \frac{M-1}{q-1}$  donne  $q^n \geq 1 + n(q - 1) > M$ .  $\square$

### Exemple : quatre calculs

- $v_n = 5 \times 2^{2n-1}$  :  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2^2 = 4$  : géométrique de raison 4, de premier terme  $v_0 = \frac{5}{2}$ .  
 $2 + 6 + 18 + \dots + 2 \times 3^{10}$  : 11 termes, de raison 3 :  $2 \times \frac{1-3^{11}}{1-3} = 3^{11} - 1 = \boxed{177146}$ .
- $v_2 = 12$  et  $v_5 = -96$  :  $q^3 = \frac{v_5}{v_2} = -8$ , donc  $q = -2$  (la fonction cube est strictement croissante : chapitre 4), et  $v_0 = \frac{12}{4} = 3$ . Somme des dix premiers termes :  $v_0 + \dots + v_9 = 3 \times \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 1 - 1024 = \boxed{-1023}$ .
- $x - 1, x + 1, 2x + 5$  consécutifs dans une suite géométrique :  $(x + 1)^2 = (x - 1)(2x + 5) \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = 2$  ou  $x = -3$  ; on obtient  $1, 3, 9$  ( $q = 3$ ) ou  $-4, -2, -1$  ( $q = \frac{1}{2}$ ), avec bien  $x - 1 \neq 0$ .
- Bernoulli :  $1,01^n \geq 1 + \frac{n}{100} > 1000$  dès que  $n \geq 99901$ . (L'inégalité est grossière : en fait  $1,01^n > 1000$  dès  $n = 695$  ; mais elle suffit pour prouver que  $(1,01^n)$  n'est pas majorée.)

8

## Suites arithmético-géométriques

### Définition : suite arithmético-géométrique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = a u_n + b$ . Si  $a = 1$ , elle est arithmétique ; si  $b = 0$ , géométrique : on suppose désormais  $a \neq 1$ .

**Théorème (point fixe et suite auxiliaire,  $a \neq 1$ )**

1. L'équation  $x = ax + b$  a une unique solution  $\ell = \frac{b}{1-a}$  : le point fixe de  $x \mapsto ax + b$ .
2. La suite  $v_n = u_n - \ell$  est **géométrique de raison  $a$**  ; donc  $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)\ell + (u_0 - \ell) \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ .

**Démonstration.** 1.  $x = ax + b \iff (1-a)x = b$ , et  $1-a \neq 0$ . 2. On soustrait membre à membre  $u_{n+1} = au_n + b$  et  $\ell = a\ell + b$  :  $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell) = av_n$  ; donc  $v_n = v_0 a^n$  (section 7) et  $u_n = \ell + v_n$ . 3.  $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (\ell + v_k) = (n+1)\ell + v_0(1+a+\dots+a^n)$ .  $\square$

**Comportement.**  $u_n - \ell = (u_0 - \ell)a^n$  : si  $a > 0$ , tous les termes sont du **même côté** de  $\ell$  que  $u_0$  ; si  $a < 0$ , ils sont **alternativement** de part et d'autre de  $\ell$ , et la suite n'est pas monotone (si  $u_0 \neq \ell$ ).

**Méthode : Comment étudier  $u_{n+1} = au_n + b$** 

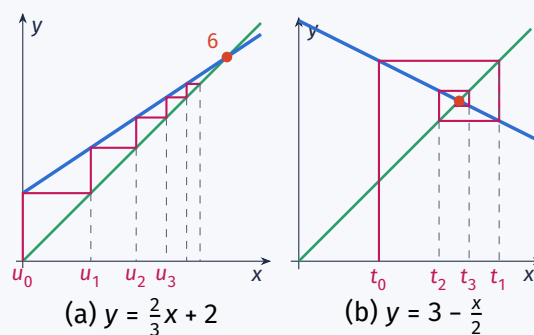
1. Calculer  $\ell$  en résolvant  $\ell = a\ell + b$ .
2. Poser  $v_n = u_n - \ell$  et **rédigier** : «  $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = \dots = av_n$  », donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$ .
3.  $v_n = v_0 a^n$ , puis  $u_n = \ell + v_n$  (contrôler avec  $u_1$ ).
4. En déduire sens de variation, encadrement, sommes.

**Exemple :**  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$ , puis  $t_0 = 1$  et  $t_{n+1} = 3 - \frac{t_n}{2}$

1.  $\ell = \frac{2}{3}\ell + 2 \iff \ell = 6$ . Avec  $v_n = u_n - 6$  :  $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$  ;  $v_0 = -6$ , donc  $u_n = 6 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$  ( $u_1 = 2$ ,  $u_2 = \frac{10}{3}$ ,  $u_3 = \frac{38}{9}$ ). Ainsi  $0 \leq u_n < 6$ , et  $u_{n+1} - u_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$  :  $(u_n)$  est strictement croissante (escalier (a)). Somme (théorème, avec  $u_0 - \ell = -6$  et  $1 - a = \frac{1}{3}$ ) :

$$\sum_{k=0}^n u_k = 6(n+1) - 18\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

2.  $\ell = 3 - \frac{\ell}{2} \iff \ell = 2$  :  $t_n - 2 = (t_0 - 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ,  $t_n = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  :  $1, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{17}{8}, \dots$  Les termes sont **alternativement** sous et au-dessus de 2 (spirale (b)) : pas de monotonie ; et  $|t_n - 2| = \frac{1}{2^n} \leq 1$ , donc  $1 \leq t_n \leq 3$ .



9

## Suites auxiliaires

Quand une suite n'est ni arithmétique ni géométrique, on la **transforme** : une suite auxiliaire  $(v_n)$ , en général **donnée par l'énoncé**, est arithmétique ou géométrique ; on calcule  $v_n$ , puis on revient à  $u_n$ .

## Méthode : Comment utiliser une suite auxiliaire

1. Écrire  $v_{n+1}$  à l'aide de  $u_{n+1}$ , puis remplacer  $u_{n+1}$  par son expression en fonction de  $u_n$ . 2. Simplifier jusqu'à faire apparaître  $v_n$  :  $v_{n+1} = q v_n$  ou  $v_{n+1} = v_n + r$ , avec  $q$  ou  $r$  **indépendant de  $n$** . 3. Calculer  $v_0$ , puis  $v_n$  en fonction de  $n$ . 4. Revenir à  $u_n$  (exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ ), en vérifiant que les dénominateurs ne s'annulent pas ; contrôler avec  $u_0$  et  $u_1$ .

**Exemple : une suite homographique : la formule du fil rouge**  $h_{n+1} = \frac{4h_n + 2}{h_n + 3}$ ,  $h_0 = 0$

On pose  $v_n = \frac{h_n - 2}{h_n + 1}$ , défini car  $h_n \geq 0$  (section 5). 1-2. On calcule séparément

$$h_{n+1} - 2 = \frac{4h_n + 2 - 2h_n - 6}{h_n + 3} = \frac{2(h_n - 2)}{h_n + 3} \quad \text{et} \quad h_{n+1} + 1 = \frac{4h_n + 2 + h_n + 3}{h_n + 3} = \frac{5(h_n + 1)}{h_n + 3},$$

d'où, en divisant,  $v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$  :  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{2}{5}$ . 3.  $v_0 = \frac{0-2}{0+1} = -2$ , donc  $v_n = -2 \left(\frac{2}{5}\right)^n$ . 4.  $v_n(h_n + 1) = h_n - 2$  donne  $h_n(1 - v_n) = 2 + v_n$ , avec  $1 - v_n > 0$  :

$$h_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n} = \frac{2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2 \times 5^n - 2^{n+1}}{5^n + 2^{n+1}} \quad \left(h_1 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad h_3 = \frac{234}{141} = \frac{78}{47} \checkmark\right).$$

Pourquoi 2 et -1 ? Ce sont les **points fixes** de  $f$  (section 14). Si  $f$  n'a qu'un point fixe  $\alpha$ , c'est  $\frac{1}{u_n - \alpha}$  qui est arithmétique (voir le parcours).

**Exemple : la suite des différences :  $m_0 = 0$ ,  $m_1 = 3$ ,  $m_{n+2} = \frac{m_{n+1} + m_n}{2}$**

Chaque terme est la moyenne des deux précédents : 0, 3,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{9}{4}$ ,  $\frac{15}{8}$ ... Posons  $d_n = m_{n+1} - m_n$ . Alors  $d_{n+1} = m_{n+2} - m_{n+1} = \frac{m_n - m_{n+1}}{2} = -\frac{1}{2} d_n$  : géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$ , et  $d_0 = 3$ . Par télescopage (section 10) :

$$m_n = m_0 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k = 3 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad \left(m_2 = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \checkmark\right).$$

**Produits et quotients.** Si  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont géométriques de raisons  $q$  et  $q'$ , alors  $(v_n w_n)$  est géométrique de raison  $qq'$ , et  $\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$  de raison  $\frac{q}{q'}$  (termes non nuls). Si  $(a_n)$  est arithmétique de raison  $r$  et  $c > 0$ , alors  $(c^{a_n})$  est géométrique de raison  $c^r$ . **Produit des termes** :  $v_0 v_1 \cdots v_n = v_0^{n+1} q^{0+1+\cdots+n} = v_0^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}}$  ; par exemple  $3 \times 6 \times 12 \times 24 = 3^4 \times 2^6 = 5184$ .

10

## Sommes et télescopage

**Rappels (chapitre 1).**  $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + \dots + a_n$  compte  $n - p + 1$  termes ; l'indice  $k$  est muet ;  $\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$  et  $\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k$ . **Changements d'indice :**  $\sum_{k=p}^n a_{k+1} = \sum_{j=p+1}^{n+1} a_j$  ( $j = k + 1$ ) et  $\sum_{k=0}^n a_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k$  (on lit la somme à l'envers).

**Sommes de référence :**  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  ( $q \neq 1$ ), et les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique (sections 6 et 7). **Exemple :**

$$\sum_{k=1}^n (6k - 2 + 3 \times 2^k) = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n + 3(2^{n+1} - 2) = 3n^2 + n + 6 \times 2^n - 6.$$

### Théorème (télescopage)

Pour toute suite  $(a_k)$  et tous entiers  $p \leq n$  :

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

En particulier, pour toute suite  $(u_n)$  et tout  $n \geq 1$  :  $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ .

**Démonstration.** Par linéarité et changement d'indice :  $\sum_{k=p}^n a_{k+1} - \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{j=p+1}^{n+1} a_j - \sum_{k=p}^n a_k = a_{n+1} - a_p$  : tous les termes d'indices  $p + 1$  à  $n$  apparaissent une fois avec + et une fois avec -.  $\square$

### Méthode : Comment calculer une somme

1. Reconnaître une somme arithmétique ou géométrique (et **compter** les termes). 2. Découper par linéarité. 3. Sinon, écrire le terme général comme une **différence**  $a_{k+1} - a_k$  : décomposer une fraction, multiplier par la quantité conjuguée, ou chercher  $a_k$  avec des coefficients inconnus. 4. Contrôler le résultat avec  $n = 1$  et  $n = 2$ .

### Exemple : quatre télescopes

- **Conjuguée.**  $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$  (car  $(k+1) - k = 1$ ) :  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \boxed{\sqrt{n+1}}$  ; pour  $n = 99$ , la somme vaut 10.
- **Deux crans.**  $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$  : il reste les deux premiers termes positifs et les deux derniers négatifs :

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n = 1 : \frac{2}{3} \checkmark).$$

- **Produits d'entiers consécutifs.**  $k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$ , donc

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)] = \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}.$$

Comme  $k^2 = k(k+1) - k$ , on retrouve sans récurrence  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

- **Coefficients inconnus.** On cherche  $a_k = (\alpha k + \beta)2^k$  tel que  $a_{k+1} - a_k = k2^k$  :  $a_{k+1} - a_k = 2^k(\alpha k + 2\alpha + \beta)$ , donc  $\alpha = 1$  et  $\beta = -2$ . Ainsi  $\sum_{k=0}^n k2^k = a_{n+1} - a_0 = \boxed{(n-1)2^{n+1} + 2}$  ( $n = 3$  :  $0 + 2 + 8 + 24 = 34 \checkmark$ ).

## 11 Modéliser avec une suite

**Pourcentages.** Augmenter de  $t\%$ , c'est multiplier par  $1 + \frac{t}{100}$  ; diminuer de  $t\%$ , c'est multiplier par  $1 - \frac{t}{100}$  (coefficients multiplicateurs).

| situation (d'une période à la suivante)                | relation                   | type de suite                      |
|--------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| intérêts simples au taux $t$ (sur le capital initial)  | $C_{n+1} = C_n + t C_0$    | arithmétique : $C_n = C_0(1 + nt)$ |
| intérêts composés au taux $t$ (sur le capital acquis)  | $C_{n+1} = (1 + t) C_n$    | géométrique : $C_n = C_0(1 + t)^n$ |
| population : taux $p$ , solde migratoire $m$           | $P_{n+1} = (1 + p)P_n + m$ | arithmético-géométrique            |
| abonnés : on en perd la part $p$ , on en gagne $N$     | $a_{n+1} = (1 - p)a_n + N$ | arithmético-géométrique            |
| médicament : le corps en évacue la part $p$ , dose $D$ | $d_{n+1} = (1 - p)d_n + D$ | arithmético-géométrique            |

### Méthode : Comment modéliser

1. Définir la suite **en mots** («  $u_n$  est le capital au bout de  $n$  années ») et donner  $u_0$ .
2. Traduire « d'une année à la suivante » par une relation  $u_{n+1} = \dots$
3. Reconnaître le type, calculer  $u_n$ .
4. Répondre à la question posée (seuil, comparaison) par une **phrase**, dans le contexte.

### Exemple : comparer deux placements de 20 000 DH

**A** : intérêts simples à 6 % :  $A_n = 20\,000 + 1200n$ . **B** : intérêts composés à 4,5 % :  $B_n = 20\,000 \times 1,045^n$ .

| $n$           | 1      | 6      | 10     | 13     | 14     | 20     |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $A_n$         | 21 200 | 27 200 | 32 000 | 35 600 | 36 800 | 44 000 |
| $B_n \approx$ | 20 900 | 26 045 | 31 059 | 35 444 | 37 039 | 48 234 |

Le placement B dépasse A à partir de la 14<sup>e</sup> année (pour  $1 \leq n \leq 13$ , on vérifie que  $B_n < A_n$ ). Prouvons  $P(n)$  : «  $B_n > A_n$  » pour tout  $n \geq 14$ . **Initialisation** :  $B_{14} \approx 37\,039 > 36\,800 = A_{14}$ . **Hérédité** : si  $B_n > A_n$  pour un entier  $n \geq 14$ , alors

$$B_{n+1} = 1,045 B_n > 1,045 A_n = 20\,900 + 1254n \geq 21\,200 + 1200n = A_{n+1},$$

car  $54n \geq 300$  dès que  $n \geq 6$  :  $P(n+1)$  est vraie. **Conclusion** :  $B_n > A_n$  pour tout  $n \geq 14$ . L'hérédité est vraie dès  $n = 6$ , mais  $P(6)$  est fausse : **l'initialisation est indispensable**.

### Exemple : abonnés, médicament, population

**Abonnés.** 8000 abonnés ; chaque mois, 10 % se désabonnent et 1200 nouveaux arrivent :  $a_0 = 8000$ ,  $a_{n+1} = 0,9a_n + 1200$ . Point fixe  $\ell = 12\,000$  :  $a_n = 12\,000 - 4000 \times 0,9^n$ . Donc  $(a_n)$  est strictement croissante et  $a_n < 12\,000$  : on n'atteint jamais 12 000 abonnés.  $a_n \geq 11\,000 \iff 0,9^n \leq 0,25$  ; comme  $(0,9^n)$  décroît,  $0,9^{13} \approx 0,254$  et  $0,9^{14} \approx 0,229$  : c'est vrai à **partir du 14<sup>e</sup> mois**.

**Médicament.** Dose de 10 mg par jour, le corps en évacue 30 % par jour :  $d_0 = 10$ ,  $d_{n+1} = 0,7d_n + 10$  ;  $\ell = \frac{100}{3}$  et  $d_n = \frac{100}{3} - \frac{70}{3} \times 0,7^n < \frac{100}{3} \approx 33,3$  mg : la quantité présente reste sous ce seuil.

**Population.**  $P_{n+1} = 1,02P_n - 500$  :  $\ell = 25\,000$  et  $P_n = 25\,000 + (P_0 - 25\,000) \times 1,02^n$ . Avec  $P_0 = 30\,000$ , la population croît ; avec  $P_0 = 20\,000$ , elle décroît, et  $P_n = 25\,000 - 5000 \times 1,02^n$  devient négatif dès  $n = 82$  : le modèle cesse alors d'avoir un sens.

12

## Pour aller plus loin

## Théorème (récurrence linéaire d'ordre 2)

Soit  $a, b$  deux réels et  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ . Si l'équation caractéristique  $r^2 = ar + b$  a deux racines réelles **distinctes**  $r_1$  et  $r_2$ , il existe deux réels  $\lambda, \mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n ; \text{ on les obtient avec } u_0 = \lambda + \mu \text{ et } u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2.$$

**Démonstration.** 1.  $r_1^{n+2} = r_1^n r_1^2 = a r_1^{n+1} + b r_1^n$  : la suite  $(r_1^n)$  vérifie la relation, de même  $(r_2^n)$ , donc aussi  $w_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$  pour tous réels  $\lambda, \mu$ . 2. Le système  $\lambda + \mu = u_0, \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$  a une solution, car  $r_1 \neq r_2$  :  $\mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}, \lambda = u_0 - \mu$ . 3. Récurrence double sur  $P(n)$  : «  $u_n = w_n$  et  $u_{n+1} = w_{n+1}$  » :  $P(0)$  est vraie par le choix de  $\lambda, \mu$  ; si  $P(n)$  est vraie,  $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n = a w_{n+1} + b w_n = w_{n+2}$ .  $\square$

**Exemple :**  $j_0 = 0, j_1 = 1, j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$

$r^2 = r + 2$  a pour racines 2 et -1 ;  $\lambda + \mu = 0$  et  $2\lambda - \mu = 1$  donnent  $\lambda = \frac{1}{3} = -\mu$  :  $j_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$  (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85). Comme les  $j_n$  sont des entiers (récurrence), 3 divise  $2^n - (-1)^n$  pour tout  $n$ .

**La formule de Binet.** Les racines de  $r^2 = r + 1$  sont  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (le **nombre d'or**) et  $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  ; elles vérifient  $\varphi^2 = \varphi + 1, \varphi'^2 = \varphi' + 1$  et  $\varphi - \varphi' = \sqrt{5}$ . Montrons, par récurrence double,  $P(n)$  : «  $F_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\sqrt{5}}$  et  $F_{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\sqrt{5}}$  ». **Initialisation :**  $\frac{\varphi^0 - \varphi'^0}{\sqrt{5}} = 0 = F_0$  et  $\frac{\varphi^1 - \varphi'^1}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$ . **Hérédité :** si  $P(n)$  est vraie,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\varphi^n(\varphi + 1) - \varphi'^n(\varphi' + 1)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\sqrt{5}} ;$$

donc  $P(n+1)$  est vraie. **Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Une formule pleine de  $\sqrt{5}$  qui ne donne que des entiers ! Comme  $|\varphi'| < 1$  et  $\sqrt{5} > 2$ , on a  $|\varphi'^n / \sqrt{5}| < \frac{1}{2}$  :  $F_n$  est l'entier le plus proche de  $\varphi^n / \sqrt{5}$  (par exemple  $\varphi^{10} / \sqrt{5} \approx 55,004$  et  $F_{10} = 55$ ).

## Définition : suite périodique

$(u_n)$  est **périodique** lorsqu'il existe un entier  $T \geq 1$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$  ( $T$  est une **période**). Alors  $u_n = u_\rho$ , où  $\rho$  est le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $T$ .

- $y_0 = 2$  et  $y_{n+1} = \frac{1}{1-y_n}$  :  $y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = 2 = y_0$ . Par récurrence,  $y_{n+3} = y_n$  (si  $y_{n+3} = y_n$ , alors  $y_{n+4} = \frac{1}{1-y_{n+3}} = \frac{1}{1-y_n} = y_{n+1}$ ) : période 3 ;  $100 = 3 \times 33 + 1$ , donc  $y_{100} = y_1 = -1$ .
- Si  $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n$ , alors  $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} = -u_n$ , donc  $u_{n+6} = u_n$  : période 6, quels que soient  $u_0$  et  $u_1$  (ici  $r^2 = r - 1$  n'a pas de racine réelle). C'est le cas de  $c_n = \cos \frac{n\pi}{3}$  :  $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  (chapitre 7).

### Quand $f$ est décroissante

Si  $I$  est stable par  $f$ ,  $u_0 \in I$  et  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors  $f \circ f$  est croissante sur  $I$ , et  $u_{n+2} = (f \circ f)(u_n)$  : les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont **monotones**, de sens **contraires**.

**Démonstration.**  $f \circ f$  est croissante (deux maillons décroissants, chapitre 4) ; on applique la section 5 à  $x_n = u_{2n}$  et à  $x_n = u_{2n+1}$ . Si  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ , en appliquant  $f$  décroissante :  $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$ .  $\square$

**Exemple :** pour la spirale  $w_{n+1} = \frac{6}{w_n+1}$ ,  $w_0 = 1$  :  $(f \circ f)(x) = \frac{6(x+1)}{x+7}$  ;  $w_0 = 1 < w_2 = \frac{3}{2}$ , donc  $(w_{2n})$  est croissante ( $1 < \frac{3}{2} < \frac{30}{17} < \dots$ ) et  $(w_{2n+1})$  décroissante ( $3 > \frac{12}{5} > \frac{102}{47} > \dots$ ).

13

## Les pièges classiques

| X Faux                                                                           | ✓ Vrai                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| « $u_n = n^2$ , donc $u_{n+1} = u_n + 1 = n^2 + 1$ »                             | on remplace $n$ par $n + 1$ :<br>$u_{n+1} = (n + 1)^2 = u_n + 2n + 1$                                                 |
| « $\sum_{k=3}^{20} u_k$ compte 17 termes »                                       | de $p$ à $n$ , il y a $n - p + 1$ termes : ici<br>$20 - 3 + 1 = 18$                                                   |
| « $1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ »                                | il y a $n + 1$ termes : $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ( $q \neq 1$ )                                                        |
| « $(u_n)$ est croissante, donc elle n'est pas majorée »                          | $u_n = 3 - \frac{7}{n+2}$ est croissante et majorée par 3                                                             |
| « $q < 0$ : la suite $(q^n)$ est décroissante »                                  | $(-2)^n$ : 1, -2, 4, -8 ; les signes alternent, elle n'est pas monotone                                               |
| « $0 < q < 1$ , donc $(v_0 q^n)$ est décroissante »                              | cela dépend du signe de $v_0$ : $-4 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est croissante                                        |
| « $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , donc $(u_n)$ est croissante »                   | seulement si $u_n > 0$ : $u_n = -2^n$ a pour quotient 2 et décroît                                                    |
| « la suite commence à $n = 1$ , donc $u_n = u_0 + nr$ »                          | $u_0$ n'existe pas : $u_n = u_1 + (n - 1)r$ (et $v_n = v_1 q^{n-1}$ )                                                 |
| « l'hérédité marche, donc la propriété est vraie pour tout $n$ »                 | il faut l'initialiser : « $B_n > A_n$ » (section 11) est héréditaire dès $n = 6$ , mais n'est vraie qu'à partir de 14 |
| « $u_n$ est croissante », « $(u_n) > 0$ »                                        | « la suite $(u_n)$ est croissante », « $u_n > 0$ pour tout $n$ » : $u_n$ est un nombre, $(u_n)$ une suite             |
| « $f$ est croissante, donc la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante »          | elle est seulement monotone : $(c_n)$ , avec $f(x) = \frac{x^2+4}{5}$ croissante sur $[0, +\infty[$ , décroît         |
| « $f$ est décroissante, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite décroissante » | en général, elle n'est pas monotone : la spirale $(w_n)$                                                              |
| « $(f(n))$ est croissante, donc $f$ est croissante »                             | $x \mapsto \sin(\pi x)$ n'est pas monotone, mais $\sin(n\pi) = 0$ : la suite est constante                            |
| « $a, b, c$ en progression géométrique $\Leftrightarrow b^2 = ac$ »              | il faut $a \neq 0$ : 0, 0, 5 vérifient $b^2 = ac$                                                                     |

|                                                                                |                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| « $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ , donc $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+2}$ » | les termes dépendent de $n$ :<br>$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$ |
| « $\ell$ est le point fixe, donc $u_n = \ell$ pour tout $n$ »                  | seulement si $u_0 = \ell$ ; $\ell$ sert à former la suite auxiliaire $u_n - \ell$                  |

14

## Les astuces des concours

### ★ Astuce de concours : chercher les points fixes d'une homographie

Pour  $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$  ( $c \neq 0$ ,  $ad - bc \neq 0$ ), les points fixes vérifient  $c\ell^2 + (d - a)\ell - b = 0$ . S'il y en a deux,  $\alpha \neq \beta$  :

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \frac{(ad-bc)(u_n-\alpha)}{(cu_n+d)(c\alpha+d)} \text{ et de même pour } \beta, \text{ donc}$$

$$\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \times \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}.$$

La suite  $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$  est géométrique : pour le fil rouge ( $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 3$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -1$ ), la raison est  $\frac{-1+3}{2+3} = \frac{2}{5}$ , comme en section 9. On sait ainsi **d'avance** quelle suite auxiliaire essayer.

### ★ Astuce de concours : deviner la formule, puis la prouver par récurrence

$x_0 = 3$  et  $x_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} x_n$  : 3, 9, 18, 30, 45, soit  $3 \times (1, 3, 6, 10, 15)$  : les nombres triangulaires. On conjecture  $x_n = \frac{3(n+1)(n+2)}{2}$  ; hérédité :  $x_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \times \frac{3(n+1)(n+2)}{2} = \frac{3(n+2)(n+3)}{2}$ . (Autre voie : le produit télescopique  $\frac{x_n}{x_0} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \dots \times \frac{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .)

### ★ Astuce de concours : télescoper en fabriquant une différence

On écrit  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$  (réduire au même dénominateur pour le vérifier) : c'est  $a_k - a_{k+1}$  avec  $a_k = \frac{1}{2k(k+1)}$ . Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{4}.$$

### ★ Astuce de concours : trouver soi-même la suite auxiliaire

$a_0 = 1$  et  $a_{n+1} = 2a_n + n$  : le terme  $n$  empêche d'utiliser la section 8. On cherche  $w_n = a_n + \alpha n + \beta$  géométrique de raison 2 :  $w_{n+1} = 2a_n + n + \alpha(n+1) + \beta$  doit valoir  $2a_n + 2\alpha n + 2\beta$  pour tout  $n$  :  $1 + \alpha = 2\alpha$  et  $\alpha + \beta = 2\beta$ , soit  $\alpha = \beta = 1$ . Donc  $w_n = a_n + n + 1 = 2 \times 2^n$  et  $a_n = 2^{n+1} - n - 1$  (1, 2, 5, 12, 27 ✓).

★ *Astuce de concours : comparer  $u_{n+1} - \ell$  à  $u_n - \ell$*

Sans la formule explicite, on mesure l'écart au point fixe. Fil rouge :

$$2 - h_{n+1} = 2 - \frac{4h_n + 2}{h_n + 3} = \frac{2(2 - h_n)}{h_n + 3} \leq \frac{2}{3} (2 - h_n), \quad \text{car } h_n + 3 \geq 3 \text{ et } 2 - h_n > 0.$$

Par récurrence (avec  $2 - h_0 = 2$ ) :  $0 < 2 - h_n \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; ainsi  $h_{20} > 2 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{20} > 1,999$ . Chaque pas réduit l'écart d'au moins un tiers.

★ *Astuce de concours : encadrer par deux suites géométriques*

Spirale :

$$|w_{n+1} - 2| = \left| \frac{6}{w_n + 1} - 2 \right| = \left| \frac{4 - 2w_n}{w_n + 1} \right| = \frac{2}{w_n + 1} |w_n - 2|.$$

L'intervalle  $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$  est stable par  $g$  ( $g(3) = \frac{3}{2}$ ,  $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{5}$ ) et contient  $w_1 = 3$  ; donc, pour  $n \geq 1$ ,

$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{w_n + 1} \leq \frac{4}{5}$ , et par récurrence (avec  $|w_1 - 2| = 1$ ) :  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq |w_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

★ *Astuce de concours : les termes équidistants*

Dans une suite arithmétique,  $u_p + u_n = u_{p+k} + u_{n-k}$  (les deux membres valent  $2u_0 + (p+n)r$ ). Si  $u_3 + u_{17} = 40$ , alors  $u_0 + u_{20} = 40$ , et  $u_0 + u_1 + \dots + u_{20} = 21 \times \frac{40}{2} = \boxed{420}$ , sans connaître ni  $u_0$  ni  $r$ . De même, dans une suite géométrique,  $v_p v_n = v_{p+k} v_{n-k}$ .

15

## L'essentiel du chapitre en une page

### Définir une suite

Explicite :  $u_n = f(n)$  ; récurrente :  $u_0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  ; double :  $u_0, u_1$  et  $u_{n+2} = g(u_{n+1}, u_n)$ .  
 $(u_n)$  est la suite,  $u_n$  un nombre ;  $u_{n+1}$  (on remplace  $n$  par  $n+1$ )  $\neq u_n + 1$ .

Graphique : nuage des points  $(n, u_n)$  ; pour  $u_{n+1} = f(u_n)$ , « escalier » ou « spirale » entre  $\mathcal{C}_f$  et  $y = x$ .

### Bornes et sens de variation

Majorée :  $\exists M, \forall n, u_n \leq M$  ; non majorée :  $\forall M, \exists n, u_n > M$  ; bornée  $\iff \exists K, \forall n, |u_n| \leq K$ .

Croissante :  $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$  ( $\Rightarrow$  minorée par  $u_0$ ) ; stationnaire : constante à partir d'un rang.

Méthodes : signe de  $u_{n+1} - u_n$  ; si  $u_n > 0$ , comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 ;  $u_n = f(n)$  avec  $f$  monotone ; récurrence.

### Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

$I$  stable ( $f(I) \subset I$ ) et  $u_0 \in I \Rightarrow u_n \in I$  pour tout  $n$  (récurrence).

Point fixe :  $f(\ell) = \ell$  ;  $f(x) \geq x$  sur  $I \Rightarrow$  croissante.  
 $f$  croissante sur  $I \Rightarrow$  monotone (comparer  $u_0$  et  $u_1$ ) ;  $f$  décroissante  $\Rightarrow (u_{2n}), (u_{2n+1})$  monotones de sens contraires.

Encadrer :  $P(n)$  : «  $m \leq u_n \leq M$  », initialisation, hérédité, conclusion.

### Sommes

$\sum_{k=p}^n a_k$  :  $n - p + 1$  termes ;

$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$ .

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  ;  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ;

$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  ;  $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ .

### Suites arithmétiques (+r)

$u_{n+1} = u_n + r$  ;  $u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r$  ; points alignés.

$u_p + \dots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$  (nombre de termes  $\times$  moyenne des extrêmes).

$a, b, c$  consécutifs  $\iff 2b = a + c$  ;

$u_p + u_n = u_{p+k} + u_{n-k}$ .

### Suites géométriques ( $\times q$ )

$v_{n+1} = q v_n$  ;  $v_n = v_0 q^n = v_p q^{n-p}$ .

$1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  ( $q \neq 1$ ) ;  $v_p + \dots + v_n = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ .

$a, b, c$  consécutifs ( $a \neq 0$ )  $\iff b^2 = ac$ .

$v_0 > 0$  : croissante si  $q > 1$ , décroissante si  $0 < q < 1$  ;  $q < 0$  : signes alternés, pas monotone.

Bernoulli :  $q \geq 0 \Rightarrow q^n \geq 1 + n(q-1)$  ;  $q > 1$  : ( $q^n$ ) non majorée.

### Arithmético-géométriques, auxiliaires

$u_{n+1} = au_n + b$  ( $a \neq 1$ ) :  $\ell = \frac{b}{1-a}$ ,  $u_n - \ell = (u_0 - \ell)a^n$ .

$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ , points fixes  $\alpha \neq \beta$  :  $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$  géométrique de raison  $\frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$  ; un seul point fixe  $\alpha$  :  $\frac{1}{u_n - \alpha}$  arithmétique.

$d_n = u_{n+1} - u_n$  :  $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k$ .

### Modéliser

+t % :  $\times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$  ; intérêts simples :

arithmétique ; composés : géométrique ; « on perd  $p$ , on gagne  $N$  » : arithmético-géométrique.

### Pour aller plus loin

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ,  $r^2 = ar + b$  de racines  $r_1 \neq r_2$  :  
 $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ .

Binet :  $F_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\sqrt{5}}$ ,  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

Périodique :  $u_{n+T} = u_n$ ,  $u_n = u_p$  ( $p$  reste de  $n$  par  $T$ ).

*Bon courage ! Un terme après l'autre, comme une récurrence.*

*Maths Olympiad*

# Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)$  : une suite ;  $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  ;  $r, q$  : raisons ;  $E(x)$  : partie entière de  $x$ . Monotonie d'une fonction : par le taux d'accroissement, la composition ou les fonctions de référence.

## 16 Niveau I • Bases

### Exercice 1 Calculer des termes ★

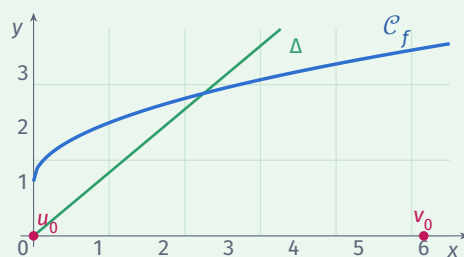
corrigé p. 39

1. Suite explicite.  $u_n = 2^n - 3n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). a) Calculer  $u_0, \dots, u_4$  et  $u_{10}$ . b) Exprimer  $u_{n+1}$ ,  $u_{2n}$  et  $u_n + 1$  ; a-t-on  $u_{n+1} = u_n + 1$  ? c) Vérifier que  $u_{n+1} = 2u_n + 3n - 3$ .
2. Suite récurrente.  $v_0 = 1$ ,  $v_{n+1} = \frac{v_n+2}{v_n+1} = 1 + \frac{1}{v_n+1}$ . Calculer  $v_1, \dots, v_4$  ; montrer que  $v_n$  est défini et que  $1 \leq v_n \leq \frac{3}{2}$ .
3. Récurrence double.  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 2$ ,  $w_{n+2} = w_{n+1}w_n$ . Calculer  $w_2, \dots, w_6$  ; montrer que  $w_n = 2^{F_n}$ , où  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  (Fibonacci).

### Exercice 2 Représentations graphiques ★

corrigé p. 39

1.  $u_n = n^2 - 5n + 7$ ,  $a_n = 7 - 2n$  : placer les points  $(n, u_n)$  et  $(n, a_n)$ ,  $0 \leq n \leq 5$  ; que remarque-t-on ? Le justifier.
2. Ci-contre : la courbe de  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  et  $\Delta : y = x$  ;  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 6$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $v_{n+1} = f(v_n)$ . a) Construire  $u_1, \dots, u_4$  et  $v_1, \dots, v_4$ . b) Conjecturer le sens de variation de chaque suite et sa position par rapport à l'abscisse  $\ell$  du point commun à  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$  ; calculer  $\ell$ .



### Exercice 3 Arithmétique ou géométrie ? ★

corrigé p. 40

1. Nature de chaque suite (premier terme et raison s'il y a lieu) :  
a)  $a_n = 4 - \frac{5n}{2}$  ; b)  $b_n = \frac{3^{n+2}}{2^n}$  ; c)  $c_n = n(n-1)$  ; d)  $d_n = 2^{n+1} - 2^n$  ; e)  $f_0 = 2$ ,  $f_{n+1} = 3 - f_n$  ; f)  $g_0 = 5$ ,  $g_{n+1} = g_n - \sqrt{2}$  ; g)  $h_0 = \frac{1}{3}$ ,  $h_{n+1} = -3h_n$  ; h)  $k_n = 2^n + n$ .
2. Trouver  $x$  et  $y$  tels que  $2, x, y$  soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, et  $x, y, 9$  d'une suite géométrique.

### Exercice 4 Suites arithmétiques ★

corrigé p. 40

- $(u_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique, avec  $u_6 = 7$  et  $u_{20} = 42$ . a) Calculer la raison  $r$ ,  $u_1$ , puis  $u_n$ . b) 2026 et 2027 sont-ils des termes ? c) Calculer  $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$  et  $u_{10} + u_{11} + \dots + u_{30}$ . d) Plus petit  $n$  tel que  $u_1 + u_2 + \dots + u_n > 1000$  ?

**Exercice 5 Suites géométriques ★**

corrigé p. 40

- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, avec  $v_3 = -40$  et  $v_6 = 5$ . a) Calculer sa raison  $q$ ,  $v_0$ , puis  $v_n$ . b) Signe de  $v_n$  ? La suite est-elle monotone ? c) Calculer  $v_0 + v_1 + \dots + v_9$ .
- Calculer  $A = 5 + 10 + 20 + \dots + 5 \times 2^{11}$  et  $B = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^6$ .
- On plie en deux une feuille de 0,1 mm d'épaisseur, puis encore en deux, etc. Épaisseur  $e_n$  après  $n$  pliages ? Combien de pliages pour dépasser 1 m ?

**Exercice 6 Sens de variation ★**

corrigé p. 40

Sens de variation, par la méthode indiquée : a)  $u_n = 3n - 2^n$  (signe de  $u_{n+1} - u_n$ ) ; plus grand terme ?  
 b)  $v_n = \frac{2n+1}{5^n}$  (comparer  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  à 1). c)  $w_n = \frac{n}{n^2+1}$ ,  $n \geq 1$  (taux d'accroissement de  $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$  sur  $[1, +\infty[$ ) ; la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ? d)  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{1+t_n^2}$  ; montrer de plus que  $0 \leq t_n \leq n$ .

**Exercice 7 Majorée, minorée, bornée ★**

corrigé p. 41

- Écrire avec des quantificateurs : «  $(u_n)$  est majorée », «  $(u_n)$  est bornée », «  $(u_n)$  n'est pas majorée ».
- Majorée, minorée, bornée ? Plus grand, plus petit terme ? a)  $u_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$  ; b)  $v_n = \frac{3+(-1)^n}{n+1}$  ; c)  $w_n = n - 2\sqrt{n} = (\sqrt{n} - 1)^2 - 1$  ; d)  $t_n = (-1)^n n$ .

**Exercice 8 Premières sommes ★**

corrigé p. 41

- Écrire avec  $\Sigma$  et calculer :  $A = 7 + 11 + 15 + \dots + 403$  ;  $B = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{2^9}$  ;  $C = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 2^{10}$ .
- Calculer  $\sum_{k=0}^n (3k+2)$  et  $\sum_{k=n}^{2n} k$  (combien de termes ?). 3. *Télescopage*. a) Calculer de deux façons  $\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2)$  ; en déduire  $1 + 2 + \dots + n$ . b) De même, retrouver  $1 + 3 + \dots + 3^n$  avec  $\sum_{k=0}^n (3^{k+1} - 3^k)$ .

17

**Niveau 2 • Bac****Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : suite arithmético-géométrique ★★**

corrigé p. 41

Soit  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Calculer  $u_1, u_2, u_3$  ; la suite est-elle arithmétique ? géométrique ? 2. Montrer par récurrence que  $u_n > 2$  ; en déduire que  $(u_n)$  est strictement décroissante.
- On pose  $v_n = u_n - 2$ . a) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique (raison, premier terme). b) Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$ , en fonction de  $n$ . c) Plus petit entier  $n$  tel que  $u_n - 2 < 10^{-4}$  ?
- Calculer  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  et  $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : une suite récurrente ★★**

corrigé p. 42

Soit  $f(x) = \frac{x(3-x)}{2}$ ,  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Montrer que le taux d'accroissement de  $f$  est  $T(x, y) = \frac{3-x-y}{2}$  ; en déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ . b) Calculer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(1)$  ; résoudre  $f(x) = x$ . c) Tracer la courbe de  $f$  et la droite  $y = x$  ; construire  $u_0, \dots, u_4$ .
- Montrer par récurrence que  $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$  pour tout  $n$ . 3. Montrer que  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2}$  ; sens de variation de  $(u_n)$  ?

4. a) Vérifier que  $1 - u_{n+1} = \frac{(1-u_n)(2-u_n)}{2}$ , puis que  $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$ . b) En déduire que  $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ , puis que  $u_n \geq 0,99$  pour  $n \geq 14$  (on donne  $(4/3)^{14} > 56$ ).

### Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : premier terme et raison ★★

corrigé p. 42

1.  $(u_n)$  est arithmétique, avec  $u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 145$  et  $u_{10} + u_{11} + \dots + u_{19} = 445$ . a) Déterminer  $u_0$ , la raison  $r$  et  $u_n$ . b) 2026 est-il un terme ? Résoudre  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1926$ . c) Montrer que tout  $4^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) est un terme de  $(u_n)$ .
2.  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q$ , avec  $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = 30$  et  $v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 480$ . a) Montrer que  $q^4 = 16$  ; en déduire les deux suites possibles. b) Pour chacune, calculer  $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

### Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : une somme et un produit ★★

corrigé p. 42

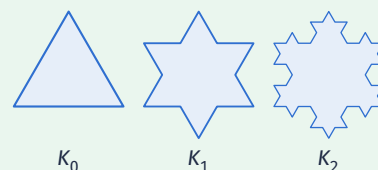
Pour  $n \geq 1$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$  et  $P_n = \left(1 + \frac{2}{1 \times 4}\right) \left(1 + \frac{2}{2 \times 5}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ .

1. Calculer  $S_1, S_2, S_3$  ; montrer que  $(S_n)$  est strictement croissante. 2. Vérifier que  $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$  ; en déduire  $S_n$ , puis que  $\frac{3}{4} \leq S_n < 1$ .
3. Calculer  $P_1, P_2, P_3$  ; montrer que  $(P_n)$  est strictement croissante. 4. Factoriser  $k^2 + 3k + 2$  ; en déduire, par télescopage, que  $P_n = \frac{3(n+1)}{n+3}$ . Montrer que  $\frac{3}{2} \leq P_n < 3$  ; plus petit  $n$  tel que  $P_n > 2,99$  ?

### Exercice 13 Modéliser : le flocon de von Koch ★★

corrigé p. 43

$K_0$  est un triangle équilatéral de côté 1. Pour obtenir  $K_{n+1}$ , on partage chaque côté de  $K_n$  en trois et l'on remplace le segment du milieu par deux côtés d'un triangle équilatéral extérieur.  $K_n$  a  $c_n$  côtés de longueur  $\ell_n$ , un périmètre  $P_n$  et une aire  $A_n$ .



1. Exprimer  $c_{n+1}$  en fonction de  $c_n$  et  $\ell_{n+1}$  en fonction de  $\ell_n$  ; en déduire  $c_n, \ell_n$  et  $P_n$ .
2. Avec l'inégalité de Bernoulli du cours,  $(4/3)^n \geq 1 + n/3$ , montrer que  $(P_n)$  n'est pas majorée. Premier  $n$  tel que  $P_n > 100$  ? (On donne  $(4/3)^{12} \approx 31,6$  et  $(4/3)^{13} \approx 42,1$ .)
3. Montrer que  $A_{n+1} - A_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$  ; en déduire  $A_n$ , puis que  $A_n < \frac{2\sqrt{3}}{5}$ .

### Exercice 14 Deviner, puis démontrer ★★

corrigé p. 43

Calculer les premiers termes, conjecturer une formule, puis la démontrer.

1. *Tours de Hanoi*. On admet que le nombre minimal  $h_n$  de déplacements pour transférer une tour de  $n$  disques vérifie  $h_1 = 1$  et  $h_{n+1} = 2h_n + 1$  : expliquer cette relation.  $h_n$  ?  $h_{10}$  ? Combien de disques pour dépasser un million de déplacements ?
2. *Droites*.  $n$  droites, deux à deux sécantes et jamais trois concourantes, découpent le plan en  $r_n$  régions ( $r_0 = 1$ ). Justifier que  $r_{n+1} = r_n + n + 1$ .  $r_n$  ?  $r_{10}$  ? Combien de droites pour obtenir au moins 2026 régions ?

### Exercice 15 Une suite homographique ★★

corrigé p. 43

Soit  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Montrer par récurrence que  $u_n$  est bien défini et que  $2 \leq u_n < 4$ .
2. Montrer que  $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)(u_n-4)}{u_n}$  ; sens de variation de  $(u_n)$  ?

3. Soit  $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$ . a) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ . b) En déduire que  $u_n = \frac{4^{n+1} + 2}{4^{n+2}}$  et que  $4 - u_n = \frac{6}{4^{n+2}}$ .

**Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★**

corrigé p. 43

Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple. a) Si  $(u_n)$  est arithmétique, alors  $(u_n + u_{n+1})$  l'est aussi. b) Si  $(u_n)$  est géométrique, alors  $(u_n + 1)$  l'est aussi. c) Une suite à la fois arithmétique et géométrique est constante. d) Le produit de deux suites arithmétiques est arithmétique. e) Si  $u_{n+1} - u_n \leq 1$  pour tout  $n$ , alors  $(u_n)$  est majorée. f) Si  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  définit une suite croissante, alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$ . g) Si  $0 < u_n < 1$  pour tout  $n$ , alors  $(u_n^2)$  est décroissante.

18

**Niveau 3 · Approfondissement****Exercice 17 Une spirale sans formule ★★★**

corrigé p. 44

Soit  $f(x) = 2 - \frac{x^2}{4}$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , et  $\ell$  la solution positive de  $f(x) = x$ .

- Calculer  $u_1, \dots, u_4$  et  $\ell$  ; construire  $u_0, \dots, u_6$  avec la courbe de  $f$  et la droite  $y = x$  ;  $(u_n)$  est-elle monotone ? 2. Montrer que  $f$  est décroissante sur  $[0, 2]$  et que  $f\left(\left[1, \frac{7}{4}\right]\right) \subset \left[1, \frac{7}{4}\right]$  ; en déduire que  $1 \leq u_n \leq \frac{7}{4}$  pour  $n \geq 2$ .
- a) Vérifier que  $u_{n+1} - \ell = -\frac{(u_n - \ell)(u_n + \ell)}{4}$  ; en déduire que  $u_{2n} < \ell < u_{2n+1}$ . b) Montrer que  $f \circ f$  est croissante sur  $[0, 2]$  ; en déduire que  $(u_{2n})$  est croissante et  $(u_{2n+1})$  décroissante.
- Montrer que  $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{13}{16}|u_n - \ell|$  ( $n \geq 2$ ), puis que  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{13}{16}\right)^{n-2}$ .

**Exercice 18 Deux suites auxiliaires ★★★**

corrigé p. 44

- Soit  $a_0 = 3$  et  $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ . Montrer que  $b_n = a_n - 3^n$  définit une suite géométrique ; en déduire  $a_n$ .
- Soit  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 3 \times 2^n$ . a) Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . b) Montrer qu'aucune suite  $(u_n - c \cdot 2^n)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , n'est géométrique de raison 2. c) Montrer que  $v_n = \frac{u_n}{2^n}$  définit une suite arithmétique ; en déduire que  $u_n = (3n + 2)2^{n-1}$ . d) Vérifier que  $u_k = w_{k+1} - w_k$ , où  $w_k = (3k - 4)2^{k-1}$  ; en déduire  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

**Exercice 19 Sommes et télescopage ★★★**

corrigé p. 44

- Vérifier que  $\frac{k+2}{k(k+1)2^k} = \frac{1}{k2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)2^k}$  ; calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$ . 2. a) Vérifier que  $k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) = 4k(k+1)(k+2)$  ; en déduire  $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ . b) En développant  $k(k+1)(k+2)$ , et avec  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , montrer que  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ .
- Soit  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ . a) Montrer que  $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$  pour  $k \geq 1$ . b) En déduire que  $2\sqrt{n+1} - 2 < T_n < 2\sqrt{n} - 1$  pour  $n \geq 2$ , puis la partie entière de  $T_{10000}$ .

**Exercice 20 Discuter selon le premier terme ★★★**

corrigé p. 45

Soit  $f(x) = \frac{2x^3 + x}{3}$  et  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- Montrer que  $f$  est impaire et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Factoriser  $f(x) - x$  ; points fixes de  $f$  ?
- Cas  $0 < u_0 < 1$ . a) Montrer que  $0 < u_n < 1$  et que  $(u_n)$  est décroissante. b) Montrer que  $\frac{1}{3}u_n < u_{n+1} \leq q u_n$ , où  $q = \frac{2u_0^2 + 1}{3}$ , puis que  $\left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 \leq u_n \leq q^n u_0$ . c) Cas  $u_0 = \frac{1}{2}$  ?

3. Cas  $u_0 > 1$ . Montrer que  $(u_n)$  est croissante et que  $u_n - 1 \geq \left(\frac{7}{3}\right)^n (u_0 - 1)$  ; est-elle majorée ?  
 4. Cas  $u_0 \in \{-1, 0, 1\}$  ?  $u_0 < 0$  (penser à la suite de premier terme  $-u_0$ ) ? Construire les termes si  $u_0 = 0,9$  ou  $1,05$ .

**Exercice 21 Les nombres 1, 11, 111, ... ★★★**

corrigé p. 45

Soit  $R_0 = 0$  et  $R_{n+1} = 10R_n + 1$  : pour  $n \geq 1$ ,  $R_n$  s'écrit avec  $n$  chiffres 1.

1. Montrer que  $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$  (suite auxiliaire  $R_n + \frac{1}{9}$ ). 2. Calculer  $\sum_{k=1}^n R_k$  ; en déduire  $1 + 11 + 111 + 1111 + 11111$  et  $1 + 11 + \dots + 111\,111\,111$  (neuf termes).  
 3. a) Montrer que  $R_n - n$  est divisible par 9 (écrire  $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$  et  $10^k = 1 + 9R_k$ ) ; en déduire que 3 divise  $R_n$  si et seulement si 3 divise  $n$ . 4. Montrer que  $R_{mn} = R_n (1 + 10^n + \dots + 10^{(m-1)n})$  ; en déduire que, si  $R_N$  est premier,  $N$  est premier.

**Exercice 22 Modéliser : deux villes ★★★**

corrigé p. 45

Deux villes A et B comptent en tout 600 000 habitants. Chaque année, 10 % des habitants de A s'installent en B et 20 % de ceux de B en A ;  $a_n, b_n$  : populations (en milliers) après  $n$  années ;  $a_0 = 500, b_0 = 100$ .

1. Justifier que  $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,2b_n$  et  $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,8b_n$  ; calculer  $a_1, b_1, a_2, b_2$ . 2. Montrer que  $a_n + b_n = 600$ , puis que  $a_{n+1} = 0,7a_n + 120$  ; en déduire  $a_n$  et  $b_n$ , leur sens de variation et un encadrement de chacune.  
 3. Au bout de combien d'années B compte-t-elle au moins 190 000 habitants ? 4. Montrer que le solde migratoire  $0,1a_n - 0,2b_n$  est géométrique.

**Exercice 23 Une suite logistique encadrée ★★★**

corrigé p. 46

Soit  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $n$ , et que  $(u_n)$  est strictement décroissante. 2. a) Montrer que  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n}$ , puis que  $1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 2$ . b) En déduire que  $\frac{1}{2n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$ .  
 3. Exprimer  $\sum_{k=0}^n u_k^2$  et  $(1-u_0)(1-u_1)\dots(1-u_n)$  à l'aide de  $u_{n+1}$  ; majorer ces deux nombres.

**19****Niveau 4 • Concours****Exercice 24 Le défi de la couverture ★★★**

corrigé p. 46

Soit  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer par récurrence que  $u_n$  est bien défini et que  $u_n > 1$  pour tout  $n$  (calculer  $u_{n+1} - 1$ ).  
 2. Soit  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ . Montrer que  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$ . En déduire que  $u_n = 1 + \frac{2}{n+2}$ , le sens de variation de  $(u_n)$ , et que  $u_{2026} = \frac{1015}{1014}$ .  
 3. Généralisation : le point fixe double. Soit  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , avec  $c \neq 0, ad-bc \neq 0$  et  $(d-a)^2 + 4bc = 0$ . a) Montrer que  $f$  a un seul point fixe,  $\alpha = \frac{a-d}{2c}$ , et que  $a+d \neq 0$ . b) Si  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_n \neq \alpha$ , montrer que  $u_{n+1} - \alpha = \frac{a+d}{2} \cdot \frac{u_n - \alpha}{cu_n + d}$ , puis que  $\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{u_n - \alpha} + \frac{2c}{a+d}$ . c) Calculer  $u_n$  si  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$ .

**Exercice 25 Identités de Fibonacci ★★★**

corrigé p. 46

$(F_n)$  est la suite de Fibonacci :  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

1. Montrer que  $F_k^2 = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k$  ( $k \geq 1$ ) ; en déduire que  $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$ . 2. Identité de Cassini. Montrer que  $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$  pour  $n \geq 1$  ; en déduire que  $F_n$  et  $F_{n+1}$  sont premiers entre eux.

3. Soit  $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$  ( $n \geq 1$ ) et  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . a) Montrer que  $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$ ,  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ , puis  $r_{n+1} - \varphi = \frac{\varphi - r_n}{r_n \varphi}$ . b) Calculer  $r_{n+1} - r_n$  (Cassini). Montrer que  $\varphi$  est strictement entre  $r_n$  et  $r_{n+1}$ , puis que  $|r_n - \varphi| < \frac{1}{F_n F_{n+1}}$ . c) Encadrer  $\varphi$  à  $\frac{1}{4895}$  près.

**Exercice 26** Encadrer  $u_n^3$  pas à pas ★★★★★

corrigé p. 47

Soit  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $u_n \geq 1$  et que  $(u_n)$  est croissante ; calculer  $u_1, u_2$ . 2. Montrer que  $u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}$  ; en déduire que  $3n + 1 \leq u_n^3 \leq 7n + 1$ .  
3. Avec  $u_n \geq 2$  ( $n \geq 1$ ), montrer que  $u_n^3 \leq 8 + \frac{217}{64}(n - 1)$  pour  $n \geq 1$  ; en déduire  $E(u_{333})$ .

**Exercice 27** Sommes trigonométriques télescopiques ★★★★★

corrigé p. 47

1. a) Avec  $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$ , exprimer  $4 \times 3^k \sin^3 \frac{x}{3^k}$  comme une différence. b) En déduire que  $\sum_{k=0}^n 3^k \sin^3 \frac{x}{3^k} = \frac{1}{4} (3^{n+1} \sin \frac{x}{3^n} - \sin 3x)$ . c) Contrôler avec  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $n = 1$ .  
2. a) Montrer que  $4 \sin^4 a = 4 \sin^2 a - \sin^2 2a$ . b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n 4^k \sin^4 \frac{x}{2^k} = 4^n \sin^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 x$  ( $n \geq 1$ ). c) Montrer que la suite  $(4^n \sin^2 \frac{x}{2^n})$  est croissante ; cas  $x = \pi$ ,  $n = 3$  ?

**Exercice 28** La méthode de Héron pour  $\sqrt{5}$  ★★★★★

corrigé p. 47

Soit  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{5}{u_n} \right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Montrer que  $u_n > 0$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{(u_n - \sqrt{5})^2}{2u_n}$ , puis que  $u_n > \sqrt{5}$  et  $u_{n+1} \leq u_n$  pour  $n \geq 1$ . 2. Montrer que  $\frac{5}{u_n} < \sqrt{5} < u_n$  ( $n \geq 1$ ) ; encadrer  $\sqrt{5}$  avec  $u_2$ .  
3. On écrit  $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ , avec  $p_0 = 2, q_0 = 1, p_{n+1} = p_n^2 + 5q_n^2, q_{n+1} = 2p_n q_n$ . a) Montrer que  $p_{n+1}^2 - 5q_{n+1}^2 = (p_n^2 - 5q_n^2)^2$  ; en déduire que  $p_n^2 - 5q_n^2 = 1$  pour  $n \geq 1$ . b) Montrer que  $0 < u_n - \sqrt{5} = \frac{1}{q_n^2(u_n + \sqrt{5})} < \frac{1}{2\sqrt{5}q_n^2}$  ( $n \geq 1$ ) ; précision de  $u_3$  ?

**Exercice 29** Suites et partie entière ★★★★★

corrigé p. 48

1. Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ . Combien d'entiers  $k$  vérifient  $E(\sqrt{k}) = j$  ? En déduire que  $\sum_{k=1}^{n^2-1} E(\sqrt{k}) = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ , puis  $\sum_{k=1}^{99} E(\sqrt{k})$ .  
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $u_n = n + E(\sqrt{n} + \frac{1}{2})$ . a) Calculer  $u_1, \dots, u_8$ . b) Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $E(\sqrt{n} + \frac{1}{2}) = m \iff m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m$ . c) En déduire que  $(u_n)$  est strictement croissante et prend une fois et une seule chaque entier  $N \geq 1$  qui n'est pas un carré parfait. d) Quel est le 2026<sup>e</sup> entier  $N \geq 1$  non carré ?

**Exercice 30** Les puissances de  $1 + \sqrt{3}$  ★★★★★

corrigé p. 48

Soit  $\alpha = 1 + \sqrt{3}$ ,  $\beta = 1 - \sqrt{3}$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \alpha^n + \beta^n$ .

1. Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les solutions de  $x^2 = 2x + 2$  ; en déduire que  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n$ , puis que  $a_n$  est un entier. Calculer  $a_0, \dots, a_6$ . 2. Montrer par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $2^p$  divise  $a_{2^p}$  et  $2^{p+1}$  divise  $a_{2^{p+1}}$ .  
3. Comparer  $\beta^n$  à  $-1, 0, 1$  selon la parité de  $n$  ; en déduire  $E(\alpha^n)$ , puis que  $2^{p+1}$  divise  $E((1 + \sqrt{3})^{2^{p+1}})$ . Calculer  $E((1 + \sqrt{3})^5)$  et  $E((1 + \sqrt{3})^6)$ .

# Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

## 20 Modes de définition

Une suite peut être donnée par une **formule explicite**  $u_n = f(n)$ , par une **réurrence**  $u_{n+1} = f(u_n)$  et un premier terme, par une **réurrence double**, ou par une **propriété** (solution d'une équation...). On précise toujours l'indice de départ.

### Exercice 31 Suites explicites ★

corrigé p. 48

1. Pour quels entiers naturels  $n$  le réel  $a_n = \sqrt{n^2 - 5n + 4}$  est-il défini ? Calculer  $a_n$  pour  $n \leq 6$  lorsqu'il existe. Même question (sans calcul de termes) pour  $b_n = \frac{n}{2n-5}$ .
2. On pose  $u_n = \frac{n^2+5}{n+1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Calculer  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$ , puis exprimer  $u_{n+1}$  et  $u_{2n}$  en fonction de  $n$ .
  - b) Résoudre dans  $\mathbb{N}$  les équations  $u_n = 3$ ,  $u_n = 5$  et  $u_n = 4$ .
  - c) Montrer que  $u_n = n - 1 + \frac{6}{n+1}$ , puis déterminer les entiers  $n$  pour lesquels  $u_n$  est un entier.
3. Placer les points  $M_n(n, u_n)$ ,  $0 \leq n \leq 8$ , et la droite  $D : y = x - 1$ . Montrer que les  $M_n$  sont au-dessus de  $D$ , calculer l'écart vertical  $d_n$  entre  $M_n$  et  $D$ , et dire à partir de quel rang  $d_n < 0,1$ .

### Exercice 32 Explicite ou récurrente ? ★

corrigé p. 49

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - x$ .

1. On pose  $u_n = f(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}$ , puis  $u_{n+1} - u_n$ .
2. On pose  $v_0 = 3$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $v_1, v_2, v_3$  ; a-t-on  $(v_n) = (u_n)$  ? Montrer que  $v_n$  est un entier pair pour  $n \geq 1$ .
3. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $(w_n)$  définie par  $w_0 = a$  et  $w_{n+1} = f(w_n)$ . Pour quels réels  $a$  la suite  $(w_n)$  est-elle constante ? constante à partir du rang 1 ( $w_1 = w_2 = \dots$ ) ?
4. On pose  $t_0 = 1$  et  $t_{n+1} = t_n + 4(n+1)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $t_1, \dots, t_4$ , les comparer à  $n^2 + (n+1)^2$ , démontrer la conjecture obtenue et en déduire  $t_{10}$ .

### Exercice 33 Construire les termes ★★

corrigé p. 50

Soit  $f(x) = |x - 3| + 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), de courbe  $\mathcal{C}_f$ , et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Tracer  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  pour  $x \in [0, 4]$ , puis construire  $u_0, u_1, \dots, u_5$  sur l'axe des abscisses. Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Calculer  $u_1, \dots, u_5$ , puis démontrer que  $u_{2k} = \frac{3}{2}$  et  $u_{2k+1} = \frac{5}{2}$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

3. a) Déterminer les points fixes de  $f$  (réels  $x$  tels que  $f(x) = x$ ). b) Montrer que, si  $x \in [1, 3]$ , alors  $f(x) = 4 - x$ ,  $f(x) \in [1, 3]$  et  $f(f(x)) = x$ .  
 c) Soit  $a \in [1, 3]$  et  $(w_n)$  définie par  $w_0 = a$  et  $w_{n+1} = f(w_n)$ . Montrer que  $w_{n+2} = w_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour quelle valeur de  $a$  la suite  $(w_n)$  est-elle constante ?
4. Même relation, avec  $w_0 = 2026$ , puis avec  $w_0 = 2027$  : montrer que  $w_n = w_0 - 2n$  pour  $0 \leq n \leq 1012$ , puis décrire la suite à partir du rang 1012 dans chacun des deux cas.

**Exercice 34 Une suite définie implicitement** ★★

corrigé p. 50

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'équation  $(E_n)$  :  $x^2 + nx - 1 = 0$ .

- Montrer que  $(E_n)$  a deux solutions de signes contraires. On note  $u_n$  la solution positive : on définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  ; calculer  $u_1, u_2, u_4$ .
- Montrer que  $u_n = \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 4}}$ . En déduire que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante et que  $\frac{1}{n+1} < u_n < \frac{1}{n}$ .
- a) Montrer que  $u_n = \frac{1}{n + u_n}$  pour tout  $n \geq 1$ . b) En déduire l'encadrement plus fin  $\frac{n}{n^2 + 1} < u_n < \frac{n+1}{n^2 + n + 1}$ .  
 c) Exprimer  $u_{10}$  à l'aide de  $\sqrt{26}$  ; encadrer  $\sqrt{26}$  par deux fractions distantes de moins de  $10^{-4}$ .

**Exercice 35 Une suite qui revient sur ses pas** ★★★

corrigé p. 51

Soient  $a > 0$  et  $b > 0$ . On définit  $(w_n)$  par  $w_0 = a$ ,  $w_1 = b$  et  $w_{n+2} = \frac{w_{n+1} + 1}{w_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Dans le cas  $a = 1$ ,  $b = 2$ , calculer  $w_2, w_3, \dots, w_7$ .
- Montrer par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $w_n$  et  $w_{n+1}$  sont définis et strictement positifs.
- Exprimer  $w_2, w_3, w_4, w_5$  et  $w_6$  en fonction de  $a$  et  $b$ . En déduire que  $w_{n+5} = w_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Dans le cas  $a = 1$ ,  $b = 2$ , calculer  $w_{2026}$  et la somme  $w_0 + w_1 + \dots + w_{2025}$ .
- Déterminer les couples  $(a, b)$  pour lesquels la suite  $(w_n)$  est constante.

**Exercice 36 Deux suites définies ensemble** ★★★

corrigé p. 51

On définit deux suites par  $u_0 = 2$ ,  $v_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$  et  $v_{n+1} = u_n + 2v_n$ .

- Calculer  $(u_n, v_n)$  pour  $n \leq 3$ . Justifier que  $u_n, v_n$  sont des entiers naturels non nuls et que  $(u_n), (v_n)$  sont strictement croissantes.
- Montrer que  $u_n^2 - 3v_n^2 = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Soit  $x \geq 2$  et  $ABC$  un triangle avec  $BC = 2x - 1$ ,  $CA = 2x$ ,  $AB = 2x + 1$ . a) Montrer (Al-Kashi) que  $\cos \hat{C} = \frac{x-2}{2x-1}$  ; calculer  $\sin \hat{C}$ .  
 b) En déduire que l'aire  $\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}$  vaut  $x\sqrt{3(x^2 - 1)}$  ; calculer la hauteur issue de  $B$ .
- Pour  $x = u_n$ , montrer que l'aire vaut  $3u_n v_n$  et la hauteur  $3v_n$ . En déduire une infinité de triangles à côtés entiers consécutifs et d'aire entière ; donner les trois plus petits ainsi obtenus.

21

**Suites bornées et monotones**

Monotonie : signe de  $u_{n+1} - u_n$ , comparaison de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 (**termes strictement positifs**), variations de  $f$  si  $u_n = f(n)$ , récurrence. Bornes : encadrement direct ou récurrence. Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un rang.

**Exercice 37 Trois méthodes pour la monotonie ★**

corrigé p. 52

1. *Différence.* Soit  $a_n = n + \frac{9}{n}$  pour  $n \geq 1$ . Calculer  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , puis  $a_{n+1} - a_n$ . Étudier la monotonie de  $(a_n)_{n \geq 1}$  et montrer que  $a_n \geq 6$  pour tout  $n \geq 1$ .
2. *Quotient.* Soit  $b_n = \frac{2^n}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Comparer  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$  à 1 et conclure.  $(b_n)$  est-elle strictement croissante ?
3. *Fonction associée.* Soit  $c_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $c_n = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}$ , en déduire le sens de variation de  $(c_n)$ , puis un encadrement de  $c_n$ .

**Exercice 38 Majorer, minorer, encadrer ★**

corrigé p. 52

1. Montrer que la suite de terme général  $u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin n}$  est bornée, en encadrant  $u_n$  par deux constantes.
2. Soit  $v_n = 2 + (-1)^n \frac{n}{n+1}$ . Calculer  $v_0, v_1, v_2, v_3$ . Montrer que  $1 < v_n < 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $(v_n)$  est-elle monotone ?
3. Soit  $w_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ . Montrer que  $(w_n)$  est minorée par 1. Écrire avec des quantificateurs la phrase «  $(w_n)$  n'est pas majorée », puis la démontrer (comparer  $w_n$  et  $n - 1$ ).

**Exercice 39 Une suite qui monte puis descend ★★**

corrigé p. 53

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{n^2+3n}{n^2+1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $u_0, \dots, u_4$ . Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Montrer que  $2 - u_n = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2+1}$ , puis que  $u_n \leq 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Plus grand terme ? A-t-on  $\frac{x^2+3x}{x^2+1} \leq 2$  pour tout réel  $x \geq 0$  ?
3. Montrer que  $u_n > 1$  pour tout  $n \geq 1$ .
4. Montrer que  $u_{n+1} - u_n = -\frac{(3n+4)(n-1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$  et en déduire le sens de variation de  $(u_n)_{n \geq 1}$ .
5. Trouver le plus petit entier  $n_0 \geq 1$  tel que  $u_{n_0} \leq 1,01$  ; montrer que  $1 < u_n \leq 1,01$  pour  $n \geq n_0$ .

**Exercice 40 Sept affirmations à trancher ★★**

corrigé p. 53

Vrai ou faux ? Justifier par une preuve ou un contre-exemple ( $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont définies sur  $\mathbb{N}$ ).

1. Toute suite croissante est minorée.
2. Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont croissantes, alors  $(u_n v_n)$  est croissante. Et si  $u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$  ?
3. Si la suite  $(u_n^2)$  est croissante, alors  $(u_n)$  est croissante.
4. Si  $u_n = f(n)$  pour tout  $n$  et si  $(u_n)$  est croissante, alors  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ .
5. Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont croissantes, alors  $(u_n)$  est croissante.

- Une suite non majorée est croissante à partir d'un certain rang.
- Si  $(u_n)$  est majorée et  $(v_n)$  bornée, alors  $(u_n + v_n)$  est majorée ; et  $(u_n v_n)$  aussi.

**Exercice 41 Monotonie par récurrence ★★★**

corrigé p. 54

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Justifier que  $u_n$  est défini et positif pour tout  $n$ . Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$ .
- Montrer par récurrence que  $u_n \leq u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite est-elle strictement croissante ?
- Montrer que  $u_n \geq \sqrt{n}$  pour tout  $n \geq 3$ . En déduire que  $(u_n)$  n'est pas majorée.
- Montrer que  $u_n \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- En déduire la partie entière de  $u_{2500}$ , puis celle de  $u_{k^2}$  pour tout entier  $k \geq 2$ .

**Exercice 42 Deux suites et une inégalité ★★★**

corrigé p. 54

On utilise l'inégalité de Bernoulli du cours :  $q^m \geq 1 + m(q - 1)$  ( $q \geq 0, m \in \mathbb{N}$ ). Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  et  $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

- Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $v_1, v_2, v_3$  (sous forme de fractions).
- Montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$ , puis que  $(u_n)$  est croissante.
- Montrer que  $\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}$ , puis que  $(v_n)$  est strictement décroissante.
- Montrer que  $u_n < v_m$  pour tous  $n, m \geq 1$ , puis, à l'aide de  $v_5$ , que  $2 \leq u_n < 3$  pour tout  $n \geq 1$ .

**22****Suites arithmétiques**

$(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  si  $u_{n+1} - u_n = r$  pour tout  $n$  ; alors  $u_n = u_p + (n - p)r$ . Une somme de termes consécutifs vaut **(nombre de termes)  $\times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$**  (compter d'abord les termes). Trois termes consécutifs  $a, b, c$  :  $2b = a + c$ .

**Exercice 43 Reconnaître, puis calculer ★**

corrigé p. 55

- Ces suites (définies sur  $\mathbb{N}$ ) sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner premier terme et raison.
  - $a_n = \frac{5-2n}{3}$  ;
  - $b_n = \frac{2n^2+5n-3}{n+3}$  ;
  - $c_n = \sqrt{4n^2 + 4n + 1}$  ;
  - $d_0 = 3$  et  $d_{n+1} = d_n + n$ .
- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique telle que  $u_4 = 11$  et  $u_{15} = -22$ .
  - Déterminer sa raison  $r$ ,  $u_0$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - 100 est-il un terme ? et 0 ?
  - Calculer  $u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$ .
  - Pour quel  $n$  la somme  $S_n = u_0 + \dots + u_n$  est-elle maximale ? Valeur ?

**Exercice 44 Sommes de termes consécutifs ★**

corrigé p. 55

- Calculer  $A = 1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 2026$  et  $B = \sum_{k=10}^{40} (2k - 3)$ .
- Calculer la somme  $C$  des entiers compris entre 1 et 300 qui sont multiples de 3 ou de 5.
- On additionne  $2 + 8 + 14 + 20 + \dots$  : combien de termes faut-il au minimum pour dépasser 2026 ?

**Exercice 45** Trois termes consécutifs ★★

corrigé p. 55

- Déterminer les réels  $x$  pour lesquels  $2x - 1$ ,  $x^2 + 1$  et  $4x + 3$  sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Préciser chaque fois les trois termes et la raison.
- Soient  $a, b, c > 0$ . Montrer que  $a^2, b^2, c^2$  sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si  $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$  le sont ; vérifier avec  $(a, b, c) = (1, 5, 7)$ .
- Les mesures  $A, B, C$  (en radians) des angles d'un triangle sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r \geq 0$ . a) Montrer que  $B = \frac{\pi}{3}$ .  
b) On suppose de plus que  $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Déterminer  $A$  et  $C$ .

**Exercice 46** Problèmes concrets ★★

corrigé p. 56

- Dans un amphithéâtre, la 1<sup>re</sup> rangée a 18 sièges, et chaque rangée 3 sièges de plus que la précédente.  
a) Sièges de la rangée  $n$  ? de la 25<sup>e</sup> ? b) Capacité avec 25 rangées ? c) Nombre de rangées (même règle) pour au moins 2000 places ?
- Deux contrats : A, 6000 DH le premier mois puis 50 DH de plus chaque mois ; B, 6600 DH par mois.  
a) À partir de quel mois le salaire mensuel du contrat A dépasse-t-il celui du contrat B ?  
b) Soient  $A_n, B_n$  les sommes perçues en  $n$  mois avec A et B. Montrer que  $A_n - B_n = 25n(n - 25)$ .  
c) Quel contrat choisir pour une mission de 2 ans ? de 3 ans ? Préciser chaque fois l'écart.

**Exercice 47** Sommes et suites arithmétiques ★★★

corrigé p. 56

- Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3n^2 + 2n$ .  
a) Calculer  $u_1$ , puis  $u_n$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique.  
b) Plus généralement, si  $S_n = an^2 + bn + c$ , montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique  $\iff c = 0$ .
- Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite arithmétique de raison  $r$ , et  $S_n = u_1 + \dots + u_n$ . On suppose  $S_p = S_q$  avec  $p \neq q$ . Montrer que  $S_{p+q} = 0$ . Illustrer avec  $u_1 = 23, r = -2$  (tous les couples  $(p, q)$ ).
- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  dont aucun terme n'est nul. Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n}{u_0 u_n}$  pour  $n \geq 1$  (traiter à part le cas  $r = 0$ ), puis calculer  $\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ .

**Exercice 48** Entiers en progression arithmétique ★★★

corrigé p. 57

- a) Montrer que la somme des  $k$  entiers consécutifs  $a, a + 1, \dots, a + k - 1$  vaut  $k(2a + k - 1)/2$ .  
b) Trouver toutes les écritures de 2026 comme somme d'au moins deux entiers consécutifs  $\geq 1$  (1013 est premier).
- a) Montrer qu'aucune puissance de 2 ( $2^j, j \in \mathbb{N}$ ) n'est somme d'au moins deux entiers consécutifs  $\geq 1$ .  
b) Montrer que tout entier  $N \geq 1$  non puissance de 2 s'écrit ainsi ( $N = 2^s d, d$  impair  $\geq 3$ ).
- a) Montrer que  $(5p + 2)^2$  et  $(5p + 3)^2$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont des termes de  $u_n = 5n + 4$  ; combien a-t-elle de carrés ?  
b) Montrer que la suite  $v_n = 7n + 3$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ne contient aucun carré d'entier.

23

## Suites géométriques

Rappels :  $v_n = v_p q^{n-p}$  ;  $1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  ( $q \neq 1$ ) ; si  $u_{n+1} = au_n + b$  ( $a \neq 1$ ),  $(u_n - \frac{b}{1-a})$  est géométrique.

## Exercice 49 Raison, premier terme et sommes ★

corrigé p. 57

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique,  $u_1 = 6$  et  $u_4 = 48$ . Déterminer sa raison  $q$ ,  $u_0$  et  $u_n$ . Calculer  $u_0 + u_1 + \dots + u_7$  et  $u_5 + u_6 + \dots + u_{12}$  (combien de termes ?). Quel est le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 10^5$  ?
- Sans calculer de termes, donner le signe et le sens de variation des suites  $a_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ,  $b_n = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ,  $c_n = -2 \times 3^n$ ,  $d_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ .

## Exercice 50 Intérêts composés et règle de 72 ★

corrigé p. 58

On place 10 000 DH à intérêts composés au taux annuel de 6 % : chaque année, le capital augmente de 6 %. On note  $C_n$  le capital (en DH) au bout de  $n$  années ( $C_0 = 10\,000$ ).

- Calculer  $C_1$  et  $C_2$ . Justifier que  $(C_n)$  est géométrique et exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ .
- Montrer que les intérêts  $I_n = C_{n+1} - C_n$  de l'année  $n + 1$  forment une suite géométrique et que  $I_0 + \dots + I_{n-1} = C_n - C_0$  ; total des intérêts en 10 ans ?
- En combien d'années le capital double-t-il ? La « règle de 72 » dit qu'au taux de  $t$  %, un capital double en environ  $\frac{72}{t}$  ans : la vérifier pour  $t = 6$  et  $t = 4$  ; montrer qu'elle échoue pour  $t = 8$ .

## Exercice 51 Un lac à dépolluer ★★

corrigé p. 58

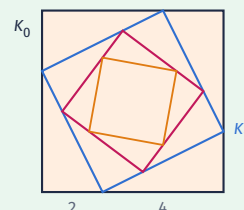
Un lac contient 1200 kg d'un polluant. Chaque année, une filtration élimine 20 % du polluant présent, puis une usine en rejette 60 kg. Soit  $p_n$  la masse de polluant (kg) au bout de  $n$  ans ;  $p_0 = 1200$ .

- Calculer  $p_1$  et  $p_2$ , puis justifier que  $p_{n+1} = 0,8 p_n + 60$ . La suite  $(p_n)$  est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
- Déterminer le réel  $\ell$  tel que  $\ell = 0,8 \ell + 60$ , montrer que  $(p_n - \ell)$  est géométrique ; expression de  $p_n$  ?
- Montrer que  $(p_n)$  est décroissante et que  $p_n > 300$ . Le lac contiendra-t-il un jour moins de 300 kg de polluant ? moins de 400 kg (au bout de combien d'années) ?
- Pour descendre sous 250 kg, la ville réduit le rejet annuel à  $a$  kg ( $0 < a < 240$ ) :  $q_0 = 1200$ ,  $q_{n+1} = 0,8 q_n + a$ . Montrer que  $q_n = 5a + (1200 - 5a) \times 0,8^n$ , que l'objectif n'est jamais atteint si  $a \geq 50$ , et trouver en combien d'années il l'est pour  $a = 40$ .

## Exercice 52 Carrés emboîtés ★★

corrigé p. 58

Le carré  $K_0$  a pour côté  $c_0 = 6$  cm. Sur chaque côté, on place le point situé au tiers, en tournant dans le même sens (figure) : ces quatre points sont les sommets d'un carré  $K_1$  (on l'admet). On recommence avec  $K_1$ , etc. On note  $c_n$  le côté et  $a_n$  l'aire de  $K_n$ .



1. Montrer que  $c_1 = 2\sqrt{5}$  (théorème de Pythagore), puis que  $c_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{3} c_n$ . En déduire que  $(c_n)$  et  $(a_n)$  sont géométriques et exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $a_n < 1$  (en cm<sup>2</sup>). Montrer que  $A_n = a_0 + \dots + a_n < 81$ .
3. Calculer la somme  $L_n$  des périmètres de  $K_0, \dots, K_n$ , et montrer que  $L_n < 18(3 + \sqrt{5})$ .

**Exercice 53** Trois termes en progression géométrique ★★★

corrigé p. 59

1. a) Soit  $a, b, c$  trois termes consécutifs d'une suite géométrique (donc  $b^2 = ac$ ). Montrer que  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$ .  
b) Trouver trois termes consécutifs d'une suite géométrique dont la somme vaut 26 et la somme des carrés 364.
2. Les réels non nuls  $a, b, c$  sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$ , et  $a, 2b, 3c$  trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer  $q$ .
3. Soit  $a > 0, q > 0$  et  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . a) On suppose  $q \geq 1$ . Montrer que  $a, aq, aq^2$  sont les longueurs des côtés d'un triangle si et seulement si  $q^2 - q - 1 < 0$ , c'est-à-dire  $q < \varphi$ . b) Vérifier que  $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$  et traiter le cas  $0 < q < 1$ . c) Pour quelles valeurs de  $q$  ce triangle est-il rectangle ?

**Exercice 54** Rembourser un crédit ★★★

corrigé p. 59

Un couple emprunte 120 000 DH. Chaque mois, la dette augmente de 0,5 %, puis le couple rembourse une mensualité fixe de  $M$  DH. La dette (en DH) au bout de  $n$  mois vérifie  $D_0 = 120\,000$  et  $D_{n+1} = 1,005 D_n - M$ . Calculatrice autorisée.

1. Calculer  $D_1$  et  $D_2$  pour  $M = 2000$ . Trouver  $\ell$  tel que  $\ell = 1,005 \ell - M$  ; montrer que  $(D_n - \ell)$  est géométrique et exprimer  $D_n$  en fonction de  $n$  et  $M$ .
2. Montrer que si  $M \leq 600$ , la dette ne diminue jamais. Que représente 600 ?
3. On prend  $M = 2000$ . Montrer que  $D_n = 400\,000 - 280\,000 \times 1,005^n$ , que  $(D_n)$  décroît, et trouver le nombre de mois nécessaires au remboursement (la dernière mensualité étant plus petite).
4. Quelle mensualité  $M$  rembourse le crédit en 60 mois exactement ( $D_{60} = 0$ ) ? Quel est alors son coût (total versé moins 120 000 DH) ?

24

**Suites récurrentes**

Outils : points fixes, signe de  $f(x) - x$ , intervalle stable, récurrence, suite auxiliaire.

**Exercice 55** Des nombres triangulaires ★

corrigé p. 60

Soit  $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$  et la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Calculer  $u_1, \dots, u_4$ . Vérifier que  $u_{n+1} = 1 + 2 + \dots + u_n$  et que les  $u_n$  sont entiers.
2. Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ , que  $f(x) - x = \frac{x(x-1)}{2}$  ; points fixes de  $f$  ?
3. Soit  $w_0 \in ]0, 1[$  et  $w_{n+1} = f(w_n)$ . Montrer que  $0 < w_n < 1$  et que  $(w_n)$  est strictement décroissante.
4. On suppose  $w_0 > 1$ . Montrer que  $(w_n)$  est croissante, que  $w_{n+1} - w_n \geq \frac{w_0(w_0-1)}{2}$  et que  $(w_n)$  n'est pas majorée. Montrer que  $u_n \geq n + 2$ . Construire les premiers termes de  $(w_n)$  pour  $w_0 = \frac{9}{10}$  et pour  $w_0 = \frac{11}{10}$ .

**Exercice 56 Une racine en escalier ★**

corrigé p. 61

Soit  $f(x) = \sqrt{3x+4}$  ( $x \geq -\frac{4}{3}$ ) et la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Calculer  $u_1, u_2$  ; montrer que  $f$  croît, que  $f(4) = 4$ , et que  $0 \leq u_n < 4$ .
2. Montrer que, pour  $x \in [0, 4]$ ,  $f(x) - x = \frac{(4-x)(x+1)}{\sqrt{3x+4}+x}$  ; en déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .
3. Montrer que  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ , puis que  $4 - \frac{4}{2^n} \leq u_n < 4$  ; en déduire que  $u_n > 3,99$  pour tout  $n \geq 9$ . Construire  $u_0, \dots, u_5$ .

**Exercice 57 L'inverse d'une homographie ★★**

corrigé p. 61

Soit  $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$  ( $x \neq -\frac{1}{2}$ ) et la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{3}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Montrer que  $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2(2x+1)}$ , que  $f$  croît strictement sur  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ , que  $0 < u_n < 1$  et que  $(u_n)$  croît.
2. Soit  $v_n = \frac{1}{u_n}$ . Montrer que  $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}$ , que  $(v_n - 1)$  est géométrique, et en déduire que  $u_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$ .
3. Retrouver que  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1. Quel est le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 0,999$  ? Calculer  $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ .

**Exercice 58 Passer au carré ★★**

corrigé p. 62

On définit  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2$ . Montrer que  $u_n > 1$  pour tout  $n$ , puis que  $(u_n)$  est décroissante (comparer  $u_{n+1}^2$  et  $u_n^2$ ).
2. On pose  $w_n = u_n^2 - 1$ . Montrer que  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$  et en déduire que  $u_n = \sqrt{1 + \frac{8}{4^n}}$ .
3. Montrer que  $0 < u_n - 1 < \frac{4}{4^n}$  (écrire  $u_n - 1 = \frac{w_n}{u_n + 1}$ ), puis que  $u_n - 1 < 10^{-6}$  dès que  $n \geq 11$ . Calculer  $u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ .

**Exercice 59 Une suite qui peut s'arrêter ★★★**

corrigé p. 62

Soit  $f(x) = \sqrt{5x-6}$  sur  $D = [\frac{6}{5}, +\infty[$ . Pour  $a \in D$ , on pose  $u_0 = a$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  ( $u_{n+1}$  existe si  $u_n \in D$ ).

1. Montrer que  $f$  est croissante sur  $D$ , que ses points fixes sont 2 et 3, et que  $f(x) - x = -\frac{(x-2)(x-3)}{f(x)+x}$ .
2. Si  $a = \frac{5}{2}$  : montrer que  $u_n$  existe pour tout  $n$ , que  $2 < u_n < 3$  et que  $(u_n)$  est croissante. Si  $a = 4$  : montrer que  $u_n > 3$  et que  $(u_n)$  est décroissante.
3. Si  $a = \frac{7}{5}$  : calculer  $u_1$  ; que se passe-t-il ?
4. On suppose  $\frac{6}{5} \leq a < 2$  et, par l'absurde, que  $u_n$  existe pour tout  $n$ . a) Montrer que  $u_n \leq a$  et  $u_{n+1} \leq u_n - \frac{2-a}{4}$  pour tout  $n$ . b) En déduire une contradiction. c) Pour quelles valeurs de  $a$  la suite est-elle définie pour tout  $n$  ?

**Exercice 60 La fonction tente ★★★**

corrigé p. 63

Soit  $f(x) = 1 - |2x - 1|$  pour  $x \in [0, 1]$ , et  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $u_0 \in [0, 1]$ .

1. Écrire  $f(x)$  sans valeur absolue sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ ; montrer que  $[0, 1]$  est stable; points fixes de  $f$ ?
2. Soit  $u_0 = \frac{1}{7}$ . Calculer  $u_1, \dots, u_4$ , montrer que  $u_{n+3} = u_n$  pour  $n \geq 1$ , puis calculer  $u_{2026}$  et  $u_1 + u_2 + \dots + u_{2025}$ . Si  $u_0 = \frac{3}{8}$ , montrer que la suite est stationnaire.
3. Soit  $q \geq 2$  entier et  $u_0 = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \{0, \dots, q\}$ . a) Montrer que  $u_n = \frac{m_n}{q}$  avec  $m_n \in \{0, \dots, q\}$ . b) Montrer que  $u_i = u_j$  pour deux indices  $i < j \leq q + 1$ , puis que  $u_{n+j-i} = u_n$  pour  $n \geq i$  (suite périodique à partir d'un rang).
4. Déterminer les réels  $x \in [0, 1]$  tels que  $f(f(x)) = x$  et  $f(x) \neq x$ .

25

**Défis de concours**

Ces problèmes combinent récurrences, suites auxiliaires, sommes télescopiques et inégalités.

**Exercice 61 Les vaches de Narayana ★★★★★**

corrigé p. 64

Le mathématicien indien Narayana (XIV<sup>e</sup> siècle) étudiait un troupeau où chaque vache donne une génisse par an à partir de sa quatrième année; on le modélise par  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+3} = a_{n+2} + a_n$ .

1. Calculer  $a_3, \dots, a_{12}$ . Montrer que les  $a_n$  sont entiers,  $\geq 1$ , et que  $(a_n)_{n \geq 2}$  croît strictement.
2. Montrer que  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_{n+3} - 1$  (écrire  $a_k = a_{k+3} - a_{k+2}$ ).
3. Montrer, par une récurrence initialisée aux rangs 0, 1, 2, que  $\left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \leq a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Comparer les parités de  $(a_0, a_1, a_2)$  et  $(a_7, a_8, a_9)$ ; en déduire que  $a_{n+7}$  et  $a_n$  ont même parité, que  $a_n$  est pair si et seulement si  $n$  a pour reste 3, 5 ou 6 modulo 7, et la parité de  $a_{2026}$  et de  $a_0 + \dots + a_{2023}$ .

**Exercice 62 Des entiers inattendus ★★★★★**

corrigé p. 64

On définit  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 3}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. a) Montrer que la suite est définie, que  $u_n > 0$ , et calculer  $u_2, \dots, u_5$ . b) Vérifier que  $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 3$  et, avec les rangs  $n$  et  $n + 1$ , que  $(u_{n+3} + u_{n+1})/u_{n+2} = (u_{n+2} + u_n)/u_{n+1}$ . c) En déduire que  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$ , puis que tous les  $u_n$  sont entiers.
2. Montrer que le reste de  $u_n$  par 3 vaut toujours 1; en déduire que  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont premiers entre eux.
3. Montrer que  $(u_n)$  est croissante, que  $u_{n+1} \geq 4u_n$  pour  $n \geq 1$ , et que  $u_n \geq 4^{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .
4. Montrer que  $u_{k+2}/u_{k+1} - u_{k+1}/u_k = 3/(u_k u_{k+1})$ , exprimer  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}}$  à l'aide de  $u_{n+2}/u_{n+1}$ , et montrer que  $\frac{5}{4} \leq S_n < \frac{4}{3}$  pour  $n \geq 1$ .

**Exercice 63 Bornée ou pas ? ★★★★★**

corrigé p. 65

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = x^2 + a$ ,  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  : pour quels  $a$  la suite est-elle bornée ?

1. On suppose  $a > \frac{1}{4}$ . Montrer que  $u_{n+1} - u_n \geq a - \frac{1}{4}$ , puis que  $u_n \geq n \left(a - \frac{1}{4}\right)$  ; conclure.
2. On suppose  $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$  et l'on pose  $\ell = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$ . Vérifier que  $\ell^2 + a = \ell$  et  $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$  ; montrer que  $0 \leq u_n \leq \ell$  et que  $(u_n)$  est croissante.
3. On suppose  $-2 \leq a < 0$ . Montrer que  $[a, -a]$  est stable par  $f$  et conclure. Cas  $a = -1$  ?
4. On suppose  $a < -2$  et l'on pose  $b = -a$ . a) Montrer que  $u_2 = b^2 - b > 2$ . b) Soit  $c = u_2$  et  $\delta = c^2 - c - b$ . Montrer que  $\delta > 0$ , puis que  $u_n \geq c + (n - 2)\delta$  pour  $n \geq 2$  ; conclure. Pour quelles valeurs de  $a$  la suite  $(u_n)$  est-elle bornée ?

**Exercice 64 Suites convexes ★★★★★**

corrigé p. 65

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite *convexe* si  $2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+2}$  pour tout  $n$ . On pose  $d_n = u_{n+1} - u_n$ .

1. a) Montrer que  $(u_n)$  est convexe si et seulement si  $(d_n)$  est croissante. b) Montrer que  $\left(\frac{1}{n+1}\right)$  et  $(u_0 q^n)$  ( $u_0 > 0$ ,  $q > 0$ ) sont convexes.
2. Montrer par l'absurde qu'une suite convexe majorée est décroissante (si  $d_m > 0$ , minorer  $u_n$  pour  $n \geq m$ ).
3. Soit  $(u_n)$  convexe avec  $u_0 = 0$ . a) Montrer que  $nu_{n+1} - (n+1)u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (d_n - d_k)$  ( $n \geq 1$ ) et en déduire que  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  est croissante. b) En déduire que  $\left(\frac{q^n - 1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est croissante pour  $q > 0$ .
4. Soit  $(u_n)$  convexe et  $N \geq 1$ . a) Montrer que  $Nu_n \leq (N - n)u_0 + nu_N$  si  $0 \leq n \leq N$  (comparer  $\frac{u_n - u_0}{n}$  et  $\frac{u_N - u_0}{N}$ ). b) En déduire que  $1 + q + \dots + q^N \leq \frac{(N+1)(1+q^N)}{2}$  ( $q > 0$ ).

**Exercice 65 Produits et inégalités ★★★★★**

corrigé p. 66

1. Soit  $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ , de somme  $s_n$ . Montrer par récurrence : a)  $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + s_n$  ; b)  $\prod_{k=1}^n (1 - a_k) \geq 1 - s_n$ . c) En déduire, si  $s_n < 1$  :  $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \leq \frac{1}{1 - s_n}$ .
2. Pour  $n \geq 1$ , soit  $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ . Montrer que  $(P_n)$  est croissante et que, pour  $n \geq 3$  :  $\frac{15}{8} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2^n}\right) \leq P_n < \frac{5}{2}$  ; en déduire que  $2,1 < P_n < 2,5$  pour  $n \geq 3$ .
3. a) Montrer que  $\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$  ( $x \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). b) Avec les *nombres de Fermat*  $F_k = 2^{2^k} + 1$ , montrer que  $F_0 F_1 \dots F_n = F_{n+1} - 2$ , puis que deux d'entre eux sont premiers entre eux.

**Exercice 66 Le problème de Josèphe ★★★★★**

corrigé p. 67

$n \geq 1$  personnes, numérotées de 1 à  $n$ , sont en cercle. En partant de 1 (épargnée), on élimine une personne sur deux (2, 4, etc.) en tournant parmi les restantes ; la dernière porte le numéro  $J(n)$ .

1. a) Calculer  $J(1), \dots, J(8)$ . b) Avec  $2n$  personnes, qui reste après un tour ? En déduire que  $J(2n) = 2J(n) - 1$ . c) Avec  $2n + 1$  personnes ( $n \geq 1$ ), montrer que  $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$ .
2. Montrer par récurrence sur  $m$  que  $J(2^m + l) = 2l + 1$  pour  $0 \leq l < 2^m$ . Calculer  $J(2026)$ . Montrer que  $J(n) \leq n$ , avec égalité si et seulement si  $n + 1$  est une puissance de 2.
3. Calculer  $\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} J(n)$ , puis  $\sum_{n=1}^{2^m-1} J(n)$  et  $\sum_{n=1}^{2026} J(n)$ .

# Partie D • Corrigés

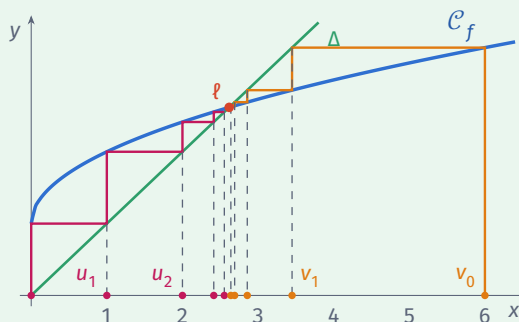
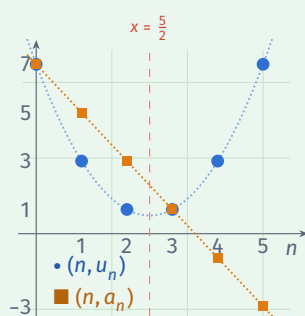
Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

## 26 Corrigés du niveau I

### ■ Corrigé de l'exercice 1

- a)  $u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = -2, u_3 = -1, u_4 = 4, u_{10} = 1024 - 30 = \boxed{994}$ . b) On remplace  $n$  par  $n+1$ , puis par  $2n$  :  $u_{n+1} = 2^{n+1} - 3n - 3$ ,  $u_{2n} = 4^n - 6n$ ,  $u_n + 1 = 2^n - 3n + 1$ . Non :  $u_1 = -1$  alors que  $u_0 + 1 = 2$  (remplacer  $n$  par  $n+1$  n'est pas ajouter 1 au terme). c)  $2u_n + 3n - 3 = 2^{n+1} - 6n + 3n - 3 = 2^{n+1} - 3n - 3 = u_{n+1}$  ✓.
- $v_1 = \frac{3}{2}, v_2 = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}, v_3 = \frac{17/5}{12/5} = \frac{17}{12}, v_4 = \frac{41/12}{29/12} = \frac{41}{29}$ . **Récurrence**,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $v_n$  est défini et  $1 \leq v_n \leq \frac{3}{2}$  ». **Initialisation**.  $v_0 = 1$ . **Hérédité**. si  $1 \leq v_n \leq \frac{3}{2}$ , alors  $v_{n+1} \geq 2 > 0$  :  $v_{n+1}$  est défini, et  $0 < \frac{1}{v_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$ , d'où  $1 < v_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ . **Conclusion**.  $\boxed{1 \leq v_n \leq \frac{3}{2}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $w_2 = 2, w_3 = 4, w_4 = 8, w_5 = 32, w_6 = 256$  : des puissances de 2, d'exposants 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8. **Récurrence double**,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $w_n = 2^{F_n}$  et  $w_{n+1} = 2^{F_{n+1}}$  ». **Initialisation**.  $w_0 = 1 = 2^{F_0}, w_1 = 2 = 2^{F_1}$ . **Hérédité**. si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie,  $w_{n+2} = w_{n+1}w_n = 2^{F_{n+1}+F_n} = 2^{F_{n+2}}$  :  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. **Conclusion**.  $\boxed{w_n = 2^{F_n}}$  (par exemple  $w_{10} = 2^{55}$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 2



- $(u_n)$  : 7, 3, 1, 1, 3, 7 ;  $(a_n)$  : 7, 5, 3, 1, -1, -3 (figure de gauche). **Trois remarques**. • Les points  $(n, a_n)$  sont **alignés** sur la droite  $y = 7 - 2x$  :  $a_{n+1} - a_n = -2$ , la suite  $(a_n)$  est arithmétique de raison -2. • Les points  $(n, u_n)$  sont **symétriques** par rapport à la droite  $x = \frac{5}{2}$  :  $u_{5-n} = (5-n)^2 - 5(5-n) + 7 = n^2 - 5n + 7 = u_n$ . •  $u_{n+1} - u_n = 2n - 4$  est négatif pour  $n \leq 1$ , nul pour  $n = 2$ , positif pour  $n \geq 3$  :  $(u_n)$  décroît jusqu'au rang 2, puis croît ; plus petit terme  $\boxed{u_2 = u_3 = 1}$ . Les points sont isolés : on ne les relie pas.
- a) Figure de droite : de  $u_n$  sur l'axe, on monte (ou on descend) verticalement jusqu'à  $\mathcal{C}_f$ , puis on rejoint horizontalement  $\Delta$  et on revient sur l'axe : on y lit  $u_{n+1} = f(u_n)$ . b) **Conjecture** :  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante, et  $u_n < \ell < v_n$ . **Calcul de  $\ell$**  :  $f(x) = x \iff \sqrt{x} + 1 = x$ .

Avec  $t = \sqrt{x} \geq 0 : t + 1 = t^2 \iff t^2 - t - 1 = 0 \iff t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (l'autre racine est négative). Donc  $\ell = t^2 = t + 1 = \boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 2,62$ . (Pour mémoire :  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 1 + \sqrt{2}$ .)

### ■ Corrigé de l'exercice 3

- Arithmétique :  $u_{n+1} - u_n$  constant ; géométrique :  $u_{n+1} = q u_n$  ; pour réfuter, trois termes suffisent.**  
 a)  $a_{n+1} - a_n = -\frac{5}{2}$  : **arithmétique**,  $a_0 = 4, r = -\frac{5}{2}$ . b)  $b_n = 9\left(\frac{3}{2}\right)^n$  : **géométrique**,  $b_0 = 9, q = \frac{3}{2}$ . c)  $c_0 = c_1 = 0, c_2 = 2 : c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$ , et une suite géométrique de premier terme nul est nulle : **ni l'une ni l'autre**. d)  $d_n = 2^n(2-1) = 2^n$  : **géométrique**,  $d_0 = 1, q = 2$ . e)  $2, 1, 2 : -1 \neq 1$  et  $\frac{1}{2} \neq 2$  : **ni l'une ni l'autre**. f) **Arithmétique**,  $g_0 = 5, r = -\sqrt{2}$ . g) **Géométrique**,  $h_0 = \frac{1}{3}, q = -3$ . h)  $1, 3, 6 : 2 \neq 3$  et  $3 \neq 2$  : **ni l'une ni l'autre**.
- Caractérisations :  $a, b, c$  arithmétiques  $\iff 2b = a + c$  ; géométriques  $\iff b^2 = ac$ .** Il faut  $2x = 2 + y$  et  $y^2 = 9x = \frac{9}{2}(2 + y)$ , soit  $2y^2 - 9y - 18 = 0 : \Delta = 225, y = 6$  ou  $y = -\frac{3}{2}$ .  
 $(x, y) = (4, 6)$  ou  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ . Contrôle :  $2, 4, 6$  et  $4, 6, 9$  ( $q = \frac{3}{2}$ ) ;  $2, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$  ( $r = -\frac{7}{4}$ ) et  $\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, 9$  ( $q = -6$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 4

- Terme général**  $u_n = u_p + (n-p)r : u_{20} - u_6 = 14r = 35$ , donc  $r = \frac{5}{2}$ ,  $u_1 = u_6 - 5r = -\frac{11}{2}$  et  $u_n = \frac{5n-16}{2}$ .
- $u_n = 2026 \iff 5n = 4068$  : impossible (4068 n'est pas multiple de 5) ;  $u_n = 2027 \iff 5n = 4070 \iff n = 814 : 2027 = u_{814}$ . c) **Somme = (nombre de termes)  $\times$  (premier + dernier)/2** :  
 $u_1 + \dots + u_{20} = \frac{20(-\frac{11}{2} + 42)}{2} = \boxed{365}$  ;  $u_{10} + \dots + u_{30}$  compte  $30 - 10 + 1 = 21$  termes :  $\frac{21(17+67)}{2} = \boxed{882}$ . d)  
 $S_n = u_1 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(5n-27)}{4}$ , et  $S_n > 1000 \iff 5n^2 - 27n - 4000 > 0$ . Le trinôme a pour racines  $\frac{27 \pm \sqrt{80729}}{10}$ , soit environ  $-25,7$  et  $31,1$  : pour  $n \in \mathbb{N}^*, S_n > 1000 \iff n \geq 32$  (contrôle :  $S_{31} = 992, S_{32} = 1064$ ). Réponse :  $\boxed{n = 32}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 5

- Terme général**  $v_n = v_p q^{n-p} : v_6 = v_3 q^3$ , donc  $q^3 = -\frac{1}{8}$  et  $q = -\frac{1}{2}$  ;  $v_0 = \frac{v_3}{q^3} = 320$ ,  $v_n = 320\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ .
  - $v_n > 0$  si  $n$  est pair,  $v_n < 0$  si  $n$  est impair :  $v_0 = 320 > v_1 = -160 < v_2 = 80$ , la suite n'est **pas monotone** ( $q < 0$ ). c)  $\sum_{k=0}^9 v_k = v_0 \frac{1-q^{10}}{1-q} = 320 \times \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{1705}{8}}$ .
- $A = 5(1 + 2 + \dots + 2^{11}) = 5(2^{12} - 1) = \boxed{20475}$  (12 termes).  $B = \frac{1-(\frac{2}{3})^7}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1 - \frac{128}{2187}\right) = \boxed{\frac{2059}{729}}$ .
- Chaque pliage double l'épaisseur :  $(e_n)$  est géométrique de raison 2,  $e_n = 0,1 \times 2^n$  (en mm), croissante.  $e_n > 1000 \iff 2^n > 10^4$  ; or  $2^{13} = 8192$  et  $2^{14} = 16384$  : il faut  $\boxed{14}$  pliages.

### ■ Corrigé de l'exercice 6

- $u_{n+1} - u_n = 3 - 2^n$  : positif pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , négatif pour  $n \geq 2$  ( $2^n \geq 4$ ). Donc  $u_0 < u_1 < u_2$ , puis  $(u_n)_{n \geq 2}$  est strictement décroissante : plus grand terme  $u_2 = 2$  (valeurs  $-1, 1, 2, 1, -4$ ). b)  $v_n > 0$  et  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+3}{5(2n+1)} < 1$ , car  $(2n+3) - (10n+5) = -8n-2 < 0 : (v_n)$  est **strictement décroissante**. c) Pour  $x \neq y$  dans  $[1, +\infty[ : T(x, y) = \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)} < 0$ , car  $xy > 1$ .  $f$  est strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ , donc  $(w_n)_{n \geq 1} = (f(n))$  aussi. Mais  $w_0 = 0 < w_1 = \frac{1}{2} > w_2 = \frac{2}{5} : (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **n'est pas monotone**. d)  $t_{n+1} - t_n = \frac{1}{1+t_n^2} > 0 : (t_n)$  est **strictement croissante**. **Récurrence** :  $t_0 = 0$  ; si  $0 \leq t_n \leq n$ , alors  $0 < \frac{1}{1+t_n^2} \leq 1$ , d'où  $0 \leq t_n < t_{n+1} \leq t_n + 1 \leq n + 1 : \boxed{0 \leq t_n \leq n}$  pour tout  $n$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 7

- Majorée :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ . Bornée :  $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$  (ou  $\exists K, \forall n, |u_n| \leq K$ ). Non majorée :  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$ .
- a)  $u_n = 1 + \frac{1}{n^2+1}$  et  $0 < \frac{1}{n^2+1} \leq 1$  :  $1 < u_n \leq 2$ , **bornée** ; plus grand terme  $u_0 = 2$ .  $(u_n)$  est strictement décroissante ( $n^2 + 1$  croît), donc  $u_{n+1} < u_n$  : **pas de plus petit terme**. b)  $2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4$ , donc  $0 < v_n \leq 4$  : **bornée**, plus grand terme  $v_0 = 4$ . Pas de plus petit terme :  $\frac{2}{n+1} \leq v_n \leq \frac{4}{n+1}$ , et pour tout  $p$ ,  $v_{2p+2} \leq \frac{4}{2p+3} < \frac{2}{p+1} \leq v_p$ . c)  $w_n \geq -1 = w_1$  : **minorée**, plus petit terme  $-1$ . Pour  $n \geq 16$ ,  $\sqrt{n} \geq 4$ , d'où  $\sqrt{n} \leq \frac{n}{4}$  et  $w_n \geq \frac{n}{2}$  : si  $n > \max(16, 2M)$ ,  $w_n > M$ . **Non majorée**, donc non bornée. d)  $t_{2p} = 2p$  et  $t_{2p+1} = -(2p+1)$  : pour tout réel  $M$ ,  $t_{2p} > M$  et  $t_{2p+1} < -M$  dès que  $2p > |M|$  ;  $(t_n)$  n'est ni majorée, ni minorée.

## ■ Corrigé de l'exercice 8

- $A = \sum_{k=0}^{99} (7 + 4k)$  :  $403 = 7 + 4 \times 99$ , il y a 100 termes et  $A = \frac{100(7+403)}{2} = \boxed{20\,500}$ .  $B = \sum_{k=0}^9 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3069}{512}}$ .  $C = \sum_{k=0}^{10} (-2)^k = \frac{1 - (-2)^{11}}{1 - (-2)} = \frac{2049}{3} = \boxed{683}$ .
- $\sum_{k=0}^n (3k+2)$  :  $n+1$  termes d'une suite arithmétique,  $\frac{(n+1)(2+3n+2)}{2} = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$ .  $\sum_{k=n}^{2n} k$  :  $2n - n + 1 = n + 1$  termes,  $\frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$ .
- Dans une somme télescopique, seuls restent le dernier et le premier terme.** a) La somme vaut  $(n+1)^2 - 1^2 = n^2 + 2n$  ; d'autre part  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ , donc la somme vaut  $2 \sum_{k=1}^n k + n$ . Ainsi  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . b)  $\sum_{k=0}^n (3^{k+1} - 3^k) = 3^{n+1} - 1$  et  $3^{k+1} - 3^k = 2 \times 3^k$  :  $1 + 3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ .

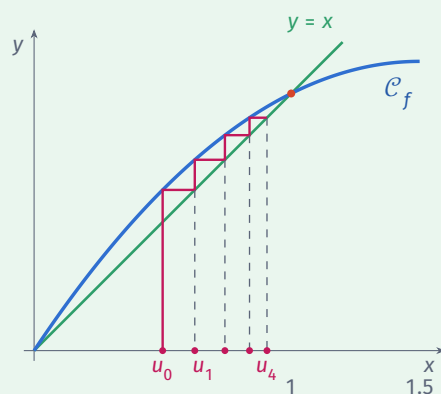
## 27 Corrigés du niveau 2

## ■ Corrigé de l'exercice 9

- $u_1 = 3, u_2 = \frac{7}{3}, u_3 = \frac{19}{9}$ .  $u_1 - u_0 = -2 \neq u_2 - u_1 = -\frac{2}{3}$  : pas arithmétique ;  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{5} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{9}$  : pas géométrique.
- $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n > 2$  ». **Initialisation.**  $u_0 = 5 > 2$ . **Hérédité.** si  $u_n > 2$ , alors  $u_n + 4 > 6$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3} > 2$ . **Conclusion.**  $u_n > 2$  pour tout  $n$ . Puis  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+4-3u_n}{3} = -\frac{2(u_n-2)}{3} < 0$  :  $(u_n)$  est **strictement décroissante**.
- a) On retranche le point fixe  $\ell = 2$  ( $\ell = \frac{\ell+4}{3}$ ) :  $v_{n+1} = \frac{u_n+4}{3} - 2 = \frac{u_n-2}{3} = \frac{1}{3}v_n$  :  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ , de premier terme  $v_0 = 3$ . b)  $v_n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{1-n}$  et  $u_n = 2 + 3^{1-n}$ . c)  $u_n - 2 < 10^{-4} \iff 3^{n-1} > 10^4$  ; or  $3^8 = 6561$  et  $3^9 = 19\,683$  :  $n-1 \geq 9$ ,  $n = 10$ .
- $S_n = \sum_{k=0}^n (2 + v_k) = 2(n+1) + 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 2(n+1) + \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ .  $P_n = \prod_{k=0}^n 3^{1-k} = 3^{\sum_{k=0}^n (1-k)} = 3^{(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}} = 3^{\frac{(n+1)(2-n)}{2}}$  (contrôle :  $P_2 = 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 1$ ).

## ■ Corrigé de l'exercice 10

1. a)  $f(x) - f(y) = \frac{3(x-y) - (x^2 - y^2)}{2} = \frac{(x-y)(3-x-y)}{2}$ , d'où  $T(x, y) = \frac{3-x-y}{2}$ . Si  $x \neq y$  sont dans  $[0, \frac{3}{2}]$ , alors  $x+y < 3$  et  $T(x, y) > 0$  :  $f$  est **strictement croissante** sur  $[0, \frac{3}{2}]$ . b)  $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$ ,  $f(1) = 1$  ;  $f(x) = x \iff x(3-x) = 2x \iff x(1-x) = 0 \iff x \in \{0, 1\}$ . c) Figure ci-contre (escalier qui monte vers le point (1, 1)).



2.  $\mathcal{P}(n)$  : «  $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$  ». **Initialisation.**  $u_0 = \frac{1}{2}$ . **Hérédité.** si  $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ ,  $f$  étant strictement croissante sur  $[\frac{1}{2}, 1]$  :  $f(\frac{1}{2}) \leq f(u_n) < f(1)$ , soit  $\frac{5}{8} \leq u_{n+1} < 1$ . **Conclusion.**  $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$  pour tout  $n$ .

3.  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - u_n^2}{2} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2} > 0$ , car  $0 < u_n < 1$  :  $(u_n)$  est **strictement croissante**.  
 4. a)  $1 - u_{n+1} = \frac{2-3u_n+u_n^2}{2} = \frac{(1-u_n)(2-u_n)}{2}$ . Comme  $u_n \geq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{2-u_n}{2} \leq \frac{3}{4}$ , et  $1 - u_n > 0$  :  $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$ .  
 b) **Récurrence** :  $1 - u_0 = \frac{1}{2}$  ; si  $1 - u_n \leq \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^n$ , alors  $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^n = \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^{n+1}$ . Avec 2. :  $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^n$ . Pour  $n \geq 14$  :  $(\frac{3}{4})^n \leq (\frac{3}{4})^{14} < \frac{1}{56}$ , d'où  $1 - u_n < \frac{1}{112} < 0,01$  et  $u_n > 0,99$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 11

1. a)  $\sum_{k=0}^9 u_k = 10u_0 + r(0+1+\dots+9) = 10u_0 + 45r = 145$  et  $\sum_{k=10}^{19} u_k = 10u_0 + r(10+\dots+19) = 10u_0 + 145r = 445$ . Par différence,  $100r = 300$  :  $r = 3$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_n = 3n + 1$ . b)  $2026 = 3 \times 675 + 1 = u_{675}$  : oui.  
 $u_0 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(1+3n+1)}{2}$ , et  $(n+1)(3n+2) = 3852 \iff 3n^2 + 5n - 3850 = 0$  :  $\Delta = 46225 = 215^2$ ,  $n = 35$  (l'autre racine est négative). c)  $4^k - 1 = (4-1)(1+4+\dots+4^{k-1}) = 3m$ , avec  $m \in \mathbb{N}$  :  $4^k = 3m + 1 = u_m$ . (Ainsi  $1 = u_0$ ,  $4 = u_1$ ,  $16 = u_5$ ,  $64 = u_{21}$ .)  
 2. a) **On factorise**  $q^4$  :  $v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = q^4(v_0 + v_1 + v_2 + v_3)$ , donc  $480 = 30q^4$ ,  $q^4 = 16$ ,  $q^2 = 4$  et  $q = \pm 2$ . Si  $q = 2$  :  $v_0(1+2+4+8) = 30$ ,  $v_0 = 2$ ,  $v_n = 2^{n+1}$ . Si  $q = -2$  :  $v_0(1-2+4-8) = 30$ ,  $v_0 = -6$ ,  $v_n = -6(-2)^n$ .  
 b)  $q = 2$  :  $\sum_{k=0}^n v_k = 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2$  ;  $q = -2$  :  $\sum_{k=0}^n v_k = -6 \times \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} = -2 - (-2)^{n+2}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 12

1.  $S_1 = \frac{3}{4}$ ,  $S_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{8}{9}$ ,  $S_3 = \frac{8}{9} + \frac{7}{144} = \frac{15}{16}$ .  $S_{n+1} - S_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0$  :  $(S_n)$  est strictement croissante.  
 2.  $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$  ✓. **Télescopage** :  $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$  (on retrouve  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{8}{9}$ ,  $\frac{15}{16}$ ). Comme  $0 < \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$  :  $\frac{3}{4} \leq S_n < 1$ .  
 3.  $P_1 = \frac{3}{2}$ ,  $P_2 = \frac{3}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$ ,  $P_3 = \frac{9}{5} \times \frac{10}{9} = 2$ .  $P_n > 0$  et  $\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \frac{2}{(n+1)(n+4)} > 1$  :  $(P_n)$  est strictement croissante.  
 4.  $k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$ , donc  $1 + \frac{2}{k(k+3)} = \frac{k^2+3k+2}{k(k+3)} = \frac{k+1}{k} \times \frac{k+2}{k+3}$ . **Produits télescopiques** :  $\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n} = n+1$  et  $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{n+2}{n+3} = \frac{3}{n+3}$  :  $P_n = \frac{3(n+1)}{n+3} = 3 - \frac{6}{n+3}$ . Comme  $n+3 \geq 4$ ,  $0 < \frac{6}{n+3} \leq \frac{3}{2}$  :  $\frac{3}{2} \leq P_n < 3$ . Enfin  $P_n > 2,99 \iff \frac{6}{n+3} < \frac{1}{100} \iff n+3 > 600$  :  $n = 598$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 13

- Chaque côté est remplacé par 4 côtés trois fois plus courts :  $c_{n+1} = 4c_n$  et  $\ell_{n+1} = \frac{\ell_n}{3}$ . Suites géométriques :  $c_n = 3 \times 4^n$ ,  $\ell_n = \frac{1}{3^n}$ ,  $P_n = c_n \ell_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n$ .
- $P_n \geq 3 \left(1 + \frac{n}{3}\right) = 3 + n$  : pour tout réel  $M$ ,  $P_n > M$  dès que  $n > M$  ;  $(P_n)$  n'est pas majorée.  
 $P_n > 100 \iff \left(\frac{4}{3}\right)^n > \frac{100}{3} \approx 33,3$  ; or  $\left(\frac{4}{3}\right)^{12} \approx 31,6 < 33,3 < 42,1 \approx \left(\frac{4}{3}\right)^{13}$  et  $(P_n)$  est croissante : le premier rang est  $n = 13$ .
- Pour passer de  $K_n$  à  $K_{n+1}$ , on ajoute  $c_n$  triangles équilatéraux de côté  $\frac{\ell_n}{3} = \frac{1}{3^{n+1}}$ , d'aire  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^{n+1}}$  chacun :  $A_{n+1} - A_n = 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4 \times 9^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ . Par télescopage,  $A_n = A_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}}$ , soit  $A_n = \frac{\sqrt{3}}{20} \left(8 - 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) < \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ . L'aire reste inférieure aux  $\frac{8}{5}$  de l'aire de  $K_0$ , alors que le périmètre n'est pas majoré.

## ■ Corrigé de l'exercice 14

- Pour déplacer  $n+1$  disques, il faut à un moment déplacer le plus grand : les  $n$  autres sont alors empilés sur la troisième tige ( $h_n$  déplacements au moins), puis on déplace le grand disque (1), puis on remet les  $n$  disques sur lui ( $h_n$ ) :  $h_{n+1} = 2h_n + 1$ .  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 3$ ,  $h_3 = 7$ ,  $h_4 = 15$  : on conjecture  $h_n = 2^n - 1$ . **Preuve** :  $h_{n+1} + 1 = 2(h_n + 1)$ , la suite  $(h_n + 1)$  est géométrique de raison 2, de premier terme  $h_1 + 1 = 2$  :  $h_n = 2^n - 1$ ,  $h_{10} = 1023$ . Enfin  $2^{19} = 524\,288$  et  $2^{20} = 1\,048\,576$  : il faut 20 disques.
- La  $(n+1)^{\text{e}}$  droite coupe les  $n$  autres en  $n$  points distincts, qui la partagent en  $n+1$  morceaux ( $n-1$  segments et 2 demi-droites) ; chaque morceau coupe une région en deux :  $r_{n+1} = r_n + n + 1$ .  
 $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 4$ ,  $r_3 = 7$ ,  $r_4 = 11$ . **Télescopage** :  $r_n = r_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ , soit  $r_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ ,  
 $r_{10} = 56$ .  $r_n \geq 2026 \iff n(n+1) \geq 4050$  ; or  $63 \times 64 = 4032$  et  $64 \times 65 = 4160$  : 64 droites.

## ■ Corrigé de l'exercice 15

- $u_1 = 3$ ,  $u_2 = \frac{11}{3}$ ,  $u_3 = \frac{43}{11}$ .  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est défini et  $2 \leq u_n < 4$  ». **Initialisation**.  $u_0 = 2$ . **Hérédité**. si  $2 \leq u_n < 4$ , alors  $u_n \neq 0$  et  $u_{n+1}$  est défini ;  $x \mapsto 5 - \frac{4}{x}$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc  $5 - \frac{4}{2} \leq u_{n+1} < 5 - \frac{4}{4}$ , soit  $3 \leq u_{n+1} < 4$ . **Conclusion**.  $2 \leq u_n < 4$  pour tout  $n$ .
- $u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n} = -\frac{(u_n-1)(u_n-4)}{u_n}$  ; pour  $2 \leq u_n < 4$  :  $u_n - 1 > 0$ ,  $u_n - 4 < 0$ ,  $u_n > 0$ , donc  $u_{n+1} - u_n > 0$  :  $(u_n)$  est strictement croissante.
- a)  $u_n \neq 1$ , donc  $v_n$  existe, et  $v_{n+1} = \frac{1 - \frac{4}{u_n}}{4 - \frac{4}{u_n}} = \frac{u_n - 4}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4} v_n$  : géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ ,  $v_0 = -2$ . b)  
 $v_n = -\frac{2}{4^n}$  ; de  $v_n(u_n - 1) = u_n - 4$  on tire  $u_n = \frac{4 - v_n}{1 - v_n} = \frac{4 + 2 \times 4^{-n}}{1 + 2 \times 4^{-n}} = \frac{4^{n+1} + 2}{4^{n+2}}$ , et  $4 - u_n = \frac{4^{n+1} + 8 - 4^{n+1} - 2}{4^{n+2}} = \frac{6}{4^{n+2}}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 16

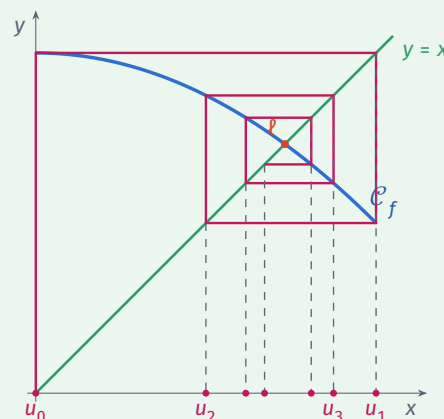
- a) **Vrai** :  $u_n + u_{n+1} = 2u_0 + (2n+1)r$ , suite arithmétique de raison  $2r$ . b) **Faux** :  $u_n = 2^n$  donne 2, 3, 5, et  $\frac{3}{2} \neq \frac{5}{3}$ . c) **Vrai** : si  $u_0 = 0$ , alors  $r = u_1 = q u_0 = 0$ . Sinon,  $r = (q-1)u_0$  et  $2r = u_2 - u_0 = (q^2 - 1)u_0$ , d'où  $(q^2 - 1 - 2q + 2)u_0 = (q-1)^2 u_0 = 0$  :  $q = 1$  et  $r = 0$ . d) **Faux** :  $n \times n = n^2$  donne 0, 1, 4, et  $1 \neq 3$ . e) **Faux** :  $u_n = n$  vérifie  $u_{n+1} - u_n = 1$  mais n'est pas majorée. f) **Vrai** : pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1} \geq 0$  ( $u_0 = S_0$  peut être négatif). g) **Faux** :  $u_n = \frac{n+1}{n+2} \in ]0, 1[$  est croissante et positive, donc  $(u_n^2)$  est croissante ( $u_0^2 = \frac{1}{4} < u_1^2 = \frac{4}{9}$ ).

## 28 Corrigés du niveau 3

### ■ Corrigé de l'exercice 17

1.  $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = \frac{7}{4}, u_4 = 2 - \frac{49}{64} = \frac{79}{64}$ .  $f(x) = x \iff x^2 + 4x - 8 = 0 \iff x = -2 \pm 2\sqrt{3}$  :  $\ell = 2\sqrt{3} - 2 \approx 1,46$ . La figure est une spirale :  $u_0 < u_1 > u_2$ , la suite **n'est pas monotone**.

2.  $x \mapsto x^2$  est croissante sur  $[0, 2]$ , donc  $f$  est **décroissante** sur  $[0, 2]$ . Si  $1 \leq x \leq \frac{7}{4}$  :  $f\left(\frac{7}{4}\right) \leq f(x) \leq f(1)$ , soit  $\frac{79}{64} \leq f(x) \leq \frac{7}{4}$  :  $f\left(\left[1, \frac{7}{4}\right]\right) \subset \left[\frac{79}{64}, \frac{7}{4}\right]$ . Comme  $u_2 = 1$ , une récurrence à partir du rang 2 donne  $1 \leq u_n \leq \frac{7}{4}$  pour  $n \geq 2$  (et  $0 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$ , car  $f([0, 2]) = [1, 2]$ ).



3. a)  $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = \frac{\ell^2 - u_n^2}{4} = -\frac{(u_n - \ell)(u_n + \ell)}{4}$ . Comme  $u_n + \ell > 0$ ,  $u_{n+1} - \ell$  et  $u_n - \ell$  sont de **signes contraires** (et non nuls :  $u_n$  est rationnel,  $\ell$  ne l'est pas). Avec  $u_0 < \ell$ , une récurrence donne  $u_{2n} < \ell < u_{2n+1}$ . b) Si  $0 \leq x \leq y \leq 2$ , alors  $f(x) \geq f(y)$ , nombres de  $[1, 2] \subset [0, 2]$ , puis  $f(f(x)) \leq f(f(y))$  :  $f \circ f$  est croissante sur  $[0, 2]$ . **Récurrence** :  $u_0 = 0 \leq u_2 = 1$  ; si  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ , en appliquant  $f \circ f$  :  $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$ . Donc  $(u_{2n})$  est **croissante** ; de même,  $u_3 = \frac{7}{4} \leq u_1 = 2$  donne  $(u_{2n+1})$  **décroissante**.
4.  $|u_{n+1} - \ell| = |u_n - \ell| \times \frac{u_n + \ell}{4}$ , avec  $u_n \leq \frac{7}{4}$  ( $n \geq 2$ ) et  $\ell < \frac{3}{2}$  ( $2\sqrt{3} < \frac{7}{2}$  car  $12 < \frac{49}{4}$ ) :  $\frac{u_n + \ell}{4} \leq \frac{13}{16}$ . Par récurrence,  $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{13}{16}\right)^{n-2} |u_2 - \ell|$ , et  $|u_2 - \ell| = 2\sqrt{3} - 3 < \frac{1}{2}$  ( $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$ ) :  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{13}{16}\right)^{n-2}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 18

1.  $b_{n+1} = 2a_n + 3^n - 3^{n+1} = 2a_n - 2 \times 3^n = 2b_n$  :  $(b_n)$  est géométrique de raison 2,  $b_0 = 2$  ;  $b_n = 2^{n+1}$  et  $a_n = 3^n + 2^{n+1}$ .
2. a)  $u_1 = 5, u_2 = 16, u_3 = 44$ . b)  $u_{n+1} - c2^{n+1} = 2(u_n - c2^n) + 3 \times 2^n$  : pour une raison 2, il faudrait  $3 \times 2^n = 0$ , **impossible**. c) On divise par  $2^{n+1}$  :  $v_{n+1} = \frac{2u_n + 3 \times 2^n}{2^{n+1}} = v_n + \frac{3}{2}$  :  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $\frac{3}{2}$ ,  $v_0 = 1$ , d'où  $v_n = 1 + \frac{3n}{2}$  et  $u_n = (3n+2)2^{n-1}$ . d)  $w_{k+1} - w_k = (3k-1)2^k - (3k-4)2^{k-1} = 2^{k-1}(6k-2-3k+4) = (3k+2)2^{k-1} = u_k$  ✓. Télescopage :  $\sum_{k=0}^n u_k = w_{n+1} - w_0 = (3n-1)2^n + 2$  ( $w_0 = -2$ ).

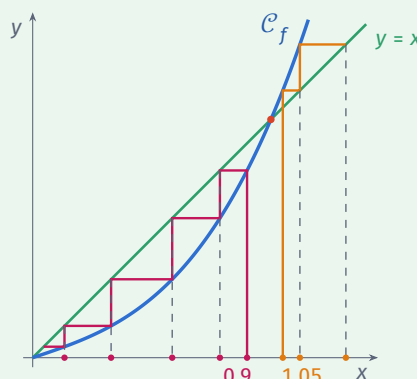
### ■ Corrigé de l'exercice 19

1.  $\frac{1}{k2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)2^k} = \frac{2(k+1)-k}{k(k+1)2^k} = \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$  ✓ ; par télescopage,  $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$ .
2. a) On met  $k(k+1)(k+2)$  en facteur :  $k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)] = 4k(k+1)(k+2)$ . Avec  $p_k = k(k+1)(k+2)(k+3)$  :  $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1}) = \frac{p_n - p_0}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ . b)  $k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$ , donc  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + 5n + 6 - 4n - 2 - 4) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  :  $1^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2$ .
3. a)  $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$  et  $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}$  : d'où l'encadrement. b) On somme pour  $k$  de 1 à  $n$  (à gauche) et de 2 à  $n$  (à droite) :  $T_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$  et  $T_n < 1 + 2(\sqrt{n} - 1)$ . Pour

$$n = 10\,000 : 198 < 2\sqrt{10\,001} - 2 < T_{10\,000} < 199, \text{ donc } \boxed{E(T_{10\,000}) = 198}.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 20

1.  $f(-x) = -f(x)$  :  $f$  est **impaire**.  $x \mapsto 2x^3$  et  $x \mapsto x$  sont strictement croissantes, leur somme aussi :  $f$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .  $f(x) - x = \frac{2x^3 - 2x}{3} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{3}$  : points fixes  $\boxed{-1, 0, 1}$ .
2. a) **Récurrence** : si  $0 < u_n < 1$ , alors  $f(0) < f(u_n) < f(1)$ , soit  $0 < u_{n+1} < 1$ . Sur  $]0, 1[$ ,  $f(x) - x < 0$  :  $u_{n+1} < u_n$ ,  $(u_n)$  est **décroissante**. b)  $u_{n+1} = u_n \times \frac{2u_n^2 + 1}{3}$ , avec  $0 < u_n \leq u_0$  :  $\frac{1}{3} < \frac{2u_n^2 + 1}{3} \leq q$ , d'où  $\frac{1}{3}u_n < u_{n+1} \leq qu_n$ . Par récurrence,  $\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 \leq u_n \leq q^n u_0}$  :  $(u_n)$  est encadrée par deux suites géométriques. c)  $u_0 = \frac{1}{2}$  :  $q = \frac{1}{2}$ , donc  $\frac{1}{2 \times 3^n} \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .
3.  $]1, +\infty[$  est stable ( $f(x) > f(1) = 1$ ) et  $f(x) - x > 0$  sur cet intervalle :  $(u_n)$  est **croissante**. De plus  $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)(2u_n^2 + 2u_n + 3)}{3} \geq \frac{7}{3}(u_n - 1)$ , car  $2u_n^2 + 2u_n + 3 \geq 7$  ; par récurrence,  $u_n - 1 \geq \left(\frac{7}{3}\right)^n (u_0 - 1) \geq \left(1 + \frac{4n}{3}\right)(u_0 - 1)$  (Bernoulli) :  $(u_n)$  n'est pas majorée.
4. Si  $u_0 \in \{-1, 0, 1\}$ , la suite est **constante**. Si  $u_0 < 0$ ,  $w_n = -u_n$  vérifie  $w_{n+1} = -f(u_n) = f(-u_n) = f(w_n)$ , avec  $w_0 = -u_0 > 0$  : on se ramène aux cas précédents par symétrie. Pour  $-1 < u_0 < 0$ ,  $(u_n)$  est croissante et  $-1 < u_n < 0$  ; pour  $u_0 < -1$ , elle est décroissante et non minorée. Figure :  $u_0 = 0,9$  (escalier qui descend) et  $u_0 = 1,05$  (escalier qui monte).



### ■ Corrigé de l'exercice 21

1. **Suite arithmético-géométrique, point fixe**  $-\frac{1}{9}$  :  $R_{n+1} + \frac{1}{9} = 10R_n + \frac{10}{9} = 10\left(R_n + \frac{1}{9}\right)$  ; géométrique de raison 10, de premier terme  $\frac{1}{9}$  :  $R_n + \frac{1}{9} = \frac{10^n}{9}$ ,  $\boxed{R_n = \frac{10^n - 1}{9}}$ .
2.  $\sum_{k=1}^n R_k = \frac{1}{9} \left( \sum_{k=1}^n 10^k - n \right) = \frac{1}{9} \left( \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$ . Pour  $n = 5$  :  $\frac{999\,945}{81} = \boxed{12\,345}$  ; pour  $n = 9$  :  $\frac{10^{10} - 91}{81} = \boxed{123\,456\,789}$ .
3.  $R_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$  et  $10^k = 1 + 9R_k$ , donc  $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 9R_k) = n + 9 \sum_{k=0}^{n-1} R_k$  :  $\boxed{9 \text{ divise } R_n - n}$ . Ainsi  $R_n = n + 9m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) : 3 divise  $R_n$  si et seulement si 3 divise  $n$  (par exemple  $R_9 = 9 \times 12\,345\,679$ ).
4. **Somme géométrique de raison  $10^n$**  :  $1 + 10^n + \dots + 10^{(m-1)n}$  vaut  $\frac{10^{mn} - 1}{10^n - 1}$ , et le produit demandé vaut  $\frac{10^n - 1}{9} \times \frac{10^{mn} - 1}{10^n - 1} = \frac{10^{mn} - 1}{9} = R_{mn}$ . **Par contraposée** : si  $N \geq 2$  n'est pas premier,  $N = mn$  avec  $1 < n < N$ , et  $R_n$  est un diviseur de  $R_N$  tel que  $1 < R_n < R_N$  :  $R_N$  n'est pas premier ( $R_1 = 1$  non plus). Donc  $\boxed{R_N \text{ premier} \Rightarrow N \text{ premier}}$  (la réciproque est fautive :  $R_3 = 111 = 3 \times 37$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 22

1. A garde 90 % de ses habitants et reçoit 20 % de ceux de B ; B garde 80 % des siens et reçoit 10 % de ceux de A : d'où les relations.  $a_1 = 470$ ,  $b_1 = 130$ ,  $a_2 = 449$ ,  $b_2 = 151$ .
2.  $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$  : la somme est constante, égale à 600. Donc  $b_n = 600 - a_n$  et  $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,2(600 - a_n) = 0,7a_n + 120$ . **Point fixe** :  $\ell = 0,7\ell + 120 \iff \ell = 400$  ;  $(a_n - 400)$  est géométrique de raison 0,7, de premier terme 100 :  $\boxed{a_n = 400 + 100 \times 0,7^n}$  et  $\boxed{b_n = 200 - 100 \times 0,7^n}$ .  $(a_n)$  est strictement décroissante,  $(b_n)$  strictement croissante ;  $400 < a_n \leq 500$  et  $100 \leq b_n < 200$ .

3.  $b_n \geq 190 \iff 0,7^n \leq 0,1$  ; or  $0,7^6 \approx 0,118$  et  $0,7^7 \approx 0,082$  : au bout de  $\boxed{7 \text{ ans}}$ . 4.  $0,1a_n - 0,2b_n = 40 + 10 \times 0,7^n - 40 + 20 \times 0,7^n = \boxed{30 \times 0,7^n}$  : suite géométrique de raison 0,7 (chaque année, A perd au profit de B un solde de plus en plus faible).

### ■ Corrigé de l'exercice 23

1.  $g(x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . **Récurrence** :  $0 < u_0 \leq \frac{1}{2}$  ; si  $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ , alors  $g(0) < g(u_n) \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$ , soit  $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$ . Donc  $\boxed{0 < u_n \leq \frac{1}{2}}$ , et  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$  :  $(u_n)$  est strictement décroissante.
2. a)  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \frac{1}{1-u_n}$  ; comme  $\frac{1}{2} \leq 1 - u_n < 1$  :  $1 < \frac{1}{1-u_n} \leq 2$ . b) **Télescopage** de  $k = 0$  à  $n - 1$  :  $n \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \leq 2n$ , soit  $n + 2 \leq \frac{1}{u_n} \leq 2n + 2$  :  $\boxed{\frac{1}{2n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}}$ .
3.  $u_k^2 = u_k - u_{k+1}$  :  $\boxed{\sum_{k=0}^n u_k^2 = \frac{1}{2} - u_{n+1}} < \frac{1}{2}$ .  $1 - u_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$  : le produit est télescopique,  $(1 - u_0)(1 - u_1) \dots (1 - u_n) = \frac{u_{n+1}}{u_0} = \boxed{2u_{n+1}} \leq \frac{2}{n+3}$ .

29

## Corrigés du niveau 4

### ■ Corrigé de l'exercice 24

1.  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est défini et  $u_n > 1$  ». **Initialisation**.  $u_0 = 2 > 1$ . **Hérédité**. si  $u_n > 1$ , alors  $u_n + 1 > 0$ , donc  $u_{n+1}$  est défini, et  $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1 - u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 1} > 0$ . **Conclusion**.  $\boxed{u_n > 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $v_n$  existe ( $u_n \neq 1$ ) et  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2(u_n - 1)} = \frac{(u_n - 1) + 2}{2(u_n - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n - 1} = v_n + \frac{1}{2}$  :  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$ , avec  $v_0 = 1$ . Donc  $v_n = 1 + \frac{n}{2} = \frac{n+2}{2}$  et  $u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = \boxed{1 + \frac{2}{n+2}}$  :  $(u_n)$  est strictement décroissante, et  $1 < u_n \leq 2$ . Enfin  $u_{2026} = 1 + \frac{2}{2028} = 1 + \frac{1}{1014} = \boxed{\frac{1015}{1014}}$ .
3. a) Pour  $x \neq -\frac{d}{c}$  :  $f(x) = x \iff cx^2 + (d - a)x - b = 0$ , équation du second degré ( $c \neq 0$ ) de discriminant  $(d - a)^2 + 4bc = 0$  : une seule solution,  $\alpha = \frac{a-d}{2c}$ . Il faut encore  $ca + d = \frac{a+d}{2} \neq 0$  : si  $a + d = 0$ , alors  $d = -a$ ,  $4a^2 + 4bc = 0$  et  $ad - bc = -a^2 + a^2 = 0$ , exclu. Donc  $\boxed{a + d \neq 0}$  et  $\alpha$  est l'unique point fixe. b)  $\alpha$  étant racine,  $b = ca^2 + (d - a)\alpha$ , donc  $b - d\alpha = ca^2 - a\alpha = -\alpha(a - ca)$  et  $u_{n+1} - \alpha = \frac{(a-ca)u_n + b - d\alpha}{cu_n + d} = \frac{(a-ca)(u_n - \alpha)}{cu_n + d}$ , avec  $a - ca = \frac{a+d}{2}$ . Puis, en écrivant  $cu_n + d = c(u_n - \alpha) + (ca + d)$  et  $ca + d = \frac{a+d}{2}$  :  $\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{c(u_n - \alpha) + \frac{a+d}{2}}{\frac{a+d}{2}(u_n - \alpha)} = \boxed{\frac{1}{u_n - \alpha} + \frac{2c}{a+d}}$  : la suite  $\left(\frac{1}{u_n - \alpha}\right)$  est arithmétique. (Pour le défi :  $a = 3, b = -1, c = d = 1, \alpha = 1$ , raison  $\frac{1}{2}$ .) c)  $a = 1, b = -4, c = 1, d = -3$  :  $(d - a)^2 + 4bc = 16 - 16 = 0$ ,  $ad - bc = 1, \alpha = 2$ , raison  $\frac{2}{-2} = -1$ . Par b),  $u_{n+1} - 2 = -\frac{u_n - 2}{u_n - 3}$  : si  $u_n < 2$ , alors  $u_{n+1} < 2$  ; tous les termes existent et sont  $< 2$ . Avec  $\frac{1}{u_0 - 2} = -\frac{1}{2}$  :  $\frac{1}{u_n - 2} = -\frac{1}{2} - n$ , d'où  $\boxed{u_n = 2 - \frac{2}{2n+1}}$  (contrôle :  $u_1 = \frac{4}{3}, u_2 = \frac{8}{5}$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 25

1. Pour  $k \geq 1$ ,  $F_{k+1} - F_{k-1} = F_k$ , donc  $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k$ . **Télescopage** (et  $F_0^2 = 0$ ) :  $\boxed{\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1} - F_0 F_1 = F_n F_{n+1}}$  (ex. :  $0 + 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104 = 8 \times 13$ ).
2. Soit  $c_n = F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2$ . **Initialisation**.  $c_1 = F_2 F_0 - F_1^2 = -1$ . **Hérédité**.  $c_{n+1} = F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = -c_n$  ; donc si  $c_n = (-1)^n$ , alors  $c_{n+1} = (-1)^{n+1}$ .

**Conclusion.**  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ . Un diviseur commun  $d \in \mathbb{N}^*$  de  $F_n$  et  $F_{n+1}$  divise  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1 : d = 1$ .

3. a)  $r_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}$  ;  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , donc  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ , et  $r_{n+1} - \varphi = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - r_n}{r_n \varphi}$ . b)  $r_{n+1} - r_n = \frac{F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2}{F_n F_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$ . Comme  $r_n \varphi > 0$ ,  $r_{n+1} - \varphi$  et  $r_n - \varphi$  sont de signes contraires (non nuls :  $r_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\varphi \notin \mathbb{Q}$ ) :  $\varphi$  est strictement entre  $r_n$  et  $r_{n+1}$ , donc  $|r_n - \varphi| < |r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{F_n F_{n+1}}$ . c)  $F_{10} = 55$ ,  $F_{11} = 89$ ,  $F_{12} = 144$  :  $\frac{144}{89} < \varphi < \frac{89}{55}$ , et  $\frac{89}{55} - \frac{144}{89} = \frac{1}{55 \times 89} = \frac{1}{4895}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 26

1. **Récurrence** :  $u_0 = 1$ , et si  $u_n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} > u_n \geq 1$ . Donc  $u_n \geq 1$ , et  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} > 0$  :  $(u_n)$  est croissante.  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = \frac{9}{4}$ .
2.  $\left(u + \frac{1}{u^2}\right)^3 = u^3 + 3u^2 \times \frac{1}{u^2} + 3u \times \frac{1}{u^4} + \frac{1}{u^6} = u^3 + 3 + \frac{3}{u^3} + \frac{1}{u^6}$ . Comme  $u_k \geq 1$  :  $3 \leq u_{k+1}^3 - u_k^3 \leq 7$  ; en sommant de  $k = 0$  à  $n - 1$  (télescopage) :  $3n \leq u_n^3 - 1 \leq 7n$ , soit  $3n + 1 \leq u_n^3 \leq 7n + 1$ .
3. Pour  $k \geq 1$ ,  $u_k \geq u_1 = 2$ , donc  $u_{k+1}^3 - u_k^3 \leq 3 + \frac{3}{8} + \frac{1}{64} = \frac{217}{64}$  ; en sommant de  $k = 1$  à  $n - 1$  :  $u_n^3 \leq u_1^3 + \frac{217}{64}(n - 1) = 8 + \frac{217}{64}(n - 1)$ . Pour  $n = 333$  :  $1000 \leq u_{333}^3 \leq 8 + \frac{217 \times 332}{64} \approx 1133,7 < 1331 = 11^3$ . Donc  $10 \leq u_{333} < 11$  :  $E(u_{333}) = 10$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 27

1. a) Avec  $a = \frac{x}{3^k}$ , on a  $3a = \frac{x}{3^{k-1}}$  et  $4 \sin^3 a = 3 \sin a - \sin 3a$  ; en multipliant par  $3^k$  :  $4 \times 3^k \sin^3 \frac{x}{3^k} = 3^{k+1} \sin \frac{x}{3^k} - 3^k \sin \frac{x}{3^{k-1}}$ , soit  $s_{k+1} - s_k$ , où  $s_k = 3^k \sin \frac{x}{3^{k-1}}$ . b) **Télescopage** :  $\sum_{k=0}^n 3^k \sin^3 \frac{x}{3^k} = \frac{s_{n+1} - s_0}{4} = \frac{1}{4} \left( 3^{n+1} \sin \frac{x}{3^n} - \sin 3x \right)$ , car  $s_0 = \sin 3x$ . c)  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $n = 1$  :  $\sin^3 \frac{\pi}{2} + 3 \sin^3 \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$  et  $\frac{1}{4} \left( 9 \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{9}{2} + 1 \right) = \frac{11}{8}$  ✓.
2. a)  $\sin^2 2a = 4 \sin^2 a \cos^2 a = 4 \sin^2 a (1 - \sin^2 a) = 4 \sin^2 a - 4 \sin^4 a$  ✓. b) Avec  $a = \frac{x}{2^k}$  et  $t_k = 4^k \sin^2 \frac{x}{2^k}$ , en multipliant par  $4^{k-1}$  :  $4^k \sin^4 \frac{x}{2^k} = t_k - t_{k-1}$  ; par télescopage, la somme vaut  $t_n - t_0 = 4^n \sin^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 x$ . c)  $t_n - t_{n-1} = 4^n \sin^4 \frac{x}{2^n} \geq 0$  :  $(t_n)$  est croissante. Pour  $x = \pi$ ,  $n = 3$  : la somme vaut  $64 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 32 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 32 - 16\sqrt{2}$  (contrôle :  $4 + 16 \times \frac{1}{4} + 64 \left( \frac{2-\sqrt{2}}{4} \right)^2 = 32 - 16\sqrt{2}$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 28

1.  $u_1 = \frac{9}{4}$ ,  $u_2 = \frac{161}{72}$ ,  $u_3 = \frac{51841}{23184}$ . Par récurrence,  $u_n > 0$ .  $u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{5}u_n + 5}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{5})^2}{2u_n} \geq 0$ , et  $u_{n+1} \neq \sqrt{5}$  ( $u_{n+1}$  est rationnel) :  $u_n > \sqrt{5}$  pour  $n \geq 1$ . Alors  $u_{n+1} - u_n = \frac{5 - u_n^2}{2u_n} < 0$  :  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante. 2. Pour  $n \geq 1$  :  $u_n > \sqrt{5}$ , donc  $\frac{5}{u_n} < \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ . Avec  $u_2$  :  $\frac{360}{161} < \sqrt{5} < \frac{161}{72}$ .
3. a)  $(p^2 + 5q^2)^2 - 5(2pq)^2 = p^4 - 10p^2q^2 + 25q^4 = (p^2 - 5q^2)^2$  (et  $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_n}{q_n} + \frac{5q_n}{p_n} \right)$  : on retrouve bien  $u_{n+1}$ ). Comme  $p_0^2 - 5q_0^2 = -1$  :  $p_1^2 - 5q_1^2 = 1$ , puis  $p_n^2 - 5q_n^2 = 1$  pour  $n \geq 1$ . b)  $u_n - \sqrt{5} = \frac{p_n - \sqrt{5}q_n}{q_n} = \frac{p_n^2 - 5q_n^2}{q_n(p_n + \sqrt{5}q_n)} = \frac{1}{q_n^2(u_n + \sqrt{5})}$ , et  $u_n + \sqrt{5} > 2\sqrt{5}$ . Pour  $n = 3$  :  $q_3 = 23184$  et  $2\sqrt{5} \times 23184^2 > 4 \times 5 \times 10^8 = 2 \times 10^9$  :  $0 < u_3 - \sqrt{5} < 10^{-9}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 29

1.  $E(\sqrt{k}) = j \iff j \leq \sqrt{k} < j+1 \iff j^2 \leq k < (j+1)^2 : \boxed{2j+1}$  entiers. Pour  $1 \leq k \leq n^2 - 1$ ,  $E(\sqrt{k})$  prend chaque valeur  $j = 1, \dots, n-1$  exactement  $2j+1$  fois, donc  $\sum_{k=1}^{n^2-1} E(\sqrt{k}) = \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ . Pour  $n = 10$  :  $\boxed{615}$ .
2. a) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 (les carrés 4 et 9 sont sautés). b)  $E(\sqrt{n} + \frac{1}{2}) = m \iff m - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < m + \frac{1}{2} \iff m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n < m^2 + m + \frac{1}{4}$  (nombres positifs, on élève au carré)  $\iff m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m$ , car  $n$  est entier. c)  $E(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}) \geq E(\sqrt{n} + \frac{1}{2})$ , donc  $u_{n+1} - u_n \geq 1 : (u_n)$  est strictement croissante. Pour les  $2m$  entiers  $n$  de  $I_m = [m^2 - m + 1, m^2 + m]$ ,  $u_n = n + m$  décrit les  $2m$  entiers  $m^2 + 1, \dots, m^2 + 2m$ , c'est-à-dire **exactement les entiers strictement compris entre  $m^2$  et  $(m+1)^2$** . Les blocs  $I_1 = \{1, 2\}$ ,  $I_2 = \{3, \dots, 6\}$ , ... se suivent ( $m^2 + m + 1 = (m+1)^2 - (m+1) + 1$ ) et recouvrent  $\mathbb{N}^*$  :  $(u_n)$  prend une fois et une seule chaque entier non carré, et jamais un carré. d) Le 2026<sup>e</sup> non carré est  $u_{2026}$  ;  $45^2 - 45 + 1 = 1981 \leq 2026 \leq 2070 = 45^2 + 45$ , donc  $m = 45$  et  $u_{2026} = \boxed{2071}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 30

1.  $\alpha + \beta = 2$  et  $\alpha\beta = 1 - 3 = -2$  :  $\alpha, \beta$  sont les racines de  $x^2 - 2x - 2 = 0$ . En multipliant  $\alpha^2 = 2\alpha + 2$  par  $\alpha^n$  (et de même pour  $\beta$ ), puis en ajoutant :  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n$ . Comme  $a_0 = 2$  et  $a_1 = 2$  sont entiers, une récurrence double montre que  $a_n \in \mathbb{Z}$  :  $a_0, \dots, a_6 = 2, 2, 8, 20, 56, 152, 416$ .
2.  $\mathcal{P}(p)$  : «  $2^p \mid a_{2p}$  et  $2^{p+1} \mid a_{2p+1}$  ». **Initialisation.**  $1 \mid 2$  et  $2 \mid 2$ . **Hérédité.**  $2^p$  divise  $a_{2p}$  et  $a_{2p+1}$ , donc  $2^{p+1}$  divise  $a_{2p+2} = 2(a_{2p+1} + a_{2p})$  ; puis  $2^{p+1}$  divise  $a_{2p+2}$  et  $a_{2p+1}$ , donc  $2^{p+2}$  divise  $a_{2p+3} = 2(a_{2p+2} + a_{2p+1})$ . **Conclusion.**  $\mathcal{P}(p)$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .
3.  $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ , donc  $0 < |\beta|^n \leq 1$  (et  $< 1$  si  $n \geq 1$ ) :  $-1 < \beta^n < 0$  si  $n$  est impair,  $0 < \beta^n \leq 1$  si  $n$  est pair. Or  $\alpha^n = a_n - \beta^n$  : si  $n$  est impair,  $a_n < \alpha^n < a_n + 1$  et  $\boxed{E(\alpha^n) = a_n}$  ; si  $n$  est pair,  $a_n - 1 \leq \alpha^n < a_n$  et  $\boxed{E(\alpha^n) = a_n - 1}$ . Ainsi  $E((1 + \sqrt{3})^{2p+1}) = a_{2p+1}$  est divisible par  $2^{p+1}$ .  $E((1 + \sqrt{3})^5) = \boxed{152} = 8 \times 19$  et  $E((1 + \sqrt{3})^6) = \boxed{415}$ .

30

## Corrigés : modes de définition

## ■ Corrigé de l'exercice 31

1.  $a_n$  est défini si et seulement si  $n^2 - 5n + 4 = (n-1)(n-4) \geq 0$ . Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines 1 et 4 :  $\boxed{a_n \text{ est défini} \iff n \in \{0, 1\} \cup \{4, 5, 6, \dots\}}$  ( $a_2$  et  $a_3$  n'existent pas : on étudie plutôt  $(a_n)_{n \geq 4}$ ).  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_5 = 2$ ,  $a_6 = \sqrt{10}$ .  
 $2n - 5$  est un entier impair, donc jamais nul :  $\boxed{b_n \text{ est défini pour tout } n \in \mathbb{N}}$  (le «  $n = \frac{5}{2}$  » n'est pas un entier).
2. a)  $u_0 = 5$ ,  $u_1 = \frac{6}{2} = 3$ ,  $u_2 = \frac{9}{3} = 3$ ,  $u_3 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ ,  $u_4 = \frac{21}{5}$ . On remplace  $n$  par  $n+1$ , puis par  $2n$  :  

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 5}{n+2} = \frac{n^2 + 2n + 6}{n+2}, \quad u_{2n} = \frac{4n^2 + 5}{2n+1} \quad (\text{et non } u_n + 1 \text{ ni } 2u_n).$$
- b)  $u_n = 3 \iff n^2 + 5 = 3n + 3 \iff (n-1)(n-2) = 0 : \boxed{n \in \{1, 2\}}$ .  $u_n = 5 \iff n^2 - 5n = 0 : \boxed{n \in \{0, 5\}}$ .  $u_n = 4 \iff n^2 - 4n + 1 = 0 \iff n = 2 \pm \sqrt{3} \notin \mathbb{N}$  : **aucune solution**.

c)  $n - 1 + \frac{6}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)+6}{n+1} = \frac{n^2+5}{n+1} = u_n \checkmark$ . Comme  $n - 1 \in \mathbb{Z} : u_n \in \mathbb{Z} \iff \frac{6}{n+1} \in \mathbb{Z} \iff n+1$  divise 6  $\iff n+1 \in \{1, 2, 3, 6\} : \boxed{n \in \{0, 1, 2, 5\}}$  (valeurs 5, 3, 3, 5).

3. Le point de  $D$  d'abscisse  $n$  est  $(n, n - 1)$ , donc

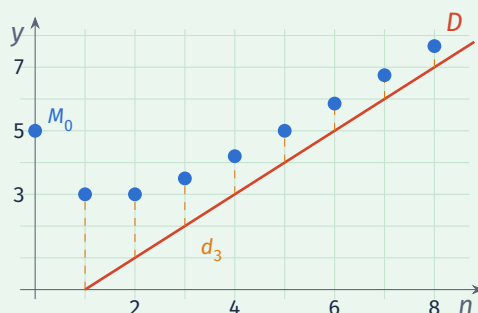
$$d_n = u_n - (n - 1) = \frac{6}{n+1} > 0 :$$

tous les points  $M_n$  sont au-dessus de  $D$ , de plus en plus près (l'écart diminue quand  $n$  augmente).

$$d_n < 0,1 \iff \frac{6}{n+1} < \frac{1}{10} \iff n+1 > 60 :$$

$$\boxed{d_n < 0,1 \iff n \geq 60} \quad (d_{59} = 0,1 \text{ exactement}).$$

Le nuage n'est pas aligné : il « descend » de  $M_0$  à  $M_1$ , reste au même niveau en  $M_2$ , puis remonte en longeant  $D$ .



### ■ Corrigé de l'exercice 32

1.  $u_n = n^2 - n : u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 6, u_{10} = 90. u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = \boxed{2n}$ .

2.  $v_1 = f(3) = 6, v_2 = f(6) = 30, v_3 = f(30) = 870. v_0 = 3 \neq u_0 = 0 : \text{les suites sont différentes}$  ( $u_n = f(n)$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$  sont deux modes de définition distincts).

Réurrence :  $v_0 \in \mathbb{Z}$  et, si  $v_n \in \mathbb{Z}$ , alors  $v_{n+1} = v_n^2 - v_n \in \mathbb{Z}$  ; donc tous les  $v_n$  sont entiers. Pour  $n \geq 1, v_n = v_{n-1}(v_{n-1} - 1)$  est le produit de deux entiers consécutifs, dont l'un est pair :

$$\boxed{v_n \text{ est pair pour } n \geq 1}.$$

3. Si  $f(a) = a$ , une récurrence immédiate donne  $w_n = a$  pour tout  $n$  ; réciproquement, si  $(w_n)$  est constante,  $w_1 = w_0$ , soit  $f(a) = a$ . Or  $a^2 - a = a \iff a(a-2) = 0 : \boxed{(w_n) \text{ constante} \iff a \in \{0, 2\}}$ .

De même,  $w_1 = w_2 = \dots \iff f(w_1) = w_1 \iff w_1 \in \{0, 2\}. a^2 - a = 0 \iff a \in \{0, 1\}$  et  $a^2 - a = 2 \iff (a+1)(a-2) = 0 \iff a \in \{-1, 2\} : \boxed{a \in \{-1, 0, 1, 2\}}$  (par exemple  $a = -1$  donne  $-1, 2, 2, 2, \dots$ , suite stationnaire).

4.  $t_1 = 5, t_2 = 13, t_3 = 25, t_4 = 41$  ; et  $n^2 + (n+1)^2$  vaut 1, 5, 13, 25, 41 pour  $n = 0, \dots, 4$ . Soit  $P(n) : \ll t_n = n^2 + (n+1)^2 \gg$ .

Initialisation.  $t_0 = 1 = 0^2 + 1^2$ . Hérité. Supposons  $P(n)$  vraie pour un entier  $n \geq 0 : t_{n+1} = n^2 + (n+1)^2 + 4n + 4 = (n+1)^2 + (n+2)^2 ; P(n+1)$  est vraie. Conclusion.  $\boxed{t_n = n^2 + (n+1)^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $t_{10} = 100 + 121 = \boxed{221}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 33

1.  $\mathcal{C}_f$  est formée de deux demi-droites :  $y = 4 - x$  pour  $x \leq 3$  et  $y = x - 2$  pour  $x \geq 3$  (sommet  $(3, 1)$ ). On part de  $u_0 = \frac{1}{2}$  : verticalement jusqu'à  $\mathcal{C}_f$  (ordonnée  $u_1$ ), horizontalement jusqu'à  $\Delta$ , puis on redescend sur l'axe, et ainsi de suite. **Conjecture** : à partir du rang 2, la construction tourne sur un carré ; la suite prend alternativement les valeurs  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{5}{2}$ .

$$2. u_1 = \left| \frac{1}{2} - 3 \right| + 1 = \frac{7}{2}, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{2}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{5}{2}.$$

Soit  $P(k)$  : «  $u_{2k} = \frac{3}{2}$  et  $u_{2k+1} = \frac{5}{2}$  ».

Initialisation ( $k = 1$ ) :  $u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{2}$ . Hérédité : si  $P(k)$

est vraie ( $k \geq 1$ ),  $u_{2k+2} = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$  et  $u_{2k+3} = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$  :

$P(k+1)$  est vraie. Conclusion :

$$u_{2k} = \frac{3}{2}, u_{2k+1} = \frac{5}{2} \quad (k \geq 1).$$

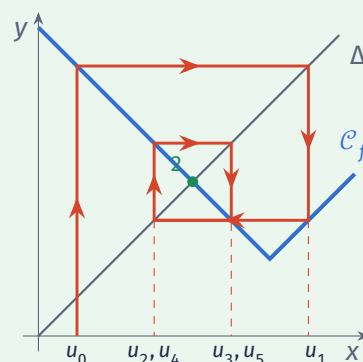
3. a) Si  $x \geq 3$  :  $f(x) = x - 2 \neq x$ . Si  $x < 3$  :  $f(x) = 4 - x = x \iff x = 2$  (qui vérifie bien  $x < 3$ ).  
Seul point fixe : 2.

b) Si  $1 \leq x \leq 3$  :  $x - 3 \leq 0$ , donc  $f(x) = 3 - x + 1 = 4 - x$  ; puis  $1 \leq 4 - x \leq 3$ , et  $f(f(x)) = 4 - (4 - x) = x$ .

c) Par récurrence,  $w_n \in [1, 3]$  pour tout  $n$  ( $[1, 3]$  est stable par  $f$  d'après b)). Donc  $w_{n+2} = f(f(w_n)) = w_n$  : la suite est  $a, 4 - a, a, 4 - a, \dots$  (périodique de période 2). Elle est constante  $\iff 4 - a = a \iff a = 2$ .

4. Si  $x \geq 3$ ,  $f(x) = x - 2$ . Soit  $P(n)$  : «  $w_n = w_0 - 2n$  », pour  $0 \leq n \leq 1012$ .  $P(0)$  est vraie ; si  $P(n)$  est vraie avec  $n \leq 1011$ , alors  $w_n \geq w_0 - 2022 \geq 4$ , donc  $w_{n+1} = w_n - 2 = w_0 - 2(n+1)$ .

Si  $w_0 = 2026$  :  $w_{1012} = 2$ , point fixe :  $w_n = 2$  pour tout  $n \geq 1012$  (suite stationnaire). Si  $w_0 = 2027$  :  $w_{1012} = 3$ , puis  $w_{1013} = f(3) = 1 \in [1, 3]$ , et d'après 3c) : la suite vaut alternativement 3 et 1 :  $w_{2k} = 3, w_{2k+1} = 1$  ( $k \geq 506$ ). La parité de  $w_0$  décide de tout.



## ■ Corrigé de l'exercice 34

1.  $\Delta = n^2 + 4 > 0$  : deux solutions réelles, dont le produit vaut  $\frac{-1}{1} < 0$  : elles sont de signes

contraires. La positive est  $u_n = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ .  $u_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $u_2 = \frac{\sqrt{8}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$ ,  $u_4 = \frac{\sqrt{20}-4}{2} = \sqrt{5} - 2$ .

2. On multiplie par la quantité conjuguée :  $(\sqrt{n^2 + 4} - n)(\sqrt{n^2 + 4} + n) = 4$ , donc  $u_n = \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 4}}$  ✓.

**Monotonie.** La suite  $(n + \sqrt{n^2 + 4})$  est strictement croissante et positive (somme de deux suites strictement croissantes) ; si  $n < p$ , alors  $n + \sqrt{n^2 + 4} < p + \sqrt{p^2 + 4}$ , donc  $u_n > u_p$  :  $(u_n)$  est strictement décroissante.

**Encadrement.**  $n^2 < n^2 + 4 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$  (car  $n \geq 1$ ), donc  $n < \sqrt{n^2 + 4} < n+2$ , puis  $2n < n + \sqrt{n^2 + 4} < 2n+2$  :  $\frac{1}{n+1} < u_n < \frac{1}{n}$ .

3. a)  $u_n^2 + nu_n = 1$  s'écrit  $u_n(u_n + n) = 1$ , avec  $u_n + n > 0$  :  $u_n = \frac{1}{n+u_n}$ .

b) D'après 2 :  $n + \frac{1}{n+1} < n + u_n < n + \frac{1}{n}$ . En passant aux inverses (nombres positifs) :

$$u_n = \frac{1}{n + u_n} > \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2 + 1} \quad \text{et} \quad u_n < \frac{1}{n + \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n^2 + n + 1}.$$

c)  $u_{10} = \frac{\sqrt{104}-10}{2} = \sqrt{26} - 5$ , donc  $\frac{10}{101} < \sqrt{26} - 5 < \frac{11}{111}$  :  $\frac{515}{101} < \sqrt{26} < \frac{566}{111}$ , avec  $\frac{566}{111} - \frac{515}{101} = \frac{57166-57165}{11211} = \frac{1}{11211} < 10^{-4}$  (soit  $5,09900 < \sqrt{26} < 5,09910$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 35

- $w_2 = \frac{2+1}{1} = 3$ ,  $w_3 = \frac{3+1}{2} = 2$ ,  $w_4 = \frac{2+1}{3} = 1$ ,  $w_5 = \frac{1+1}{2} = 1$ ,  $w_6 = \frac{1+1}{1} = 2$ ,  $w_7 = \frac{2+1}{1} = 3$  : on retrouve 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, ...
- Soit  $P(n)$  : «  $w_n$  et  $w_{n+1}$  sont définis et strictement positifs ».  $P(0)$  :  $a > 0$  et  $b > 0$ . Si  $P(n)$  est vraie,  $w_n \neq 0$ , donc  $w_{n+2} = \frac{w_{n+1}+1}{w_n}$  est défini, et strictement positif comme quotient de deux réels strictement positifs :  $P(n+1)$  est vraie. Donc **tous les termes existent et sont strictement positifs**.
- On calcule de proche en proche (en remarquant  $ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$ ) :

$$w_2 = \frac{b+1}{a}, \quad w_3 = \frac{w_2+1}{b} = \frac{a+b+1}{ab}, \quad w_4 = \frac{w_3+1}{w_2} = \frac{(a+1)(b+1)}{ab} \times \frac{a}{b+1} = \frac{a+1}{b},$$

$$w_5 = \frac{w_4+1}{w_3} = \frac{a+b+1}{b} \times \frac{ab}{a+b+1} = \boxed{a}, \quad w_6 = \frac{w_5+1}{w_4} = (a+1) \times \frac{b}{a+1} = \boxed{b}.$$

Récurrence sur  $Q(n)$  : «  $w_{n+5} = w_n$  et  $w_{n+6} = w_{n+1}$  ».  $Q(0)$  vient d'être établie. Si  $Q(n)$  est vraie :  $w_{n+7} = \frac{w_{n+6}+1}{w_{n+5}} = \frac{w_{n+1}+1}{w_n} = w_{n+2}$ , et  $w_{n+6} = w_{n+1}$  :  $Q(n+1)$  est vraie.  $w_{n+5} = w_n$  pour tout  $n$  : la suite est périodique de période 5, quels que soient  $a > 0$  et  $b > 0$ .

- $2026 = 5 \times 405 + 1$ , donc  $w_{2026} = w_1 = \boxed{2}$ . Les 2026 termes  $w_0, \dots, w_{2025}$  forment 405 blocs  $(w_{5j}, \dots, w_{5j+4})$  de somme  $1+2+3+2+1 = 9$ , suivis de  $w_{2025} = w_0 = 1$  :  $\sum_{k=0}^{2025} w_k = 405 \times 9 + 1 = \boxed{3646}$ .
- Si  $(w_n)$  est constante,  $b = a$  et  $w_2 = a$ , soit  $\frac{a+1}{a} = a \iff a^2 - a - 1 = 0$ , d'où  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (car  $a > 0$ ). Réciproquement, si  $a = b = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , alors  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , donc  $w_2 = \frac{\varphi+1}{\varphi} = \varphi$ , et par récurrence double tous les termes valent  $\varphi$ .  $(a, b) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 36

- $(u_0, v_0) = (2, 1)$ ,  $(u_1, v_1) = (7, 4)$ ,  $(u_2, v_2) = (26, 15)$ ,  $(u_3, v_3) = (97, 56)$ . Par récurrence, si  $u_n$  et  $v_n$  sont des entiers naturels non nuls,  $2u_n + 3v_n$  et  $u_n + 2v_n$  aussi. Alors  $u_{n+1} - u_n = u_n + 3v_n > 0$  et  $v_{n+1} - v_n = u_n + v_n > 0$  : **les deux suites sont strictement croissantes**.
- Récurrence.  $u_0^2 - 3v_0^2 = 4 - 3 = 1$ . Si  $u_n^2 - 3v_n^2 = 1$  :

$$u_{n+1}^2 - 3v_{n+1}^2 = 4u_n^2 + 12u_nv_n + 9v_n^2 - 3(u_n^2 + 4u_nv_n + 4v_n^2) = u_n^2 - 3v_n^2 = 1. \quad \boxed{u_n^2 - 3v_n^2 = 1}$$

3. a) Al-Kashi :  $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 CA \times CB \cos \hat{C}$ , donc

$$\cos \hat{C} = \frac{4x^2 + (2x-1)^2 - (2x+1)^2}{2 \times 2x(2x-1)} = \frac{4x^2 - 8x}{4x(2x-1)} = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Comme  $\sin \hat{C} > 0$  (angle d'un triangle) et  $(2x-1)^2 - (x-2)^2 = (x+1)(3x-3) = 3(x^2-1)$  :

$$\sin \hat{C} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{C}} = \frac{\sqrt{3(x^2-1)}}{2x-1}.$$

- b) Aire =  $\frac{1}{2} \times 2x \times (2x-1) \times \frac{\sqrt{3(x^2-1)}}{2x-1} = x\sqrt{3(x^2-1)}$ , et la hauteur issue de B vaut  $\frac{2 \times \text{aire}}{CA} = \sqrt{3(x^2-1)}$  (pour  $x = 2$ ,  $\hat{C}$  est droit : triangle 3, 4, 5).

4. Pour  $x = u_n$  : d'après 2,  $3(u_n^2 - 1) = 9v_n^2$ , donc  $\sqrt{3(u_n^2 - 1)} = 3v_n$  : aire =  $3u_nv_n$  et hauteur =  $3v_n$ , deux entiers. Les côtés  $2u_n - 1$ ,  $2u_n$ ,  $2u_n + 1$  sont trois entiers consécutifs, et  $(u_n)$  est strictement croissante : ces triangles sont deux à deux distincts, **il y en a une infinité**. Les trois premiers : 3, 4, 5 (aire 6) ; 13, 14, 15 (aire 84) ; 51, 52, 53 (aire 1170).

## 31 Corrigés : bornes et monotonie

### ■ Corrigé de l'exercice 37

1.  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = \frac{13}{2}$ ,  $a_3 = 6$ ,  $a_4 = \frac{25}{4}$ . Pour  $n \geq 1$  :  $a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{9}{n+1} - \frac{9}{n} = 1 - \frac{9}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 9}{n(n+1)}$ .  
Le numérateur vaut  $-7$  pour  $n = 1$ ,  $-3$  pour  $n = 2$ , et, pour  $n \geq 3$ ,  $n^2 + n - 9 \geq 9 + 3 - 9 = 3 > 0$ . Donc  $a_1 > a_2 > a_3$  et  $a_3 < a_4 < a_5 < \dots$  :  $(a_n)$  décroît jusqu'au rang 3, puis est strictement croissante ; elle n'est pas monotone sur  $\mathbb{N}^*$ . Enfin  $a_n - 6 = \frac{n^2 - 6n + 9}{n} = \frac{(n-3)^2}{n} \geq 0$  :  $a_n \geq 6 = a_3$  (plus petit terme).
2. Les termes sont strictement positifs et  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2} \geq 1$  :  $(b_n)$  est croissante. L'égalité n'a lieu que pour  $n = 0$  :  $b_0 = b_1 = 1$ , donc la suite n'est **pas strictement** croissante (elle l'est à partir du rang 1).
3. Quantité conjuguée :  $c_n = \frac{(n+4)-n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$ . La fonction  $g : x \mapsto \sqrt{x+4} + \sqrt{x}$  est strictement croissante et strictement positive sur  $[0, +\infty[$  (somme de deux fonctions strictement croissantes) ; si  $n < p$ , alors  $g(n) < g(p)$  et  $c_n = \frac{4}{g(n)} > \frac{4}{g(p)} = c_p$  :  $(c_n)$  est strictement décroissante, et  $0 < c_n \leq c_0 = 2$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 38

1.  $-1 \leq \cos n \leq 1$  donne  $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$  ;  $-1 \leq \sin n \leq 1$  donne  $2 \leq 3 - \sin n \leq 4$ . On divise des nombres positifs (le plus petit numérateur par le plus grand dénominateur, et inversement) :  $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$  :  $(u_n)$  est bornée.
2.  $v_0 = 2$ ,  $v_1 = \frac{3}{2}$ ,  $v_2 = \frac{8}{3}$ ,  $v_3 = \frac{5}{4}$ . Comme  $0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$  :  $-1 < (-1)^n \frac{n}{n+1} < 1$ , d'où  $1 < v_n < 3$ .  $v_0 > v_1$  et  $v_1 < v_2$  :  $(v_n)$  n'est pas monotone.

3.  $w_n - 1 = \frac{n^2-n}{n+1} = \frac{n(n-1)}{n+1} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (si  $n = 0$  le produit est nul, si  $n \geq 1$  les deux facteurs sont positifs) :  $w_n \geq 1$  ( $w_0 = w_1 = 1$ ).

«  $(w_n)$  n'est pas majorée » :  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, w_n > M$ . Or  $w_n = n - 1 + \frac{2}{n+1} > n - 1$ . Soit  $M \in \mathbb{R}$  et  $n = E(|M|) + 2$  : alors  $w_n > n - 1 = E(|M|) + 1 > |M| \geq M$ .  $(w_n)$  n'est pas majorée.

### ■ Corrigé de l'exercice 39

1.  $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = \frac{10}{5} = 2, u_3 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}, u_4 = \frac{28}{17}$ . **Conjecture** : la suite monte jusqu'à 2 (atteint deux fois), puis décroît.

2.  $2 - u_n = \frac{2n^2+2-n^2-3n}{n^2+1} = \frac{n^2-3n+2}{n^2+1} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2+1}$ . Pour un entier  $n$  : si  $n \leq 1$ , les deux facteurs sont négatifs ou nuls ; si  $n \geq 2$ , ils sont positifs ou nuls ; il n'existe aucun entier strictement compris entre 1 et 2. Donc  $(n-1)(n-2) \geq 0$ , et  $u_n \leq 2$ , avec égalité si et seulement si  $n \in \{1, 2\}$  : **le plus grand terme est**  $u_1 = u_2 = 2$ .

Pour un réel, c'est faux : en  $x = \frac{3}{2}$ ,  $(x-1)(x-2) = -\frac{1}{4} < 0$ , et  $\frac{x^2+3x}{x^2+1} = \frac{27}{13} > 2$ . Le fait que  $n$  soit entier est essentiel.

3.  $u_n - 1 = \frac{3n-1}{n^2+1} > 0$  pour  $n \geq 1$  :  $u_n > 1$ .

4. On réduit au même dénominateur  $(n^2+1)(n^2+2n+2)$  ; le numérateur vaut

$$(n^2+5n+4)(n^2+1) - (n^2+3n)(n^2+2n+2) = (n^4+5n^3+5n^2+5n+4) - (n^4+5n^3+8n^2+6n) \\ = -3n^2 - n + 4 = -(3n+4)(n-1).$$

Ainsi  $u_2 - u_1 = 0$  et  $u_{n+1} - u_n < 0$  pour  $n \geq 2$  :  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante, strictement à partir du rang 2 (et  $u_0 < u_1$ ).

5. Pour  $n \geq 1$  :  $u_n \leq 1,01 \iff \frac{3n-1}{n^2+1} \leq \frac{1}{100} \iff 300n - 100 \leq n^2 + 1 \iff n(n-300) \geq -101$ . Si  $1 \leq n \leq 299$  :  $n(300-n) \geq 299 > 101$ , l'inégalité est fautive ; si  $n \geq 300$  :  $n(n-300) \geq 0 \geq -101$ , elle est vraie.  $n_0 = 300$  ( $u_{300} = \frac{90900}{90001} \approx 1,00999$ ). Pour  $n \geq 300$ , la décroissance et la question 3 donnent  $1 < u_n \leq u_{300} \leq 1,01$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 40

1. **Vrai**. Si  $(u_n)$  est croissante,  $u_n \geq u_0$  pour tout  $n$  (récurrence immédiate) : elle est minorée par son premier terme.
2. **Faux**.  $u_n = v_n = n - 3$  sont croissantes, mais  $u_n v_n = (n-3)^2$  vaut 9, 4, 1, 0, 1, ... **Vrai** si  $u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$  :  $u_{n+1} v_{n+1} - u_n v_n = u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) + v_n(u_{n+1} - u_n) \geq 0$  (somme de produits de positifs).
3. **Faux**.  $u_n = -n$  :  $(u_n^2) = (n^2)$  est croissante, mais  $(u_n)$  est décroissante.
4. **Faux**.  $f(x) = (3x-1)^2$  :  $u_n = (3n-1)^2$  vaut 1, 4, 25, 64, ... et est croissante ( $3n-1$  est positif et croissant pour  $n \geq 1$ , et  $u_0 < u_1$ ), mais  $f(0) = 1 > f(\frac{1}{3}) = 0$  :  $f$  n'est pas croissante sur  $[0, +\infty[$ .
5. **Faux**.  $u_n = (-1)^n$  :  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont constantes (donc croissantes), mais  $u_0 = 1 > u_1 = -1$ .
6. **Faux**.  $u_n = n(1 + (-1)^n)$  vaut 0, 0, 4, 0, 8, 0, ... :  $u_{2k} = 4k$  dépasse tout réel  $M$  dès que  $k > \frac{M}{4}$  (non majorée), mais pour tout rang  $N$ , avec  $k \geq 1$  et  $2k \geq N$  :  $u_{2k} = 4k > 0 = u_{2k+1}$  ; elle n'est croissante à partir d'aucun rang.
7. **Vrai pour la somme** : si  $u_n \leq M$  et  $|v_n| \leq K$ , alors  $u_n + v_n \leq M + K$ . **Faux pour le produit** :  $u_n = -n$  (majorée par 0) et  $v_n = -1$  (bornée) donnent  $u_n v_n = n$ , non majorée.

## ■ Corrigé de l'exercice 41

1. Récurrence :  $u_0 = 0 \geq 0$ , et si  $u_n \geq 0$ , alors  $u_n + n \geq 0$ , donc  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}$  existe et est positif.  
 $u_1 = \sqrt{0} = 0$ ,  $u_2 = \sqrt{0+1} = 1$ ,  $u_3 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ ,  $u_4 = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ .
2. Soit  $P(n)$  : «  $u_n \leq u_{n+1}$  ». Initialisation :  $u_0 = 0 \leq u_1 = 0$ . Hérédité : si  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors  $u_n + n < u_{n+1} + (n+1)$ , et la fonction racine carrée est strictement croissante :  $u_{n+1} < u_{n+2}$ .  
 Conclusion :  $(u_n)$  est croissante. L'hérédité donne même  $u_{n+1} < u_{n+2}$  pour tout  $n$  : elle est strictement croissante à partir du rang 1, mais pas sur  $\mathbb{N}$  ( $u_0 = u_1$ ).
3. Soit  $Q(n)$  : «  $u_n \geq \sqrt{n}$  », pour  $n \geq 3$ .  $Q(3)$  :  $u_3 = \sqrt{3}$ . Si  $Q(n)$  est vraie ( $n \geq 3$ ) :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n} \geq \sqrt{n + \sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1}$ , car  $\sqrt{n} \geq 1$ . Donc  $u_n \geq \sqrt{n}$  ( $n \geq 3$ ).  
 Non majorée : soit  $M \in \mathbb{R}$  et  $n = E(M^2) + 3$  ; alors  $n \geq 3$  et  $n > M^2$ , d'où  $u_n \geq \sqrt{n} > \sqrt{M^2} = |M| \geq M$ .
4. Soit  $R(n)$  : «  $u_n \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}$  ».  $R(0)$  :  $0 \leq \frac{1}{2}$ . Si  $R(n)$  est vraie,  $u_{n+1} \leq \sqrt{n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}}$  ; or  

$$\left(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right)^2 = n + \sqrt{n+1} + \frac{5}{4} \geq n + \sqrt{n} + \frac{1}{2},$$
 d'où  $\sqrt{n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}$  et  $R(n+1)$ .  $u_n \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}$  pour tout  $n$ .
5. Pour  $n = 2500 = 50^2$  :  $50 \leq u_{2500} \leq 50,5 < 51$ , donc  $E(u_{2500}) = 50$ . De même, si  $k \geq 2$ , alors  $k^2 \geq 3$  et  $k \leq u_{k^2} \leq k + \frac{1}{2} < k+1$  :  $E(u_{k^2}) = k$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 42

1.  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = \frac{9}{4}$ ,  $u_3 = \frac{64}{27}$  ;  $v_1 = 4$ ,  $v_2 = \frac{27}{8}$ ,  $v_3 = \frac{256}{81}$ .
2. Les termes sont strictement positifs. On fait apparaître l'exposant  $n+1$  :  

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
 Bernoulli avec  $q = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$  et  $m = n+1$  :  $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$ . Donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n} = 1$  :  $(u_n)$  est croissante.
3. De même :  $\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$ , et  $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ . Bernoulli ( $q = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ,  $m = n+1$ ) :  

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) = \frac{(n+1)(n^2 + 3n + 1)}{n(n+2)^2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1.$$
 Les termes étant positifs,  $v_{n+1} < v_n$  :  $(v_n)$  est strictement décroissante.
4.  $v_n = u_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > u_n$ . Soient  $n, m \geq 1$  et  $p$  le plus grand des deux :  $u_n \leq u_p < v_p \leq v_m$  (monotonies des questions 2 et 3) :  $u_n < v_m$ . Avec  $m = 5$  :  $v_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} \approx 2,986 < 3$ , et  $u_n \geq u_1 = 2$  :  $2 \leq u_n < 3$  pour tout  $n \geq 1$  ( $(u_n)$  est croissante et majorée).

32

## Corrigés : suites arithmétiques

## ■ Corrigé de l'exercice 43

- On calcule  $u_{n+1} - u_n$  (ou on simplifie d'abord la formule).
  - $a_{n+1} - a_n = \frac{5-2n-2-5+2n}{3} = -\frac{2}{3}$  : arithmétique,  $a_0 = \frac{5}{3}$ ,  $r = -\frac{2}{3}$ .
  - $2n^2 + 5n - 3 = (2n-1)(n+3)$  et  $n+3 \neq 0$ , donc  $b_n = 2n-1$  : arithmétique,  $b_0 = -1$ ,  $r = 2$ .
  - $4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$  et  $2n+1 \geq 0$ , donc  $c_n = 2n+1$  : arithmétique,  $c_0 = 1$ ,  $r = 2$ .
  - $d_1 = 3$ ,  $d_2 = 4$  :  $d_1 - d_0 = 0 \neq d_2 - d_1 = 1$  : non arithmétique (la différence  $d_{n+1} - d_n = n$  dépend de  $n$ ).
- $u_{15} = u_4 + 11r$ , donc  $-22 = 11 + 11r$ ,  $r = -3$  ;  $u_0 = u_4 - 4r = 23$  et  $u_n = 23 - 3n$ .
  - $23 - 3n = -100 \iff n = 41$  :  $-100 = u_{41}$ .  $23 - 3n = 0 \iff n = \frac{23}{3} \notin \mathbb{N}$  : 0 n'est pas un terme.
  - 21 termes, de  $u_0 = 23$  à  $u_{20} = -37$  :  $u_0 + \dots + u_{20} = 21 \times \frac{23+(-37)}{2} = -147$ .
  - $S_n - S_{n-1} = u_n$ , et  $u_n > 0 \iff n < \frac{23}{3} \iff n \leq 7$ . La suite  $(S_n)$  croît donc jusqu'au rang 7, puis décroît ( $u_n < 0$  pour  $n \geq 8$ ) : maximum pour  $n = 7$ ,  $S_7 = 8 \times \frac{23+2}{2} = 100$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 44

- Les termes de A sont les  $1 + 5k$ , et  $1 + 5k = 2026 \iff k = 405$  :  $k$  varie de 0 à 405, soit 406 termes.  $A = 406 \times \frac{1+2026}{2} = 203 \times 2027 = 411\,481$ .  
B compte  $40 - 10 + 1 = 31$  termes (et non 30), de raison 2, de 17 à 77 :  $B = 31 \times \frac{17+77}{2} = 31 \times 47 = 1457$ .
- Multiples de 3 : 3, 6, ..., 300 (100 termes), somme  $100 \times \frac{3+300}{2} = 15\,150$ . Multiples de 5 : 60 termes, somme  $60 \times \frac{5+300}{2} = 9150$ . Les multiples de 15 (20 termes, somme  $20 \times \frac{15+300}{2} = 3150$ ) sont comptés deux fois :  $C = 15\,150 + 9150 - 3150 = 21\,150$ .
- Le  $k$ -ième terme est  $6k - 4$ , et la somme des  $n$  premiers vaut  $S_n = n \times \frac{2+6n-4}{2} = n(3n-1)$ . La suite  $(S_n)$  est croissante (on ajoute des termes positifs), avec  $S_{26} = 26 \times 77 = 2002 \leq 2026$  et  $S_{27} = 27 \times 80 = 2160 > 2026$  : il faut au minimum 27 termes.

## ■ Corrigé de l'exercice 45

- On utilise  $2b = a + c$  :  $2(x^2 + 1) = (2x-1) + (4x+3) \iff 2x^2 - 6x = 0 \iff 2x(x-3) = 0$  :  $x \in \{0, 3\}$ . Pour  $x = 0$  : -1, 1, 3 (raison 2) ; pour  $x = 3$  : 5, 10, 15 (raison 5).
- Les dénominateurs sont strictement positifs. En multipliant par  $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$  :  

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \iff 2(a+b)(b+c) = (c+a)(a+2b+c).$$
 Or  $2(a+b)(b+c) = 2ab+2ac+2b^2+2bc$  et  $(c+a)(a+2b+c) = (a+c)^2+2b(a+c) = a^2+2ac+c^2+2ab+2bc$  ; leur différence vaut  $2b^2 - a^2 - c^2$ . Donc la condition équivaut à  $2b^2 = a^2 + c^2$ , c'est-à-dire à  $a^2, b^2, c^2$  termes consécutifs d'une suite arithmétique ✓. Avec  $(1, 5, 7)$  : 1, 25, 49 (raison 24) et  $\frac{1}{8}, \frac{1}{6}$  (raison  $\frac{1}{24}$ ).

3. a)  $A = B - r$  et  $C = B + r$  ; comme  $A + B + C = \pi$  :  $3B = \pi$ ,  $B = \frac{\pi}{3}$ .

b) Par la formule de transformation :  $\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{C-A}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos r = \sqrt{3} \cos r$ .  
Donc  $\sqrt{3} \cos r = \frac{\sqrt{6}}{2} \iff \cos r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Comme  $A = \frac{\pi}{3} - r > 0$ , on a  $0 \leq r < \frac{\pi}{3}$ , d'où  $r = \frac{\pi}{4}$  :

$$A = \frac{\pi}{12}, C = \frac{7\pi}{12} \quad (\text{contrôle : } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \checkmark).$$

### ■ Corrigé de l'exercice 46

1. a) Les nombres de sièges forment une suite arithmétique de premier terme  $s_1 = 18$  et de raison 3 :  $s_n = 18 + 3(n-1) = 3n + 15$ ,  $s_{25} = 90$ .

b)  $T_{25} = 25 \times \frac{18+90}{2} = 1350$  places.

c) Avec  $n$  rangées :  $T_n = n \times \frac{18+3n+15}{2} = \frac{3n(n+11)}{2}$ , suite croissante.  $T_{31} = \frac{3 \times 31 \times 42}{2} = 1953 < 2000$  et  $T_{32} = \frac{3 \times 32 \times 43}{2} = 2064 \geq 2000$  : **il faut 32 rangées.**

2. a) Salaire du mois  $n$  avec A :  $a_n = 6000 + 50(n-1)$ .  $a_n > 6600 \iff 50(n-1) > 600 \iff n > 13$  : **à partir du 14<sup>e</sup> mois** ( $a_{13} = 6600$ ).

b)  $A_n = n \times \frac{a_1 + a_n}{2} = n \times \frac{12000 + 50(n-1)}{2} = 6000n + 25n(n-1)$  et  $B_n = 6600n$  ; donc  $A_n - B_n = 25n(n-1) - 600n = 25n(n-1-24) = 25n(n-25)$ .

c) 2 ans :  $A_{24} - B_{24} = 25 \times 24 \times (-1) = -600$  : **le contrat B** rapporte 600 DH de plus. 3 ans :  $A_{36} - B_{36} = 25 \times 36 \times 11 = 9900$  : **le contrat A** rapporte 9900 DH de plus. (Les cumuls sont égaux au bout de 25 mois exactement.)

### ■ Corrigé de l'exercice 47

1. a)  $u_1 = S_1 = 5$  et, pour  $n \geq 2$  :  $u_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 2n - 3(n-1)^2 - 2(n-1) = 6n - 1$ , formule encore vraie pour  $n = 1$ . Ainsi  $u_{n+1} - u_n = 6$  : **arithmétique,  $u_1 = 5$ ,  $r = 6$ .**

b)  $u_1 = a + b + c$  et, pour  $n \geq 2$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1} = a(2n-1) + b$ . Donc  $u_{n+1} - u_n = 2a$  pour  $n \geq 2$ , et  $u_2 - u_1 = (3a+b) - (a+b+c) = 2a-c$ .

Si  $(u_n)$  est arithmétique :  $u_2 - u_1 = u_3 - u_2$ , soit  $2a-c = 2a$ , d'où  $c = 0$ . Si  $c = 0$  :  $u_n = 2an + b - a$  pour tout  $n \geq 1$  (y compris  $n = 1$ ), suite arithmétique de raison  $2a$ .  **$(u_n)$  arithmétique  $\iff c = 0$ .**

2.  $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}r = n \left[ u_1 + \frac{(n-1)r}{2} \right]$ . Donc

$$S_p - S_q = (p-q)u_1 + \frac{r}{2}(p^2 - p - q^2 + q) = (p-q) \left[ u_1 + \frac{(p+q-1)r}{2} \right].$$

Si  $S_p = S_q$  avec  $p \neq q$ , le crochet est nul, et  $S_{p+q} = (p+q) \left[ u_1 + \frac{(p+q-1)r}{2} \right] = 0$ .

Illustration :  $S_n = n(23 - (n-1)) = n(24 - n)$ , et  $S_p = S_q \iff (p-q)(24 - p - q) = 0$  : les couples sont les  $(p, 24 - p)$  avec  $1 \leq p \leq 23$ ,  $p \neq 12$  (par exemple  $S_{10} = S_{14} = 140$ ), et  $S_{24} = 0$  ( $23 + 21 + \dots + (-23) = 0$  par symétrie).

3. Cas  $r \neq 0$ .  $u_{k+1} - u_k = r$  donne  $\frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right)$ . On télescope :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{r} \times \frac{u_n - u_0}{u_0 u_n} = \frac{1}{r} \times \frac{nr}{u_0 u_n} = \frac{n}{u_0 u_n}.$$

Cas  $r = 0$ . Chaque terme vaut  $\frac{1}{u_0^2}$  et la somme vaut  $\frac{n}{u_0^2} = \frac{n}{u_0 u_n}$  ✓. Application :  $u_k = 3k + 1$  ( $u_0 = 1$ ,

$$r = 3, u_{100} = 301) : \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \boxed{\frac{100}{301}}.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 48

1. a) C'est une somme de  $k$  termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 :  $k \times \frac{a+(a+k-1)}{2} = \frac{k(2a+k-1)}{2}$ .

b) On cherche  $k \geq 2$  et  $a \geq 1$  tels que  $km = 4052 = 2^2 \times 1013$ , où  $m = 2a + k - 1$ . Comme  $m - k = 2a - 1$  est impair et  $\geq 1$  :  $m > k$  et  $k, m$  sont de parités contraires. Le facteur impair divise 4052, donc vaut 1 ou 1013 ; l'autre vaut 4052 ou 4. Avec  $2 \leq k < m$ , il reste seulement  $k = 4, m = 1013$ , d'où  $a = \frac{m-k+1}{2} = 505$  :

$$\boxed{2026 = 505 + 506 + 507 + 508} \quad \text{est la seule écriture.}$$

2. a) Par l'absurde, si  $2^j = \frac{k(2a+k-1)}{2}$  avec  $k \geq 2, a \geq 1$  :  $km = 2^{j+1}$ , où  $m = 2a + k - 1 \geq 3$ . L'un des deux facteurs est impair (parités contraires) et divise  $2^{j+1}$  : il vaut 1, ce qui contredit  $k \geq 2$  et  $m \geq 3$ . **Aucune puissance de 2 ne convient.**

b) Soit  $N = 2^s d$ ,  $d$  impair,  $d \geq 3$ . Posons  $k = \min(2^{s+1}, d)$  et  $m = \max(2^{s+1}, d)$  : ils sont distincts (l'un est pair, l'autre impair), donc  $k < m, k \geq 2$ , et  $m - k$  est impair ;  $a = \frac{m-k+1}{2}$  est un entier  $\geq 1$ . Alors  $\frac{k(2a+k-1)}{2} = \frac{km}{2} = \frac{2^{s+1}d}{2} = N$  ✓. (Exemples :  $N = 2026$  redonne  $k = 4$  ;  $N = 15$  :  $k = 2, a = 7, 15 = 7 + 8$ .)

3. a)  $(5p + 2)^2 = 25p^2 + 20p + 4 = 5(5p^2 + 4p) + 4 = u_{5p^2+4p}$  et  $(5p + 3)^2 = 25p^2 + 30p + 9 = 5(5p^2 + 6p + 1) + 4 = u_{5p^2+6p+1}$ . Les carrés  $(5p + 2)^2$  sont deux à deux distincts : **la suite contient une infinité de carrés** (4, 9, 49, 64, 144, ...).

b) Par l'absurde, si  $x^2 = 7n + 3$  avec  $x \in \mathbb{N}$  : par division euclidienne,  $x = 7q + p$  avec  $0 \leq p \leq 6$ , et  $x^2 = 7(7q^2 + 2qp) + p^2$ . Les restes de  $p^2$  (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36) dans la division par 7 sont 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1 : le reste de  $x^2$  appartient à  $\{0, 1, 2, 4\}$  et ne vaut jamais 3. Contradiction :  $(v_n)$  ne contient aucun carré.

33

## Corrigés : suites géométriques

### ■ Corrigé de l'exercice 49

1. Pour une suite géométrique,  $u_4 = u_1 q^3$ , donc  $q^3 = \frac{48}{6} = 8$  et  $\boxed{q = 2}$  (seul réel dont le cube vaut 8) ; puis  $u_0 = \frac{u_1}{q} = 3$  et  $\boxed{u_n = 3 \times 2^n}$ .  $u_0 + \dots + u_7 = 3 \times \frac{2^8-1}{2-1} = \boxed{765}$ . La somme  $u_5 + \dots + u_{12}$  compte  $12 - 5 + 1 = 8$  termes, de premier terme  $u_5 = 96$  :  $96 \times \frac{2^8-1}{2-1} = \boxed{24\,480}$ .  $u_n > 10^5 \iff 2^n > \frac{10^5}{3} \approx 33\,333,3$ . Or  $(2^n)$  est croissante,  $2^{15} = 32\,768$  et  $2^{16} = 65\,536$  :  $\boxed{n = 16}$  ( $u_{15} = 98\,304, u_{16} = 196\,608$ ).
2. Pour une suite géométrique,  $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1)$ .  $(a_n)$  : termes **négatifs**,  $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}a_n > 0$  : **strictement croissante**.  $(b_n)$  : termes **positifs**,  $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{4}b_n < 0$  : **strictement décroissante**.  $(c_n)$  : termes **négatifs**,  $c_{n+1} - c_n = 2c_n < 0$  : **strictement décroissante**.  $(d_n)$  :  $d_n > 0$  si  $n$  est pair,  $d_n < 0$  si  $n$  est impair ;  $d_0 = 4 > d_1 = -2 < d_2 = 1$  : **pas monotone** (raison négative).

## ■ Corrigé de l'exercice 50

- $C_1 = 10\,000 \times 1,06 = 10\,600$ ,  $C_2 = 10\,600 \times 1,06 = 11\,236$ . Augmenter de 6 %, c'est multiplier par 1,06 :  $C_{n+1} = 1,06 C_n$ , donc  $(C_n)$  est géométrique de raison 1,06 et  $C_n = 10\,000 \times 1,06^n$ .
- $I_n = 1,06 C_n - C_n = 0,06 C_n = 600 \times 1,06^n$  :  $(I_n)$  est **géométrique** de raison 1,06 et de premier terme 600. La somme est télescopique :  $\sum_{k=0}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) = C_n - C_0$  (on retrouve  $600 \times \frac{1,06^n - 1}{0,06} = 10\,000(1,06^n - 1)$ ). En 10 ans :  $10\,000(1,06^{10} - 1) \approx 7908$  DH.
- $C_n \geq 20\,000 \iff 1,06^n \geq 2$ . La suite  $(1,06^n)$  est croissante,  $1,06^{11} \approx 1,898 < 2$  et  $1,06^{12} \approx 2,012 \geq 2$  : le capital double au bout de **12 ans**, et  $\frac{72}{6} = 12$  ✓. À 4 % :  $1,04^{17} \approx 1,948 < 2 \leq 1,04^{18} \approx 2,026$  : 18 ans =  $\frac{72}{4}$  ✓. À 8 % : la règle annonce 9 ans, mais  $1,08^9 \approx 1,9990 < 2$  (le capital vaut environ 19 990 DH) : il faut **10 ans** ( $1,08^{10} \approx 2,159$ ) : la règle est en défaut, de justesse.

## ■ Corrigé de l'exercice 51

- $p_1 = 0,8 \times 1200 + 60 = 1020$ ,  $p_2 = 0,8 \times 1020 + 60 = 876$ . Éliminer 20 % laisse 80 % du polluant, soit  $0,8 p_n$ , puis on ajoute 60 :  $p_{n+1} = 0,8 p_n + 60$ .  $p_1 - p_0 = -180 \neq p_2 - p_1 = -144$  : pas arithmétique ;  $\frac{p_1}{p_0} = 0,85 \neq \frac{p_2}{p_1} \approx 0,859$  : pas géométrique.
- $\ell = 0,8\ell + 60 \iff 0,2\ell = 60 \iff \ell = 300$ . Avec  $v_n = p_n - 300$  :  $v_{n+1} = 0,8 p_n + 60 - (0,8 \times 300 + 60) = 0,8(p_n - 300) = 0,8 v_n$  :  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,8, avec  $v_0 = 900$ . Donc  $p_n = 300 + 900 \times 0,8^n$ .
- $p_{n+1} - p_n = 900 \times 0,8^n(0,8 - 1) = -180 \times 0,8^n < 0$  :  $(p_n)$  est **strictement décroissante**. Comme  $900 \times 0,8^n > 0$ ,  $p_n > 300$  : le lac ne contiendra **jamais** moins de 300 kg.  $p_n < 400 \iff 0,8^n < \frac{1}{9} \approx 0,111$  ; or  $(0,8^n)$  décroît,  $0,8^9 \approx 0,134$  et  $0,8^{10} \approx 0,107$  : il faut **10 ans** ( $p_9 \approx 420,8$ ,  $p_{10} \approx 396,6$ ).
- Le point fixe est  $5a$  ( $\ell' = 0,8\ell' + a \iff \ell' = 5a$ ) et, comme en 2,  $q_{n+1} - 5a = 0,8(q_n - 5a)$ , d'où  $q_n = 5a + (1200 - 5a) \times 0,8^n$ . Comme  $a < 240$ ,  $1200 - 5a > 0$ , donc  $q_n > 5a$  : **si**  $a \geq 50$ ,  $q_n > 250$  pour tout  $n$  et l'objectif n'est jamais atteint. **Pour**  $a = 40$  :  $q_n = 200 + 1000 \times 0,8^n < 250 \iff 0,8^n < 0,05$  ;  $0,8^{13} \approx 0,055$  et  $0,8^{14} \approx 0,044$  : **14 ans**.

## ■ Corrigé de l'exercice 52

- À chaque coin de  $K_0$ , le triangle découpé est rectangle, de côtés de l'angle droit 2 et 4 (un tiers et deux tiers de 6) :  $c_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . De même, les triangles découpés dans  $K_n$  ont pour côtés  $\frac{c_n}{3}$  et  $\frac{2c_n}{3}$  :  $c_{n+1}^2 = \frac{c_n^2}{9} + \frac{4c_n^2}{9} = \frac{5}{9}c_n^2$ , d'où  $c_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{3}c_n$ . Ainsi  $(c_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , et  $a_{n+1} = c_{n+1}^2 = \frac{5}{9}a_n$  :  $(a_n)$  est géométrique de raison  $\frac{5}{9}$ ,  $a_n = 36\left(\frac{5}{9}\right)^n$ .
- $a_n < 1 \iff \left(\frac{9}{5}\right)^n > 36$  ;  $\left(\frac{9}{5}\right)^6 \approx 34,0$  et  $\left(\frac{9}{5}\right)^7 \approx 61,2$ , et  $(a_n)$  décroît :  **$n = 7$**  ( $a_6 \approx 1,06$ ,  $a_7 \approx 0,59$ ).  
Puis  $A_n = 36 \times \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{9}} = 81 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}\right) < 81$ , car  $\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1} > 0$ .

3. Le périmètre de  $K_k$  est  $4c_k = 24 \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^k$ , de raison  $r = \frac{\sqrt{5}}{3} \in ]0, 1[$  ( $\sqrt{5} < 3$ ). Donc

$$L_n = 24 \times \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{72}{3 - \sqrt{5}} (1 - r^{n+1}) = \frac{72(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} (1 - r^{n+1}) = \boxed{18(3 + \sqrt{5}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n+1}\right)},$$

et  $r^{n+1} > 0$  donne  $L_n < 18(3 + \sqrt{5}) \approx 94,25$  cm : la longueur totale tracée reste inférieure à 95 cm.

### ■ Corrigé de l'exercice 53

- a)  $(a+b+c)(a-b+c) = (a+c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , car  $ac = b^2$ .

b) D'après a),  $a-b+c = \frac{364}{26} = 14$  ; avec  $a+b+c = 26$ , on obtient  $2b = 12$ , soit  $b = 6$ , puis  $a+c = 20$  et  $ac = b^2 = 36$  :  $a$  et  $c$  sont les racines de  $t^2 - 20t + 36 = (t-2)(t-18)$ .  $\boxed{2, 6, 18}$  (raison 3) ou  $\boxed{18, 6, 2}$  (raison  $\frac{1}{3}$ ) ;  $4 + 36 + 324 = 364$  ✓.
- $b = aq$  et  $c = aq^2$ . La condition «  $a, 2b, 3c$  arithmétique » s'écrit  $2 \times 2b = a + 3c$ , soit  $4aq = a + 3aq^2$ , et, comme  $a \neq 0$  :  $3q^2 - 4q + 1 = 0 \iff (q-1)(3q-1) = 0 \iff \boxed{q \in \left\{1, \frac{1}{3}\right\}}$ . Réciproquement,  $a, 2a, 3a$  et  $a, \frac{2a}{3}, \frac{a}{3}$  sont bien arithmétiques.
- a) Si  $q \geq 1$ , alors  $a \leq aq \leq aq^2$ . Trois longueurs  $x \leq y \leq z$  forment un triangle si et seulement si  $z < x+y$  (les deux autres inégalités triangulaires sont alors automatiques). Ici :  $aq^2 < a + aq \iff q^2 - q - 1 < 0$ . Le trinôme a pour racines  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ , et il est négatif entre elles ; comme  $q \geq 1 > 0$  :  $\boxed{\text{triangle} \iff 1 \leq q < \varphi}$ .

b)  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , donc  $\varphi(\varphi - 1) = 1$  et  $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Si  $0 < q < 1$ , les longueurs s'écrivent  $a', a'Q, a'Q^2$  avec  $a' = aq^2$  et  $Q = \frac{1}{q} > 1$  : d'après a), il faut et il suffit que  $\frac{1}{q} < \varphi$ , soit  $q > \frac{1}{\varphi}$ . Bilan :  $\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ .

c) Si  $q \geq 1$ , l'hypoténuse est le plus grand côté :  $a^2q^4 = a^2 + a^2q^2 \iff q^4 - q^2 - 1 = 0 \iff q^2 = \varphi$  (seule racine positive de  $t^2 - t - 1$ ), soit  $q = \sqrt{\varphi} \approx 1,272$ , qui vérifie bien  $1 \leq \sqrt{\varphi} < \varphi$ . Par la symétrie de b) :  $\boxed{q = \sqrt{\varphi} \text{ ou } q = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}}$  (« triangle de Kepler »).

### ■ Corrigé de l'exercice 54

- $D_1 = 1,005 \times 120\,000 - 2000 = \boxed{118\,600}$ ,  $D_2 = 1,005 \times 118\,600 - 2000 = 119\,193 - 2000 = \boxed{117\,193}$ . Ensuite,  $\ell = 1,005\ell - M \iff 0,005\ell = M \iff \boxed{\ell = 200M}$ . Puis  $D_{n+1} - \ell = 1,005D_n - M - (1,005\ell - M) = 1,005(D_n - \ell)$  :  $(D_n - \ell)$  est géométrique de raison 1,005, de premier terme  $120\,000 - 200M$ , d'où  $\boxed{D_n = 200M + (120\,000 - 200M) \times 1,005^n}$ .
- $D_{n+1} - D_n = 0,005D_n - M = 0,005(D_n - 200M) = 0,005(120\,000 - 200M) \times 1,005^n$ . Si  $M \leq 600$ , alors  $120\,000 - 200M \geq 0$  et  $D_{n+1} \geq D_n$  : **la dette ne diminue jamais** (elle reste égale à 120 000 si  $M = 600$ ). Le nombre 600 est l'intérêt du premier mois (0,5 % de 120 000) : une mensualité  $M \leq 600$  ne paie même pas les intérêts.
- Avec  $M = 2000$  :  $\ell = 400\,000$  et  $\boxed{D_n = 400\,000 - 280\,000 \times 1,005^n}$  ;  $D_{n+1} - D_n = -1400 \times 1,005^n < 0$  :  $(D_n)$  est **strictement décroissante**. Le crédit est remboursé dès que  $D_n \leq 0$ , c'est-à-dire

$1,005^n \geq \frac{400\,000}{280\,000} = \frac{10}{7} \approx 1,4286$  :  $1,005^{71} \approx 1,4249$  et  $1,005^{72} \approx 1,4320$ . Ainsi  $D_{71} \approx 1022,5$  DH : la 72<sup>e</sup> mensualité (environ 1027,6 DH) solde le crédit : **72 mois**, soit 6 ans.

4.  $D_{60} = 0 \iff 200M(1,005^{60} - 1) = 120\,000 \times 1,005^{60} \iff M = \frac{600 \times 1,005^{60}}{1,005^{60} - 1} \approx 2319,94$  DH  
 $(1,005^{60} \approx 1,34885)$ . Le couple verse  $60M \approx 139\,196$  DH : le coût du crédit est d'environ **19 196 DH**.

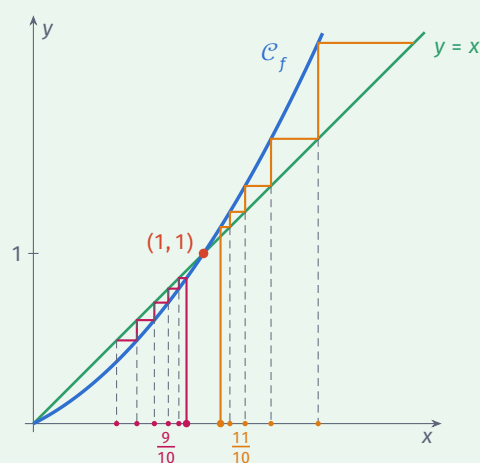
34

## Corrigés : suites récurrentes

### ■ Corrigé de l'exercice 55

1.  $u_1 = f(2) = \boxed{3}$ ,  $u_2 = f(3) = \boxed{6}$ ,  $u_3 = f(6) = \boxed{21}$ ,  
 $u_4 = f(21) = \boxed{231}$ . Comme  $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ ,  
on a bien  $u_{n+1} = 1 + 2 + \dots + u_n$ . **Récurrence**,  $P(n)$  :  
«  $u_n \in \mathbb{N}$  ». **Initialisation**.  $u_0 = 2 \in \mathbb{N}$ . **Hérédité**. Si  
 $u_n \in \mathbb{N}$ , l'un des deux entiers consécutifs  $u_n, u_n + 1$   
est pair, donc  $u_n(u_n + 1)$  est pair et  $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 1)}{2} \in \mathbb{N}$ .  
**Conclusion**. Tous les  $u_n$  sont des entiers naturels.

2. Pour  $x \neq y$  dans  $[0, +\infty[$  :  $f(x) - f(y) = \frac{(x^2 - y^2) + (x - y)}{2}$ ,  
d'où le taux  $\frac{x+y+1}{2} > 0$  :  $f$  est **strictement croissante**.  
Puis  $f(x) - x = \frac{x^2 + x - 2x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$  : les points fixes sont  
**0 et 1**.



3. **Récurrence**,  $P(n)$  : «  $0 < w_n < 1$  ». Vraie au rang 0 ; si  $0 < w_n < 1$ , la stricte croissance de  $f$  donne  
 $f(0) < f(w_n) < f(1)$ , soit  $0 < w_{n+1} < 1$ . Donc  $0 < w_n < 1$  pour tout  $n$ , et  $w_{n+1} - w_n = \frac{w_n(w_n - 1)}{2} < 0$  :  
 $(w_n)$  est **strictement décroissante**.

4. De même,  $w_n > 1$  pour tout  $n$  (car  $f(x) > f(1) = 1$  si  $x > 1$ ), donc  $w_{n+1} - w_n = \frac{w_n(w_n - 1)}{2} > 0$  :  $(w_n)$  est  
**croissante** et  $w_n \geq w_0$ . La fonction  $x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  (produit de fonctions  
positives croissantes), d'où  $w_{n+1} - w_n \geq \delta = \frac{w_0(w_0 - 1)}{2} > 0$ , puis, en sommant,  $w_n \geq w_0 + n\delta$ . Pour  
tout réel  $M$ , l'entier  $n = E\left(\frac{|M|}{\delta}\right) + 1$  vérifie  $w_n > n\delta > |M| \geq M$  :  $(w_n)$  **n'est pas majorée**. Pour  $(u_n)$  :  
 $w_0 = 2$ ,  $\delta = 1$ , donc  $\boxed{u_n \geq n + 2}$  ;  $(u_n)$  est croissante et non majorée.

Sur la figure,  $f$  est croissante : on obtient des **escaliers**. Depuis  $\frac{9}{10}$ , les termes descendent vers  
0 ( $w_1 = 0,855$ ,  $w_2 \approx 0,793$ , ...); depuis  $\frac{11}{10}$ , ils montent de plus en plus vite ( $w_5 \approx 2,24$ ) : le point  
fixe 1 « repousse » les termes, tandis que les termes compris entre 0 et 1 restent entre 0 et 1.

## ■ Corrigé de l'exercice 56

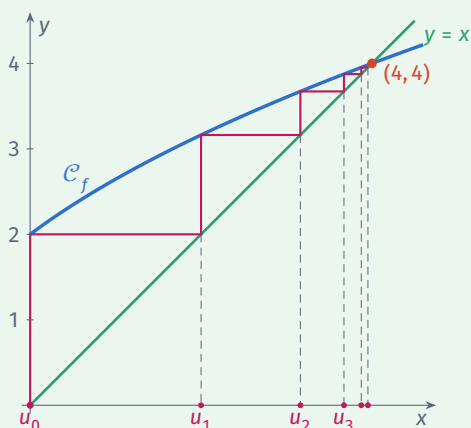
1.  $u_1 = \sqrt{4} = 2$ ,  $u_2 = \sqrt{10}$ . La fonction  $x \mapsto 3x + 4$  est strictement croissante et positive sur  $[-\frac{4}{3}, +\infty[$ , et la racine carrée est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  : leur composée  $f$  est **strictement croissante**. Et  $f(4) = \sqrt{16} = 4$ . *Initialisation.*  $0 \leq u_0 = 0 < 4$ . *Hérédité.* Si  $0 \leq u_n < 4$ , alors  $f(0) \leq f(u_n) < f(4)$ , soit  $2 \leq u_{n+1} < 4$ , donc  $0 \leq u_{n+1} < 4$ . *Conclusion.*  $0 \leq u_n < 4$  pour tout  $n$ .

2. Pour  $x \in [0, 4]$ , avec la quantité conjuguée ( $\sqrt{3x+4} + x \geq 2 > 0$ ) :

$$f(x) - x = \frac{3x+4-x^2}{\sqrt{3x+4}+x} = \frac{(4-x)(x+1)}{\sqrt{3x+4}+x}.$$

Pour  $x = u_n \in [0, 4[$ , ce quotient est  $> 0$  :  $u_{n+1} > u_n$ ,  $(u_n)$  est **strictement croissante**.

3.  $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$ . Comme  $u_n \geq 0$ ,  $\sqrt{3u_n + 4} \geq 2$  et le dénominateur est  $\geq 6$  :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ . Par récurrence immédiate,  $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$ , d'où  $4 - \frac{4}{2^n} \leq u_n < 4$ . Pour  $n \geq 9$  :  $\frac{4}{2^n} \leq \frac{4}{512} < 0,01$ , donc  $u_n > 3,99$ . Figure ci-dessus :  $f$  est croissante, les termes montent en **escalier** vers le point  $(4, 4)$ , sans l'atteindre.



## ■ Corrigé de l'exercice 57

1.  $u_1 = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}$ ,  $u_2 = \frac{9/5}{11/5} = \frac{9}{11}$ ,  $u_3 = \frac{27/11}{29/11} = \frac{27}{29}$ .  $\frac{3}{2} - \frac{3}{2(2x+1)} = \frac{3(2x+1)-3}{2(2x+1)} = \frac{3x}{2x+1}$  ✓. Sur  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ ,  $2x+1$  est positif et croît, donc  $\frac{1}{2x+1}$  décroît et  $f$  est **strictement croissante**. Comme  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  : si  $0 < u_n < 1$ , alors  $0 < u_{n+1} < 1$ , et  $0 < u_0 < 1$  : par récurrence,  $0 < u_n < 1$ . Enfin  $f(x) - x = \frac{3x-2x^2-x}{2x+1} = \frac{2x(1-x)}{2x+1} > 0$  sur  $]0, 1[$  :  $(u_n)$  est **strictement croissante**.
2.  $u_n \neq 0$ , donc  $v_n$  existe et  $v_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3u_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}$  :  $(v_n)$  est **arithmético-géométrique**, de point fixe 1 ( $t = \frac{t}{3} + \frac{2}{3} \iff t = 1$ ). Donc  $v_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(v_n - 1)$  :  $(v_n - 1)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ , avec  $v_0 - 1 = 2$ . D'où  $v_n = 1 + \frac{2}{3^n} = \frac{3^n+2}{3^n}$  et  $u_n = \frac{3^n}{3^n+2}$  ( $u_3 = \frac{27}{29}$  ✓).
3.  $u_n = 1 - \frac{2}{3^n+2}$  :  $3^n + 2$  croît, donc  $\frac{2}{3^n+2}$  décroît et  $(u_n)$  croît, avec  $u_n < 1$ .  $u_n > 0,999 \iff \frac{2}{3^n+2} < \frac{1}{1000} \iff 3^n > 1998$  ; or  $3^6 = 729$  et  $3^7 = 2187$  :  $n = 7$ . Enfin  $T_n = \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{2}{3^k}\right) = (n+1) + 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = (n+1) + 3\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = n + 4 - \frac{1}{3^n}$  ( $T_0 = 3 = \frac{1}{u_0}$  ✓).

## ■ Corrigé de l'exercice 58

- $u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \boxed{\sqrt{3}}$ ,  $u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$ . Récurrence,  $P(n)$  : «  $u_n > 1$  ». Initialisation.  $u_0 = 3 > 1$ .  
Hérédité. Si  $u_n > 1$ , alors  $u_n^2 + 3 > 4$ , donc  $\sqrt{u_n^2 + 3} > 2$  et  $u_{n+1} > 1$ . Conclusion.  $u_n > 1$  pour tout  $n$ .  
Puis  $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{u_n^2 + 3}{4} - u_n^2 = \frac{3(1 - u_n^2)}{4} < 0$  ; les termes étant positifs,  $u_{n+1} < u_n$  :  $(u_n)$  **est strictement décroissante**.
- $w_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{4} = \frac{1}{4}w_n$  :  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ , avec  $w_0 = 8$ . Donc  $u_n^2 = 1 + \frac{8}{4^n}$  et, comme  $u_n > 0$ ,  $u_n = \sqrt{1 + \frac{8}{4^n}}$ .
- $u_n - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{u_n + 1} = \frac{w_n}{u_n + 1} > 0$ , et  $u_n + 1 > 2$ , donc  $0 < u_n - 1 < \frac{w_n}{2} = \frac{4}{4^n}$ . Si  $n \geq 11$  :  $\frac{4}{4^n} \leq \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$ . Enfin  $\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{8}{4^k}\right) = (n+1) + 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \boxed{n + 1 + \frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 59

- $x \mapsto 5x - 6$  est croissante et positive sur  $D$ , la racine est croissante :  $f$  **est croissante sur  $D$** . Pour  $x \in D$  ( $x > 0$ ) :  $f(x) = x \iff 5x - 6 = x^2 \iff (x-2)(x-3) = 0$  : les points fixes sont  $\boxed{2 \text{ et } 3}$ . Avec la quantité conjuguée ( $f(x) + x > 0$ ) :

$$f(x) - x = \frac{5x - 6 - x^2}{f(x) + x} = -\frac{(x-2)(x-3)}{f(x) + x}.$$

- Récurrence,  $P(n)$  : «  $u_n$  existe et  $2 < u_n < 3$  ». Vraie pour  $n = 0$ . Si  $P(n)$  est vraie,  $u_n \in D$ , donc  $u_{n+1}$  existe, et  $f(2) < f(u_n) < f(3)$  (stricte croissance), soit  $2 < u_{n+1} < 3$ . Donc  $P(n)$  est vraie pour tout  $n$ . Sur  $]2, 3[$ ,  $(x-2)(x-3) < 0$ , donc  $f(x) > x$  :  $(u_n)$  **est croissante**.

Si  $a = 4$  : de même,  $P(n)$  : «  $u_n > 3$  » se propage, car  $f(u_n) > f(3) = 3$ , et sur  $]3, +\infty[$ ,  $f(x) < x$  :  $(u_n)$  **est décroissante** et reste  $> 3$  (escalier de droite,  $u_1 = \sqrt{14}$ ).

- $u_1 = \sqrt{7-6} = \boxed{1}$  : or  $1 < \frac{6}{5}$ , donc  $u_1 \notin D$  et  $u_2 = \sqrt{-1}$  n'existe pas : **la suite s'arrête** au rang 1.
- a) Posons  $\delta = \frac{2-a}{4} > 0$ . Par hypothèse, tous les  $u_n$  sont dans  $D$ . Si  $\frac{6}{5} \leq u_n \leq a$  (vrai pour  $n = 0$ ), alors  $2 - u_n \geq 2 - a$ ,  $3 - u_n > 1$  et  $f(u_n) + u_n \leq f(a) + a < f(2) + 2 = 4$ , donc

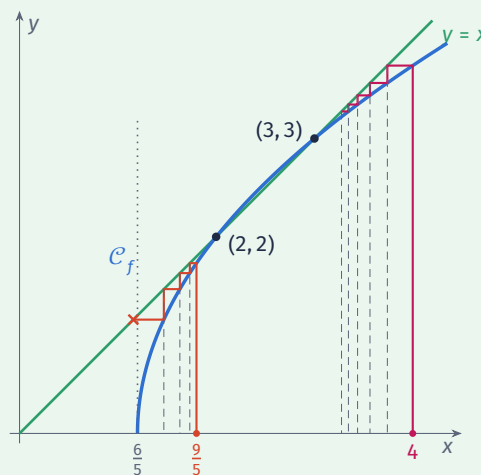
$$u_n - u_{n+1} = \frac{(2 - u_n)(3 - u_n)}{f(u_n) + u_n} \geq \frac{(2 - a) \times 1}{4} = \delta,$$

soit  $u_{n+1} \leq u_n - \delta \leq a$  : par récurrence,  $u_n \leq a$  et  $u_{n+1} \leq u_n - \delta$  pour tout  $n$ .

b) En sommant,  $u_n \leq a - n\delta$ . Pour  $n > \frac{a-6/5}{\delta}$ , on obtient  $u_n < \frac{6}{5}$ , c'est-à-dire  $u_n \notin D$  : **contradiction**.

c) Si  $2 \leq a \leq 3$ ,  $[2, 3]$  est stable par  $f$  ( $f$  croissante,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 3$ ) ; si  $a \geq 3$ ,  $[3, +\infty[$  est stable : tous les termes existent. Si  $\frac{6}{5} \leq a < 2$ , la suite s'arrête (b).

Conclusion :  $\boxed{(u_n) \text{ est définie pour tout } n \iff a \geq 2}$ . Sur la figure, depuis  $\frac{9}{5}$  :  $u_1 = \sqrt{3}$ ,  $u_2 \approx 1,631$ ,  $u_3 \approx 1,468$ ,  $u_4 \approx 1,158 < \frac{6}{5}$  : l'escalier de gauche **sort du domaine** et  $u_5$  n'existe pas.



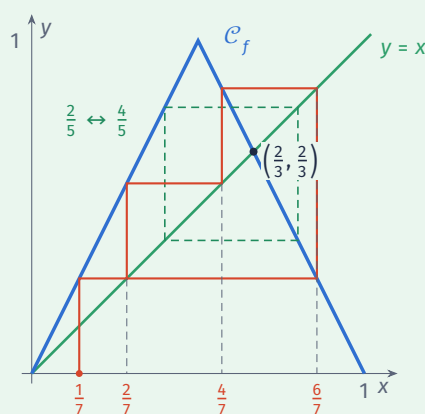
## ■ Corrigé de l'exercice 60

1. Si  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $2x - 1 \leq 0$  et  $f(x) = 2x$  ; si  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ,  $f(x) = 2 - 2x$ . Dans les deux cas  $f(x) \in [0, 1]$  :  $[0, 1]$  est stable. Points fixes :  $2x = x \iff x = 0$ , et  $2 - 2x = x \iff x = \frac{2}{3} \in [\frac{1}{2}, 1]$  :  $0$  et  $\frac{2}{3}$ .

2.  $u_1 = \frac{2}{7}$ ,  $u_2 = \frac{4}{7}$ ,  $u_3 = 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$ ,  $u_4 = 2 - \frac{12}{7} = \frac{2}{7} = u_1$ . Récurrence sur  $n \geq 1$  :  $u_4 = u_1$ , et si  $u_{n+3} = u_n$ , alors  $u_{n+4} = f(u_{n+3}) = f(u_n) = u_{n+1}$ . Donc  $u_{n+3} = u_n$  pour tout  $n \geq 1$  (cycle  $\frac{2}{7} \rightarrow \frac{4}{7} \rightarrow \frac{6}{7} \rightarrow \frac{2}{7}$ , triangle rouge). Comme  $2026 = 1 + 3 \times 675$ ,  $u_{2026} = u_1 = \frac{2}{7}$ , et les 2025 =  $3 \times 675$  termes de  $u_1$  à  $u_{2025}$  forment 675 cycles :  $675 \times \frac{2+4+6}{7} = \frac{8100}{7}$ .

Si  $u_0 = \frac{3}{8}$  :  $u_1 = \frac{3}{4}$ ,  $u_2 = \frac{1}{2}$ ,  $u_3 = 1$ ,  $u_4 = 0$ , et 0 est un point fixe :  $u_n = 0$  pour tout  $n \geq 4$ , la suite est stationnaire.

3. a) Récurrence :  $m_0 = p$ . Si  $u_n = \frac{m_n}{q}$  avec  $0 \leq m_n \leq q$  : lorsque  $2m_n \leq q$ ,  $u_{n+1} = \frac{2m_n}{q}$  avec  $0 \leq 2m_n \leq q$  ; lorsque  $2m_n \geq q$ ,  $u_{n+1} = \frac{2q-2m_n}{q}$  avec  $0 \leq 2q-2m_n \leq q$ . Dans les deux cas  $m_{n+1} \in \{0, \dots, q\}$ .
- b) Les  $q+2$  nombres  $u_0, \dots, u_{q+1}$  ne peuvent prendre que  $q+1$  valeurs  $\frac{0}{q}, \dots, \frac{q}{q}$  : deux d'entre eux sont égaux,  $u_i = u_j$  avec  $i < j$ . Posons  $T = j - i \geq 1$ . Récurrence sur  $n \geq i$  :  $u_{i+T} = u_i$ , et si  $u_{n+T} = u_n$ , alors  $u_{n+1+T} = f(u_{n+T}) = f(u_n) = u_{n+1}$ . Donc  $u_{n+T} = u_n$  pour tout  $n \geq i$  : toute suite issue d'un rationnel de  $[0, 1]$  est périodique à partir d'un certain rang.
4. Sur  $[0, \frac{1}{4}]$ ,  $f(x) = 2x \in [0, \frac{1}{2}]$  et  $f(f(x)) = 4x$  ; sur  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ ,  $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$  et  $f(f(x)) = 2 - 4x$  ; sur  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ ,  $f(f(x)) = 2 - 2(2 - 2x) = 4x - 2$  ; sur  $[\frac{3}{4}, 1]$ ,  $f(f(x)) = 2(2 - 2x) = 4 - 4x$ . Les solutions de  $f(f(x)) = x$  sont  $0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$  (chacune dans le bon intervalle) ; on retire les points fixes :  $x \in \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ , avec  $f(\frac{2}{5}) = \frac{4}{5}$  et  $f(\frac{4}{5}) = \frac{2}{5}$  (carré vert de la figure).



35

## Corrigés : défis de concours

## ■ Corrigé de l'exercice 61

1.  $a_3 = a_2 + a_0 = 2$ , puis  $a_4 = 3$ ,  $a_5 = 4$ ,  $a_6 = 6$ ,  $a_7 = 9$ ,  $a_8 = 13$ ,  $a_9 = 19$ ,  $a_{10} = 28$ ,  $a_{11} = 41$ ,  $a_{12} = 60$ .  
Si  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$  sont des entiers  $\geq 1$ , alors  $a_{n+3} = a_{n+2} + a_n$  aussi : par récurrence (initialisée aux rangs 0, 1, 2), tous les  $a_n$  sont des entiers  $\geq 1$ . Enfin  $a_{n+3} - a_{n+2} = a_n \geq 1 > 0$  pour tout  $n \geq 0$  :  $(a_n)_{n \geq 2}$  est strictement croissante.

2.  $a_k = a_{k+3} - a_{k+2}$ , donc la somme est télescopique :  $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (a_{k+3} - a_{k+2}) = a_{n+3} - a_2 = a_{n+3} - 1$  (pour  $n = 4$  :  $1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8 = a_7 - 1$  ✓).

3.  $P(n)$  : «  $\left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \leq a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$  ». Initialisation. Pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $a_n = 1$ , et  $\left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \in \left\{\frac{125}{343}, \frac{25}{49}, \frac{5}{7}\right\}$  est  $\leq 1$ , tandis que  $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1$ . Hérédité. Supposons  $P(n), P(n+1), P(n+2)$  vraies. Alors

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{9}{4} + 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{26}{8} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+3},$$

$$a_{n+3} \geq \left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \left(\frac{49}{25} + 1\right) = \left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \times \frac{370}{125} \geq \left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \times \frac{343}{125} = \left(\frac{7}{5}\right)^n :$$

$P(n+3)$  est vraie. Conclusion.  $\left(\frac{7}{5}\right)^{n-3} \leq a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$  pour tout  $n$  :  $(a_n)$  est encadrée par deux suites géométriques.

4. Les parités de  $a_0, \dots, a_9$  sont : impair, impair, impair, pair, impair, pair, pair, impair, impair, impair :  $(a_7, a_8, a_9) = (9, 13, 19)$  a les mêmes parités que  $(a_0, a_1, a_2)$ . Or la parité de  $a_{m+3} = a_{m+2} + a_m$  ne dépend que de celles de  $a_{m+2}$  et  $a_m$  : par récurrence (aux rangs  $n, n+1, n+2$ ),  $a_{n+7}$  et  $a_n$  ont même parité pour tout  $n$ , et le motif des parités se répète avec la période 7 :  $a_n$  pair  $\iff$  le reste de  $n$  par 7 vaut 3, 5 ou 6. Comme  $2026 = 7 \times 289 + 3$ ,  $a_{2026}$  est pair, et  $a_0 + \dots + a_{2023} = a_{2026} - 1$  est impair.

## ■ Corrigé de l'exercice 62

1. a) Récurrence double,  $P(n)$  : «  $u_n$  et  $u_{n+1}$  existent et sont  $> 0$  ». Vraie pour  $n = 0$  ; si  $P(n)$  est vraie,  $u_n \neq 0$ , donc  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 3}{u_n}$  existe et est  $> 0$  :  $P(n+1)$  est vraie.  $u_2 = \frac{1+3}{1} = 4$ ,  $u_3 = \frac{16+3}{1} = 19$ ,  $u_4 = \frac{361+3}{4} = 91$ ,  $u_5 = \frac{8281+3}{19} = 436$ .
- b) En multipliant la définition par  $u_n$  :  $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 3$ . Au rang  $n+1$  :  $u_{n+3}u_{n+1} - u_{n+2}^2 = 3$ . Donc  $u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+1}^2 = u_{n+2}^2 + u_{n+2}u_n$ , soit  $u_{n+1}(u_{n+3} + u_{n+1}) = u_{n+2}(u_{n+2} + u_n)$ , et l'on divise par  $u_{n+1}u_{n+2} > 0$ .
- c) La suite  $w_n = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}}$  est donc constante :  $w_n = w_0 = \frac{4+1}{1} = 5$ , d'où  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$ . Récurrence double :  $u_0, u_1$  sont entiers, et si  $u_n, u_{n+1}$  le sont,  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$  aussi : tous les  $u_n$  sont entiers (alors que la définition comporte une division !).
2. Récurrence double :  $u_0 = u_1 = 1$  s'écrivent  $3 \times 0 + 1$  ; si  $u_n = 3s + 1$  et  $u_{n+1} = 3t + 1$  ( $s, t$  entiers), alors  $u_{n+2} = 5(3t + 1) - (3s + 1) = 3(5t - s + 1) + 1$ . Le reste vaut donc toujours 1. Si  $d \geq 1$  divise  $u_n$  et  $u_{n+1}$ , il divise  $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 3$ , donc  $d \in \{1, 3\}$  ; or 3 ne divise pas  $u_n$  :  $d = 1$ .

3.  $P(n)$  : «  $u_{n+1} \geq u_n$  ».  $u_1 = u_0$  ; si  $u_{n+1} \geq u_n$ , alors  $u_{n+2} - u_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n \geq 3u_{n+1} > 0$ . Donc  $(u_n)$  est croissante, et pour  $n \geq 1$  :  $u_{n+1} = 5u_n - u_{n-1} \geq 5u_n - u_n = 4u_n$ . Par récurrence,  $u_n \geq 4^{n-1}u_1 = 4^{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .
4.  $\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{k+2}u_k - u_{k+1}^2}{u_k u_{k+1}} = \frac{3}{u_k u_{k+1}}$ . En sommant de 0 à  $n$ , la somme télescope :  $3S_n = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_1}{u_0}$ , soit  $S_n = \frac{1}{3} \left( \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - 1 \right)$ . Or  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 5 - \frac{u_n}{u_{n+1}} < 5$ , donc  $S_n < \frac{4}{3}$  ; et, pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{4}$  (question 3), donc  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \geq \frac{19}{4}$  et  $S_n \geq \frac{1}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{5}{4}$  :  $\frac{5}{4} \leq S_n < \frac{4}{3}$  ( $S_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$  ✓).

### ■ Corrigé de l'exercice 63

1.  $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + a = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} \geq \varepsilon$ , avec  $\varepsilon = a - \frac{1}{4} > 0$ . En sommant ces inégalités de 0 à  $n-1$  :  $u_n \geq u_0 + n\varepsilon = n\varepsilon$ . Pour tout réel  $M$ , l'entier  $n = E\left(\frac{|M|}{\varepsilon}\right) + 1$  vérifie  $u_n > M$  :  $(u_n)$  **n'est pas majorée**, donc pas bornée.
2.  $1-4a \geq 0$  est le discriminant de  $x^2 - x + a$ , et  $\ell$  en est une racine :  $\ell^2 + a = \ell$ . Comme  $0 \leq \sqrt{1-4a} \leq 1$ , on a  $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ .  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ . Récurrence :  $0 \leq u_0 \leq \ell$  ; si  $0 \leq u_n \leq \ell$ , alors  $0 \leq a = f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ell) = \ell$ . Donc  $0 \leq u_n \leq \ell$  :  $(u_n)$  **est bornée**. De plus  $u_1 = a \geq u_0$ , et si  $u_n \leq u_{n+1}$  (deux nombres de  $[0, \ell]$ ), alors  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$  :  $(u_n)$  **est croissante**.
3. Soit  $x \in [a, -a]$  :  $|x| \leq -a$ , donc  $0 \leq x^2 \leq a^2$  et  $a \leq f(x) \leq a^2 + a$ . Or  $a^2 + a \leq -a \iff a(a+2) \leq 0$ , ce qui est vrai pour  $-2 \leq a \leq 0$  :  $[a, -a]$  **est stable par  $f$** . Comme  $u_0 = 0 \in [a, -a]$ , par récurrence  $u_n \in [a, -a]$ , d'où  $|u_n| \leq -a \leq 2$  :  $(u_n)$  **est bornée**. Pour  $a = -1$  :  $0, -1, 0, -1, \dots$  : la suite est périodique de période 2.
4. a)  $u_1 = -b$  et  $u_2 = b^2 - b = b(b-1) > 2 \times 1 = 2$ , car  $b > 2$  et  $b-1 > 1$ .  
 b)  $c = b(b-1)$  et  $c-1 > 1$ , donc  $\delta = c(c-1) - b = b(b-1)(c-1) - b = b[(b-1)(c-1) - 1] > 0$ , car  $(b-1)(c-1) > 1$ . Récurrence sur  $n \geq 2$  :  $u_2 = c$  ; si  $u_n \geq c + (n-2)\delta$  ( $\geq c > \frac{1}{2}$ ), alors,  $x \mapsto x^2 - x$  étant croissante sur  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ ,  $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - b \geq c^2 - c - b = \delta$ , et  $u_{n+1} \geq c + (n-1)\delta$ . Comme en 1,  $(u_n)$  **n'est pas majorée**. En réunissant les quatre cas :  $(u_n)$  est bornée  $\iff -2 \leq a \leq \frac{1}{4}$ .

**Remarque.** L'ensemble des nombres (réels ou complexes)  $a$  pour lesquels la suite  $0, a, a^2 + a, \dots$  reste bornée est le célèbre *ensemble de Mandelbrot* ; nous venons de déterminer sa trace sur la droite réelle : le segment  $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 64

1. a)  $2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+2} \iff u_{n+1} - u_n \leq u_{n+2} - u_{n+1} \iff d_n \leq d_{n+1}$  :  $(u_n)$  **convexe**  $\iff (d_n)$  **croissante**.  
 b) Pour  $n^2$  :  $d_n = 2n + 1$  croît. Pour  $\frac{1}{n+1}$  :  $d_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$  croît, car  $(n+1)(n+2)$  croît. Pour  $u_0 q^n$  :  $d_n = u_0 q^n (q-1)$  et  $d_{n+1} - d_n = u_0 q^n (q-1)^2 \geq 0$ . Les trois suites sont **convexes**.
2. Supposons  $(u_n)$  convexe, majorée par  $M$ , et (par l'absurde) non décroissante : il existe  $m$  tel que  $d_m > 0$ . Pour  $n \geq m$ ,  $d_n \geq d_m$ , donc  $u_n = u_m + \sum_{k=m}^{n-1} d_k \geq u_m + (n-m)d_m$ , qui dépasse  $M$  dès que  $n > m + \frac{M-u_m}{d_m}$  : **contradiction**. Donc  $d_n \leq 0$  pour tout  $n$  :  $(u_n)$  **est décroissante**.

3. a) Comme  $u_0 = 0$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k$ , d'où  $nu_{n+1} - (n+1)u_n = nd_n - u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (d_n - d_k) \geq 0$ , chaque terme étant positif ( $(d_k)$  croît). En divisant par  $n(n+1) > 0$  :  $\frac{u_{n+1}}{n+1} \geq \frac{u_n}{n}$  :  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  **est croissante**.
- b)  $v_n = q^n - 1$  est convexe (même suite  $(d_n)$  que  $(q^n)$ ) et  $v_0 = 0$ . D'après a), la suite  $\left(\frac{q^n-1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est **croissante** :  $\frac{q^{n+1}-1}{n+1} \geq \frac{q^n-1}{n}$ . En particulier  $\frac{q^n-1}{n} \geq \frac{q-1}{1}$  : on retrouve l'inégalité de Bernoulli  $q^n \geq 1 + n(q-1)$  du cours.
4. a) Pour  $n = 0$  ou  $n = N$ , c'est une égalité. Pour  $0 < n < N$ , la moyenne de termes d'une suite croissante est comprise entre le plus petit et le plus grand :

$$\frac{u_n - u_0}{n} = \frac{d_0 + \dots + d_{n-1}}{n} \leq d_{n-1} \leq d_n \leq \frac{d_n + \dots + d_{N-1}}{N-n} = \frac{u_N - u_n}{N-n}.$$

Donc  $(N-n)(u_n - u_0) \leq n(u_N - u_n)$ , soit  $Nu_n \leq (N-n)u_0 + nu_N$  : le point  $(n, u_n)$  est sous la « corde » joignant  $(0, u_0)$  et  $(N, u_N)$ .

b) Avec  $u_n = q^n$  (convexe) :  $Nq^n \leq (N-n) + nq^N$  pour  $0 \leq n \leq N$ . On somme, avec  $\sum_{n=0}^N (N-n) = \sum_{n=0}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$  :  $N(1 + q + \dots + q^N) \leq \frac{N(N+1)}{2}(1 + q^N)$ , d'où le résultat : la somme est majorée par la « formule des trapèzes ».

### ■ Corrigé de l'exercice 65

1. a) Pour  $n = 1$ , c'est une égalité. Si l'inégalité est vraie au rang  $n$ , on la multiplie par  $1 + a_{n+1} > 0$  :  $\prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) \geq (1 + s_n)(1 + a_{n+1}) = 1 + s_{n+1} + s_n a_{n+1} \geq 1 + s_{n+1}$ .
- b) Même méthode, en multipliant par  $1 - a_{n+1} \geq 0$  :  $\prod_{k=1}^{n+1} (1 - a_k) \geq (1 - s_n)(1 - a_{n+1}) = 1 - s_{n+1} + s_n a_{n+1} \geq 1 - s_{n+1}$ .
- c) Si  $s_n < 1$ , chaque  $a_k$  est  $< 1$ , et  $(1 + a_k)(1 - a_k) = 1 - a_k^2 \leq 1$  donne  $1 + a_k \leq \frac{1}{1 - a_k}$ . Donc, avec b)  $(\prod_{k=1}^n (1 - a_k) \geq 1 - s_n > 0)$  :  $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - a_k)} \leq \frac{1}{1 - s_n}$ .
2.  $\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$  (termes positifs) :  $(P_n)$  **est croissante**. Pour  $n \geq 3$ ,  $P_n = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \prod_{k=3}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ , et  $\sigma_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^n} < 1$ . D'après 1a) et 1c) :

$$\frac{15}{8} (1 + \sigma_n) \leq P_n \leq \frac{15/8}{1 - \sigma_n}, \quad \text{soit} \quad \frac{15}{8} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2^n}\right) \leq P_n \leq \frac{15/8}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2^n}} < \frac{15}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{2}.$$

Comme  $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{8}$  :  $P_n \geq \frac{15}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{135}{64} \approx 2,109$  :  $2,1 < P_n < 2,5$  pour  $n \geq 3$  (une suite croissante et majorée).

3. a) Pour  $n = 0$  :  $1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$ . Si la formule est vraie au rang  $n$ , on multiplie par  $1 + x^{2^{n+1}}$  :  $\frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}$ , car  $(x^{2^{n+1}})^2 = x^{2^{n+2}}$ .
- b) Avec  $x = 2$  :  $F_0 F_1 \dots F_n = \frac{1-2^{2^{n+1}}}{1-2} = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$ . Soit  $m < n$  et  $d \geq 1$  un diviseur commun de  $F_m$  et  $F_n$  :  $F_n - 2 = F_0 \dots F_{n-1}$  est un multiple de  $F_m$ , donc de  $d$  ; ainsi  $d$  divise  $F_n - (F_n - 2) = 2$ . Comme  $F_n$  est impair,  $d = 1$ .

**Remarque.** Chaque  $F_n$  ( $\geq 3$ ) a au moins un diviseur premier, et ces diviseurs sont deux à deux distincts : on retrouve qu'il y a une infinité de nombres premiers.

## ■ Corrigé de l'exercice 66

1. a)  $J(1) = 1$  ; avec 2 personnes, on élimine 2 :  $J(2) = 1$  ; avec 3, on élimine 2 puis 1 :  $J(3) = 3$ . Avec 4 personnes, on élimine 2, 4, puis 3 :  $J(4) = 1$ . On trouve de même  $J(5) = 3$  (ordre 2, 4, 1, 5),  $J(6) = 5$  (2, 4, 6, 3, 1),  $J(7) = 7$  (2, 4, 6, 1, 5, 3),  $J(8) = 1$  (2, 4, 6, 8, 3, 7, 5) :  $\boxed{1, 3, 5, 7, 1}$ .  
 b) Après un tour, 2, 4, ...,  $2n$  sont éliminés ; il reste 1, 3, ...,  $2n - 1$ , et l'on repart de 1, épargné. C'est le même jeu à  $n$  personnes, la  $i$ -ième portant le numéro  $2i - 1$  :  $\boxed{J(2n) = 2J(n) - 1}$ .  
 c) On élimine 2, 4, ...,  $2n$ , puis  $2n + 1$  est épargné et 1 éliminé ; il reste 3, 5, ...,  $2n + 1$  ( $n$  personnes) et l'on repart de 3, épargné : la  $i$ -ième porte le numéro  $2i + 1$ , d'où  $\boxed{J(2n + 1) = 2J(n) + 1}$ .
2. *Initialisation* ( $m = 0$ ) :  $l = 0$  et  $J(1) = 1$ . *Hérédité*. Supposons la formule vraie au rang  $m$  et soit  $0 \leq l < 2^{m+1}$ . Si  $l = 2l'$ , avec  $0 \leq l' < 2^m$  :  $J(2^{m+1} + l) = J(2(2^m + l')) = 2(2l' + 1) - 1 = 2l + 1$ . Si  $l = 2l' + 1$ , avec  $0 \leq l' < 2^m$  :  $J(2(2^m + l') + 1) = 2(2l' + 1) + 1 = 2l + 1$ . *Conclusion*. La formule est vraie pour tout  $m$ .  $2026 = 2^{10} + 1002$  :  $\boxed{J(2026) = 2005}$ . Tout  $n \geq 1$  s'écrit  $n = 2^m + l$  avec  $0 \leq l < 2^m$  ( $2^m$  est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à  $n$ ). Alors  $n - J(n) = 2^m - 1 - l \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $l = 2^m - 1$ , c'est-à-dire  $n = 2^{m+1} - 1$  :  $\boxed{J(n) = n \iff n + 1 \text{ est une puissance de } 2}$ .
3.  $\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} J(n) = \sum_{l=0}^{2^m-1} (2l + 1) = 2^m(2^m - 1) + 2^m = \boxed{4^m}$  (somme des  $2^m$  premiers nombres impairs).  
 En regroupant par blocs :  $\sum_{n=1}^{2^m-1} J(n) = \sum_{j=0}^{m-1} 4^j = \boxed{\frac{4^m - 1}{3}}$ . Enfin  $\sum_{n=1}^{2026} J(n) = \frac{4^{10} - 1}{3} + \sum_{l=0}^{1002} (2l + 1) = 349\,525 + 1003^2 = \boxed{1\,355\,534}$ .

**Remarque.** L'historien Flavius Josèphe (I<sup>er</sup> siècle) raconte avoir survécu à un tel « tirage » en choisissant la bonne place dans le cercle.

# Corrigé du test d'entrée

**Barème :** 1 point par réponse juste et justifiée,  $\frac{1}{2}$  point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

## Bloc 1 · Calculs et puissances

- ①  $9 \times 5^n$  ; 2.  $10 \times 5^n - 5^n$  ;  
 $4^n = 2^{2n}$ ,  $8^n = 2^{3n}$ , d'où  
 $2^{n+1+2n-3n}$ .
- ② (a)  $\frac{1}{5}$  ; (b)  $\frac{3(x-1)}{x+2} \cdot \frac{1}{6} \div \frac{5}{6}$  ;  
 $\frac{5x+1-2(x+2)}{x+2} = \frac{3x-3}{x+2}$ .
- ③ (a)  $(3x-2)^2$  et  
 $(x-7)(x+7)$  ;  
 (b)  $S = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$ .  
 $a^2 - 2ab + b^2$ ,  $a^2 - b^2$  ;  
 $\Delta = 49$ ,  $x = \frac{5 \pm 7}{6}$ .
- ④ (a) 1 : prix inchangé ;  
 (b) 450 DH.  $1,25 \times 0,8 = 1$  ;  
 $0,8x = 360$  (et non  
 $360 \times 1,2$ ).

## Bloc 2 · Fonctions (chapitre 4)

- ⑤ (a)  $\frac{4}{(a+3)(b+3)}$  ; (b)  $f$   
**strictement croissante.**  
 Taux  $> 0$  car  $a+3 > 0$  et  
 $b+3 > 0$ .
- ⑥ (a)  $(x-4)^2 - 3$  :  $f$  **décroît**  
**sur**  $]-\infty, 4]$ , **croît sur**  
 $[4, +\infty[$  ; (b)  $-3 \leq f(x) \leq 1$ .  
 $f(4) = -3$ ,  $f(6) = 1$ .
- ⑦ (a)  $f(x) = -4$ ,  $2x$ ,  $4$  **sur**  
 $]-\infty, -2]$ ,  $[-2, 2]$ ,  $[2, +\infty[$  ;  
 (b) **oui et oui.**  $-4 \leq 2x \leq 4$   
 sur  $[-2, 2]$  ;  $f(2) = 4$ ,  
 $f(-2) = -4$ .
- ⑧ (a) 2, 4 **et** 5 ; (b)  $S = \{5\}$ .  
 $f(2) = 4$ ,  $f(4) = 5$  ; un seul  
 point commun : (5, 5).

## Bloc 3 · Récurrence et sommes

- ⑨ (a) 40 ; (b)  $n - 2$  termes.  
 $2 + 6 + 12 + 20$  ; de 3 à  $n$  :  
 $n - 3 + 1$ .
- ⑩  $S = 840$  ;  $T = 1365$ .  
 $S = 4 \times \frac{20 \times 21}{2}$  ;  $T = \frac{4^6 - 1}{4 - 1}$ .
- ⑪ **Initialisation :**  
 $1 = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 3$ . Hérédité :  
 $\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) + (2n+1)^2$   
 $= \frac{1}{3}(2n+1)(2n^2 + 5n + 3)$   
 $= \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$ .
- ⑫ (a)  $n = 0$  et  $n = 3$  ;  
 (b)  $2^3 \geq 7$ . Hérédité :  
 $2^{n+1} \geq 2(2n+1) \geq 2n+3$ .

## Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5  
bases à revoir

**Commence par** tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 4 d'abord. **En priorité :** le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 43**, p. 32. Refais le test dans une semaine.

6 à 9  
bon départ

**Commence par** le cours complet (sections 1 à 11), puis les pièges de la section 13. **En priorité :** le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes C et D, **exercices 43 à 48**, p. 32 et **49 à 54**, p. 34.

10 à 12  
cap concours

**Commence par** le cours (sections 1 à 11 en lecture rapide), puis les sections 12 à 14. **En priorité :** le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes B et E, **exercices 37 à 42**, p. 31 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

## Bloc 1 · Calculs et puissances

**Relis :** les sections 6, 7 et 11 du cours.  
**Fais :** **exercice 3**, p. 23,  
**exercice 5**, p. 24, **exercice 49**,  
 p. 34 et **exercice 50**, p. 34.

## Bloc 2 · Fonctions (chapitre 4)

**Relis :** les sections 2, 4 et 5 du cours.  
**Fais :** **exercice 2**, p. 23,  
**exercice 6**, p. 24, **exercice 33**,  
 p. 29 et **exercice 56**, p. 36.

## Bloc 3 · Récurrence et sommes

**Relis :** les sections 3, 5 et 10 du cours.  
**Fais :** **exercice 8**, p. 24,  
**exercice 14**, p. 25, **exercice 32**,  
 p. 29 et **exercice 44**, p. 32.

# Mon bilan sur le chapitre

## Partie B · Le parcours en 4 niveaux

| Niveau                           | Exercices | Réussis seul(e) | À refaire |
|----------------------------------|-----------|-----------------|-----------|
| Niveau 1 · Bases ★               | 1 à 8     | / 8             |           |
| Niveau 2 · Bac ★★                | 9 à 16    | / 8             |           |
| Niveau 3 · Approfondissement ★★★ | 17 à 23   | / 7             |           |
| Niveau 4 · Concours ★★★★         | 24 à 30   | / 7             |           |

## Partie C · La banque d'exercices

| Thème                                 | Exercices | Réussis seul(e) | À refaire |
|---------------------------------------|-----------|-----------------|-----------|
| Thème A · Modes de définition         | 31 à 36   | / 6             |           |
| Thème B · Suites bornées et monotones | 37 à 42   | / 6             |           |
| Thème C · Suites arithmétiques        | 43 à 48   | / 6             |           |
| Thème D · Suites géométriques         | 49 à 54   | / 6             |           |
| Thème E · Suites récurrentes          | 55 à 60   | / 6             |           |
| Thème F · Défis de concours           | 61 à 66   | / 6             |           |

*Conseil* : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : La rotation dans le plan

Maths Olympiad