

CHAPITRE 4

TRIGONOMÉTRIE

4.1. Angle géométrique et angle orienté

Activité 1 en groupe de travail

Construire les secteurs angulaires ayant pour angles suivants : $a = 30^\circ$, $b = -60^\circ$ et $c = 45^\circ$

Conclusion

On dit que ces mesures sont les mesures des angles orientés.

(qui peut être positif ou négatif)

Dans le cas des angles 30° et 45° l'angle est dit géométrique

(qui est toujours positif)

4.2. Mesure principale d'un angle orienté

a) Activité 2 en groupe de travail

Mesurer sur un cercle trigonométrique les angles suivants :

$$\alpha = \frac{31\pi}{3} \text{ et } \beta = \frac{\pi}{3}. \text{ Conclure.}$$

b) Définition

On nomme mesure principale, la seule mesure de l'angle orienté appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

c) Détermination de la mesure principale

La détermination de la mesure principale α en radian d'un angle orienté dont la mesure a en radian est connue revient à écrire :

$$\alpha = a + 2k\pi \text{ Avec } -\pi < \alpha \leq \pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

Cette double inégalité permet de trouver la valeur de k noté

$$k_0 \text{ telle que } a \in] -\pi, \pi]$$

La mesure principale de l'angle serait $\alpha = a + 2k_0\pi$

Exemple pratique 1

Déterminer la mesure principale des angles orientés

$$\text{suivants : } \frac{23\pi}{6}, \frac{34\pi}{3}, -\frac{53\pi}{6}$$

Remarque

On peut avoir une écriture immédiate de la forme

précédente ou bien on détermine en premier lieu k à l'aide des inégalités $-\pi < a + 2k\pi \leq \pi$, puis on détermine α en utilisant l'égalité $\alpha = a + 2k\pi$

Exemple pratique 2

Trouver la mesure principale en radian de l'angle orienté dont la mesure est :

$$a) \frac{27\pi}{4} \quad b) -\frac{53\pi}{6} \quad c) \frac{2011\pi}{3}$$

d) Détermination de la mesure principale d'un angle orienté en degré

La détermination de la mesure principale α en degré d'un

angle orienté dont la mesure a en degré est connue revient à écrire :

$$\alpha = a + 360k \text{ Avec } -180^\circ < \alpha \leq 180^\circ \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

Cette double inégalité permet de trouver la valeur de k noté

$$k_0 \text{ telle que } a \in] -180, 180]$$

La mesure principale de l'angle serait $\alpha = a + 360k_0$

Exemple pratique 3

Déterminer la mesure principale de l'angle $\theta = 840^\circ$

4.3. Rappel sur les tables trigonométriques

La table suivante donne les valeurs particuliers.

Mesure en degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cosinus	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotan	?	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	?

4.4. Formules usuelles de transformation trigonométrique

1) Formules d'addition

a) Activité 3 en groupe de travail

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O. Soient les points M et N sur (C) tels que $(\vec{i}, \vec{ON}) = a$ et $(\vec{i}, \vec{OM}) = b$ pour tous angles a et b positifs.

1) Exprimer les coordonnées des points N et M en fonction de

a et de b .

2) Exprimer l'angle $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$ en fonction de a et b

3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ par la méthode trigonométrique et analytique

4) Comparer ces deux résultats et en déduire $\cos(a - b)$.

Conclusion

On dit que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ est une formule d'addition.

b) Les quatre formules d'addition

Pour tous a et b réels, on a :

$$1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$3) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$4) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Complément sur les formules d'addition

$$5) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$6) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Exemple pratique 4

En utilisant les formules d'addition, calculer :

$$a) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad b) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

En remarquant que $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

2) Transformation de sommes en produits

Pour tous réels a et b , on a :

$$7) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$8) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$9) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$10) \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

Complément sur la transformation de somme en produits

$$11) \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$12) \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}$$

Exemple pratique 5

$$\text{Calculer } \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3}$$

3) Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$13) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$14) \sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$15) \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Exemple pratique 6

$$\text{Calculer } \cos \frac{2\pi}{3} \text{ et } \tan \frac{2\pi}{3}$$

4) Formules de linéarisation

Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$16) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$17) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exemple pratique 7

$$\text{Sachant que } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Calculer } \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}$$

5) Formules de transformation de produits en sommes

Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$

$$18) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$19) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$20) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Exemple pratique 8

$$\text{Calculer } \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

4.5. Retrouver les formules de transformation

a) Activité 4 en groupe de travail

Remplacer dans la formule 1) le b par $-b$

Conclusion

On retrouve la formule 2)

b) Activité 5 en groupe de travail

On sait que pour tout angle A , $\sin A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$

En posant $= a - b$, calculer $\sin A$.

Conclusion

On retrouve la formule 3)

c) Activité 6 en groupe de travail

Remplacer b par $-b$ dans la formule 3)

Conclusion

On retrouve la formule 4)

.d) Activité 7 en groupe de travail

1) Calculer $\tan(a - b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}$ en remplaçant le numérateur et le dénominateur par les formules respectives 3) et 1)

2) Diviser le numérateur et le dénominateur du rapport par $\cos a \cos b$

Conclusion

On obtient la formule 5)

e) Activité 8 en groupe de travail

Remplacer b par $-b$ dans la formule 5)

Conclusion

On retrouve la formule 6)

f) Activité 9 en groupe de travail

On donne :

$$1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

En posant $A = a - b$ et $B = a + b$

Exprimer la somme 1) + 2) en fonction de A et B

Conclusion

On retrouve la formule 7)

De même si on fait $) - 2) , 3) + 4)$ et $3) - 4)$ on retrouve

les formules 8), 9) et 10).

g) Activité 10 en groupe de travail

Dans les formules 2) et 4) remplacer le b par a

Conclusion

On retrouve les formules 13) et 14)

h) Activité 11 en groupe de travail

Dans les formules 13) et 14) utiliser la RFT pour tirer $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$

Conclusion

On obtient les formules 16) et 17)

i) Activité 12 en groupe de travail

Faire la somme des formules 1) et 2) puis tirer $\cos a \cos b$

Conclusion

On obtient la formule 18)

De même la différence des formules 1) et 2) et la somme des formules 3) et 4) nous donnent les formules 19) et 20)

4.6. Autres formules trigonométriques utiles

Pour tout angle a , on a :

$$i) \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad ii) \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$iii) 1 + \cotan^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} \quad iv) 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

Pour tout angle a , en posant $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a :

$$v) \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad vi) \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad vii) \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

4.7. Propriétés des fonctions trigonométriques**1) Domaine de définition des fonctions trigonométriques**

-Soit la fonction $f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$

-Soit la fonction $g(x) = \cos x$, $D_g = \mathbb{R}$

-Soit la fonction $h(x) = \tan x$

La tangente est définie sur $\mathbb{R}$ à l'exception des valeurs annulant cosinus, soit $D_h = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

-Soit la fonction $k(x) = \cotan x$

La cotangente est définie sur $\mathbb{R}$ à l'exception des valeurs annulant le sinus, soit $D_k = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2) Parité et imparité des fonctions trigonométriques

-Soit la fonction $f(x) = \sin x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$

La fonction sinus est **impaire**.

O est un centre de symétrie pour la courbe de sinus

-Soit la fonction $g(x) = \cos x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $g(-x) = g(x)$

La fonction cosinus est **paire**.

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour le graphique de cosinus.

-Soit la fonction $h(x) = \tan x$

La fonction h est une fonction impaire

-Soit la fonction $k(x) = \cotan x$

La fonction k est également impaire

3) Périodicité des fonctions trigonométriques

a) Activité 13 en groupe de travail

Pour tout angle x , calculer $\sin(x + 2\pi)$, $\cos(x + 2\pi)$ et $\tan(x + \pi)$.

Conclusion

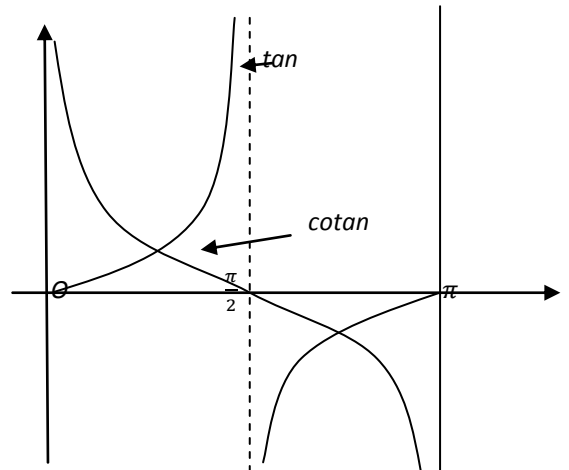
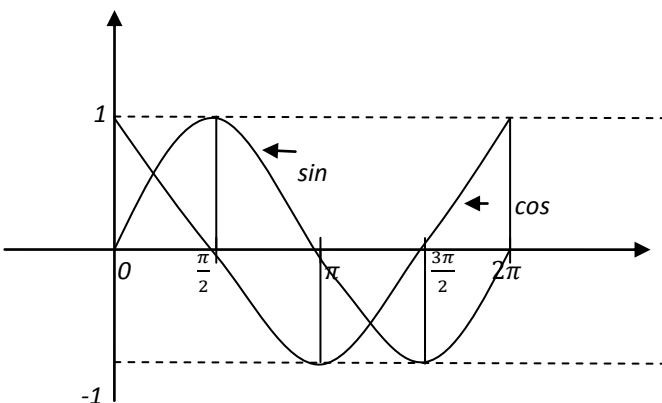
Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π et les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π .

b) Définition de la périodicité

On dit qu'une fonction f est de période T ou est périodique de période T ou est T -périodique si pour tout $x \in D_f$

$$f(x + T) = f(x)$$

4) Représentation graphique des fonctions trigonométriques



4.8. Résolution d'équations et d'inéquations

1) Notion de congruence modulo

Définition

Soit x et y des réels. On dit que x est congru à y modulo 2π et on note $x \equiv y[2\pi]$ si x et y diffèrent d'un multiple de 2π , c'est-à-dire $x - y = 2k\pi \Rightarrow x = y + 2k\pi$

2) Équations trigonométriques

a) Équation de la forme $\cos x = a$ et $\sin x = b$

i) Activité 14 en groupe de travail

Déterminer les valeurs de x pour lesquels on a :

(1) $\cos x = \frac{1}{2}$ et (2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conclusion

On dit que l'on a résolu les équations trigonométriques de la forme $\cos x = a$ et $\sin x = b$

ii) Résolution

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\cos x = a$

On distingue 2 cas

1^{er} cas

Si a n'est pas dans $[-1; 1]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution

2^{ème} cas

Si $a \in [-1, 1]$ alors la résolution de l'équation est possible.

Il existe un réel α tel que $a = \cos \alpha$

On a successivement

$$\cos x = a \Rightarrow \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x \equiv \alpha[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\alpha[2\pi]$$

Alors $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont alors

$$S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi\} \text{ Avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple pratique 9

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Équation de la forme $\sin x = a$

On a deux cas également

1^{er} cas : Si $a \in [-1; 1]$, alors pas de solution

2^{ème} cas : Si $a \in [-1; 1]$

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $a = \sin \alpha$

On a ainsi : $\sin x = a \Rightarrow \sin x = \sin \alpha$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

D'où $S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple pratique 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Remarque

Lorsque l'on doit les équations particulières du type :

(I): $\sin x = 0$ et (II): $\cos x = 0$ on procède ainsi :

I) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

II): $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) Équation de la forme $\tan x = a$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe α tel que $\tan \alpha = a$

Alors $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \{\alpha + k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple pratique 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan 2x = \sqrt{3}$

d) Équation de la forme $a \cos x + b \sin x + c = 0$

i) Activité 15 en groupe de travail

Vérifier que $x = \frac{\pi}{3}$ est solution de l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

ii) Résolution

Soit l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $a^2 + b^2 \neq 0$

On peut écrire

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\text{On sait que } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Alors il existe un réel φ tel que

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \end{aligned}$$

On obtient par fin la forme du a)

$$\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple pratique 12

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Inéquations trigonométriques

Exemple pratique 13

Résoudre les inéquations suivantes sur les intervalles précis :

a) $\cos 2x > \frac{1}{2}$ sur $I =] - \pi; \pi]$ b) $\sin x \geq \frac{-1}{2}$ sur $[0; 2\pi[$.

c) $\cos x < \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

3) Résolution d'équation avec changement de variable

Exemple pratique 14

Résoudre les équations suivantes :

1) $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$

2) $4 \sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \sin x + \sqrt{3} = 0$

4) Résolution d'inéquations avec changement de variable

Exemple pratique 15

Résoudre les équations suivantes :

1) $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 \geq 0$

2) $4 \sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \sin x + \sqrt{3} < 0$

