

TRIGONOMETRIE : 11eme Sciences

Les prérequis :

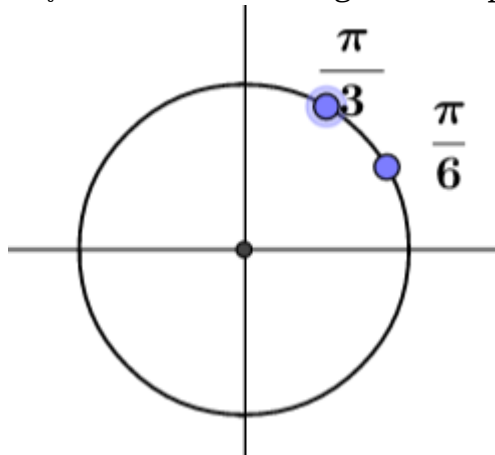
- ✓ Notions d'angle
- ✓ Notions de repères cartésiens
- ✓ Résolution d'équation et d'inéquation
- ✓ Calcul dans $\mathbb{R}$

Pré évaluation :

- 1) Trouvez une valeur de x pour laquelle $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) En déduire $\cos 2x$ et $\tan 2x$
- 3) Placez sur le cercle trigonométrique les différentes valeurs de x .

Solution :

- 1) Trouvons une valeur de x pour laquelle $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$
- 2) Déduisons $\cos 2x$ et $\tan 2x$
 - $\cos^2(2x) + \sin^2(2x) = 1 \Rightarrow \cos^2(2x) = 1 - \sin^2(2x) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2(2x) = \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(2x) = -\frac{1}{2}$
 - $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \times 2 = \sqrt{3}$ pour $\cos(2x) = \frac{1}{2}$
 - $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \times (-2) = -\sqrt{3}$ pour $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$
- 3) Plaçons sur le cercle trigonométrique



Situation problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\vec{OA}, \vec{OB})$

M est un point quelconque de cercle trigonométrique.

On se propose de déterminer toutes les positions de M telles que $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Q}$

- 1) Déterminez la valeur de n pour laquelle $\cos \frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}$

- 2) Exist-il des valeurs de k pour que $\cos \frac{n\pi}{3} = \sin \frac{n\pi}{3}$?
- 3) Déterminez si possible toutes les positions de M telles que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ puis conclure.

Activité 1 : Mesure d'un angle orienté ; Calculs sur les angles orientés

P est un plan orienté $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct de P .

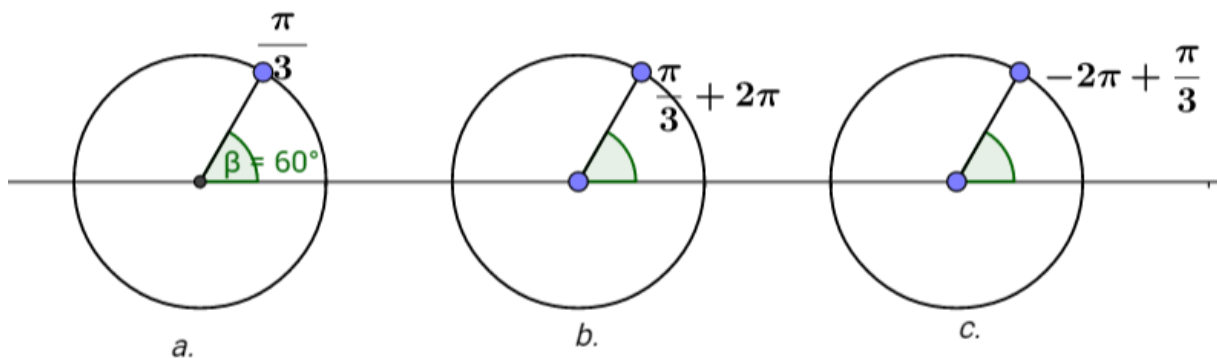
C est le cercle trigonométrique

Consigne :

1. Placez le point M dans chacun des cas suivants puis donnez le sens du triplet (M, O, I) et (I, O, M) :
 - a. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}$;
 - b. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = 2\pi + \frac{\pi}{3}$;
 - c. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = -2\pi + \frac{\pi}{3}$.
2. Quelle remarque faites-vous entre les trois points de 1. ?

Solution

1.



2. On remarque que ces angles sont les mêmes sur le cercle trigonométrique.

Synthèse générale :

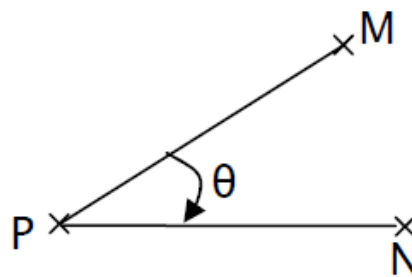
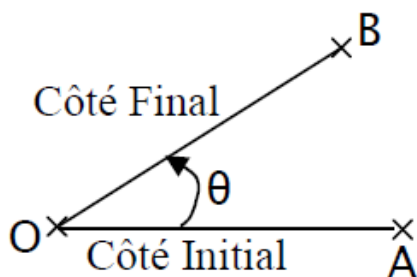
Orienter un angle, c'est lui donner un **sens**.

Le sens trigonométrique est le sens **contraire** à celui des aiguilles d'une montre ;

Ce sens est dit **positif**.

Le sens des aiguilles d'une montre est appelé **sens négatif**.

Exemples :



Dans le 1^{er} cas, l'angle θ est orienté positivement (dans le sens contraire de celui de l'aiguille d'une montre) tandis que dans le 2nd cas, θ est orienté négativement.

En posant $(\widehat{OM; OM}) = \alpha$, chacun des réels $\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \dots, \alpha + 2k\pi$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{OM; OM})$. Ainsi un angle orienté admet une infinité de mesures. Mais ces mesures diffèrent les unes des autres au même multiple de 2π . On dit que la mesure d'un angle est à $2k\pi$ près. Ainsi si α est une mesure d'un angle $(\widehat{OM; OM})$, toute autre mesure x de cet angle s'écrit : $x = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Parmi toutes les mesures de l'angle $(\widehat{OM; OM})$, une seule appartient à $] - \pi, \pi]$. Elle est appelée **mesure principale** de l'angle $(\widehat{OM; OM})$.

Détermination de la mesure principale d'un angle :

Pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté, on procède soit par la méthode de *proche à proche* ou soit par *encadrement* de l'angle α .

➤ Méthode de proche à proche :

Soit x la mesure d'un angle donné. On a : $x = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = x - 2k\pi$ puis on donne une valeur à k pour laquelle $\alpha \in] - \pi, \pi]$. Cette mesure correspond à la mesure principale de x .

Exemple : Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants :

$$\frac{5\pi}{3}, \frac{23\pi}{4}.$$

$$\text{Posons } x = \frac{5\pi}{3} \quad x = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = x - 2k\pi \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{3} - 2k\pi$$

$$k = 1, \alpha = \frac{5\pi}{3} - 2(1) \cdot \pi = -\frac{\pi}{3} \quad \alpha = -\frac{\pi}{3}.$$

$$-\frac{\pi}{3} \text{ est la mesure principale de } \frac{5\pi}{3}.$$

$$\text{Pour } x = \frac{-23\pi}{4}$$

$$\text{On a : } \alpha = x - 2k\pi = \frac{-23\pi}{4} - 2k\pi$$

$$\text{Pour } k = -3 \text{ on } \alpha = \frac{-23\pi}{4} - 2(-3)\pi = \frac{-23\pi}{4} + 24\pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ est la mesure principale de } \frac{-23\pi}{4}$$

➤ Méthode par encadrement :

Soit x une mesure d'un angle donné. On a : $x = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = x - 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

$$\alpha \in]-\pi, \pi] \Rightarrow -\pi < \alpha \leq \pi$$

$$\Rightarrow -\pi + 2k\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow -\pi + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \text{ (ajoutons } \pi \text{ partout)}$$

$$\Rightarrow 2k\pi < x + \pi \leq 2\pi + 2k\pi \text{ (divisons le tout par } \pi)$$

$$\text{On a: } k < \frac{x+\pi}{2\pi} \leq 1 + k$$

Ou encore :

$$\alpha \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow -\pi < \alpha < \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi < x - 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -x - \pi < -2k\pi \leq \pi - x \Leftrightarrow \boxed{\frac{x - \pi}{2\pi} \leq k < \frac{x + \pi}{2\pi}}$$

Exemple:

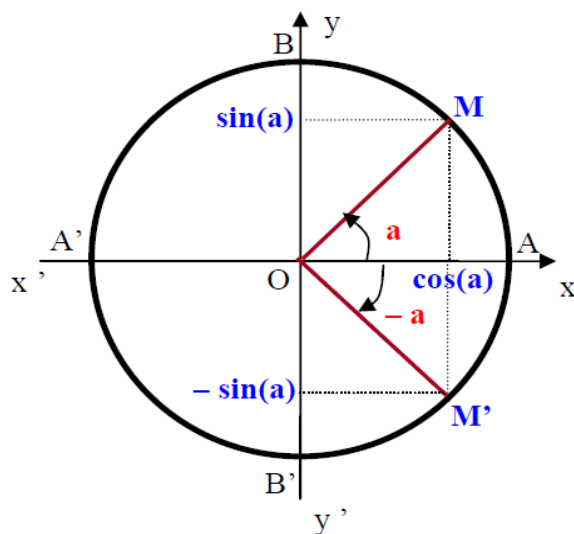
Déterminons la mesure principale de: $\frac{123\pi}{4}, \frac{-56\pi}{3}$

Propriétés des fonctions trigonométriques :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$: RFT ;
2. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos x$: On dit que la fonction cosinus est périodique de période 2π .
4. $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x + 2k\pi) = \sin x$: On dit que la fonction sinus est périodique de période 2π .

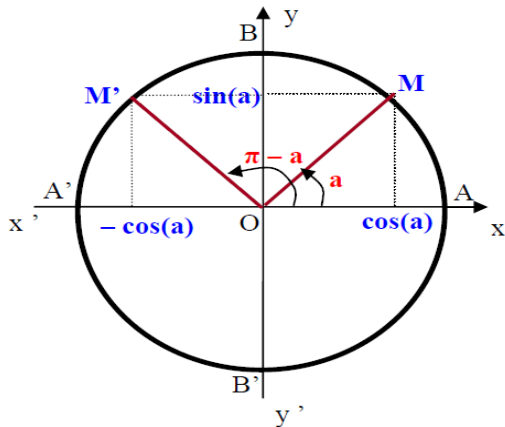
Angles opposés :



$\forall a \in \mathbb{R}$,

- $\cos(-a) = \cos a$: la fonction cosinus est **paire**
- $\sin(-a) = -\sin a$: la fonction sinus est **impaire**
- $\tan(-a) = -\tan(a)$: la fonction tangente est **impaire**

Angles supplémentaires :

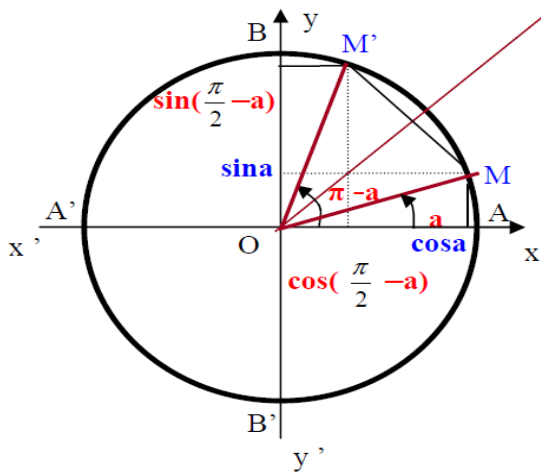


$\forall a \in \mathbb{R},$

- $\cos(\pi - a) = -\cos a$
- $\sin(\pi - a) = \sin a$
- $\tan(\pi - a) = -\tan(a)$

Remarque : Deux angles supplémentaires ont le même sinus et de cosinus opposés.

Angles complémentaires :



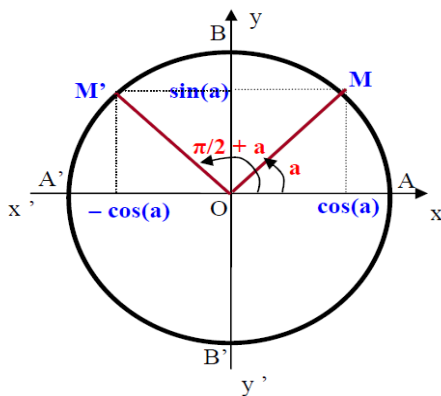
$\forall a \in \mathbb{R},$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cotan(a)$

Remarque :

Si deux angles sont complémentaires alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

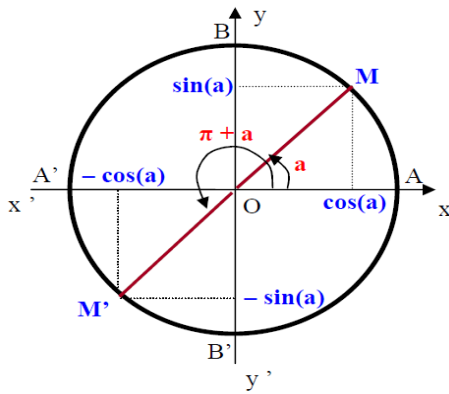
Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$:



$\forall a \in \mathbb{R},$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan(a)$

Angles dont la différence est π :



$\forall a \in \mathbb{R},$

- $\cos(\pi + a) = -\cos a$
- $\sin(\pi + a) = -\sin a$
- $\tan(\pi + a) = \tan(a)$

• **Conséquences des propriétés :**

Périodicité : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

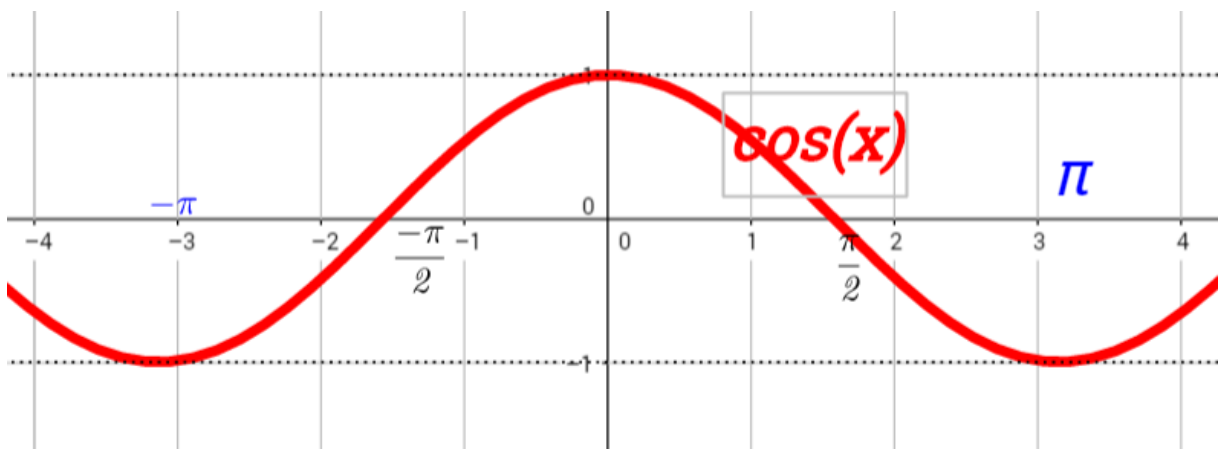
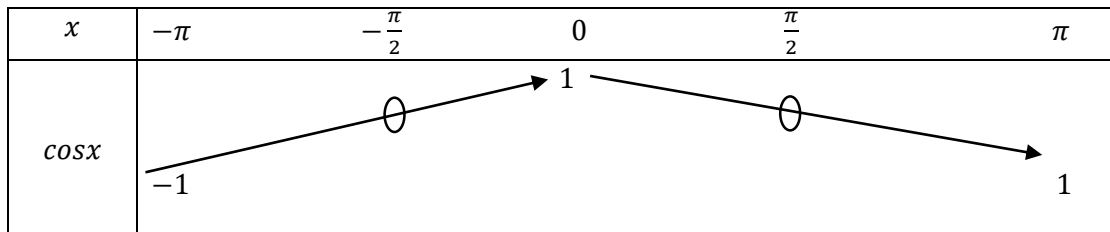
On trace les courbes de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sur un intervalle de longueur 2π et on étend la construction sur $\mathbb{R}$ par une reproduction identique sur chaque intervalle de longueur 2π .

Parité :

- ✓ $\cos(-x) = \cos(x)$ On trace la courbe sur un intervalle de longueur 2π puis on achève la construction sur $\mathbb{R}$ par la symétrie axiale d'axe des ordonnées.
- ✓ $\sin(-x) = -\sin(x)$ On trace la courbe sur un intervalle par la symétrie centrale de centre O .

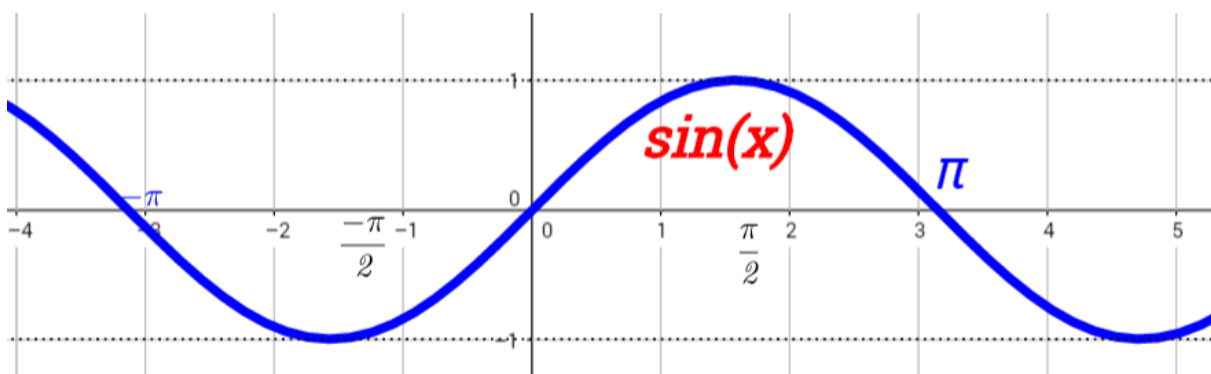
Représentation graphique des fonctions :

1. La fonction $\cos x$:



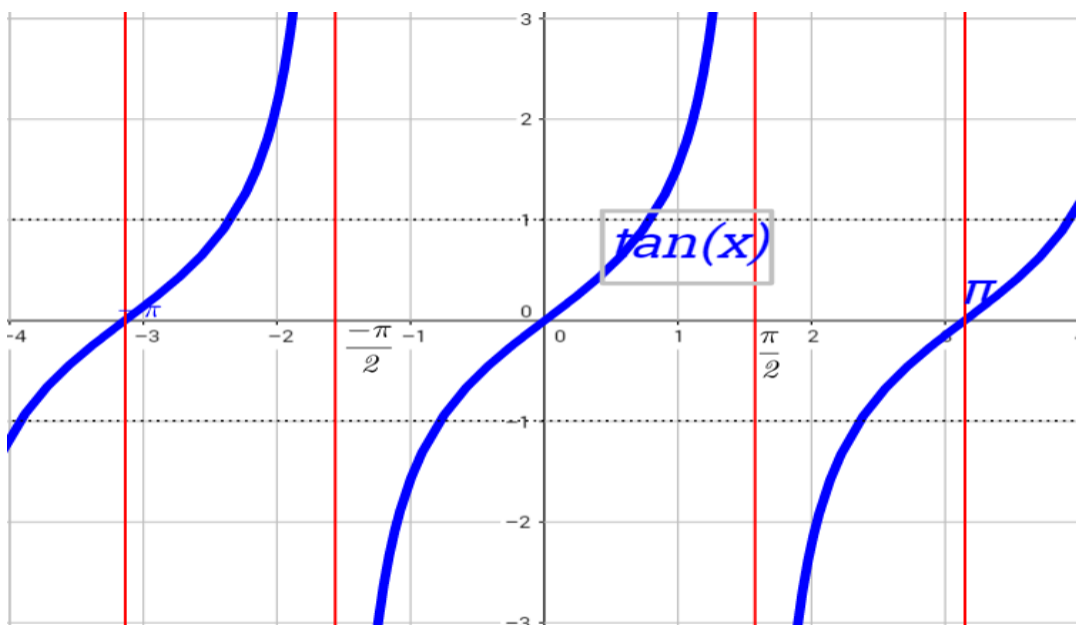
2. La fonction $\sin x$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	↓	0	↑	0



3. Fonction $\tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$

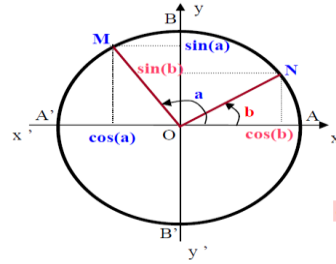


Activité3 : Formules usuelles de transformation

Soit deux réels a, b et $M \times N$ leurs points images sur le cercle trigonométrique, voir figure ci-contre.

Consigne :

- 1) Déterminez la mesure de l'angle
- 2) Calculez $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$ sous forme analytique.
- 3) Calculez $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$ sous forme trigonométrique.
- 4) Que peut-on conclure.



Solution :

- 1) Déterminons la mesure de l'angle $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$

D'après la figure $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = b$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = b \Rightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = -b$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = -b + a$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = a - b$$

- 2) Calculons $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$ sous forme analytique

On sait que $\overrightarrow{OM}(\cos a; \sin a)$ et $\overrightarrow{ON}(\cos b; \sin b)$ alors

$$\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = (\cos a; \sin a) \times (\cos b; \sin b) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

- 3) Calculons $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$ sous forme trigonométrique

$$\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = 1 \times 1 \times \cos(a - b)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = \cos(a - b)}$$

Conclusion :

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

Synthèse :

$$\begin{array}{ll} \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \boxed{1} \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a & \boxed{3} \\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \boxed{2} \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a & \boxed{4} \end{array}$$

Application :

Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Formule de multiplication (ou de duplication) :

En posant $b = a$ dans les formules $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$, on a :

$$\begin{array}{ll} \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a & \boxed{5} \quad \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} & \boxed{7} \\ \sin(2a) = 2 \cos a \sin a & \boxed{6} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2} & \boxed{8} \end{array}$$

• Formules de transformations :

✓ **De produit en somme :**

$$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2 \cos a \cos b \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]} \quad \boxed{9}$$

$$\boxed{1} - \boxed{2} \Rightarrow \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]} \quad \boxed{10}$$

$$\boxed{3} + \boxed{4} \Rightarrow \sin(a-b) + \sin(a+b) = 2 \sin a \cos b \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]} \quad \boxed{11}$$

$$\boxed{3} - \boxed{4} \Rightarrow \sin(a-b) - \sin(a+b) = -2 \cos a \sin b \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos a \sin b = -\frac{1}{2} [\sin(a-b) - \sin(a+b)]} \quad \boxed{12}$$

✓ **De somme en produit :**

$$\text{Posons } \begin{cases} p = a - b \\ q = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow \boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)} \quad \boxed{13}$$

$$\boxed{1} - \boxed{2} \Rightarrow \boxed{\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)} \quad \boxed{14}$$

$$\boxed{3} + \boxed{4} \Rightarrow \boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)} \quad \boxed{15}$$

$$\boxed{3} - \boxed{4} \Rightarrow \boxed{\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)} \quad \boxed{16}$$

Equations – Inéquations trigonométriques

Activité 4 : équations de type $\cos x = a$, $\sin x = a$ $a \in \mathbb{R}$

Consigne :

Trouvez toutes les valeurs de x dans les cas suivants :

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$;
2. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution

Synthèse :

1. $\cos x = a, a \in \mathbb{R}$:

- ✓ Si $a \notin [-1; 1]$ alors $\cos x = a$ n'admet pas de solution. $S = \emptyset$
- ✓ Si $a \in [-1; 1]$ alors $\exists \alpha \in]-\pi, \pi]$, tel que $\cos \alpha = a$.
Alors $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\cos 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
- $\cos x = -5$

2. $\sin x = a, a \in \mathbb{R}$:

- Si $a \notin [-1, 1]$, $\sin(x) = a$ n'admet pas de solution. On a $S(\sin(x) = a) = \emptyset$.
- si $a \in [-1, 1]$ soit $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $\sin(\alpha) = a$

$$\sin(x) = a \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\alpha + \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

3. $\tan x = a, a \in \mathbb{R}$:

$$\tan x = a \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \tan \alpha = a \quad \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; S = \{\alpha + k\pi\}.$$

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\tan(2x) = 1 \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Activité 5 : Equation du type : $a \cos(x) + b \sin(x) + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

$$\text{Soit l'équation } \sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$$

Consigne :

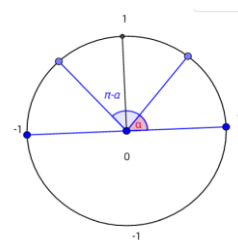
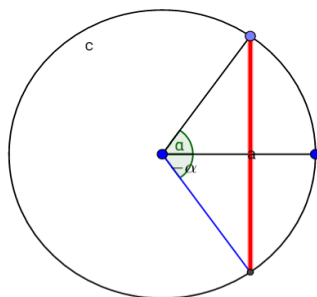
- Déterminez l'angle φ tel que
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{1}{2} \end{cases}$$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$; $\cos(x - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution

Synthèse

Pour résoudre l'équation (E): $a \cos(x) + b \sin(x) + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ On procède ainsi :

- On calcule le réel $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Soit φ l'angle formé par les axes $(\overrightarrow{OI})$ et $(\overrightarrow{OM})$. On a $\cos \varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cos \varphi$ et $\sin \varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \sin \varphi$.
- En remplaçant a et b par leur valeurs dans l'équation (E), on a :
 $r \cos \varphi \cos x + r \sin \varphi \sin x = -c \Leftrightarrow r(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = -c \Leftrightarrow r \cos(\varphi - x) = -c$
 $\Leftrightarrow \cos(\varphi - x) = -\frac{c}{r}$ (à résoudre).



Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = -3$;
2. $\sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$;
3. $\cos x + 3\sin x = \frac{1}{2}$.

Activité 6 : Inéquations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

- 1) $x \in \mathbb{R}; \sin(x) \leq \frac{1}{2}$
- 2) $x \in]-\pi, \pi], \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3) $x \in \mathbb{R}; \begin{cases} \cos(x) > \frac{1}{2} \\ \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Solution