

Fiche de Séquence

Classe : 11^{ème} Sciences

Durée : 20H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Trigonométrie

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenus :

Séquence 1 : Cercle trigonométrique et Angles Orientés :

1. Le radian :

Le radian est l'unité légale de mesure angulaire. Il est représenté par un arc dont la longueur est égale à celle du rayon du cercle. D'où la relation : $\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi}$. Avec d = mesure de l'angle en degré et r = mesure de l'angle en radian

Exercice : Complete le tableau suivant

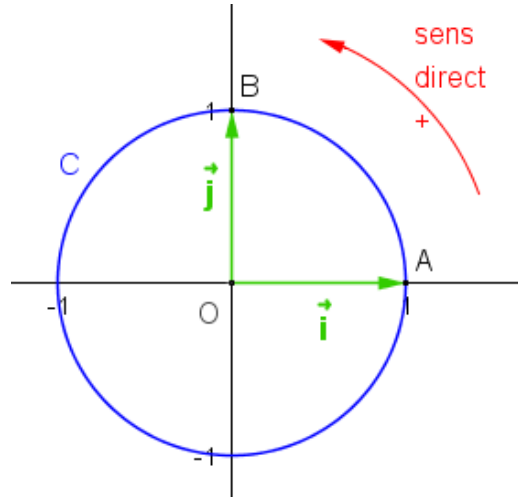
α en radian	π	?		$\frac{3\pi}{8}$	$\pi/4$		π	
α en degré	?	30°	33°	?		90°		50°

2. Cercle trigonométrique :

Définition : on muni le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; on appelle cercle trigonométrique le cercle orienté $C(0,1)$ de centre O et de rayon l'unité(1).

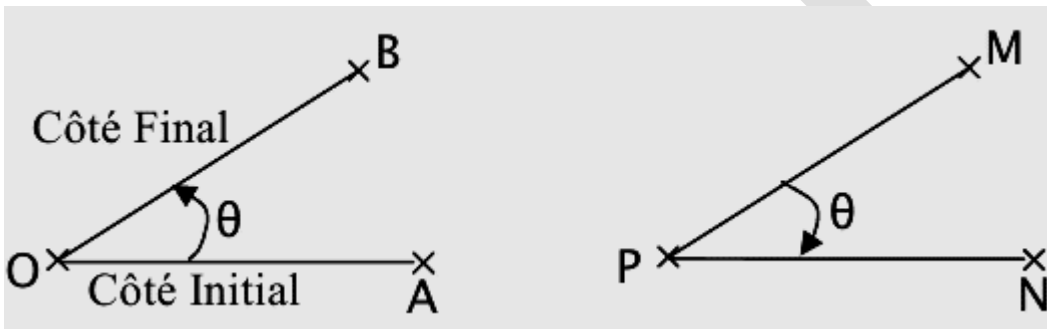
Sur ce cercle on définit une origine et deux sens :

- Le sens direct, sens positif ou **sens trigonométrique** est le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Le sens indirect ou sens négatif est le sens des aiguilles d'une montre.
- Le cercle trigonométrique a pour longueur $L = 2\pi = 360^\circ$ (un angle plein)



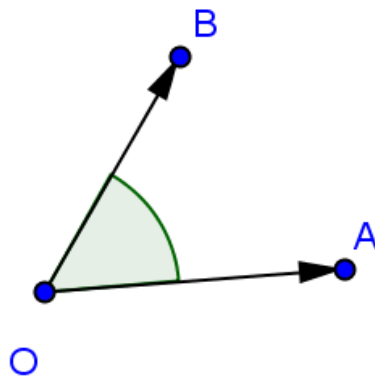
3. Angles géométriques, angles orientés :

Considérons les angles suivant



θ est un angle orienté positivement ; α est angle orienté négativement

Définition : dans le repère orthonormé (O, I, J) , soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ alors



- Les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA}$ sont des angles géométriques de même mesure toujours positive : $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$
- L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est un angle orienté positif alors que l'angle $(\vec{v}, \vec{u})$ est un angle orienté négatif.

Théorème : soit M un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est égale à x radians. On peut lui associer une famille de nombres réels de la forme $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, qui correspondent au même point M du cercle trigonométrique.

Propriétés des angles orientés

Propriétés fondamentales des angles orientés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- ✓ On note α une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$. Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif
- ✓ $(\vec{u}; \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}; -\vec{u}) = \pi$
- ✓ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, si et seulement si : $(\vec{u}; \vec{v}) = 0$
- ✓ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraires, si et seulement si : $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi$.

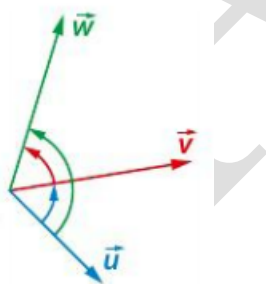
Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et k et k' eux nombres réels non nuls $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v})$

- ✓ $(-\vec{u}; \vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v})$
- ✓ $(\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v})$
- ✓ $(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$
- ✓ Si k et k' sont de même signe, alors $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$
- ✓ Si k et k' sont de signes contraires, alors $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v})$.

Théorème de Chasles

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a : $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$



Exemple : si $x = \frac{\pi}{4}$ est une mesure d'un angle $(\vec{u}, \vec{v})$, alors $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ est aussi une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ et $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{-7\pi}{4}$ est aussi une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Activité : trouve d'autre mesure des angles suivants : $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{-\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{2\pi}{3}$.

4. Mesure principale d'un angle orienté :

Définition : La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Détermination de la mesure principale d'un angle :

Déterminons la mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$

Soit α sa mesure principale ; il existe un entier relatif k tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

Méthode algébrique :

Posons $\alpha = x - 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$

$$\begin{aligned} -\pi &< \frac{273\pi}{12} - 2k\pi \leq \pi \\ -\pi - \frac{273\pi}{12} &< -2k\pi \leq \pi - \frac{273\pi}{12} \\ -\frac{285\pi}{12} &< -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12} \end{aligned}$$

On divise par -2π et on obtient :

$$\frac{261}{12} < k \leq \frac{285}{12}$$

Avec $k \in \mathbb{Z}$ on a $k = 11$ alors $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2 \times 11\pi = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

Méthode Pratique :

$x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$

Effectuons la division euclidienne de 273 par 12. Ainsi nous avons : $273 = 12 \times 22 + 9$ en multipliant les deux membres par π et en divisant par 12, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{273\pi}{12} &= \left(\frac{12 \times 22 + 9}{12} \right) \pi \\ \frac{273\pi}{12} &= 22\pi + \frac{9\pi}{12} \end{aligned}$$

$x = \frac{3\pi}{4} + 11 \times (2\pi)$ on retrouve $k = 11$.

Synthèse générale

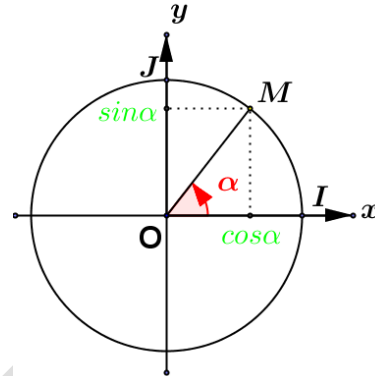
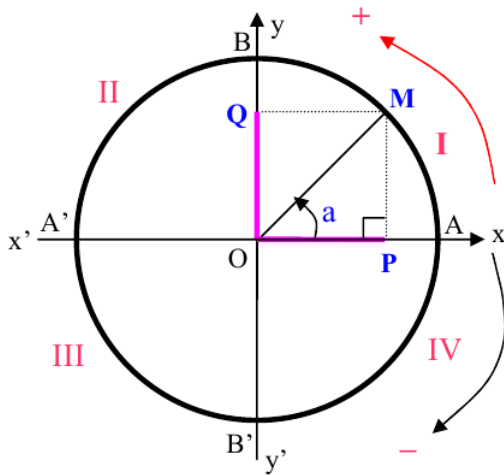
La mesure principale de $x = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ peut être obtenu de la manière suivante :

$$\alpha = x - 2k\pi \text{ et } -\pi < \alpha \leq \pi \text{ donc } \frac{x - \pi}{2\pi} \leq k < \frac{x + \pi}{2\pi}$$

Exemple : Détermine les mesures principales des angles suivants.

$$x = \frac{89\pi}{12}; \quad x = -\frac{13\pi}{6}; \quad x = \frac{17\pi}{2}; \quad x = \frac{5\pi}{6};$$

Séquence 2 : Cosinus ; Sinus :



Le théorème de Pythagore permet d'écrire que :

$$\cos a = OP \quad \text{et} \quad \sin a = OQ$$

1. Définitions

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé direct, $C(0,1)$ le cercle trigonométrique et M un point du cercle tel que : $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$.

- Le cosinus du nombre réel α est l'abscisse de M et on note **$\cos \alpha$**
- Le sinus du nombre réel α est l'ordonnée de M et on note **$\sin \alpha$** .

2. Propriétés

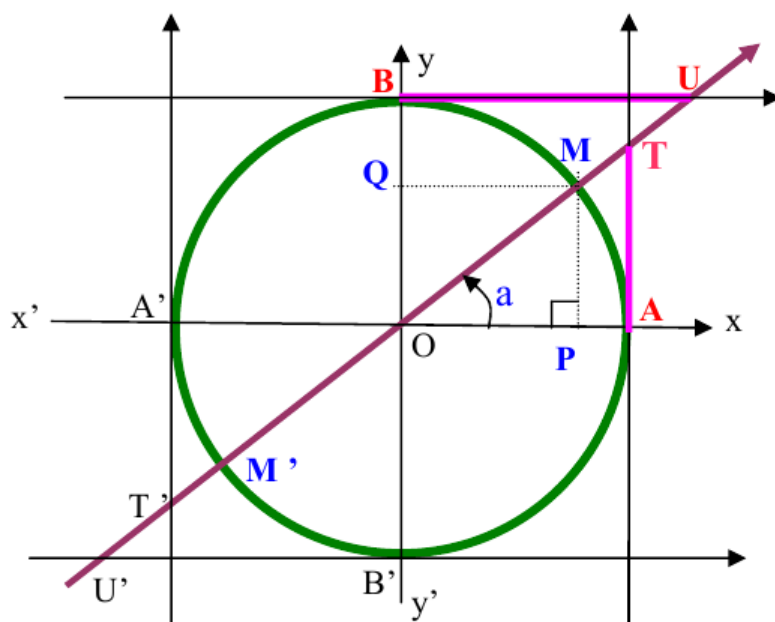
- ✚ Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$
- ✚ $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- ✚ Si α augmente de $2k\pi$ le point M revient à sa position initiale. On exprime ce fait en disant que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

$$\forall x \in \mathbb{R} \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x) ;$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

où k entier relatif
- ✚ Le sinus d'un angle situé dans le quadrant (I) ou (II) est positif, et négatif dans le quadrant (III) ou (IV).
- ✚ Le cosinus d'un angle situé dans le quadrant (I) ou (IV) est positif, et négatif dans le quadrant (II) ou (III).

3. **Fonction tangente et Fonction cotangente**



Les axes (AT) et (BU) sont respectivement appelées axe des tangentes et des cotangentes. On appelle tangente de l'angle ($\hat{a}$) la mesure algébrique de AT. On appelle cotangente de l'angle ($\hat{a}$) la mesure algébrique de BU.

On note :

$$\tan(\hat{a}) = \overline{AT} ; \cotan(a) = \overline{BU}$$

Les fonctions tangentes et cotangente sont périodiques de période π .

$$\begin{aligned} tg(a + \pi) &= tga ; \cot g(a + \pi) = \cot ga \\ tg(a + k\pi) &= tg(a) ; \cot g(a + k\pi) = \cot g(a) \\ &\text{où } k \text{ entier relatif} \end{aligned}$$

4. Rélation entre cosinus, sinus, tangente et cotangente

Les fonctions circulaires d'un même angle x sont liées par les relations suivantes :

Relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (i)	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 + \cotan^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$	

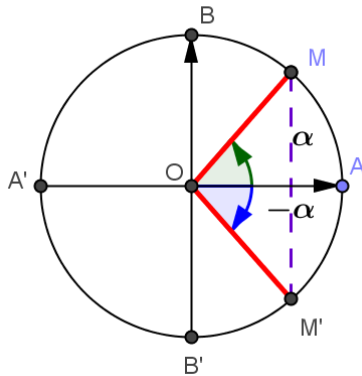
Application

- Pour $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$ tel que $\sin x = \frac{4}{5}$. Calcule $\cos x$ et $\tan x$.
- Pour $\alpha \in]-\pi ; 0[$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$. Calcule $\sin x$ et $\tan x$.
- Pour $x \in]-\pi ; 0[$ tel que $\tan x = 2$. Calcule $\cos x$ et $\sin x$.
- Démontre les égalités suivantes pour tout réel x :
 - $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \cos x \sin x$.
 - $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \cos x \sin x$.
 - $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.
 - $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. Cosinus et sinus d'angles associés

5.1. Angles opposés : (α) et $(-\alpha)$

Les points M et M' du cercle trigonométrique respectivement associés aux réels (α) et $(-\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

La fonction cosinus est dite paire tandis que les fonctions sinus et tangente sont dites impaires

$$M \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad M' \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$$

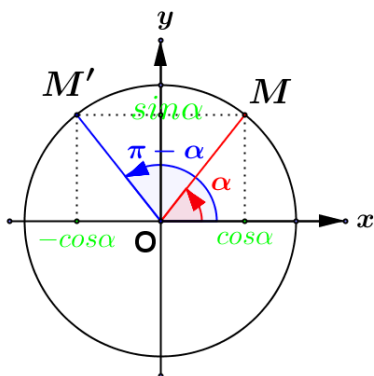
☞ Deux angles sont dits opposés si leur somme est égale à 0 radian ou 0°

☞ Deux angles opposés ont même cosinus et de sinus opposés.

5.2. Angles supplémentaires : α et $\pi - \alpha$

Les points M et M' du cercle trigonométrique respectivement associés aux réels (α) et $(\pi - \alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$$M \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad M' \begin{pmatrix} \cos(\pi - \alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) \end{pmatrix}$$



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

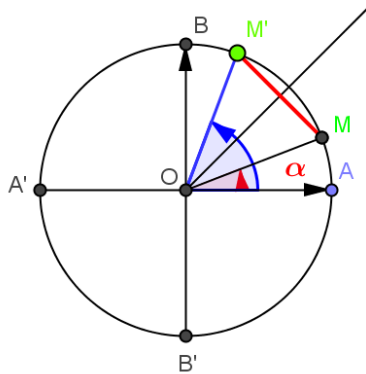
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

☞ Deux angles sont dits supplémentaires si leur somme est égale à π radian ou 180°

☞ Deux angles supplémentaires ont même sinus et de cosinus opposés.

5.3. Angles complémentaires : α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Les points M et M' du cercle trigonométrique respectivement associés aux réels (α) et $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

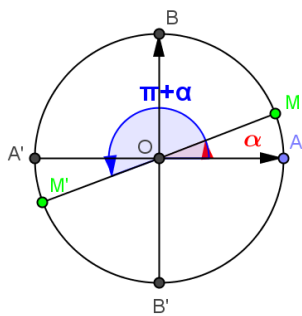
$$M\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad M'\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{pmatrix}$$

- ☞ Deux angles sont dits complémentaires si leur somme est égale à $\frac{\pi}{2}$ radian ou 90° .
- ☞ Si Deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

5.4. Angles dont la différence est π : α et $\pi + \alpha$

Les points M et M' du cercle trigonométrique respectivement associés aux réels (α) et $(\pi + \alpha)$ sont symétriques par rapport O (origine du repère).

$$M\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad M'\begin{pmatrix} \cos(\pi + \alpha) \\ \sin(\pi + \alpha) \end{pmatrix}$$



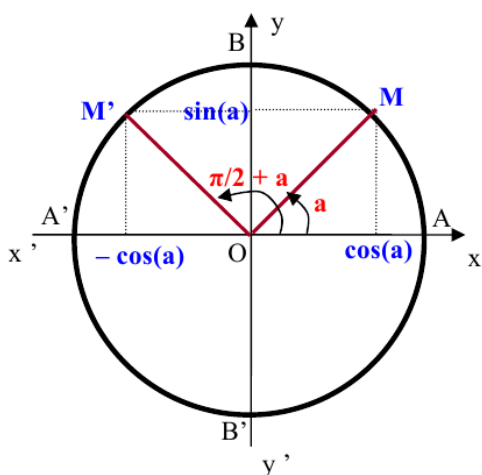
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

5.5. Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$: α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$

$$M\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad M'\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

6. Table trigonométrique des angles remarquables

α (en degré)	0	30	45	60	90	180
α (en rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
α (en grade)	0	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100	200
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<del></del>	0
$\cotan \alpha$	<del></del>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	<del></del>

Exercice

1. Simplifie les expressions suivantes :

$$A(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) - \sin(\pi + x)$$

$$B(x) = \cos x + \cos(-x) - \sin(-x) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + 5\pi) + \cos(\pi - x) - \cos(1000\pi - x) + \sin(101\pi - x)$$

2. Démontre les égalités suivantes :

a. $\cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) + 2 \cos x + \cos(\pi + x) - \sin(\pi + x) = 0$

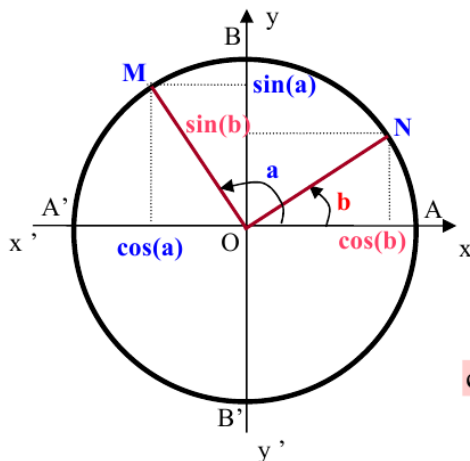
b. $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{15}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) = 0.$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = 0.$

Séquence 3 : Formules d'addition et de multiplication

1. Formules d'addition :

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique tels que le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ soit orthonormé direct ; ($\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$). Le réel a associé au point M et le réel b est celui associé au point M' c'est-à-dire $(\overrightarrow{OA}; \widehat{OM}) = a$ et $(\overrightarrow{OA}; \widehat{OM'}) = b$



$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

$$\diamond \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \quad (1)$$

$$\diamond \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad (2)$$

$$\diamond \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \quad (3)$$

$$\diamond \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \quad (4)$$

$$\diamond \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \quad (5)$$

$$\diamond \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \quad (6)$$

Preuve

$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'} = OM \times OM' \times \cos(\widehat{OM; OM'})$$

$$\widehat{OM; OM'} = b - a \quad \text{et} \quad OM = OM' = 1 \quad \text{donc}$$

$$\cos(a - b) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'} \quad \text{d'où la relation (2)}$$

En remplaçant b par $-b$ on obtient la relation (1)

Dans $\cos(a + b)$ remplaçons a par $\frac{\pi}{2} - a$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \sin(a - b) \end{cases}$$

D'où la relation (4)

En remplaçant b par $-b$ on obtient la relation (4) on obtient (3).

On a

$$\tan(a - b) = \frac{\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b} = \frac{\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

D'où la relation (6)

En remplaçant b par $-b$ on obtient la relation (6) on obtient (5)

2. Formules de duplication :

Pour tout réel a on a : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ (7)

$\sin(2a) = 2 \sin a \cdot \cos a$ (8)

3. Formules de linéarisation :

Des relations (i) et (7) Pour tout réel a on a :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} ; \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \text{ et } \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

En posant $2a = x$; on a $a = \frac{x}{2}$ et à la fin on aura :

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \text{ et } \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

4. Formules de transformations : **Produit en somme** : pour tout a et b réels on a :

$$\diamond \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \quad (1)+(2)$$

$$\diamond \sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)] \quad (2)-(1)$$

$$\diamond \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \quad (3)-(4)$$

$$\diamond \sin b \cdot \cos a = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \quad (3)+(4)$$

5. Formules de transformations : **Somme en Produit (factorisation)** : pour tout a et b réels on a :

$$\text{En posant : } \begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases} ; p \text{ et } q \text{ réels}$$

$$\diamond \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\diamond \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\diamond \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\diamond \sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Application :

3. Calcule $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$
4. Calcule $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
5. Calcule $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
6. Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \sin(x - y) \cos(x + y) - \sin(x + y) \cos(x - y)$$

$$B = \sin(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).$$
7. Transforme en produit
 $\sin 2x + \sin 6x$; $\cos 5x - \cos 4x$; $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$; $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$
8. Transforme en somme ou une différence.
 $2 \cos x \cos 4x$; $\sin(x + y) \cos(x - y)$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$
9. Démontre que :
 a. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$; $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.
 b. $\sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x$; $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

Séquence 4 : Equation du type $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\tan x = a$; ($a \in \mathbb{R}$)

1. Equation du type : $\cos x = a$, ($a \in \mathbb{R}$)

Soit (E) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = a$

Cas 1 : si $a \notin [-1, 1]$ alors équation (E) n'admet pas de solution on écrit $S = \emptyset$

Cas 2 : si $a \in [-1, 1]$ alors l'équation (E) admet des solutions soit y une solution de (E) élément de l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Alors l'ensemble solution de (E) est de la forme $S = \{\pm y + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; 2 \cos^2 x = 1 ; \cos x = -\frac{1}{2} ; \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) ; \cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pour } x \in [-2\pi; 2\pi].$$

2. Equation du type : $\sin x = a$

Soit (E) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = a$

Cas 1 : si $a \notin [-1, 1]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution on écrit $S = \emptyset$

Cas 2 : si $a \in [-1, 1]$ alors l'équation (E) admet des solutions soit y une de ces solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Alors on démontre que l'ensemble solution de (E) est de la forme

$$S = \{y + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\pi - y) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ pour } x \in [-2\pi; 2\pi] ; \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 3x = 0 ; \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) ;$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1, x \in [-2\pi; 3\pi] ; \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x.$$

3. Equation du type : $\tan x = a ; a \in \mathbb{R}$

On admet que $\forall a \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / \tan y = a$

Dès lors il s'agit de chercher l'ensemble des réels x tels que $\tan x = \tan y$.

$$\text{Or } \tan x = \tan y \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = 0$$

$$\text{D'où } \tan x = \tan y \Leftrightarrow \sin(x - y) = 0 \Leftrightarrow X = k\pi \text{ où } X = x - y \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ou encore } x - y = k\pi \Rightarrow x = y + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{y + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan x = \sqrt{3} ; 3 \tan^2 x - 1 = 0$

4. Résolution des équations du type : $(E): a \cos x + b \sin x = c$ où a, b, c sont trois nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$

Méthode de résolution :

Posons $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. On remarque que $(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1; (r > 0)$ et $-1 \leq \frac{a}{r} \leq 1$ et $-1 \leq \frac{b}{r} \leq 1$. Ainsi le point $M(\frac{a}{r}; \frac{b}{r})$ est un point appartenant au cercle trigonométrique. On pourra donc poser : $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{r}$ où α désigne l'abscisse curviligne du point M .

L'équation (E) peut alors se mettre sous la forme $\frac{a}{r} \cdot \cos x + \frac{b}{r} \sin x + \frac{c}{r} = 0; (r > 0)$.

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{r}$$

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{r} \text{ avec } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3 ; \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0 ; \cos x + \sin x = 1$$

I. Inéquation trigonométriques de types : $\cos x \geq a, \sin x \geq a; \cos x \leq a; \sin x \leq a$ etc.

Méthode : pour résoudre les inéquations de l'un des types ci-dessus, on peut utiliser le cercle trigonométrique : la valeur de α détermine deux points sur le cercle trigonométrique limitant deux arcs ; on détermine quel est l'arc qui convient et on en déduit l'ensemble solution.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Déterminons les réels } \alpha \text{ telque } \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

Sont solutions de cette inéquation les abscisses curvilignes des points du cercle situés sur l'arc en trait rouge. On a $S = \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]; (k \in \mathbb{Z})$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$