Fiche de séquence N°4

Classe : 11 Sciences **Durée : 8 h**

1. Domaine : Sciences Mathématiques et Technologies **(**SMT**)** **Discipline :** Mathématiques

2. Compétences :

Résoudre une situation-problème

Composantes

Diagnostiquer la situation – problème

Manifestations

- Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation.
- Etablir des relations entre les données retenues.
- Comparer cette situation – problème avec des situations semblables déjà résolues
- Formuler le problème

3. Contenu : TRIGONOMETRIE

4. Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Néant
- **Ressources matérielles** : craie, tableau, la règle
- **Ressources financières** : Néant

5. Stratégies d'animation :

- Travail individuel
- Travail en petit groupe
- Brainstorming

6. Déroulement des activités (situation d'apprentissage)

Pré – évaluation :

Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants :

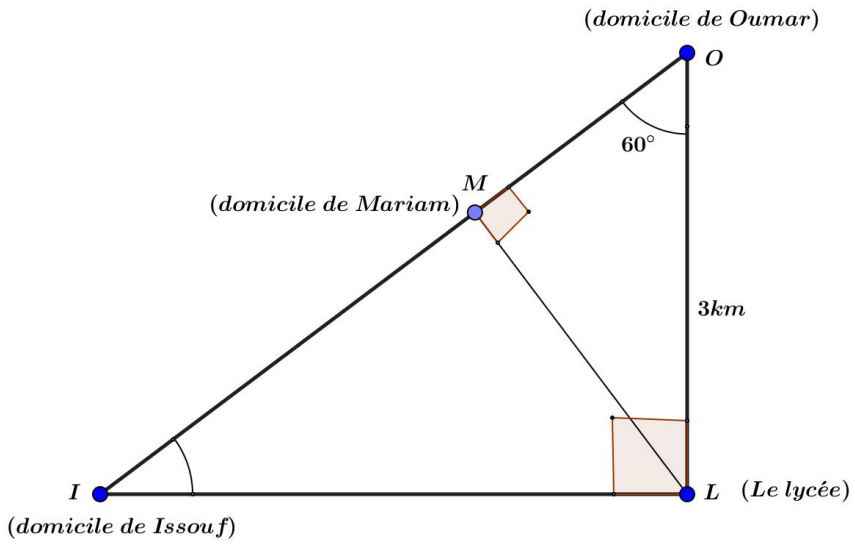
a) $0°\ ;\ 30°\ ;\ 45°\ ;\ 60°\ ;\ 90°\ ;\ 120°\ ;\ 135°\ ;\ 150°\ et\ 180°$

b) $0\,rd\ ;\ \frac{\pi}{6}\,rd\ ;\ \frac{\pi}{4}rd\ ;\ \frac{\pi}{3}rd\ ;\ \frac{\pi}{2}rd\ ;\ \frac{2\pi}{3}rd\ ;\ \frac{3\pi}{4}rd\ ;\ \frac{5\pi}{6}rd\ et\ \pi\,rd$

Situation problème :

1) Trois élèves (Oumar, Mariam, Issouf) de 10è CG se retrouvent chaque jeudis soir pour une séance d'exercices au lycée Alou Koné.

Le trajet de leurs domiciles au lycée est assimilable au triangle rectangle ci – dessous.

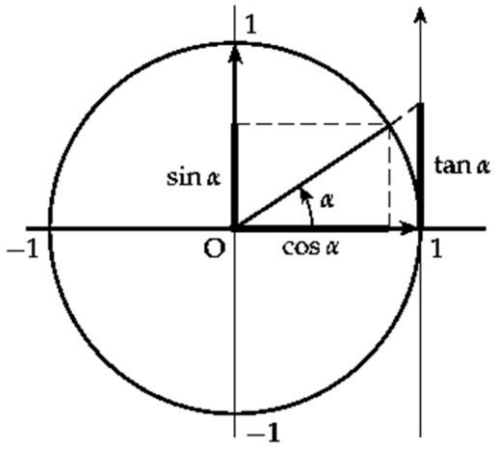


a) Sachant que $\hat{O} + \hat{I} + \hat{L} = 180°$. Déterminer la mesure des angles $\hat{O}$; $\hat{I}$ et $\hat{L}$ en radians puis en grades.
b) Calculer OI ; OM et MI
c) Quelle distance sépare le domicile de Mariam au lycée ?
d) Quelle distance sépare le domicile de Issouf au lycée ?
e) Lequel des trois élèves parcours le plus grand trajet ?

Rappel :

1) Définition :

Dans un repère ortho normal direct, α est l'angle orienté dans le cercle unité, on a alors :



$\cos \alpha$ = projection de l'angle sur l'axe des abscisses

$\sin \alpha$ = projection de l'angle sur l'axedes ordonnées

$\tan \alpha$ = projection de l'angle sur la droite tangente au cercle

2) Tableau des angles remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

3) Relations trigonométriques

a) Relations de base

- On a les encadrements suivants : $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
- On vérifie facilement avec le théorème de Pythagore dans le cercle unité, la relation : $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$.
- On vérifie avec le théorème de Thalès, la relation : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- À l'aide des relations précédentes, on déduit que : $1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

b) Relations de symétrie

- Avec l'angle opposé :

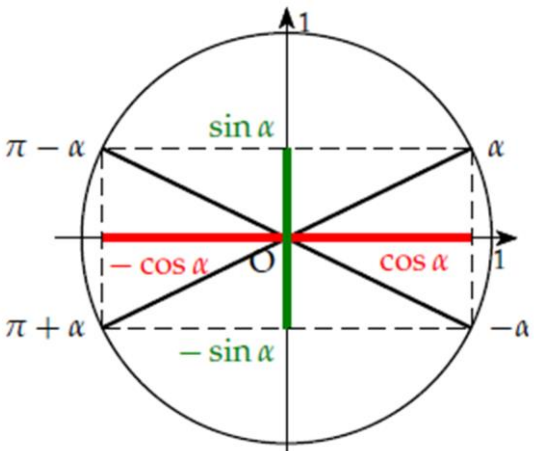
$sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$
$cos(-\alpha) = +cos\,\alpha$
$tan(-\alpha) = -tan\,\alpha$

- Avec l'angle supplémentaire :

$sin(\pi - \alpha) = +sin\,\alpha$
$cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha$
$tan(\pi - \alpha) = -tan\,\alpha$

- Avec l'angle diamétralement opposé :

$sin(\pi + \alpha) = -sin\,\alpha$
$cos(\pi + \alpha) = -cos\,\alpha$
$tan(\pi + \alpha) = +tan\,\alpha$



Remarque :

On peut constater que les fonctions sinus et tangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire.

4.3.3 Relations de déphasage

- Avec le complémentaire

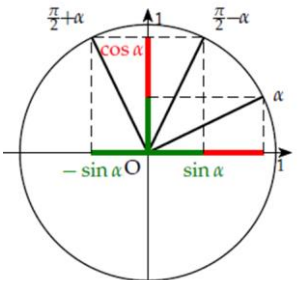
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

- Avec un déphasage d'un quart de tour

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$



Activité 1 : Calcul sur les angles orientés – mesure d'un angle orienté

2) Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right)=+\frac{\pi}{2}$ (On dit que ABCD est un carré direct).

Déterminer une mesure en radians de chacun des angles

$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$; $\left(\overrightarrow{BO}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right)$

$\left(\overrightarrow{CO}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$

Synthèse partielle :

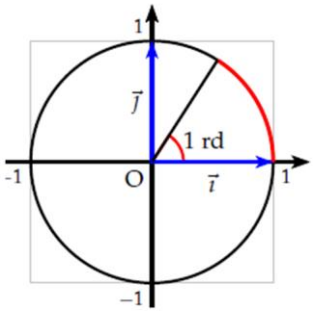
1) Le radian :

Le radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré. Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité.

Le demi-cercle unité a une longueur de π et donc correspond à un angle de π radian. On a alors :

$180°=\pi\ rd$

La mesure en degré de 1 radian vaut donc : $1\ rd\ =\frac{180°}{\pi}\approx 57°$



Remarque :

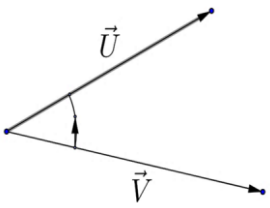
Le radian est une grande unité qui n'est pas intuitive contrairement au degré qui est notre unité première

Tableau des angles remarquables en radian :

Degré	30°	45°	60°	90°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Deux vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ non nuls déterminent un angle orienté noté$(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$.

$\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont deux vecteur non colinéaire

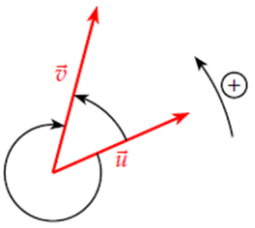


L'arc de cercle compris entre $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ est l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$.

Cet angle va de $\vec{v}$ vers $\vec{u}$. Le cosinus de cet angle est donné par :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\ ,\vec{v}\ )\Leftrightarrow\cos(\vec{u}\ ,\vec{v}\ )=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

Sur la figure ci-contre, on a représenté deux angles orientés, représentant le même angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$. Le premier est orienté dans le sens direct et l'autre dans le sens indirect.



2) **Mesure d'un angle orienté :**

Définitions :

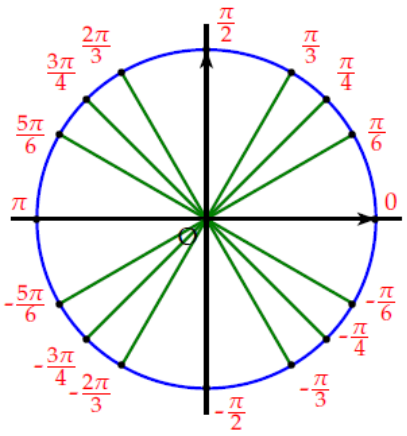
- On dit que les mesures (en radian) $\theta_1 et\ \theta_2$ d'un même angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ sont égales modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que : $\theta_2=\theta_1+2k\pi$ on écrit alors $\theta_1\equiv\theta_2[2\pi]$

Exemple :

- On appelle mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ la mesure θ avec $\theta\ \in]-\pi,\pi]$.
- On appelle mesure positive d'un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$, la mesure θ avec $\theta\ \in\ [0\ ,\ 2\pi[$.
  - Si x est une mesure en radians sa mesure principale notée θ est telle que :

$x = \theta + 2k\pi \quad avec \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = x - 2k\pi \quad avec \ \theta \in]-\pi \ ; \ \pi]$.- Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a :
$(\vec{u} \ ; \ \vec{u}) = 0 \ [2\pi] \quad ; \quad (\vec{u} \ ; \ \vec{u}) = \pi \ [2\pi]$

Exemple : Voici ci-dessous le cercle trigonométrique avec les angles remarquables exprimés en mesure principale.



- Pour tout vecteur non nul $\vec{u} \ et \ \vec{v}$, on a :
$(\vec{u} \ ; \ \vec{v}) = -(\vec{v} \ ; \ \vec{u}) \quad ; \quad (-\vec{u} \ ; \ -\vec{v}) = (\vec{u} \ ; \ \vec{v}) \quad ; \quad (\vec{u} \ ; \ -\vec{v}) = (\vec{u} \ ; \ \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$
Si $k \ et \ k'$ sont deux réels strictement positifs : $(k\vec{u} \ ; \ k' \vec{v}) = (\vec{u} \ ; \ \vec{v})$
- Pour tout vecteur non nul $\vec{u} \ ; \ \vec{v} \ et \ \vec{w}$ on a :
$(\vec{u} \ ; \ \vec{v}) + (\vec{v} \ ; \ \vec{w}) = (\vec{u} \ ; \ \vec{w})$ (Relation de Chasles)

Evaluation formative :

1. On considère deux vecteurs $\vec{u} \ et \ \vec{v}$ tels que $(\vec{u} \ ; \ \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$.

Déterminer $(\vec{u} \ ; -\vec{v}) \ ; \ (-\vec{u} \ ; \ \vec{v}) \ ; \ (\vec{v} \ ; -\vec{u}) \ ; \ (-\vec{u} \ ; -\vec{v}) \ ; \ \left(-3\vec{u} \ ; \ \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

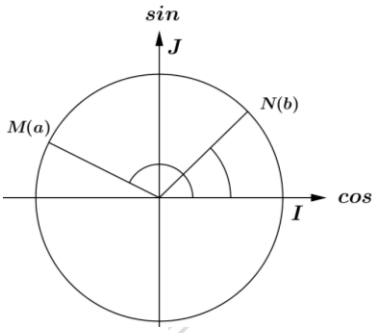
2. Déterminer les mesures principales des angles dont les mesures sont :

$\frac{7\pi}{6} \quad ; \quad \frac{8\pi}{3} \quad ; \quad -\frac{3\pi}{2} \quad ; \quad \frac{15\pi}{8} \quad ; \quad -\frac{10\pi}{3} \quad ; \quad \frac{88\pi}{4} \quad ; \quad \frac{131\pi}{6} \quad ; \quad \frac{253\pi}{12}$

Activité 2 : Formule usuelle de transformation

Activité 2-1 : Formules d'addition

On considère les points M et N, images respectives des nombres réels $a \ et \ b$ sur le cercle trigonométrique



On note que $a \ et \ b$ sont des mesures respective de $(\vec{OI} \ ; \ \vec{OM}) \ et \ (\vec{OI} \ ; \ \vec{ON})$

a) Déterminer les coordonnées du point M et N

b) Déterminer la mesure de l'angle $(\vec{ON} \ ; \ \vec{OM})$

c) Calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\vec{ON}.\vec{OM}$.

d) Montrer que $\cos(a-b) = \cos a \, . \cos b + \sin a \, . \sin b$. En déduire l'expression de $\cos(a+b)$

e) Sachant que $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Calculer $\sin(a-b)$. En déduire l'expression de $\sin(a+b)$

Activité 2-2 : Formules de multiplication

1) En utilisant les formules d'addition, démontrer que pour tous nombres réels $a \ et \ b$, on a :

$2\sin a\,.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \quad et \quad 2\cos a\,.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

2) En posant $a+b=p \quad et \quad a-b=q$. En déduire : $\sin p + \sin q \quad et \quad \cos p + \sin q$.

Synthèse générale :

On retient les formules suivantes :

Formule d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \sin a\,.\sin b$ $\qquad$ $\cos(a-b) = \cos a\,.\cos b + \sin a\,.\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\,.\cos b + \sin b\,.\cos a$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a\,.\cos b - \sin b\,.\cos a$

Remarque :

$\sin\pi = 0$ $\qquad$ $\cos\pi = -1$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin 0 = 0$ $\qquad$ $\cos 0 = 1$

$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ $\qquad$ $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$

2) Formule de multiplication : (Transformation de produit en somme)

$\cos a\,.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$; $\sin a\,.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

3) Formules de transformation de somme en produit :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; $\cos p - \cos q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$; $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$

Evaluation formative :

1) En utilisant les formules d'addition. Calculer $\cos 2a \quad et \quad \sin 2a$. (On pourra poser $a=b$)

2) Sachant que : $cos^2a + sin^2a = 1$.

Montrer que : $cos^2a = \frac{1+cos2a}{2} \quad et \quad sin^2a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Activité 3 : Propriétés des fonctions trigonométriques

1) Soit x un nombre réel.

a)Trouve $\cos(-x)$; $\sin(-x)$; $\tan(-x)$; $\cot g\,(-x)$; $\cos(x+2\pi)$;

$\sin(x+2\pi)$; $\tan(+\pi) \quad et \quad \cot g(x+\pi) \quad en\ fonction\ de \cos x$; $\sin x$; $\tan x \ et \ \cot g\, x$

2) Compléter les tableaux suivants :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
$\sin x$					

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
$\cos x$					

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$					

3) Dans un repère orthonormé. Représenter graphiquement les fonctions

$\sin :]-\pi\ ;\ \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$; $\cos :]-\pi\ ;\ \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$; $\tan : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin x$ $x \longmapsto \cos x$ $x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Synthèse partielle :

1) <u>Définitions</u> :

- On appelle fonction cosinus, la fonction $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos x$
- On appelle fonction sinus, la fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

2) Propriétés :

- Pour tout réel x : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. Avec $k \in \mathbb{Z}$
  On dit que les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π.
- Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
  On dit que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Conséquence :

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'origine.
- La fonction tangente, notée tan: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est impaire et π périodique
- Les fonctions tangentes et cotangente sont périodiques de période π.
  car : $\tan(x + k\pi) = \tan x$ et $cotg\,(x + k\pi) = \cot g\ (x)$ Avec $k \in \mathbb{Z}$
- Les fonctions tangentes et cotangente sont impaires :
  On a : $\tan(-x) = -\tan x$ et $\cot g(-x) = \cot g(x)$.

Activité 4 : Résolution d'équation de type $\boldsymbol{\cos x = a}$; $\boldsymbol{\sin x = a}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\tan x = a}$

a) Calculer $\pi - \frac{\pi}{6}$

b) En utilisant le cercle trigonométrique. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$ (On écrira les solutions en fonction de $\theta + 2k\pi$ $avec\ k \in \mathbb{Z}$

Pour tout réel x on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Synthèse partielle :

1) Résolution des équations dans $\mathbb{R}$: $\cos x = a$ et $sin\ x = a$

- Si$|a| > 1$, il n'y a pas de solution.
- Si$|a| \leq 1$, on a les solutions pour :

a) $cos\ x = a \Leftrightarrow cos\ x = cos\ \alpha$

On détermine $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\alpha = arccosa$ à l'aide du cercle trigonométrique.

D'après les règles de symétrie : $x = \alpha$ ou $x = -\alpha$

On trouve toutes les solutions réelles en ajoutant les multiples de 2π

$cos\ x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2\ k\pi\ ou\ x = -\alpha + 2\ k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Remarque : l'expression $x = \alpha + 2\ k\pi$ peut s'écrire $x = \alpha\ [2\pi]$ qui se prononce "$x = \alpha\ modulo\ 2\pi$"

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\,cos\,x - 1 = 0$

$\sqrt{2}\,cos\,x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad avec \ k \in \mathbb{Z}.$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad avec \ k \in \mathbb{Z}.$

  L'ensemble solution est $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \ avec \ k \in \mathbb{Z}.$

b) $sinx = a \Leftrightarrow sin\,x = sin\alpha$

On détermine $\alpha\pi\left[-\frac{\pi}{2} \ ; \ \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\alpha = arcsina$ à l'aide du cercle trigonométrique.

D'après les règles de symétrie : $x = \alpha \ ou \ x = \pi - \alpha$

On trouve toutes les solutions réelles en ajoutant les multiples de 2π

$sinx = a \ \Leftrightarrow \ x = \alpha + 2k\pi \ ou \ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \ \in \ \mathbb{Z}\,.$

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ou \ \ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Exemple 2 :

Résoudre x réel, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin 4x = \sin\frac{2\pi}{3}.$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \ avec \ k \in \mathbb{Z}.$

$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} \ avec \ k \in \mathbb{Z}.$

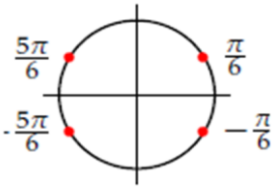
Autre exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 2x = \frac{1}{2}$

On visualisera les solutions sur le cercle trigonométrique.

$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \ \ les\ solutions\ dans\ \mathbb{R}\ sont\ donc :$

$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



2) Equation tan $x = a$ avec ($a \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$) :

$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \quad avec \ \ a = \tan\alpha\,.$

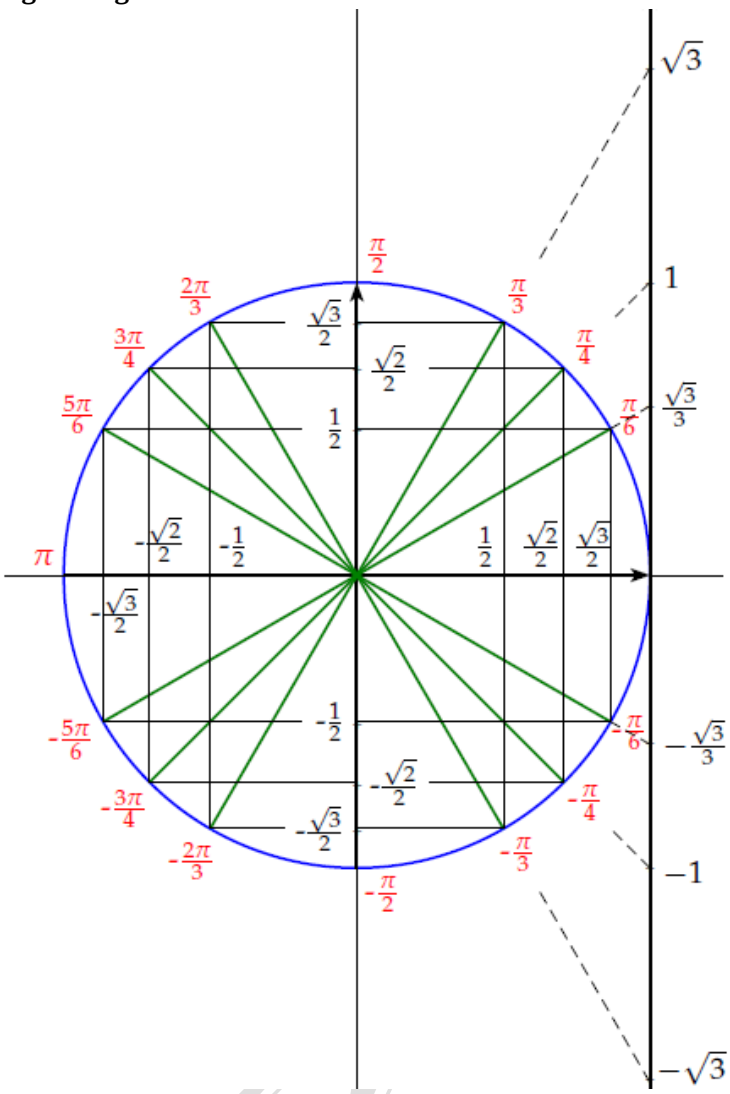
$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad avec\ k \in \mathbb{Z}.$

Exemple 3 : Résoudre $x \in]-\pi \ ; \ \pi]$, $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad et \quad \tan 2x = \sqrt{3}$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \ où \ \ k \in \mathbb{Z}.$

$S = \left\{x/x \in]-\pi\ ;\ \pi]\ ;\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \left\{\frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\right\} o\grave{u}\ k \in \{0\ ;\ -1\}$

3) Lignes trigonométrie dans le cercle :



Activité 5 : Résolution d'équation du type $acosx + bsin\,x = c$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) Que vaut $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

c) En utilisant les formules d'addition, écrit l'équation (E) sous la forme $\cos(x-\alpha) = cos\beta$

d) En déduire les solutions de l'équation (E).

Synthèse partielle

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type $a\cos x + b\sin x = c$ $(a \neq 0\ ;\ b \neq 0$

On calcule le réel strictement positif noté $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \frac{a}{r}\cos x + \frac{b}{r}\sin x = \frac{c}{r}$. *On cherche* α *un réel tel que* : $\begin{cases}\cos\alpha = \frac{a}{r}\\ \sin\alpha = \frac{b}{r}\end{cases}$

L'équation est équivalente à $\cos x.\cos\alpha + \sin x.\sin\alpha = \frac{c}{r} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{r}$ puis on résout cette nouvelle équation déjà étudier.

Exemple : Résoudre x réel, $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

$On\ a :\ a)1\ ;\ b = \sqrt{3}\ \ et\ \ c = \sqrt{2}$

$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2\,,\qquad donc\ \ \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Déterminons α tel que : $\begin{cases}\cos\alpha = \frac{1}{2}\\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Ainsi : $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\cos x + \sin\frac{\pi}{3}.\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \qquad D'où\ \ S = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi\ ;\ -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right\}\ k \in \mathbb{Z}.$$

Activité 5 : Résolution dans $\mathbb{R}$ d'inéquation trigonométrique du type $\sin x < a$ et $\cos x < a$

1) Résoudre x réel l'inéquation $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

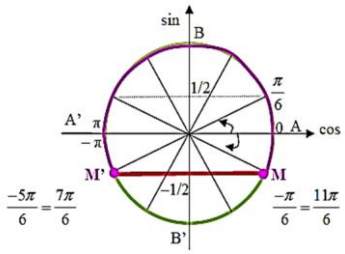
a) Dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$;

b) Dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$

c) Dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre x réel l'inéquation $\sin x < \frac{1}{2}$

Solution :



M est l'image de l'angle $-\frac{\pi}{6}\ ou\ \frac{11\pi}{6}$ et M' est l'image de l'angle $-\frac{-5\pi}{6}\ ou\ \frac{7\pi}{6}$.

Les solutions de l'inéquation $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ sont les images des points situés sur l'arc de cercle MM' contenant $A\ et\ B$. Ou les points ordonnées y sont supérieures ou égales à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

a) Dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, $S = \left[0\ ;\ \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right]$;

b) Dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$, $S = \left[-\pi\ ;\ \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

c) Dans $\mathbb{R}$, $S = \left[-\pi + 2k\pi\ ;\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$

Evaluation :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -1$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $2\cos x + 1 = 0$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$2\sin^2 x - 1 = 0$; $\cos 2x + \cos x = 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$