

Livret spécial

# Calcul trigonométrique

Du niveau de base au niveau concours

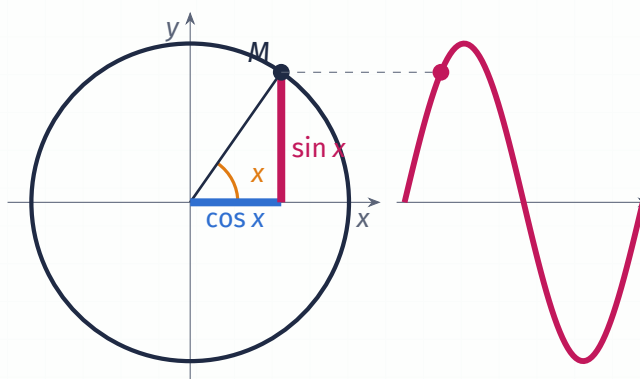
*À connaître par cœur*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

*Défi de concours*

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = ?$$

*Le cercle trigonométrique déroule la sinusoïde*

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

# Sommaire

|    |                                       |    |
|----|---------------------------------------|----|
| 1  | Le cercle trigonométrique             | 5  |
| 2  | Cosinus, sinus et tangente            | 6  |
| 3  | Angles associés, valeurs usuelles     | 8  |
| 4  | Formules d'addition                   | 9  |
| 5  | Formules de duplication               | 10 |
| 6  | Transformer produits et sommes        | 12 |
| 7  | L'expression $a \cos x + b \sin x$    | 12 |
| 8  | Équations trigonométriques            | 13 |
| 9  | Inéquations trigonométriques          | 15 |
| 10 | Les courbes trigonométriques          | 16 |
| 11 | Pour aller plus loin                  | 18 |
| 12 | Les pièges classiques                 | 19 |
| 13 | Les astuces des concours              | 20 |
| 14 | L'essentiel du chapitre en une page   | 22 |
| 15 | Niveau 1 • Bases                      | 23 |
| 16 | Niveau 2 • Bac                        | 24 |
| 17 | Niveau 3 • Approfondissement          | 26 |
| 18 | Niveau 4 • Concours                   | 27 |
| 19 | Cercle et angles associés             | 29 |
| 20 | Formules d'addition et de duplication | 31 |
| 21 | Transformations et identités          | 33 |
| 22 | Équations et inéquations              | 35 |
| 23 | Courbes et extremums                  | 36 |

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 24 Défis de concours                  | 38 |
| 25 Corrigés du niveau 1               | 41 |
| 26 Corrigés du niveau 2               | 44 |
| 27 Corrigés du niveau 3               | 47 |
| 28 Corrigés du niveau 4               | 50 |
| 29 Corrigés : angles associés         | 53 |
| 30 Corrigés : addition et duplication | 57 |
| 31 Corrigés : transformations         | 60 |
| 32 Corrigés : équations               | 63 |
| 33 Corrigés : courbes, extremums      | 67 |
| 34 Corrigés : défis de concours       | 70 |

### Comment utiliser ce livret

#### Les 4 niveaux d'exercices

##### Niveau 1 • Bases ★

les automatismes indispensables.

##### Niveau 2 • Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

##### Niveau 3 • Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

##### Niveau 4 • Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

#### Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

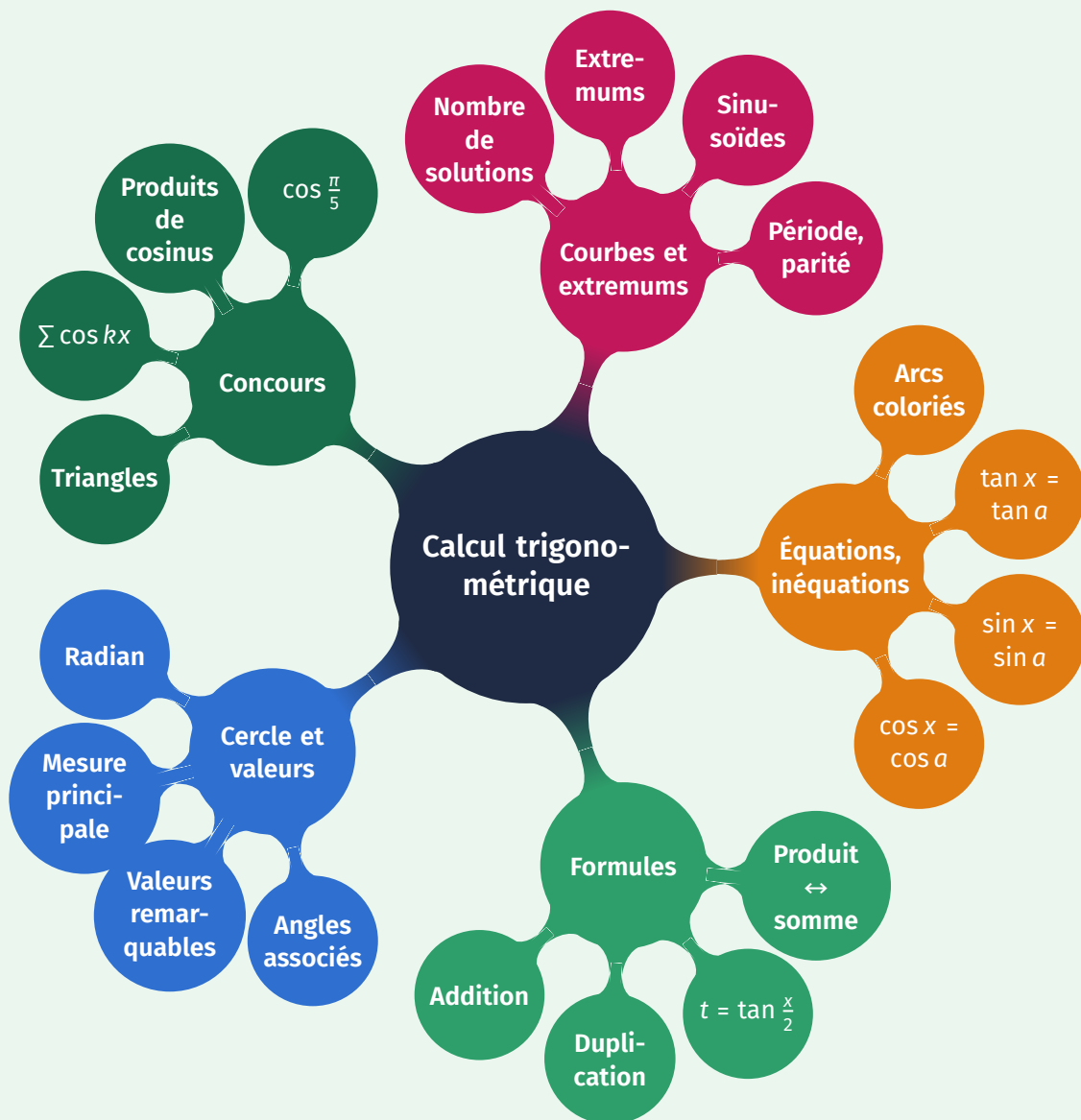
■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

**Le livret contient 66 exercices corrigés** : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Cercle et angles associés, Formules d'addition et de duplication, Transformations et identités, Équations et inéquations, Courbes et extremums, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

**Conseil** : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

# La carte du chapitre



## À la fin du chapitre, je sais...

- |                                                                                 |                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> convertir en radians, mesure principale ;              | <input type="checkbox"/> transformer produits et sommes ;                     |
| <input type="checkbox"/> lire $\cos x$ , $\sin x$ , $\tan x$ sur le cercle ;    | <input type="checkbox"/> écrire $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$ ; |
| <input type="checkbox"/> utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $1 + \tan^2 x$ ; | <input type="checkbox"/> résoudre $\cos x = \cos a$ , $\sin x = \sin a$ ;     |
| <input type="checkbox"/> valeurs remarquables, angles associés ;                | <input type="checkbox"/> placer les solutions sur le cercle ;                 |
| <input type="checkbox"/> démontrer $\cos(a - b)$ (produit scalaire) ;           | <input type="checkbox"/> résoudre une inéquation sur le cercle ;              |
| <input type="checkbox"/> formules d'addition et de duplication ;                | <input type="checkbox"/> tracer $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ , compter ;  |
| <input type="checkbox"/> linéariser, utiliser $t = \tan \frac{x}{2}$ ;          | <input type="checkbox"/> calculer $\cos \frac{\pi}{5}$ , produits et sommes.  |

# Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

## 1 Le cercle trigonométrique

### Définition : le radian

Sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , un angle au centre de **un radian** (1 rad) intercepte un arc de longueur égale au rayon  $R$ . Le cercle entier, de longueur  $2\pi R$ , correspond donc à  $2\pi$  radians :

$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180^\circ} \quad \frac{\theta \text{ (en rad)}}{\pi} = \frac{\alpha \text{ (en degrés)}}{180} \quad \text{arc : } \boxed{\ell = R\theta} \quad (\theta \text{ en rad}).$$

|         |   |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |       |                  |        |
|---------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|------------------|--------|
| degrés  | 0 | 30              | 45              | 60              | 90              | 120              | 135              | 150              | 180   | 270              | 360    |
| radians | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

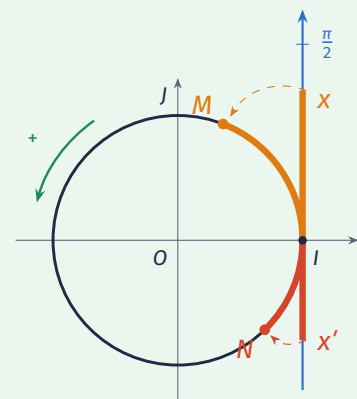
Ainsi  $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$  et  $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,017 \text{ rad}$ . Sur un cercle de rayon 5 cm, un arc de  $72^\circ$ , soit  $\frac{72\pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$ , mesure  $\ell = 5 \times \frac{2\pi}{5} = 2\pi \approx 6,28 \text{ cm}$ .

### Définition : cercle trigonométrique, abscisse curviligne

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , avec  $I(1,0)$  et  $J(0,1)$ . Le **cercle trigonométrique**  $C$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, d'origine  $I$ , **orienté** dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

On **enroule** sur  $C$  la tangente en  $I$ , graduée comme l'axe des ordonnées : la graduation  $x$  vient se poser sur un point  $M$  du cercle. On dit que  $x$  est **une abscisse curviligne** de  $M$ , et que  $M$  est le **point image** de  $x$ . Comme  $C$  a pour longueur  $2\pi$  :

les abscisses curvilignes de  $M$  sont les  $x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



$x = 1,2$  vient en  $M$ ,  $x' = -0,8$  en  $N$  :  
l'arc de  $I$  à  $M$  mesure  $x$

### Mesure principale

Tout point  $M$  de  $C$  a **une seule** abscisse curviligne dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  : c'est la **mesure principale**. On écrit  $x \equiv y [2\pi]$  («  $x$  congru à  $y$  modulo  $2\pi$  ») lorsque  $x - y = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  :  $x$  et  $y$  ont alors le même point image.

**Démonstration.** Si  $x$  est une abscisse curviligne de  $M$ , on cherche  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$ ,

soit  $\frac{\pi-x}{2\pi} - 1 < k \leq \frac{\pi-x}{2\pi}$  : un intervalle de la forme  $]c-1, c]$  contient exactement **un** entier,  $k = E(c)$ .

**Méthode : trouver la mesure principale de  $x = \frac{p\pi}{q}$**

On écrit  $p = 2q \times n + r$  (division par  $2q$ ) avec un reste  $r$  choisi entre  $-q$  (exclu) et  $q$  (inclus) :  
 $x = 2n\pi + \frac{r\pi}{q}$ , et la mesure principale est  $\frac{r\pi}{q}$ .

**Exemple : mesures principales**

$$\begin{aligned} \frac{37\pi}{6} : 37 &= 12 \times 3 + 1, \text{ donc } \frac{37\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{\frac{\pi}{6}}. & -\frac{29\pi}{4} : -29 &= 8 \times (-4) + 3 \rightarrow \boxed{\frac{3\pi}{4}}. \\ \frac{11\pi}{3} : 11 &= 6 \times 2 - 1 \rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{3}}. & \frac{2026\pi}{3} : 2026 &= 6 \times 338 - 2, \text{ donc } \frac{2026\pi}{3} = 676\pi - \frac{2\pi}{3} \rightarrow \boxed{-\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

**Remarque. Un peu d'histoire.** Les rapports trigonométriques ne sont pas nés dans le triangle rectangle, mais dans le **cercle**, chez les astronomes. Hipparque (II<sup>e</sup> siècle av. J.-C.), puis Ptolémée (II<sup>e</sup> siècle) dressent des tables de **cordes** : dans un cercle de rayon 1, la corde d'un arc de mesure  $\theta$  vaut  $2 \sin \frac{\theta}{2}$  (section 5). Les astronomes indiens (Aryabhata, vers 500) préfèrent la **demi-corde**, *jya* ; transcrit en arabe *jiba*, le mot est relu *jayb* (« pli, poche »), traduit en latin au XII<sup>e</sup> siècle par *sinus*. Les savants de langue arabe (al-Battani, Abu al-Wafa, X<sup>e</sup> siècle) systématisent le sinus, utilisent les « ombres » (nos tangente et cotangente) et établissent des formules d'addition.

2

## Cosinus, sinus et tangente

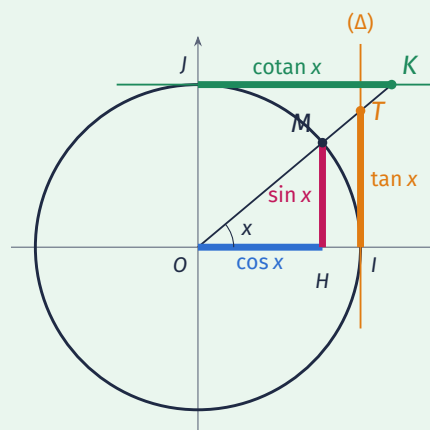
**Définition : cosinus, sinus**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $M$  son point image sur  $C$ . Le **cosinus** et le **sinus** de  $x$  sont les **coordonnées** de  $M$  :

$$M(\cos x, \sin x), \quad \vec{OM} = \cos x \vec{i} + \sin x \vec{j}.$$

**Premières propriétés ( $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ )**

- $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ,  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$  ;
- $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$  (car  $OM^2 = 1$ ).



**Lien avec le triangle rectangle.** Si  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , le triangle  $OHM$  ( $H$  projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OI)$ ) est rectangle en  $H$ , d'hypoténuse  $OM = 1$  :  $\cos x = \frac{OH}{OM} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ ,  $\sin x = \frac{HM}{OM} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$  : on retrouve les définitions du collège (et, par Thalès, dans tout triangle rectangle d'angle aigu  $x$ ), mais elles ont désormais un sens pour **tout** réel  $x$ .

**Définition : tangente, cotangente**

Pour  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  (c'est-à-dire  $\cos x \neq 0$ ) :  $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ . Pour  $x \neq k\pi$  ( $\sin x \neq 0$ ) :

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Si  $x \neq k\frac{\pi}{2}$  :  $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$ . **Lecture** : la droite  $(OM)$  coupe la tangente  $(\Delta)$  au cercle en  $I$  (droite  $x = 1$ , l'« axe des tangentes ») au point  $T(1, \tan x)$ , et la tangente en  $J$  (droite  $y = 1$ ) au point  $K(\cotan x, 1)$ .

**Démonstration de la lecture.** Un point  $P(X, Y)$  est sur  $(OM)$  si et seulement si  $\vec{OP}$  et  $\vec{OM}$  sont colinéaires :  $X \sin x - Y \cos x = 0$ . Avec  $X = 1$  (et  $\cos x \neq 0$ ) :  $Y = \tan x$  ; avec  $Y = 1$  (et  $\sin x \neq 0$ ) :  $X = \cotan x$ .

### Relations fondamentales

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0)$$

$$1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin x \neq 0)$$

| $x \in$  | $]0, \frac{\pi}{2}[$ | $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ | $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ | $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ |
|----------|----------------------|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| $\cos x$ | +                    | -                      | -                        | +                     |
| $\sin x$ | +                    | +                      | -                        | -                     |
| $\tan x$ | +                    | -                      | +                        | -                     |

signe de  $\cos x$  : à droite ou à gauche de  $(Oy)$  ;  
signe de  $\sin x$  : au-dessus ou au-dessous de  $(Ox)$

**Démonstration.**  $1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$  ; de même avec  $\sin^2 x$  au dénominateur.

### Méthode : d'une ligne trigonométrique aux autres

1. On calcule le **carré** de l'inconnue avec  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  ou  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ . 2. On choisit le **signe** en plaçant  $x$  sur le cercle (quadrant). 3. On en déduit les autres lignes, puis on **contrôle** que  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

**Exemple** :  $\tan x = -2$  avec  $x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$

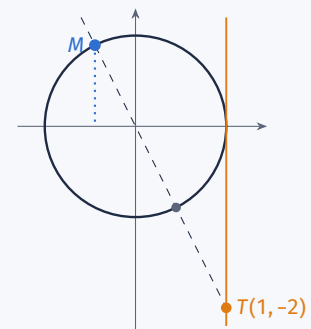
1.  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 4 = 5$ , donc  $\cos^2 x = \frac{1}{5}$ .

2.  $x$  est dans le deuxième quadrant, où  $\cos x < 0$  :

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3.  $\sin x = \tan x \times \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  (positif : cohérent avec le quadrant) et  $\cotan x = -\frac{1}{2}$ .

**Contrôle** :  $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ . **Lecture** : la droite  $(OT)$ , avec  $T(1, -2)$ , coupe le cercle en deux points diamétralement opposés ; on garde celui du deuxième quadrant.



### Exemple : simplifier, démontrer une identité

•  $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$  pour tout réel  $x$ .

• Si  $x \neq k\frac{\pi}{2}$  :  $\frac{1}{1 + \tan^2 x} + \frac{1}{1 + \cotan^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

• Si  $\cos x \neq 0$  (donc  $\sin x \neq \pm 1$ ) :  $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ , car les « produits en croix » sont égaux :  $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ .

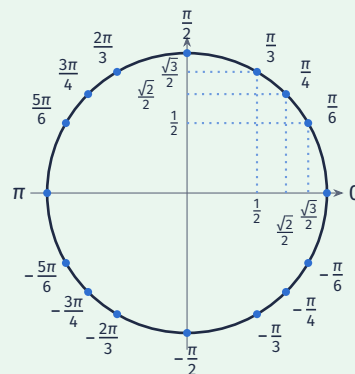
3

## Angles associés, valeurs usuelles

### Valeurs remarquables

| x       | 0        | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| sin x   | 0        | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| cos x   | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| tan x   | 0        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | non déf.        |
| cotan x | non déf. | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

**Mémo :** sin x vaut successivement  $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$  ; cos x : la même liste, à l'envers.



les 16 points remarquables (mesures principales)

**Démonstrations.** Pour  $x = \frac{\pi}{4}$ , M est sur la bissectrice  $y = x$  :  $\cos x = \sin x > 0$  et  $2 \cos^2 x = 1$ , d'où  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Pour  $x = \frac{\pi}{3}$ , le triangle OIM est isocèle ( $OI = OM = 1$ ) avec un angle de  $60^\circ$  en O : il est **équilatéral**, donc M se projette au milieu de [OI] :  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Enfin  $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$  (angles associés, ci-dessous). Les symétries du cercle donnent ensuite tous les points de la figure : par exemple, le point image de  $\frac{3\pi}{4}$  est  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

### Angles associés (pour tout réel x, là où les tangentes existent)

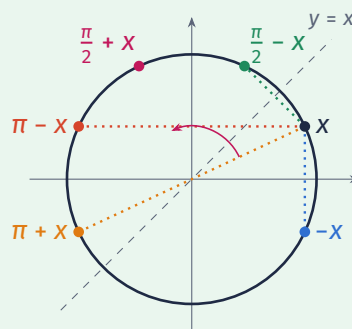
| angle       | $-x$                          | $\pi - x$                     | $\pi + x$                  | $\frac{\pi}{2} - x$              | $\frac{\pi}{2} + x$  |
|-------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------|----------------------------------|----------------------|
| cos         | cos x                         | $-\cos x$                     | $-\cos x$                  | sin x                            | $-\sin x$            |
| sin         | $-\sin x$                     | sin x                         | $-\sin x$                  | cos x                            | cos x                |
| tan         | $-\tan x$                     | $-\tan x$                     | tan x                      | cotan x                          | $-\cotan x$          |
| point image | symétrique par rapport à (Ox) | symétrique par rapport à (Oy) | symétrique par rapport à O | symétrique par rapport à $y = x$ | quart de tour direct |

Lecture :  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ,  $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cotan x$ , etc.

**Démonstrations (lecture sur le cercle).**

Soit M(cos x, sin x) le point image de x.

- $x + \pi$  : on ajoute un demi-tour, on arrive au point diamétralement opposé  $(-\cos x, -\sin x)$ . Comme  $\pi \equiv -\pi [2\pi]$ , c'est aussi le point image de  $x - \pi$ .
- $-x$  : la symétrie d'axe (Ox) conserve les longueurs et **renverse le sens** : l'arc de I à M, de mesure x, devient l'arc de mesure  $-x$ . Le point image de  $-x$  est  $(\cos x, -\sin x)$ .
- $\pi - x = \pi + (-x)$  : on combine les deux :  $(-\cos x, \sin x)$ .



points images de x et des angles associés (ici  $x = 25^\circ$ )

- $\frac{\pi}{2} - x$  : la symétrie d'axe  $y = x$  échange  $I$  et  $J$ , échange les coordonnées et renverse le sens : un arc de mesure  $x$  issu de  $I$  devient un arc de mesure  $-x$  issu de  $J$  (abscisse  $\frac{\pi}{2}$ ), d'où le point  $(\sin x, \cos x)$ .
- $\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - (-x)$  : point  $(\sin(-x), \cos(-x)) = (-\sin x, \cos x)$ .

Les formules pour  $\tan$  s'en déduisent par quotient : en particulier  $\tan(x + k\pi) = \tan x$ .

★ **Astuce de concours : retrouver les angles associés en 3 secondes**

**Le nom** : avec  $\pi \pm x$  (et  $-x$ ), on garde la même fonction ; avec  $\frac{\pi}{2} \pm x$ , on échange  $\cos \leftrightarrow \sin$  (et  $\tan \leftrightarrow \cotan$ ). **Le signe** : on imagine  $x$  petit et positif, on place le point associé sur le cercle et on lit le signe. Par exemple,  $\frac{\pi}{2} + x$  est dans le 2<sup>e</sup> quadrant, où le cosinus est négatif :  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ .

**Exemple : calculer, simplifier**

- $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\tan \frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
  - Avec la mesure principale (section 1) :  $\cos \frac{2026\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{2026\pi}{3} = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
  - $A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ . Comme  $3\pi + x = (\pi + x) + 2\pi$  et  $\frac{5\pi}{2} - x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi$  :  $A = \sin x - \sin x - \sin x - \sin x = -2 \sin x$ .
  - **Apparier les termes** :  $\sin \frac{4\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{10}$  et  $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{10}$  (car  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{10}$ ), donc  $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{10} + \sin^2 \frac{3\pi}{10} + \sin^2 \frac{4\pi}{10} = \left(\sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10}\right) + \left(\sin^2 \frac{2\pi}{10} + \cos^2 \frac{2\pi}{10}\right) = 2$ .
- De même,  $\cos(\pi - x) = -\cos x$  donne  $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0$ .

4

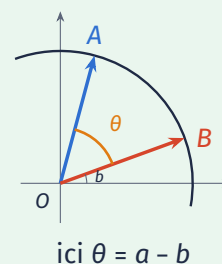
## Formules d'addition

**Théorème (formule fondamentale)**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .

**Démonstration (par le produit scalaire).** Soit  $A$  et  $B$  les points images de  $a$  et  $b$  : les vecteurs  $\vec{OA}(\cos a, \sin a)$  et  $\vec{OB}(\cos b, \sin b)$  sont **unitaires**. Calculons  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  de deux façons.

- **Analytiquement** (repère orthonormé) :  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .
- **Géométriquement** :  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \theta = \cos \theta$ , où  $\theta \in [0, \pi]$  est l'angle géométrique  $A\hat{O}B$ . L'arc orienté qui va de  $B$  à  $A$  mesure  $a - b$  (à  $2\pi$  près), et sa longueur est  $\theta$  ou  $2\pi - \theta$  : donc  $a - b \equiv \theta$  ou  $a - b \equiv -\theta [2\pi]$ . Dans les deux cas  $\cos(a - b) = \cos \theta$  (parité et périodicité du cosinus).



En égalant les deux expressions :  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ . □

**Formules d'addition (pour tous réels  $a, b$ )**

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

(les formules en tan supposent que toutes les tangentes écrites existent).

**Démonstrations.**  $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  (parité). Puis  $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ . On remplace  $b$  par  $-b$  pour  $\sin(a - b)$ . Enfin, si  $\cos a, \cos b$  et  $\cos(a + b)$  sont non nuls, on divise le numérateur et le dénominateur de  $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$  par  $\cos a \cos b$ ;  $\tan(a - b)$  s'obtient avec  $\tan(-b) = -\tan b$ .

**Remarque. Mémo :** le cosinus est « **contrariant** » (cos cos, sin sin, avec le signe **contraire** : + devient -) ; le sinus « **mélange** » (sin cos puis cos sin, avec le **même** signe).

**Exemple : valeurs exactes**

$$\bullet \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} : \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\bullet \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} : \tan \frac{5\pi}{12} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \tan \frac{\pi}{12} = \cotan \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\bullet \text{ Pour tout réel } x : \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} = \sin x \quad (\text{les termes } \pm \cos x \sin \frac{\pi}{3} \text{ s'éliminent}).$$

$$\bullet \text{ Retrouver un angle : } a, b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ avec } \tan a = \frac{1}{4} \text{ et } \tan b = \frac{3}{5}. \tan(a + b) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{20}} = \frac{17/20}{17/20} = 1.$$

1. Or  $a + b \in ]0, \pi[$ , et dans cet intervalle seul  $\frac{\pi}{4}$  a pour tangente 1 (les solutions de  $\tan y = 1$  sont les  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ , section 8) :  $a + b = \frac{\pi}{4}$ .

5

**Formules de duplication**
**Duplication (pour tout réel  $a$ )**

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad (\text{si } \tan a \text{ et } \tan 2a \text{ existent}).$$

**Démonstration.** On prend  $b = a$  dans les formules d'addition, puis on remplace  $\sin^2 a$  par  $1 - \cos^2 a$  (ou  $\cos^2 a$  par  $1 - \sin^2 a$ ).

## Conséquences : linéarisation, demi-angle, angle triple

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$$

$$\left| \cos \frac{a}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad \left| \sin \frac{a}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

**Démonstrations.** On isole  $\cos^2 a$  (resp.  $\sin^2 a$ ) dans  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  (resp.  $1 - 2 \sin^2 a$ ), puis on remplace  $a$  par  $\frac{a}{2}$  : le **signe** de  $\cos \frac{a}{2}$  se lit sur le cercle, selon la position de  $\frac{a}{2}$ . Ensuite  $\cos 3a = \cos(2a + a) = (2 \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \sin^2 a \cos a = (2 \cos^2 a - 1) \cos a - 2(1 - \cos^2 a) \cos a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$  ; de même  $\sin 3a = 2 \sin a \cos^2 a + (1 - 2 \sin^2 a) \sin a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$ .

 Formules en  $t = \tan \frac{a}{2}$  (pour  $a \neq \pi + 2k\pi$ )

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \left( \text{si } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

**Démonstration.**  $\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , donc  $\cos \frac{a}{2} \neq 0$  et  $\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{1+t^2}$ . Alors  $\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{a}{2} (1 - t^2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2t \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ . **Intérêt :** toute expression rationnelle en  $\cos a$  et  $\sin a$  devient une fraction rationnelle en  $t$ .

 Exemple :  $\frac{\pi}{8}$ , une linéarisation, des cordes

$$\bullet \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \text{ et } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ car } \frac{\pi}{8} \in ]0, \frac{\pi}{2}[ : \boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} ; \text{ de même } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\text{Pour } t = \tan \frac{\pi}{8} > 0 : \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2} = 1, \text{ soit } t^2 + 2t - 1 = 0, \text{ de racines } -1 \pm \sqrt{2} : \boxed{\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1}.$$

• **Linéariser**  $\cos^4 x$  (contrôle en  $x = 0 : \frac{3+4+1}{8} = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{2 + 4 \cos 2x + 2 \cos^2 2x}{8} = \boxed{\frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}} \quad (\text{car } 2 \cos^2 2x = 1 + \cos 4x). \end{aligned}$$

• Si  $\tan \frac{a}{2} = 2$  :  $\cos a = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin a = \frac{4}{5}$ ,  $\tan a = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}$  (et l'on vérifie  $\frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{4}{3}$ ).

• **La corde de Ptolémée** : si  $M$  est le point image de  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $IM^2 = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , donc  $IM = 2 \sin \frac{\theta}{2}$  ( $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ ).

## ★ Astuce de concours : ne plus jamais oublier le facteur 2

**1. Les tests**  $a = 0$  et  $a = \frac{\pi}{2}$  :  $\cos 0 = 1$  et  $2 \cos^2 0 - 1 = 2 - 1 = 1$  ✓, mais «  $\cos^2 a - 1$  » donnerait 0.  $\cos \pi = -1$  et  $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$  ✓, mais «  $1 - \sin^2 a$  » donnerait 0 (c'est  $\cos^2 a$ , pas  $\cos 2a$ !).

Dans  $2 \cos^2 a - 1$  et  $1 - 2 \sin^2 a$ , la somme des coefficients vaut  $1 = \cos 0$ .

2. Le test  $a = \frac{\pi}{4}$  :  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  ;  $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$  ✓, sans le 2 on trouverait  $\frac{1}{2}$ .

3. Le slogan : « angle doublé, 2 devant » ( $2 \sin a \cos a$ ,  $2 \cos^2 a - 1$ ,  $1 - 2 \sin^2 a$ ,  $\frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$ ) ; et dans l'autre sens, « carré, donc moitié » :  $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$  (test  $a = 0$  :  $\frac{1+1}{2} = 1$  ✓).

6

## Transformer produits et sommes

### Produit → somme (pour tous réels $a, b$ )

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

*Démonstration.* On additionne, puis on soustrait,  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  et  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  ; on additionne  $\sin(a + b)$  et  $\sin(a - b)$ .

### Somme → produit (pour tous réels $p, q$ )

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

*Démonstration.* On pose  $a = \frac{p+q}{2}$  et  $b = \frac{p-q}{2}$ , de sorte que  $a + b = p$  et  $a - b = q$ , et on lit les formules précédentes de droite à gauche : par exemple  $\cos p + \cos q = \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ .

**Remarque. Mémo :** on écrit toujours la **demi-somme** en premier, la **demi-différence** en second ; «  $\cos + \cos = 2 \cos \cos$  », «  $\cos - \cos = -2 \sin \sin$  » (le seul signe -, à ne pas oublier), «  $\sin \pm \sin$  » donne un  $\sin$  et un  $\cos$ .

### Exemple : linéariser, factoriser, simplifier

$$\bullet \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{4} ; \text{ et de même } \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{4}.$$

$$\bullet \boxed{\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b} \text{ pour tous réels } a, b. \text{ En effet, ce produit vaut } \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a], \text{ et } \cos 2b - \cos 2a = (1 - 2 \sin^2 b) - (1 - 2 \sin^2 a) = 2 \sin^2 a - 2 \sin^2 b.$$

$$\bullet \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2 \sin 2x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = \tan 2x, \text{ pour les } x \text{ tels que } \cos 2x \cos x \neq 0.$$

$$\bullet \text{ Grouper les termes de même demi-somme : } \sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \boxed{\sin 2x (2 \cos x + 1)} \text{ (résolution section 8).}$$

## 7 L'expression $a \cos x + b \sin x$

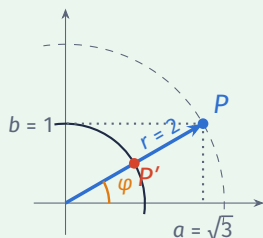
### Théorème

Soit  $a, b$  deux réels non tous les deux nuls et  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Il existe un réel  $\varphi$  tel que  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$  et  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$ , et pour tout réel  $x$  :

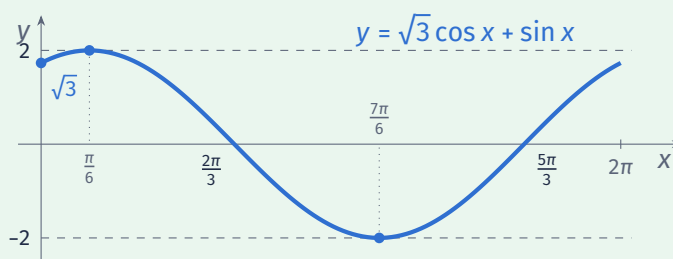
$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi) \quad \text{donc} \quad -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x + b \sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le maximum  $r$  est atteint pour  $x = \varphi + 2k\pi$ , le minimum  $-r$  pour  $x = \varphi + \pi + 2k\pi$  ; l'équation  $a \cos x + b \sin x = c$  a des solutions si et seulement si  $|c| \leq r$ .

**Démonstration.**  $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$  : le point  $P' \left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$  est sur  $C$ , il a une abscisse curviligne  $\varphi$ . Alors  $r \cos(x - \varphi) = r \cos x \cos \varphi + r \sin x \sin \varphi = a \cos x + b \sin x$ . Comme  $\cos(x - \varphi)$  décrit tout  $[-1, 1]$ , l'expression décrit  $[-r, r]$ .



$$P(a, b), P' = \frac{1}{r}P \text{ sur } C, \varphi = \frac{\pi}{6}$$



### Exemple : mettre sous la forme $r \cos(x - \varphi)$ , extremums

- $\sqrt{3} \cos x + \sin x$  :  $r = \sqrt{3+1} = 2$ ,  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  :  

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$
 (figure : maximum 2 en  $\frac{\pi}{6}$ , minimum -2 en  $\frac{7\pi}{6}$ , zéros en  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{3}$  sur  $[0, 2\pi]$ ).
- $\cos x - \sin x$  :  $r = \sqrt{2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  :  $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .
- $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x + 1$  :  $r = \sqrt{9+16} = 5$ , donc  $-5 \leq 3 \cos x + 4 \sin x \leq 5$ , les bornes étant atteintes :  $\max f = 6$  et  $\min f = -4$  (ici  $\varphi$  n'est pas un angle remarquable :  $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \varphi = \frac{4}{5}$  ; on n'a pas besoin de le connaître).
- **Linéariser d'abord** :  $g(x) = \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Maximum 2 pour  $2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ; minimum -2 pour  $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ .

**Remarque.** On peut aussi écrire  $a \cos x + b \sin x = r \sin(x + \psi)$ , avec  $\sin \psi = \frac{a}{r}$  et  $\cos \psi = \frac{b}{r}$  : par exemple  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ . L'important est de **factoriser par  $r$**  et de reconnaître un cosinus et un sinus.

8

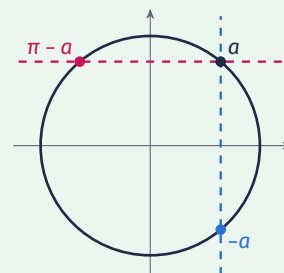
## Équations trigonométriques

**Théorème (équations fondamentales ;  $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ )**

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

$$\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi \quad \left(x, a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$



même cos : droite verticale ;  
même sin : droite horizontale

**Démonstration.** Section 6 :  $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}$ , et  $\sin u = 0 \iff u = k\pi$  (points  $I$  et  $I'$  du cercle). Donc  $\cos x = \cos a \iff \frac{x+a}{2} = k\pi$  ou  $\frac{x-a}{2} = k\pi$ , soit  $x = -a + 2k\pi$  ou  $x = a + 2k\pi$ . De même,  $\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}$  et  $\cos u = 0 \iff u = \frac{\pi}{2} + k\pi$  (points  $J$  et  $J'$ ) :  $x + a = \pi + 2k\pi$  ou  $x - a = 2k\pi$ . Enfin  $\tan x - \tan a = \frac{\sin x \cos a - \cos x \sin a}{\cos x \cos a} = \frac{\sin(x-a)}{\cos x \cos a}$  est nul si et seulement si  $x - a = k\pi$ .

|                            |              |                   |              |                             |                              |
|----------------------------|--------------|-------------------|--------------|-----------------------------|------------------------------|
| $\cos x = 0$               | $\cos x = 1$ | $\cos x = -1$     | $\sin x = 0$ | $\sin x = 1$                | $\sin x = -1$                |
| $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ | $x = 2k\pi$  | $x = \pi + 2k\pi$ | $x = k\pi$   | $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ |

Si  $|c| > 1$ , les équations  $\cos x = c$  et  $\sin x = c$  n'ont **aucune** solution ; l'équation  $\tan x = c$  en a pour tout réel  $c$ .

### Méthode : résoudre une équation trigonométrique

1. Se ramener à  $\cos U = \cos V$ ,  $\sin U = \sin V$  ou  $\tan U = \tan V$ , grâce aux angles associés :  $\cos V = \sin\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$ ,  $-\cos V = \cos(\pi - V)$ ,  $-\sin V = \sin(-V)$ . 2. Reconnaître les équations « déguisées » : du second degré en  $X = \cos x$  ou  $X = \sin x$  (avec  $-1 \leq X \leq 1$ ) ;  $a \cos x + b \sin x = c$  (section 7) ; **homogènes** en  $\sin x$  et  $\cos x$  (on vérifie si  $\cos x = 0$  convient, puis on divise par  $\cos^n x$ ) ; sommes à factoriser (section 6) puis produit nul ;  $t = \tan \frac{x}{2}$  (section 13). 3. Dans un intervalle : pour chaque famille  $x = x_0 + \frac{2k\pi}{n}$ , on **encadre l'entier**  $k$ , on liste les solutions, et on les place sur le cercle (une famille « modulo  $\frac{2\pi}{n}$  » donne  $n$  points régulièrement répartis).

### Exemple : se ramener à une équation fondamentale

1.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$  :

$$\iff 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

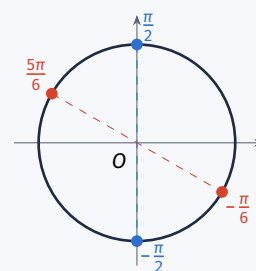
$$\iff \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{on divise aussi } 2k\pi \text{ par } 2).$$

Sur  $]-\pi, \pi]$  : on encadre  $k$ .

$$\bullet -\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \iff -\frac{3}{2} < k \leq \frac{1}{2} \iff k \in \{-1, 0\};$$

$$\bullet -\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \iff -\frac{5}{6} < k \leq \frac{7}{6} \iff k \in \{0, 1\}.$$

Quatre solutions :  $\boxed{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}}$ . Chaque famille « modulo  $\pi$  » donne deux points diamétralement opposés.



les 4 solutions sur  $]-\pi, \pi]$

2.  $\sin 3x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  :

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{contrôle : } \sin \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}).$$

### Exemple : équations « déguisées »

3. **Second degré.**  $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0$ , avec  $X = \sin x \in [-1, 1]$ . Les deux racines,  $X = 1$  et  $X = \frac{1}{2}$ , conviennent :

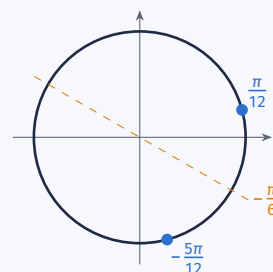
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

4.  $a \cos x + b \sin x = c$ .  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$ . Ici  $r = 2 \geq \sqrt{2}$  : il y a des solutions. On divise par  $r = 2$  et on reconnaît  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4},$$

donc  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}.$$



Les deux points images sont symétriques par rapport à la droite d'angle  $-\frac{\pi}{6}$ .

5. **Homogène.**  $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ . Si  $\cos x = 0$ , il reste  $\sin^2 x = 1 \neq 0$  : aucune solution n'annule  $\cos x$ , on peut donc diviser par  $\cos^2 x$  :  $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = (\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$ , d'où  $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi}$ .

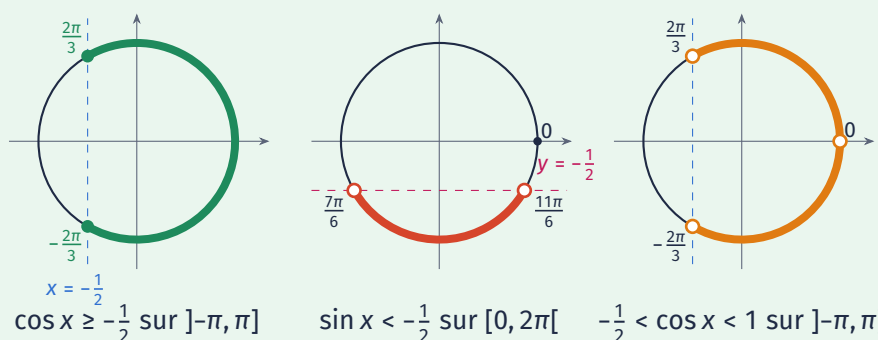
6. **Factoriser.** Section 6 :  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$  ou  $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ , soit  $\boxed{x = \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ . Sur  $[0, 2\pi[$  :  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ .

## 9

## Inéquations trigonométriques

### Méthode : lire une inéquation sur le cercle

1. Se ramener à  $\cos x \square c$ ,  $\sin x \square c$  ou  $\tan x \square c$  (éventuellement après un changement d'inconnue  $X = \dots$ ). 2. Tracer la droite  $x = c$  (pour  $\cos$ ),  $y = c$  (pour  $\sin$ ), ou la droite  $(OT)$  avec  $T(1, c)$  (pour  $\tan$ ). 3. **Colorier** l'arc des points qui conviennent (à droite de la droite verticale pour  $\cos x \geq c$ , au-dessus de la droite horizontale pour  $\sin x \geq c$ ...) ; extrémités fermées pour  $\leq, \geq$ , ouvertes pour  $<, >$ . 4. Lire les extrémités **dans le sens direct** en restant dans l'intervalle imposé : si l'arc colorié contient le point de départ de l'intervalle ( $I'$  pour  $]-\pi, \pi]$ ,  $I$  pour  $[0, 2\pi[$ ), la solution est une **réunion** de deux intervalles.



## Exemple : cinq inéquations

- $\cos x \geq -\frac{1}{2}$  : la droite  $x = -\frac{\pi}{2}$  coupe  $C$  aux points  $\pm \frac{2\pi}{3}$  ; on garde l'arc situé à droite (il passe par  $I$ ). Sur  $]-\pi, \pi]$  :  $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$  ; sur  $[0, 2\pi[$ , le même arc s'écrit  $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ .
- $\sin x < -\frac{1}{2}$  sur  $[0, 2\pi[$  : la droite  $y = -\frac{1}{2}$  coupe  $C$  en  $\frac{7\pi}{6}$  et  $\frac{11\pi}{6}$  ; arc situé au-dessous, extrémités exclues :  $\left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$  (sur  $]-\pi, \pi]$  :  $\left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right[$ ).
- $2 \cos^2 x - \cos x - 1 < 0$  sur  $]-\pi, \pi]$  : avec  $X = \cos x$ ,  $2X^2 - X - 1 = (2X+1)(X-1) < 0 \iff -\frac{1}{2} < X < 1$ . Or  $\cos x < 1 \iff x \neq 0$  sur  $]-\pi, \pi]$  :  $\left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$  (troisième figure : le point  $I$  est **exclu**).
- $\tan x \leq 1$  sur  $[0, 2\pi[$  : sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , le point  $T(1, \tan x)$  est au-dessous de  $(1, 1)$  si et seulement si  $x \leq \frac{\pi}{4}$  (lecture sur l'axe des tangentes ;  $\tan$  est croissante, section 10) ; par  $\pi$ -périodicité :  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  ( $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$  sont exclus :  $\tan$  n'y est pas définie).
- $\cos x + \sin x > 1$  sur  $[0, 2\pi[$  :  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1 \iff \cos X > \frac{\sqrt{2}}{2}$  avec  $X = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ . Dans cet intervalle, l'arc solution est  $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ , donc  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ . (Contrôle : pour  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \cos x < 1$  et  $0 < \sin x < 1$ , donc  $\cos x + \sin x > \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .)

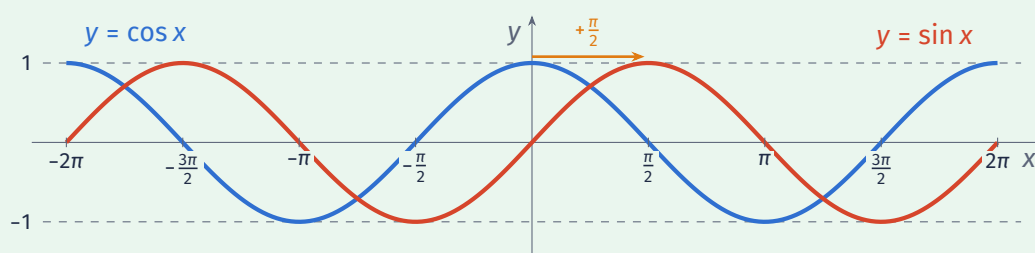
10

## Les courbes trigonométriques

## Les trois fonctions de référence

|                | cos                                     | sin                                                                     | tan                                                                            |
|----------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| domaine        | $\mathbb{R}$                            | $\mathbb{R}$                                                            | $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ |
| période        | $2\pi$                                  | $2\pi$                                                                  | $\pi$                                                                          |
| parité         | paire                                   | impaire                                                                 | impaire                                                                        |
| monotonie      | strictement décroissante sur $[0, \pi]$ | strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$        |
| valeurs prises | $[-1, 1]$                               | $[-1, 1]$                                                               | $\mathbb{R}$                                                                   |

*Démonstration des variations, sans dérivée.* Si  $0 \leq a < b \leq \pi$  :  $\cos b - \cos a = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2} < 0$ , car  $\frac{a+b}{2} \in ]0, \pi[$  et  $\frac{b-a}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  (deux sinus strictement positifs). Si  $-\frac{\pi}{2} \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$  :  $\sin b - \sin a = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2} > 0$  car  $\frac{a+b}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Si  $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$  :  $\tan b - \tan a = \frac{\sin(b-a)}{\cos a \cos b} > 0$  car  $b-a \in ]0, \pi[$  et  $\cos a, \cos b > 0$ . Enfin, sur un intervalle de longueur une période, on connaît tout grâce à la parité : on étudie  $\cos$  sur  $[0, \pi]$ , puis on symétrise par rapport à  $(Oy)$  et on translate de  $2k\pi$ .



$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  : la sinusoïde  $C_{\sin}$  est l'image de  $C_{\cos}$  par la translation de vecteur  $\frac{\pi}{2} \vec{i}$

## Symétries des courbes

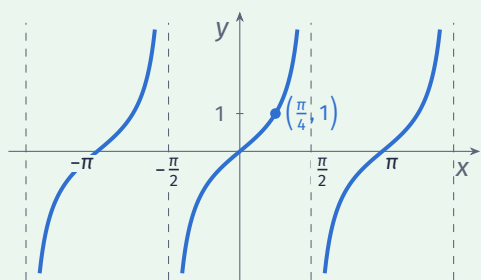
$C_{\cos}$  admet pour axes de symétrie les droites  $x = k\pi$  et pour centres de symétrie les points  $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ ;  $C_{\sin}$  admet pour axes les droites  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  et pour centres les points  $(k\pi, 0)$ ;  $C_{\tan}$  admet pour centres les points  $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$  et pour asymptotes verticales les droites  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

*Démonstration (pour cos).*  $\cos(2k\pi - x) = \cos x$  : la courbe est symétrique par rapport à  $x = k\pi$ ;  $\cos(\pi + 2k\pi - x) = -\cos x$  : elle est symétrique par rapport au point  $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ . Pour sin, on translate ; pour tan :  $\tan(k\pi - x) = -\tan x$ .

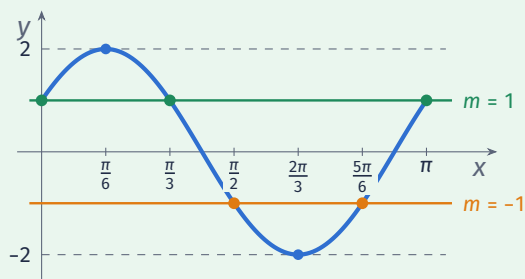
Les fonctions  $x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi)$  ( $A \neq 0, \omega \neq 0$ )

La fonction  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$  et prend toutes les valeurs de  $[-|A|, |A|]$  ( $|A|$  est l'**amplitude**). Comme  $\omega x + \varphi = \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ , sa courbe se déduit de  $C_{\cos}$  par :  $x \mapsto \cos(\omega x)$  (affinité horizontale de rapport  $\frac{1}{|\omega|}$ ), puis la translation de vecteur  $-\frac{\varphi}{\omega} \vec{i}$ , puis la multiplication des ordonnées par  $A$ .

*Démonstration.*  $f\left(x + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) = A \cos(\omega x + \varphi \pm 2\pi) = f(x)$ ; et  $\omega x + \varphi$  décrit tout  $\mathbb{R}$  quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ .



$y = \tan x$  sur  $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  : branches identiques (période  $\pi$ ), asymptotes  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



$f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  sur  $[0, \pi]$  et les droites  $y = m$

**Exemple : étudier  $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  et compter les solutions de  $f(x) = m$  sur  $[0, \pi]$**

**Période**  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ , amplitude 2.  $f(x) = 2 \iff 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ;  $f(x) = -2 \iff x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ ;  $f(x) = 0 \iff x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ;  $f(0) = f(\pi) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$ . Comme  $X = 2x - \frac{\pi}{3}$  croît de  $-\frac{\pi}{3}$  à  $\frac{5\pi}{3}$  quand  $x$  décrit  $[0, \pi]$ , et que  $\cos$  croît sur  $[-\pi, 0]$  et sur  $[\pi, 2\pi]$ , décroît sur  $[0, \pi]$  :  $f$  croît de 1 à 2 sur  $[0, \frac{\pi}{6}]$ , décroît de 2 à -2 sur  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ , croît de -2 à 1 sur  $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$ .

**Lecture graphique** (on fait glisser la droite horizontale  $y = m$ ) :

| $m$                 | $m < -2$ | $m = -2$ | $-2 < m < 1$ | $m = 1$ | $1 < m < 2$ | $m = 2$ | $m > 2$ |
|---------------------|----------|----------|--------------|---------|-------------|---------|---------|
| nombre de solutions | 0        | 1        | 2            | 3       | 2           | 1       | 0       |

Pour  $m = 1$  :  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ou  $x = k\pi$  : 0,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\pi$ . Pour  $m = -1$  :  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$  :  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ .

11

## Pour aller plus loin

### Théorème (l'angle de 18°)

$$\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

**Démonstration.** Soit  $a = \frac{\pi}{10}$  :  $5a = \frac{\pi}{2}$ , donc  $2a = \frac{\pi}{2} - 3a$  et  $\sin 2a = \cos 3a$ . Ainsi  $2 \sin a \cos a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$ , et comme  $\cos a \neq 0$  :  $2 \sin a = 4 \cos^2 a - 3 = 1 - 4 \sin^2 a$ . Donc  $s = \sin a$  vérifie  $4s^2 + 2s - 1 = 0$ , de racines  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ , et  $s > 0$  :  $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos \frac{2\pi}{5}$ . Puis  $\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ , et  $\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$ . On reconnaît le **nombre d'or** :  $2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier.

### Produits $\cos a \cos 2a \cos 4a \cdots \cos 2^n a$ (si $\sin a \neq 0$ )

$$\cos a \cos 2a \cos 4a \cdots \cos(2^n a) = \frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1} \sin a}$$

par exemple  $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$ .

**Démonstration** (on multiplie par  $\sin a$ ). Récurrence sur  $n$ , avec  $P_n$  le produit : pour  $n = 0$ ,  $\frac{\sin 2a}{2 \sin a} = \cos a$ . Si la formule est vraie au rang  $n$  :  $P_{n+1} = P_n \cos(2^{n+1}a) = \frac{2 \sin(2^{n+1}a) \cos(2^{n+1}a)}{2^{n+2} \sin a} = \frac{\sin(2^{n+2}a)}{2^{n+2} \sin a}$ . Avec  $a = \frac{\pi}{9}$  et  $n = 2$  :  $\frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{8 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}$ , car  $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = \sin \frac{\pi}{9}$  (en degrés :  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ ).

**Sommes  $\sum \cos(kx)$  et  $\sum \sin(kx)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ )**

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

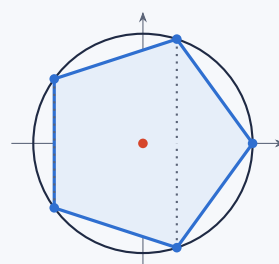
**Démonstration (télescopage).** Produit  $\rightarrow$  somme :  $2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin \frac{(2k+1)x}{2} - \sin \frac{(2k-1)x}{2}$ . En sommant de  $k=1$  à  $n$ , tout se simplifie sauf le dernier et le premier terme :  $2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}$  (somme  $\rightarrow$  produit). On divise par  $2 \sin \frac{x}{2} \neq 0$ . De même avec  $2 \sin \frac{x}{2} \sin(kx) = \cos \frac{(2k-1)x}{2} - \cos \frac{(2k+1)x}{2}$ .

**Exemple : le polygone régulier :  $\sum \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$** 

Pour  $n \geq 2$  et  $x = \frac{2\pi}{n}$  :  $\sin \frac{nx}{2} = \sin \pi = 0$ , donc  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$  ; le terme  $k=n$  valant  $\cos 2\pi = \cos 0$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0 \quad (\text{et de même } \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0).$$

**Interprétation :** les sommets du polygone régulier à  $n$  côtés inscrits dans  $C$ , de sommet  $I$ , ont pour isobarycentre  $O$ . **Contrôle pour  $n=5$  :**  $\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5}$ , donc  $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$ , soit  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$ , ce que confirment les valeurs exactes :  $\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} = -\frac{1}{2}$ .



abscisses : 1, puis deux fois  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et deux fois  $\cos \frac{4\pi}{5}$

**Identités dans un triangle ( $A, B, C > 0$ ,  $A+B+C=\pi$ )**

- Si le triangle n'est pas rectangle :  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ .
- Pour tout triangle :  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ .

**Démonstrations.** 1.  $A+B=\pi-C$ , et  $C \neq \frac{\pi}{2}$  donc  $A+B \neq \frac{\pi}{2}$  :  $\tan(A+B) = \tan(\pi-C) = -\tan C$ , soit  $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$  ; on chasse le dénominateur :  $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$ . 2.  $\sin 2A + \sin 2B = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) = 2 \sin C \cos(A-B)$  et  $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = -2 \sin C \cos(A+B)$  ; la somme vaut  $2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4 \sin A \sin B \sin C$ .

12

**Les pièges classiques**

| <b>✗ Faux</b>                          | <b>✓ Vrai</b>                                                                                           |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos(a+b) = \cos a + \cos b$          | $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ; test $a=b=\frac{\pi}{2}$ : $\cos \pi = -1$ , mais $0+0=0$ |
| $\sin 2a = 2 \sin a$                   | $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ ; test $a=\frac{\pi}{2}$ : $\sin \pi = 0 \neq 2$                            |
| $\cos 2a = \cos^2 a - 1$ (le 2 oublié) | $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ ; test $a=0$ : $1 = 2 - 1$                                  |
| $\cos^2 a = \frac{1+\cos a}{2}$        | $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ (« carré, donc moitié de l'angle double »)                             |

|                                                                          |                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$                                      | $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (test $x = 0$ ) ; c'est $1 + \cotan^2 x$ qui vaut $\frac{1}{\sin^2 x}$                                   |
| $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$                            | $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ : une infinité de solutions                                    |
| $\sin x = \sin a \iff x = \pm a + 2k\pi$                                 | $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ (le « $\pm$ » est réservé au cosinus)                                                               |
| $\tan x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$                       | $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ : la période de tan est $\pi$ ( $\frac{4\pi}{3}$ est aussi solution)                                              |
| $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{5} \iff x = \pm \frac{\pi}{10} + 2k\pi$       | $2x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ , donc $x = \pm \frac{\pi}{10} + k\pi$ : on divise aussi $2k\pi$ par 2                                      |
| $\sin x \cos x = \cos x \iff \sin x = 1$ (on a divisé par $\cos x$ )     | $\cos x (\sin x - 1) = 0$ : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; la division a perdu les $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$                                |
| $\sin^2 x = \frac{1}{4} \iff \sin x = \pm \frac{1}{2}$                   | $\sin x = \pm \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$                                                                                 |
| $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ toujours                  | le signe dépend de $\frac{a}{2}$ : pour $a = \frac{4\pi}{3}$ , $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ , alors que la racine vaut $\frac{1}{2}$ |
| la mesure principale de $\frac{7\pi}{4}$ est $\frac{7\pi}{4}$            | $\frac{7\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$ : c'est $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$                                                         |
| le maximum de $3 \cos x + 4 \sin x$ est $3 + 4 = 7$                      | $\cos x$ et $\sin x$ ne valent pas 1 en même temps : le maximum est $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$                                                   |
| $\cos x > \frac{1}{2} \iff x < \frac{\pi}{3}$ (sur $]-\pi, \pi]$ )       | $\cos$ n'est pas monotone sur $]-\pi, \pi]$ : $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ (lecture sur le cercle)                                   |
| $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ pour tous $a, b$ | il faut $\tan a, \tan b, \tan(a+b)$ définies : pour $a = b = \frac{\pi}{4}$ , le dénominateur est nul et $\tan \frac{\pi}{2}$ n'existe pas   |
| $\sin 30 = \frac{1}{2}$ (calculatrice en radians)                        | $\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , mais $\sin 30 \approx -0,988$ (30 radians)                                              |

## 13

## Les astuces des concours

## ★ Astuce de concours : les triplets pythagoriciens

Si  $p^2 + q^2 = r^2$ , alors  $\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{q}{r}\right)^2 = 1$  : chaque triplet donne un cosinus et un sinus **rationnels**.  
À connaître : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25).

- Si  $\cos x = \frac{5}{13}$  et  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0]$  : sans calcul,  $\sin x = -\frac{12}{13}$  et  $\tan x = -\frac{12}{5}$  (le signe se lit sur le cercle).
- **D'où viennent-ils ?** Avec  $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{p}{q}$  (section 5) :  $\cos x = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$  et  $\sin x = \frac{2pq}{q^2 + p^2}$ .  $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$  donnent (3, 4, 5), (5, 12, 13), (15, 8, 17), (7, 24, 25).
- **Ils se combinent** :  $a, b$  aigus avec  $\cos a = \frac{3}{5}, \cos b = \frac{5}{13}$  ( $\sin a = \frac{4}{5}, \sin b = \frac{12}{13}$ ) :  $\cos(a+b) = \frac{15-48}{65} = -\frac{33}{65}$  et  $\sin(a+b) = \frac{20+36}{65} = \frac{56}{65}$  : encore un triplet,  $33^2 + 56^2 = 65^2$ .

★ **Astuce de concours : un produit de cosinus ? multiplier par un sinus**

$$P = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} : \sin \frac{\pi}{5} \quad P = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{5}, \text{ donc } \boxed{P = \frac{1}{4}}.$$

**Seconde preuve de  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .** Le polygone régulier (section 11) donne  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$ , et  $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$  :  $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ . Les nombres  $\cos \frac{\pi}{5}$  et  $-\cos \frac{2\pi}{5}$  ont donc pour somme  $\frac{1}{2}$  et pour produit  $-\frac{1}{4}$  : ce sont les racines de  $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0$ , soit  $4X^2 - 2X - 1 = 0$ , et  $\cos \frac{\pi}{5}$  est la racine positive,  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

★ **Astuce de concours :  $t = \tan \frac{x}{2}$  rend l'équation algébrique... mais attention à  $x = \pi$**

$2 \sin x - \cos x = 1$ . Pour  $x \neq \pi + 2k\pi$  :  $\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \iff 4t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \iff t = \frac{1}{2}$ . Le degré a baissé (les  $t^2$  se sont éliminés) : c'est le signal qu'une solution s'est « échappée » là où  $t$  n'existe pas. En effet  $2 \sin \pi - \cos \pi = 1$  :  $x = \pi + 2k\pi$  **est solution**. Bilan :  $x = \pi + 2k\pi$  ou  $x = x_0 + 2k\pi$ , où  $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  est défini par  $\tan \frac{x_0}{2} = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $\cos x_0 = \frac{3}{5}$ ,  $\sin x_0 = \frac{4}{5}$  (triplet (3, 4, 5) !).

**Autre usage :**  $\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} = \frac{2t^2 + 2t}{2 + 2t} = t = \tan \frac{x}{2}$  (pour  $x \neq \pi + 2k\pi$  et  $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ).

★ **Astuce de concours : « le maximum, c'est  $\sqrt{a^2 + b^2}$  »**

$$h(x) = \sin x (\sqrt{3} \cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \frac{1}{2} + \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Donc  $\boxed{-\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}}$ , maximum en  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ , minimum en  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ . **Pourquoi  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ?**  $a \cos x + b \sin x$  est le produit scalaire de  $(a, b)$  et du vecteur unitaire  $(\cos x, \sin x)$  : il est maximal quand les deux vecteurs ont la même direction et le même sens.

★ **Astuce de concours : tester une identité avant de la démontrer**

Avant une longue preuve, on teste  $x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$  : c'est gratuit et cela détecte les erreurs de signe ou de facteur.

- $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$  ?  $x = 0$  :  $1 = \frac{1+3}{4}$  ✓ ;  $x = \frac{\pi}{3}$  :  $\frac{1}{8} = \frac{-1+3}{4}$  ✓. Preuve : on isole  $\cos^3 x$  dans  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ .
- $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$  ?  $x = \frac{\pi}{2}$  :  $1$  contre  $\frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$  : **faux**. Le bon signe :  $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$  ( $\frac{3+1}{4} = 1$  ✓).

14

# L'essentiel du chapitre en une page

## Cercle trigonométrique

$\pi \text{ rad} = 180^\circ$  ; arc :  $\ell = R\theta$ . Abscisses curvilignes de  $M$  :  $x + 2k\pi$  ; mesure principale dans  $]-\pi, \pi]$ .

$M(\cos x, \sin x)$  ;  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  ( $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ) ;

$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$  ( $x \neq k\pi$ ).

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$   $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

## Valeurs remarquables

| x   | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|-----|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |                 |

$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$   $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$   $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$   $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

## Angles associés

$-x$  :  $\cos x$ ,  $-\sin x$   $\pi - x$  :  $-\cos x$ ,  $\sin x$

$\pi + x$  :  $-\cos x$ ,  $-\sin x$   $\frac{\pi}{2} - x$  :  $\sin x$ ,  $\cos x$

$\frac{\pi}{2} + x$  :  $-\sin x$ ,  $\cos x$   $\tan(x + k\pi) = \tan x$

## Addition

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

## Duplication

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$   $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$   $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

$t = \tan \frac{a}{2}$  :  $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

## Produit $\rightarrow$ somme

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

## Somme $\rightarrow$ produit

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2}$

$a \cos x + b \sin x$  ( $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ )

$= r \cos(x - \varphi)$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$  ; valeurs :  $[-r, r]$ .

## Équations ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$\cos x = \cos a \iff x = \pm a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$  ou  $x = \pi - a + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi$

Second degré :  $X = \cos x \in [-1, 1]$  ; homogène :

diviser par  $\cos^n x$  après avoir testé  $\cos x = 0$  ;

$t = \tan \frac{x}{2}$  : tester  $x = \pi$ .

## Inéquations

Droite  $x = c$  ou  $y = c$ , arc colorié, lecture dans le sens direct, en respectant l'intervalle.

## Courbes

$\cos$  : paire,  $2\pi$  ;  $\sin$  : impaire,  $2\pi$  ;  $\tan$  : impaire,  $\pi$ .

$A \cos(\omega x + \varphi)$  : période  $\frac{2\pi}{|\omega|}$ , amplitude  $|A|$ .

## Concours

$\cos a \cos 2a \cdots \cos 2^n a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2^{n+1} \sin a}$

$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$  (multiplier par  $2 \sin \frac{x}{2}$ )

$A + B + C = \pi$  :  $\sum \tan A = \prod \tan A$

Triplets : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25).

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

# Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours :  $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$  ;  $k$  désigne un entier relatif ; les angles sont en radians sauf mention contraire. Dans un triangle  $ABC$  :  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ , et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  désignent aussi les mesures des angles.

## 15 Niveau I • Bases

### Exercice 1 Radians et cercle trigonométrique ★

corrigé p. 41

- Convertir en radians :  $15^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $288^\circ$  ; puis en degrés :  $\frac{5\pi}{9}$ ,  $\frac{13\pi}{12}$ .
- Donner la mesure principale de chacun des réels :  $\frac{47\pi}{6}$ ,  $-\frac{41\pi}{3}$ ,  $\frac{99\pi}{5}$ ,  $\frac{1000\pi}{7}$ .
- Les réels suivants sont-ils deux abscisses curvilignes d'un même point du cercle ? a)  $\frac{25\pi}{6}$  et  $-\frac{23\pi}{6}$  ; b)  $\frac{13\pi}{5}$  et  $-\frac{7\pi}{5}$  ; c)  $\frac{9\pi}{4}$  et  $-\frac{9\pi}{4}$ .
- Combien de points distincts du cercle ont une abscisse curviligne de la forme  $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ? Les placer (mesures principales) ; quelle figure forment-ils ?
- Une roue de rayon 30 cm roule sans glisser sur 1 km : de quel angle a-t-elle tourné ? combien de tours complets a-t-elle faits ?

### Exercice 2 Cosinus, sinus, tangente, cotangente ★

corrigé p. 41

- Sans calculatrice, donner le signe de  $\cos 2$ ,  $\sin 2$ ,  $\cos 4$ ,  $\sin 4$ ,  $\tan 4$  et  $\sin 6$ .
- a)  $x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  et  $\tan x = -\frac{20}{21}$  : calculer  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\cotan x$ . b)  $y \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$  et  $\cos y = -\frac{9}{41}$  : calculer  $\sin y$ ,  $\tan y$ ,  $\cotan y$ .
- Existe-t-il un réel  $x$  tel que  $\cos x = \frac{3}{5}$  et  $\sin x = -\frac{3}{4}$  ?
- Montrer (là où c'est défini) :  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$  ;  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$  ;  $\tan x + \cotan x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ .

### Exercice 3 Valeurs remarquables et angles associés ★

corrigé p. 42

- Calculer :  $\cos \frac{17\pi}{6}$ ,  $\sin(-\frac{11\pi}{4})$ ,  $\tan \frac{31\pi}{3}$ ,  $\cotan(-\frac{5\pi}{6})$ ,  $\sin \frac{47\pi}{6}$ .
- Simplifier :  $E(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \sin(\pi - x) - \sin(\frac{\pi}{2} + x) \cos(\pi + x)$  et  $F(x) = \tan(\pi - x) + \cotan(\frac{\pi}{2} + x)$ .
- On pose  $c = \cos \frac{\pi}{7}$  et  $s = \sin \frac{\pi}{7}$ . Exprimer en fonction de  $c$  ou de  $s$  :  $\cos \frac{6\pi}{7}$ ,  $\sin \frac{8\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{13\pi}{7}$ ,  $\sin \frac{5\pi}{14}$ ,  $\cos \frac{9\pi}{14}$  (placer les points sur le cercle).

**Exercice 4 Premières équations** ★

corrigé p. 42

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  : a)  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  ; b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ; c)  $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$ .
- Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  et représenter les solutions sur le cercle : a)  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  ; b)  $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  ; c)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$ .

**Exercice 5 Formules d'addition** ★

corrigé p. 42

- $p, q \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin p = \frac{8}{17}$  et  $\cos q = \frac{3}{5}$  : calculer  $\cos(p+q)$ ,  $\sin(p+q)$ ,  $\tan(p+q)$  et  $\sin(p-q)$ .
- Montrer que  $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos x$ , puis que  $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ .
- Montrer que  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$  (pour quels  $x$  ?) et que l'équation  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \tan x$  n'a pas de solution.

**Exercice 6 Formules de duplication** ★

corrigé p. 43

- Soit  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  tel que  $\cos x = \frac{2}{3}$ . Calculer  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ ,  $\cos 2x$ ,  $\tan 2x$  et  $\cos 4x$ .
- On suppose  $\tan x = 3$ . Calculer  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$  et  $\tan 2x$  sans calculer  $\cos x$  ni  $\sin x$ .
- Linéariser  $\sin^2 x \cos^2 x$ . Montrer que  $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$  lorsque  $\sin 2x \neq 0$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Exercice 7 Premières inéquations** ★

corrigé p. 43

Résoudre en s'aidant du cercle trigonométrique :

- $2 \cos x - 1 < 0$  dans  $[0, 2\pi[$  ;
- $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $]-\pi, \pi]$  ;
- $\tan x > -\sqrt{3}$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  ;
- $0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $[0, 2\pi[$ .

**Exercice 8 Premières courbes** ★

corrigé p. 43

- Donner une période et la parité de :  $x \mapsto \cos 3x$ ,  $x \mapsto \sin \frac{x}{2}$ ,  $x \mapsto \tan \frac{x}{3}$ ,  $x \mapsto |\sin x|$ . Montrer que  $12\pi$  est une période de  $x \mapsto \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$ .
- Tracer la courbe de la fonction sinus sur  $[0, 3\pi]$ . Lire le nombre de solutions dans  $[0, 3\pi]$  des équations  $\sin x = \frac{1}{3}$ ,  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin x = 1$ , puis résoudre les deux dernières.
- Quelles translations envoient la courbe de  $\cos$  sur celles de  $\sin$  et de  $x \mapsto 2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  ?

16

**Niveau 2 • Bac****Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : valeurs exactes** ★★

corrigé p. 44

On pose  $a = \frac{3\pi}{8}$ .

- Calculer  $\cos 2a$ . En déduire que  $\cos a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin a = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ , puis que  $\tan a = 1 + \sqrt{2}$ .
- En déduire  $\tan \frac{5\pi}{8}$  et  $\tan \frac{7\pi}{8}$ . Vérifier que  $1 + \sqrt{2}$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont les racines de  $X^2 - 2X - 1$ .
- Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  l'équation  $\tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$  ; placer les solutions sur le cercle. Quelle figure obtient-on ?
- Résoudre dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  l'inéquation  $\tan^2 x - 2 \tan x - 1 < 0$ .
- Retrouver 3. en montrant que l'équation équivaut à  $\cos 2x + \sin 2x = 0$ .

**Exercice 10 Type devoir surveillé (2) :  $a \cos x + b \sin x = c$  ★★**

corrigé p. 44

Soit  $f(x) = (\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x$ . On rappelle (cours) :  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

1. Vérifier que  $\sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$ , puis que  $f(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ .
2. Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , et les réels où ils sont atteints.
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = \sqrt{6}$ , et représenter ses solutions de  $]-\pi, \pi]$  sur le cercle.
4. Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  : a)  $f(x) \geq \sqrt{6}$  ; b)  $f(x) < -\sqrt{2}$ .

**Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : une inéquation-produit ★★**

corrigé p. 45

Soit  $g(x) = \sin 2x + \sqrt{2} \cos x$ .

1. Montrer que  $g(x) = \cos x (2 \sin x + \sqrt{2})$ , puis résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $g(x) = 0$ .
2. Dresser le tableau de signes de  $g(x)$  sur  $[0, 2\pi[$  et résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'inéquation  $g(x) \geq 0$ .
3. En déduire les solutions de  $g(x) \geq 0$  dans  $]-\pi, \pi]$ , et les représenter sur le cercle.

**Exercice 12 Équations qui se ramènent ★★**

corrigé p. 45

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a)  $2 \sin^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$  ; b)  $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$  ; c)  $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$  ;  
d)  $\sin 3x = \cos 2x$  (placer les solutions de  $[0, 2\pi[$  sur le cercle) ; e)  $\tan 2x = 3 \tan x$ .

**Exercice 13 Sommes et produits ★★**

corrigé p. 45

1. Calculer sans calculatrice :  $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$  et  $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$ .
2. Montrer que  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = \cos 3x (1 + 2 \cos 2x)$ , puis résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$ .
3. Montrer que  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2}$ , puis résoudre dans  $[0, 2\pi]$  l'équation  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ .

**Exercice 14 La tangente de l'arc moitié ★★**

corrigé p. 46

Pour  $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ , on pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

1. Rappeler les expressions de  $\cos x$ ,  $\sin x$  et  $\tan x$  en fonction de  $t$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin x + \tan \frac{x}{2} = 2$  (on factorisera un polynôme de degré 3 en  $t$ ).
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = 2$  (on donnera  $\cos x$  et  $\sin x$  pour les solutions non remarquables).
4. Montrer que  $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sin x}{2 + \cos x} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$  pour tout réel  $x$ . Quand a-t-on égalité ?

**Exercice 15 Étude d'une fonction trigonométrique ★★**

corrigé p. 46

Soit  $f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$ .

1. Montrer que  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . En déduire une période de  $f$ , son maximum et son minimum.
2. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$  (sans dérivée) et tracer sa courbe.
3. Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $f(x) = 0$  de deux façons (avec 1., puis en factorisant  $f(x)$ ).
4. Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'inéquation  $f(x) \geq 1$  ; contrôler sur la courbe.

**Exercice 16** Trigonométrie du triangle ★★

corrigé p. 47

1. Montrer que l'aire d'un triangle  $ABC$  est  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ , et en déduire la loi des sinus :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .
2. En écrivant  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ , démontrer la formule d'Al-Kashi :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .
3. On donne  $b = 3$ ,  $c = 8$  et  $A = \frac{\pi}{3}$ . Calculer  $a$ ,  $\cos B$ ,  $\sin B$ ,  $\cos C$  et  $S$ . Vérifier que  $a = b \cos C + c \cos B$ .
4. **Une hauteur inaccessible.** D'un point  $A$  du sol, on voit le sommet  $T$  d'une tour sous l'angle  $\alpha$  ; après  $d$  mètres vers la tour, en  $B$ , on le voit sous l'angle  $\beta > \alpha$ . Montrer que la tour a pour hauteur  $h = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$  ; valeur exacte si  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $d = 20$  m ?

17

**Niveau 3 · Approfondissement****Exercice 17** L'angle de deux droites ★★★

corrigé p. 47

La droite  $y = mx + p$  fait avec l'axe des abscisses l'angle  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $m = \tan \theta$ .

1.  $D_1, D_2$  ont pour pentes  $m_1, m_2$  ( $m_1 m_2 \neq -1$ ). Montrer que leur angle aigu  $\varphi$  vérifie  $\tan \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ . Et si  $m_1 m_2 = -1$  ?
2. Quel angle forment les droites  $y = 2x$  et  $y = -3x + 1$  ?
3. Déterminer les droites passant par  $A(1, 2)$  qui forment un angle de  $\frac{\pi}{4}$  avec la droite  $y = 3x$ .
4. Calculer les tangentes des angles du triangle de sommets  $O(0, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(2, 2)$ , et vérifier l'identité du cours  $\tan O + \tan B + \tan C = \tan O \tan B \tan C$ .

**Exercice 18** La formule de Héron ★★★

corrigé p. 47

Soit  $ABC$  un triangle d'aire  $S$  et de demi-périmètre  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

1. Avec  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  et la formule d'Al-Kashi, montrer que  $16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ , puis la formule de Héron :  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .
2. Application :  $a = 13$ ,  $b = 14$ ,  $c = 15$ . Calculer  $S$ ,  $\cos A$ ,  $\sin A$ , le rayon  $R$  du cercle circonscrit ( $a = 2R \sin A$ ) et la hauteur issue de  $B$ .
3. Montrer que  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$  et  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ . En déduire une seconde preuve de la formule de Héron, et  $\tan \frac{A}{2}$  dans l'exemple de 2.

**Exercice 19** Inéquations sur le cercle ★★★

corrigé p. 48

1. Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'inéquation  $\sin 3x > \sin x$  (factoriser  $\sin 3x - \sin x$ ).
2. Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  l'inéquation  $\tan x > 2 \sin x$ .

**Exercice 20** Optimiser sur le cercle ★★★

corrigé p. 48

Dans un repère orthonormé :  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  et  $M(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

1. Montrer que  $MA = 2 \cos \frac{\theta}{2}$  et  $MB = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ .
2. Déterminer le maximum et le minimum de  $MA + MB$ . Où placer  $M$  pour que  $MA + 2MB$  soit maximal ?
3. Soit  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Le rectangle  $PQRS$  est inscrit dans le secteur d'angle  $\alpha$  :  $P = M(\theta)$  ( $0 < \theta < \alpha$ ),  $Q, R$  sur  $[Ox]$ ,  $S$  sur la demi-droite d'angle  $\alpha$ ,  $(PS) \parallel (Ox)$ . Montrer que son aire vaut  $\frac{\sin \theta \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha}$ , de maximum  $\frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$ . Cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  ?

**Exercice 21 Triangles particuliers ★★★**

corrigé p. 48

ABC est un triangle (notations du cours).

1. Montrer que  $a \cos A = b \cos B$  si et seulement si ABC est isocèle en C ou rectangle en C.
2. Montrer que  $\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$  si et seulement si ABC est rectangle en C.
3. Si les tangentes des trois angles sont des entiers relatifs, montrer que les angles sont aigus, puis (avec  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ ) que ces tangentes sont 1, 2, 3. Un tel triangle existe-t-il ?

**Exercice 22 Une équation à paramètre ★★★**

corrigé p. 49

Soit  $a$  un réel et  $(E_a)$  :  $\cos x + \cos(x + a) = 1$ .

1. Montrer que  $(E_a) \iff 2 \cos \frac{a}{2} \cos \left(x + \frac{a}{2}\right) = 1$ , puis que  $(E_a)$  a des solutions si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq a \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ .
2. Résoudre  $(E_a)$  pour  $a = \frac{\pi}{2}$ , puis pour  $a = \frac{2\pi}{3}$ . Pour quelles valeurs de  $a$  le réel 0 est-il solution ?
3. Pour quelles valeurs du réel  $m$  l'équation  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = m$  a-t-elle exactement deux solutions dans  $[0, \pi]$  ?

**Exercice 23 Un produit télescopique ★★★**

corrigé p. 49

1. Montrer que  $1 + \frac{1}{\cos 2u} = \frac{\tan 2u}{\tan u}$  lorsque ces expressions sont définies.
2. En déduire que  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\cos 2^k x}\right) = \frac{\tan 2^n x}{\tan x}$  (pour quels  $x$  ?). Calculer de deux façons le produit  $\left(1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}\right)$ .
3. Montrer de même que  $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \tan^2 2^k x) = \frac{2^n \tan x}{\tan 2^n x}$ , et calculer  $\left(1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}\right) \left(1 - \tan^2 \frac{\pi}{6}\right)$ .

18

**Niveau 4 • Concours****Exercice 24 La formule de  $\tan 3a$  ★★★**

corrigé p. 50

1. Montrer que  $\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$  lorsque ces expressions sont définies.
2. Résoudre  $\tan 3a = \sqrt{3}$  ; en déduire que  $\tan \frac{\pi}{9}$ ,  $\tan \frac{4\pi}{9}$ ,  $\tan \frac{7\pi}{9}$  sont les racines de  $P(x) = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3}$ .
3. En déduire que  $\tan \frac{\pi}{9} - \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{4\pi}{9} = 3\sqrt{3}$  et  $\tan^2 \frac{\pi}{9} + \tan^2 \frac{2\pi}{9} + \tan^2 \frac{4\pi}{9} = 33$ .
4. Contrôle avec  $\tan 3a = 1$  : factoriser le polynôme obtenu ; retrouver  $\tan \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{5\pi}{12}$ .

**Exercice 25 Sommes de cosinus et polygones réguliers ★★★**

corrigé p. 50

1. Montrer que, pour  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$  et  $n \geq 1$  :  $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \frac{(2n+1)x}{2} / \sin \frac{x}{2}$  (multiplier par  $\sin \frac{x}{2}$  et télescoper).
2. Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $1 + 2 \cos x + 2 \cos 2x + 2 \cos 3x + 2 \cos 4x + 2 \cos 5x = 0$ .
3. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$ , puis que  $\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} = \frac{1}{2}$ .
4. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{2n-1}{4}$ .

**Exercice 26 Une inégalité dans le triangle ★★★★★**

corrigé p. 50

A, B, C sont les angles d'un triangle.

1. Montrer que  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ . En déduire que  $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ .
2. En posant  $s = \sin \frac{C}{2}$ , montrer que  $\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 2s - 2s^2 \leq \frac{3}{2}$ , avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.
3. En déduire que  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$  et que  $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$ .

**Exercice 27 Combien de solutions ? ★★★★★**

corrigé p. 51

Soit  $m$  un réel et  $(E_m)$  :  $\sin 2x = m(\sin x + \cos x)$ , d'inconnue  $x \in [0, 2\pi[$ . On pose  $t = \sin x + \cos x$ .

1. Montrer que  $t = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  et  $\sin 2x = t^2 - 1$ . Pour  $t_0 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , combien de réels  $x \in [0, 2\pi[$  vérifient  $t = t_0$  ?
2. Montrer que  $(E_m) \iff t^2 - mt - 1 = 0$ , équation qui a deux racines  $t_1 < 0 < t_2$ , et que  $t_2 < \sqrt{2} \iff m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $t_1 > -\sqrt{2} \iff m > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
3. En déduire, selon  $m$ , le nombre de solutions de  $(E_m)$ . Résoudre  $(E_m)$  pour  $m = 0$  et pour  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exercice 28  $\cos(\sin x)$  et  $\sin(\cos x)$  ★★★★★**

corrigé p. 51

1. Montrer que  $|\sin x| + |\cos x| \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$  pour tout réel  $x$ .
2. Montrer que  $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$  pour tout réel  $x$  (parité de  $\cos$ , monotonie de  $\cos$  et  $\sin$ ). Parité, période et ensemble des valeurs de  $x \mapsto \cos(\sin x)$  ?
3. Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$  : montrer qu'elle équivaut à :  $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$  ou  $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$  ; on notera  $\alpha$  le réel de  $]0, \pi[$  tel que  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Exercice 29 L'équation  $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$  ★★★★★**

corrigé p. 52

1. Montrer qu'un réel  $x$  tel que  $\sin x = 0$  n'est pas solution, puis que l'équation équivaut à :  $\sin 8x = \sin x$  et  $\sin x \neq 0$ .
2. Résoudre l'équation dans  $[0, 2\pi[$  (on trouvera 14 solutions) et placer les solutions sur le cercle.
3. Montrer que  $\cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^{n-1}x = \frac{1}{2^n}$  ( $n \geq 1$ ) a exactement  $2^{n+1} - 2$  solutions dans  $[0, 2\pi[$ .

**Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★**

corrigé p. 52

On pose  $a = \frac{\pi}{7}$ .

1. En multipliant par  $\sin a$ , montrer que  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ . Contrôler avec l'exercice 29 ( $x = \frac{2\pi}{7}$ ).
2. Montrer (avec  $2 \sin a$ , ou l'exercice 25) que  $\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a = -\frac{1}{2}$  ; en déduire  $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ .
3. Montrer que  $\cos 2a \cos 4a + \cos 4a \cos 6a + \cos 6a \cos 2a = -\frac{1}{2}$  et  $\cos 2a \cos 4a \cos 6a = \frac{1}{8}$ . En développant  $8(x - \cos 2a)(x - \cos 4a)(x - \cos 6a)$ , en déduire les racines de  $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ .
4. Montrer que  $\sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}$ , puis  $\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$  et  $\tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7} \tan \frac{4\pi}{7} = -\sqrt{7}$ .

# Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

## 19 Cercle et angles associés

Deux réflexes :  $x$  et  $x + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) repèrent le **même point** du cercle, et chaque angle associé ( $-x$ ,  $\pi \pm x$ ,  $\frac{\pi}{2} \pm x$ ) traduit une **symétrie** du cercle. On réduit d'abord tout angle « encombrant » modulo  $2\pi$  (modulo  $\pi$  pour la tangente).

### Exercice 31 Radians, mesures principales et horloge ★

corrigé p. 53

- Convertir en radians :  $75^\circ$ ,  $252^\circ$ ,  $-330^\circ$  ; puis en degrés :  $\frac{13\pi}{10}$ ,  $\frac{11\pi}{18}$ .
- Déterminer la mesure principale (dans  $]-\pi, \pi]$ ) de chacun des réels  $\frac{53\pi}{6}$ ,  $-\frac{35\pi}{4}$ ,  $\frac{2027\pi}{4}$ ,  $-\frac{59\pi}{8}$ ,  $-45\pi$ , puis placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique.
- Les réels  $\frac{17\pi}{5}$  et  $-\frac{23\pi}{5}$  repèrent-ils le même point du cercle ? Et  $\frac{7\pi}{4}$  et  $-\frac{5\pi}{4}$  ?
- On donne  $3,1415 < \pi < 3,1416$ . Trouver l'entier  $k$  tel que  $100 - 2k\pi \in ]-\pi, \pi]$ , puis le quadrant du point d'abscisse curviligne 100 et les signes de  $\cos 100$  et  $\sin 100$ .
- L'horloge. On repère chaque aiguille par l'angle dont elle a tourné depuis la direction de midi (sens indirect). a) Quel angle géométrique (en radians, dans  $[0, \pi]$ ) les aiguilles forment-elles à 3 h 40 ? à 10 h 10 ? b) De quels angles ont-elles tourné  $t$  minutes après midi ? À quels instants, entre midi et 13 h, sont-elles perpendiculaires ? c) Combien de fois sont-elles superposées entre midi (inclus) et minuit (exclu) ?

### Exercice 32 Angles associés : simplifier et calculer ★

corrigé p. 53

- Simplifier les expressions suivantes (pour les réels  $x$  où elles ont un sens, à préciser pour C) :

$$A(x) = \cos(3\pi - x) - \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right), \quad B(x) = \sin(7\pi + x) \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - \cos(x + 9\pi) \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$C(x) = \tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \tan(x - 7\pi) + \cotan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cotan(5\pi - x).$$

- Calculer sans calculatrice :  $U = \sin \frac{13\pi}{6} + \cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) + \tan \frac{29\pi}{4}$  et  $P = \tan \frac{\pi}{18} \tan \frac{2\pi}{18} \tan \frac{3\pi}{18} \dots \tan \frac{8\pi}{18}$  (produit de 8 facteurs).
- Soit  $a \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  tel que  $\sin a = \frac{3}{4}$ . Calculer  $\cos a$  et  $\tan a$ , puis  $\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)$  et  $\sin(-a - 7\pi)$ .

**Exercice 33 Familles de points sur le cercle ★★**

corrigé p. 54

Les solutions des équations trigonométriques s'écrivent  $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$  : on apprend ici à les lire, les regrouper et les compter ( $k$  et  $m$  décrivent  $\mathbb{Z}$ ).

- Combien de points distincts du cercle ont une abscisse curviligne de la forme a)  $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$  ; b)  $\frac{7k\pi}{6}$  ; c)  $\frac{4k\pi}{3}$  ? Les placer sur un cercle.
- Écrire chacune des conditions suivantes sous la forme d'une seule famille «  $x = \alpha + k\beta, k \in \mathbb{Z}$  ».  
 a)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ou  $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$  ;      b)  $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{6\pi}{5} + 2k\pi$  ;      c)  $x = \frac{k\pi}{2}$  ou  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  ;  
 d)  $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$  ou  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$  ou  $x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ .
- Déterminer les réels qui sont à la fois de la forme  $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$  et de la forme  $\frac{m\pi}{3}$ . Même question avec  $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{3}$ .
- Combien de réels de la forme  $\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{3}$  appartiennent à  $[-\pi, 4\pi]$  ? Les écrire.

**Exercice 34 Angles associés en récurrence ★★**

corrigé p. 55

Soit  $x$  un réel.

- Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos x$  et  $\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x$ . Étendre ces égalités à  $n \in \mathbb{Z}$ , puis en déduire que  $\tan(x+n\pi) = \tan x$  lorsque  $\tan x$  est défini.
- Exprimer  $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  et  $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  à l'aide de  $\cos x$  ou de  $\sin x$ , selon le reste de la division euclidienne de  $n \in \mathbb{Z}$  par 4.
- Calculer  $S_1 = \sum_{k=0}^{2026} \cos(x+k\pi)$ ,  $S_2 = \sum_{k=1}^{2026} \cos \frac{k\pi}{2}$  et  $S_3 = \sum_{k=1}^{100} k \sin \frac{k\pi}{2}$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + n\pi\right)$ . Montrer que  $P_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$ , puis déterminer les entiers  $n$  tels que  $P_n > 0$ .

**Exercice 35 L'octogone des angles associés ★★★**

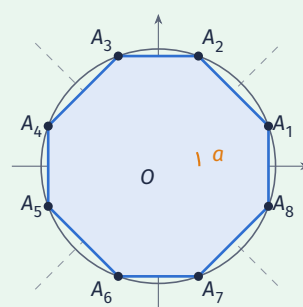
corrigé p. 55

Soit  $a \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ . On note  $A_1, A_2, \dots, A_8$  les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives

$$a, \frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} + a, \pi - a, \pi + a, \frac{3\pi}{2} - a, \frac{3\pi}{2} + a, 2\pi - a,$$

et  $O_a$  l'octogone  $A_1 A_2 \dots A_8$  (figure :  $a = \frac{\pi}{9}$ ). On pose  $c = \cos a$  et  $s = \sin a$ .

- Donner les coordonnées des huit sommets en fonction de  $c$  et  $s$ , et indiquer pour chacun la symétrie ou la rotation de centre  $O$  qui transforme  $A_1$  en ce sommet.
- Montrer que les arcs consécutifs  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_8 A_1$  (sens direct) mesurent alternativement  $\frac{\pi}{2} - 2a$  et  $2a$ . En déduire que l'aire de  $O_a$  vaut  $A(a) = 2(\cos 2a + \sin 2a)$  (aire d'un triangle :  $\frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin \widehat{MON}$ ).
- Écrire  $A(a)$  sous la forme  $r \cos(2a - \varphi)$ . Pour quelle valeur de  $a$  l'aire est-elle maximale, et que vaut-elle ? Vérifier que l'octogone est alors régulier.



- Montrer qu'une corde qui intercepte un arc de mesure  $\theta \in [0, \pi]$  a pour longueur  $2 \sin \frac{\theta}{2}$ . En déduire que le périmètre de  $O_a$  vaut  $p(a) = 8 \left( \sin a + \sin \left( \frac{\pi}{4} - a \right) \right)$ , puis que  $p(a) = 16 \sin \frac{\pi}{8} \cos \left( a - \frac{\pi}{8} \right)$ . Conclure.
- Déterminer les réels  $a$  tels que  $A(a) = 1 + \sqrt{3}$  (on utilisera  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ). Expliquer géométriquement pourquoi on trouve deux octogones de même aire.

### Exercice 36 Symétries du cercle et angles associés ★★★

corrigé p. 56

Pour tout réel  $t$ , on note  $M(t)$  le point  $(\cos t, \sin t)$  du cercle trigonométrique. Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note  $D_\theta$  la droite  $(OM(\theta))$  et  $s_\theta$  la symétrie orthogonale d'axe  $D_\theta$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Soit  $N = M(2\theta - x)$  et  $I$  le milieu de  $[M(x)N]$ .
  - À l'aide des formules de transformation somme  $\rightarrow$  produit, montrer que  $\vec{OI} = \cos(\theta - x) \vec{OM}(\theta)$  et que  $M(\vec{x})N = 2 \sin(\theta - x) \vec{v}$ , où  $\vec{v}(-\sin \theta, \cos \theta)$ .
  - En déduire que  $s_\theta(M(x)) = M(2\theta - x)$ .
- Utiliser les cas  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$  pour retrouver les formules des angles associés  $-x, \pi - x, \frac{\pi}{2} - x$ , et établir que  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ .
- Montrer que  $s_{\theta_2} \circ s_{\theta_1}$  transforme  $M(x)$  en  $M(x + 2(\theta_2 - \theta_1))$ . Que donnent les couples  $(\theta_1, \theta_2) = (0, \frac{\pi}{2})$  et  $(0, \frac{\pi}{4})$  ?
- Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On pose  $M_0 = M(x_0)$  puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $M_{n+1} = s_0(M_n)$  si  $n$  est pair,  $M_{n+1} = s_{\pi/5}(M_n)$  si  $n$  est impair.
  - Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_{2k} = M\left(x_0 + \frac{2k\pi}{5}\right)$  et  $M_{2k+1} = M\left(-x_0 - \frac{2k\pi}{5}\right)$ .
  - Montrer que les points  $M_n$  sont au nombre de 10 si  $x_0$  n'est pas un multiple de  $\frac{\pi}{5}$ , et de 5 sinon.
  - Pour  $x_0 = \frac{\pi}{10}$ , montrer que les points  $M_n$  sont les sommets d'un décagone régulier.

20

## Formules d'addition et de duplication

Tout découle de  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ . Repérer la structure des angles (somme, double, moitié) ; pour un angle moitié, **situer l'angle** pour choisir le signe de la racine.

### Exercice 37 Une seule donnée, toutes les valeurs ★

corrigé p. 57

Soit  $x \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$  tel que  $\cos x = -\frac{1}{4}$ .

- Calculer  $\sin x$  et  $\tan x$ , puis  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .
- Calculer  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$  et  $\tan 2x$ . Dans quel quadrant se trouve le point d'abscisse curviligne  $2x$  ?
- Calculer  $\cos 3x$  en écrivant  $3x = 2x + x$ .
- Préciser un intervalle contenant  $\frac{x}{2}$ , puis calculer  $\cos \frac{x}{2}$ ,  $\sin \frac{x}{2}$  et  $\tan \frac{x}{2}$ .

**Exercice 38 Développer et simplifier ★**

corrigé p. 57

Démontrer les égalités suivantes pour tout réel  $x$  pour lequel elles ont un sens (préciser ces réels dans c), d) et e)).

$$a) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x ; \quad b) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cos x ;$$

$$c) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 ; \quad d) \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 ;$$

$$e) \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x.$$

**Exercice 39 Un produit de tangentes qui vaut 2 ★★**

corrigé p. 58

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a + b = \frac{\pi}{4}$ ,  $\tan a$  et  $\tan b$  étant définis. Montrer que  $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$ .
2. Réciproquement, soient  $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  tels que  $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$ . Montrer que  $\tan a \tan b \neq 1$ , puis que  $a + b = \frac{\pi}{4}$ .
3. Calculer  $P = \left(1 + \tan \frac{\pi}{20}\right) \left(1 + \tan \frac{2\pi}{20}\right) \left(1 + \tan \frac{3\pi}{20}\right) \left(1 + \tan \frac{4\pi}{20}\right) \left(1 + \tan \frac{5\pi}{20}\right)$ .
4. Calculer  $Q = \left(1 + \tan \frac{\pi}{180}\right) \left(1 + \tan \frac{2\pi}{180}\right) \cdots \left(1 + \tan \frac{45\pi}{180}\right)$ , c'est-à-dire, en degrés,  $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 45^\circ)$ .

**Exercice 40 Une fonction qui revient au point de départ ★★**

corrigé p. 58

On pose  $f(u) = \frac{u + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}u}$  pour  $u \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $\varphi$  tel que  $\varphi$  et  $\varphi + \frac{\pi}{3}$  n'appartiennent pas à  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  :  $f(\tan \varphi) = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ .
2. Calculer  $f(0)$ ,  $f(f(0))$  et  $f(f(f(0)))$ , puis  $f(2)$ ,  $f(f(2))$  et  $f(f(f(2)))$  (avec des dénominateurs entiers).
3. Montrer que, pour tout réel  $u \notin \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ ,  $f(f(f(u)))$  est défini et égal à  $u$ . Que se passe-t-il pour  $u = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  ?
4. Pour  $a > 0$ , on pose  $g_a(u) = \frac{u+a}{1-au}$  ( $u \neq \frac{1}{a}$ ). a) Montrer que  $g_1(g_1(u)) = -\frac{1}{u}$ , puis que l'on a  $g_1(g_1(g_1(g_1(u)))) = u$  pour  $u \notin \{-1, 0, 1\}$ . b) Déterminer les réels  $a > 0$  tels que  $g_a(g_a(g_a(u))) = u$  pour tout réel  $u$  où cette expression est définie.

**Exercice 41 Les tangentes de  $\pi/24$  et de  $5\pi/24$  ★★★**

corrigé p. 59

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  qui n'est pas multiple de  $\frac{\pi}{2}$  :  $\cotan x - \tan x = 2 \cotan 2x$ .
2. a) En appliquant l'égalité du 1 à  $x = \frac{\pi}{12}$ , montrer que  $t = \tan \frac{\pi}{12}$  vérifie  $t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$ , et retrouver  $t = 2 - \sqrt{3}$ .  
b) Montrer de même que  $u = \tan \frac{\pi}{24}$  est la racine positive de  $u^2 + 2(2 + \sqrt{3})u - 1 = 0$ . Vérifier que  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$ , puis en déduire que  $\tan \frac{\pi}{24} = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ .  
c) En déduire  $\cotan \frac{\pi}{24}$ , et contrôler le résultat à l'aide de l'égalité  $\tan x + \cotan x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$  (on rappelle  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ).

- Montrer de même que  $\tan \frac{5\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$ .
- Calculer  $S = \tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{5\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24} + \tan \frac{11\pi}{24}$  de deux façons.

**Exercice 42 Une suite de tangentes ★★★**

corrigé p. 59

Soit  $u_0 \in \mathbb{R}$  ; on pose  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1-u_n^2}$  tant que  $u_n \neq \pm 1$  (la suite s'arrête si un terme vaut  $\pm 1$ ). On admet que  $u_0 = \tan \theta$  pour un unique  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

- Montrer par récurrence que  $u_n$  est défini si et seulement si aucun des réels  $2\theta, 4\theta, \dots, 2^n\theta$  n'appartient à  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , et qu'alors  $u_n = \tan(2^n\theta)$ .
- Décrire la suite lorsque : a)  $u_0 = \sqrt{3}$  ; b)  $u_0 = 2 - \sqrt{3}$  (vérifier par le calcul que  $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ) ; c)  $u_0 = \sqrt{2} - 1$ .
- a) Montrer que, si  $\theta$  est un multiple de  $\frac{\pi}{7}$ , tous les  $u_n$  sont définis. b) Montrer que  $u_3$  est défini et égal à  $u_0$  si et seulement si  $7\theta \in \pi\mathbb{Z}$ . c) En déduire les six valeurs non nulles de  $u_0$  pour lesquelles  $u_3 = u_0$ , et montrer qu'elles forment deux cycles  $\{u_0, u_1, u_2\}$ .
- Combien de valeurs de  $u_0$  donnent une suite définie pour tout  $n$ , telle que  $u_4 = u_0$  mais  $u_2 \neq u_0$  (suite de plus petite période 4) ?

21

**Transformations et identités**

Somme en produit pour **factoriser**, produit en somme pour **linéariser**. Dans un triangle,  $A+B+C = \pi$  se traduit par  $\sin(A+B) = \sin C$ ,  $\cos(A+B) = -\cos C$ ,  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$  et  $\tan \frac{A+B}{2} = \cotan \frac{C}{2}$ .

**Exercice 43 Factoriser pour simplifier ★**

corrigé p. 60

- Factoriser :  $A(x) = \cos 7x + \cos 3x$ ,  $B(x) = \sin 4x - \sin 2x$ ,  $C(x) = \cos x - \cos 5x$ ,  $E(x) = 1 + 2 \cos 2x + \cos 4x$ . Simplifier  $\frac{C(x)}{B(x)}$  en précisant pour quels réels  $x$  ce quotient est défini.
- Écrire  $D(x) = \cos x - \cos 3x - \cos 5x + \cos 7x$  comme produit de trois facteurs trigonométriques (regrouper le premier et le dernier terme). En déduire les solutions de l'équation  $D(x) = 0$  dans  $[0, \pi]$ .
- Montrer que  $\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{7\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{18}$  et que  $\sin \frac{\pi}{18} + \sin \frac{5\pi}{18} = \sin \frac{7\pi}{18}$ .

**Exercice 44 Linéariser pour calculer ★**

corrigé p. 61

- Transformer en sommes les produits  $2 \sin 3x \cos x$  et  $2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$ , puis les produits  $4 \sin x \sin 2x \sin 3x$  et  $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$ .
- Calculer  $\cos \frac{7\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24}$  et  $\sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24}$ , puis  $\tan \frac{7\pi}{24} \tan \frac{\pi}{24}$ .
- La *prosthaphèrese*. Au xvi<sup>e</sup> siècle, avant les logarithmes, les astronomes (Tycho Brahe) remplaçaient une multiplication par des additions grâce à  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$  et à une table :

| $\theta$      | 10°    | 20°    | 30°    | 50°    | 60°    | 70°    | 80°    |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\cos \theta$ | 0,9848 | 0,9397 | 0,8660 | 0,6428 | 0,5000 | 0,3420 | 0,1736 |

Calculer ainsi, sans multiplication,  $0,9397 \times 0,6428$  et  $0,9848 \times 0,3420$ , puis comparer avec le calcul direct.

**Exercice 45 La loi des tangentes ★★**

corrigé p. 61

Dans un triangle  $ABC$ , on note  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ , et on admet la loi des sinus :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

1. Montrer que, pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que les expressions aient un sens :  $\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \tan \frac{x-y}{2} / \tan \frac{x+y}{2}$ .
2. En déduire la *loi des tangentes*  $\frac{a-b}{a+b} = \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}$  (justifier que tout a un sens dans un triangle).
3. *Application.* On donne  $a = \sqrt{3} + 1$ ,  $b = \sqrt{3} - 1$  et  $C = \frac{\pi}{3}$ . Calculer les angles  $A$  et  $B$ , puis la longueur  $c$ .
4. Établir de même la formule de Mollweide  $\frac{a+b}{c} = \cos \frac{A-B}{2} / \sin \frac{C}{2}$ , et la vérifier sur l'exemple de la question 3.

**Exercice 46 Reconnaître un triangle ★★**

corrigé p. 62

$ABC$  est un triangle d'angles  $A, B, C$  (éléments de  $]0, \pi[$ , de somme  $\pi$ ).

1. Montrer que  $\sin A = 2 \sin B \cos C$  si et seulement si le triangle est isocèle de sommet  $A$  ( $B = C$ ).
2. À l'aide de l'identité  $\sin(p+q)\sin(p-q) = \sin^2 p - \sin^2 q$ , montrer que  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$  si et seulement si  $A = \frac{\pi}{2}$ .
3. a) Montrer que  $\cos^2 A + \cos^2 B = 1 - \cos C \cos(A-B)$ , puis que  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$ .  
b) En déduire que le triangle est rectangle si et seulement si  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ , et qu'il a un angle obtus si et seulement si cette somme est strictement supérieure à 1.
4. Déterminer les angles d'un triangle qui vérifie à la fois  $\sin A = 2 \sin B \cos C$  et  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ .

**Exercice 47 Un système trigonométrique ★★★**

corrigé p. 62

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , on pose  $a = \cos x + \cos y$  et  $b = \sin x + \sin y$ .

1. Montrer que  $a = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$  et  $b = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ . En déduire que  $a^2 + b^2 = 2 + 2 \cos(x-y)$ .
2. On suppose  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Montrer que  $\cos(x+y) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$  et  $\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ,  $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .
4. À quelle condition sur  $x$  et  $y$  a-t-on  $a = b = 0$ ? Interpréter à l'aide des points  $M(x)$ ,  $M(y)$  du cercle trigonométrique et du milieu de  $[M(x)M(y)]$ .

**Exercice 48 Demi-angles d'un triangle ★★★**

corrigé p. 63

Soit  $ABC$  un triangle. On pose  $x = \tan \frac{A}{2}$ ,  $y = \tan \frac{B}{2}$ ,  $z = \tan \frac{C}{2}$ .

1. Justifier que  $x, y, z$  sont définis et strictement positifs. Montrer que  $\tan \frac{A+B}{2} = \cotan \frac{C}{2}$ , puis que  $xy + yz + zx = 1$ .
2. a) Montrer que, pour tous réels  $u, v, w$  :  $u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + wu$ , avec égalité si et seulement si  $u = v = w$ .  
b) En déduire que  $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + vw + wu)$  et  $(uv + vw + wu)^2 \geq 3uvw(u + v + w)$ .

3. En déduire que  $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$  et  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$ , avec égalité dans chaque cas si et seulement si le triangle est équilatéral.
4. a) Montrer que  $1 + x^2 = (x + y)(x + z)$  et que  $\cos A = \frac{2}{(x+y)(x+z)} - 1$ .
- b) En déduire que  $\cos A + \cos C - 2 \cos B = \frac{2(2y-x-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ . Conclure :  $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$  sont (dans cet ordre) en progression arithmétique si et seulement si  $\cos A, \cos B, \cos C$  le sont.

22

## Équations et inéquations

Tout se ramène à  $\cos X = \cos \alpha$ ,  $\sin X = \sin \alpha$  ou  $\tan X = \tan \alpha$  : on **transforme** (changement d'inconnue, factorisation, forme  $r \cos(x - \varphi)$ ), on **résout** dans  $\mathbb{R}$ , puis on **encadre**  $k$  pour l'intervalle demandé et on **place** les solutions sur le cercle.

### Exercice 49 Équations de référence ★

corrigé p. 63

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans l'intervalle indiqué :

- $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ , dans  $[0, 2\pi[$  ;
- $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , dans  $[0, \pi[$  ;
- $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ , dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  ;
- $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ , dans  $]-\pi, \pi]$  (placer ces solutions sur le cercle trigonométrique).

### Exercice 50 Inéquations de référence ★

corrigé p. 64

- Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  : a)  $2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$  ; b)  $2 \sin x + \sqrt{2} > 0$ .
- Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  : a)  $(2 \cos x - 1) \sin x > 0$  (tableau de signes) ; b)  $|2 \sin x| < 1$ .

### Exercice 51 Changer d'inconnue ★★

corrigé p. 65

- Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  :  $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{3} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$  de deux façons : a) en se ramenant à une équation en  $\tan x$  ; b) en montrant que le premier membre vaut  $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Comparer les écritures obtenues.
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\tan x + \cotan x = 4$ .

### Exercice 52 L'équation $a \cos x + b \sin x = c$ ★★

corrigé p. 65

- Montrer que, pour tout réel  $x$  :  $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = \sqrt{6}$ . Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  l'inéquation  $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x < \sqrt{6}$ .
- Soit  $m$  un réel et  $(E_m)$  :  $m \cos x + (m + 1) \sin x = 1$ . Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $(E_m)$  admet des solutions. Résoudre  $(E_0)$  et  $(E_{-1})$ .

**Exercice 53 Factoriser pour résoudre ★★★**

corrigé p. 66

1. Montrer que  $\sin 2x + \sin 4x - \sin 3x = \sin 3x(2 \cos x - 1)$ , puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$ . Que remarque-t-on ?
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $[0, \pi[$  :  $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$  (linéariser).
3. Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'inéquation  $\cos x - \cos 3x > \sin 2x$ .

**Exercice 54 Avec  $t = \tan \frac{x}{2}$ , puis un système ★★★**

corrigé p. 66

1. Pour  $x \in ]-\pi, \pi[$ , on pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ . Montrer que  $\cos x + \tan \frac{x}{2} - 1 = \frac{t(t-1)^2}{1+t^2}$ .
2. En déduire les solutions dans  $]-\pi, \pi[$ , puis dans  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $\cos x + \tan \frac{x}{2} = 1$ , et résoudre dans  $]-\pi, \pi[$  l'inéquation  $\cos x + \tan \frac{x}{2} > 1$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système 
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (\text{transformer la somme en produit}).$$

23

**Courbes et extremums**

La courbe de  $x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) a pour période  $\frac{2\pi}{\omega}$ , pour maximum  $A$  et pour minimum  $-A$ . Sans dérivée, on obtient variations et extremums par **composition** (variations de  $\cos$  et  $\sin$  sur des intervalles), par un **changement de variable** ( $X = \sin x, c = \cos x, s = \sin x + \cos x$ ) ou par l'écriture  $r \cos(x - \varphi)$ .

**Exercice 55 Période, parité, symétries ★**

corrigé p. 67

1. Montrer que  $T$  est une période de  $f$  : a)  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $T = \pi$  ; b)  $f(x) = \cos \frac{x}{3}$ ,  $T = 6\pi$  ; c)  $f(x) = \tan 2x$ ,  $T = \frac{\pi}{2}$  ; d)  $f(x) = \cos^2 x$ ,  $T = \pi$  (linéariser).
2. Étudier la parité de : a)  $x \mapsto \sin x \cos 2x$  ; b)  $x \mapsto \cos x + x \sin x$  ; c)  $x \mapsto \tan x - \sin x$  ; d)  $x \mapsto \sin x + \cos x$ .
3. Soit  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  et  $C$  sa courbe. a) Montrer que la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{3}$  est un axe de symétrie de  $C$  et que le point  $I\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$  en est un centre de symétrie. b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier  $f$  sur  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$  pour tracer toute la courbe.

**Exercice 56 Une sinusoïde renversée ★**

corrigé p. 67

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

1. Montrer que  $f$  est  $\pi$ -périodique et que  $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$  pour tout réel  $x$ . Comment obtient-on sa courbe à partir de celle de la fonction sinus ?
2. Calculer  $f(0)$  et  $f(\pi)$ . Déterminer les réels de  $[0, \pi]$  où  $f$  atteint son maximum, son minimum, et ceux où elle s'annule.
3. Sans dérivée, dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$ , puis tracer sa courbe.
4. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, dans  $[0, \pi]$  :  $f(x) = 1$ , puis  $f(x) \geq 1$ .

**Exercice 57 Le ressort ★★**

corrigé p. 68

Une masse accrochée à un ressort oscille verticalement ; sa position (en cm) à l'instant  $t$  (en s) est

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

avec  $A > 0$ ,  $\omega > 0$  et  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ . La courbe ci-contre représente  $y$  pour  $t \in [0, 4]$  (quadrillage :  $\frac{1}{3}$  s horizontalement, 0,5 cm verticalement).



1. Lire l'amplitude  $A$  et la période  $T$  ; en déduire  $\omega$ .
2. Lire  $y(0)$  et l'instant du premier maximum. En déduire  $\varphi$ , puis écrire  $y(t)$  sous la forme  $a \cos(\pi t) + b \sin(\pi t)$ .
3. À quels instants de  $[0, 4]$  la masse passe-t-elle par la position  $y = -1$  ? Vérifier sur la figure.
4. Pendant quelle fraction de chaque période la masse est-elle à au moins 1 cm de sa position d'équilibre ( $|y(t)| \geq 1$ ) ?

**Exercice 58 Extremums sans dérivée ★★**

corrigé p. 68

Déterminer le maximum et le minimum sur  $\mathbb{R}$  de chacune des fonctions suivantes, et les réels où ils sont atteints.

1.  $g(x) = \cos 2x + 2 \sin x$  (poser  $X = \sin x$ ).
2.  $k(x) = \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  (transformer le produit en somme).
3.  $h(x) = \sin x \cos x + \sin x + \cos x$  (poser  $s = \sin x + \cos x$  ; montrer que  $s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  et exprimer  $\sin x \cos x$  en fonction de  $s$ ).

**Exercice 59 Nombre de solutions selon  $m$  ★★★**

corrigé p. 69

Soit  $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$  et, pour  $m$  réel, l'équation  $(E_m)$  :  $f(x) = m$ .

1. Montrer que  $f$  est paire et  $2\pi$ -périodique, et que  $f(x) = \phi(\cos x)$  où  $\phi(c) = 2c^2 + 2c - 1$ .
2. Étudier les variations de  $\phi$  sur  $[-1, 1]$ . En déduire, sans dérivée, que  $f$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$  et croissante sur  $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ . Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$  et tracer sa courbe sur  $[-\pi, \pi]$ .
3. Discuter, selon  $m$ , le nombre de solutions de  $(E_m)$  dans  $[0, \pi]$  (on utilisera que  $\cos$  est une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ ), puis dans  $[0, 2\pi[$ .
4. Résoudre  $(E_{-1})$  dans  $[0, 2\pi[$  et vérifier la cohérence avec la question 3.

**Exercice 60 Superposer deux sinusoïdes ★★★**

corrigé p. 70

Soit  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\varphi$  trois réels et  $s(x) = a \cos x + b \cos(x + \varphi)$  (deux vibrations de même période qui se superposent).

1. Montrer que  $s(x) = (a + b \cos \varphi) \cos x - b \sin \varphi \sin x$ , puis qu'il existe  $A \geq 0$  et un réel  $\psi$  tels que  $s(x) = A \cos(x + \psi)$  pour tout  $x$ , avec  $A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi$ . En déduire que  $|a - b| \leq A \leq a + b$ . Quand a-t-on  $A = a + b$  ?  $A = 0$  ?

2. Exemple :  $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . a) Montrer que  $A = 7$  et calculer  $\cos \psi$  et  $\sin \psi$ . Quel est le maximum de  $s$  ? b) Montrer que  $s(x) = 0 \iff \tan x = \frac{11\sqrt{3}}{15}$ . c) Interpréter  $A = 7$  à l'aide d'un triangle de côtés 3, 5, 7 (formule d'Al-Kashi). d) Tracer sur  $[0, 2\pi]$  les courbes de  $3 \cos x$ , de  $5 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  et de leur somme.
3. Pour quelles valeurs de  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$  la fonction  $x \mapsto \cos x + \cos(x + \varphi)$  a-t-elle pour amplitude 1 ?  $\sqrt{3}$  ? 0 ?

24

## Défis de concours

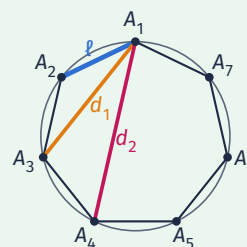
Six problèmes de concours, sans dérivée ni nombre complexe : la trigonométrie y sert la géométrie (Ptolémée, Langley), les inégalités, les sommes télescopiques et même l'arithmétique.

### Exercice 61 Ptolémée et l'heptagone ★★★★★

corrigé p. 70

Ptolémée (II<sup>e</sup> siècle) a bâti ses tables de cordes grâce au théorème qui porte son nom ; on le démontre ici par le calcul.

- Montrer que, pour tous réels  $a, b, c$  :  $\sin(a+b) \sin(b+c) = \sin a \sin c + \sin b \sin(a+b+c)$ .
- Sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , on considère  $M(R \cos \theta, R \sin \theta)$  et  $N(R \cos(\theta + 2u), R \sin(\theta + 2u))$ , avec  $u \in [0, \pi]$ . Montrer que  $MN = 2R \sin u$ .
- Théorème de Ptolémée.**  $A, B, C, D$  sont quatre points d'un cercle de rayon  $R$ , rencontrés dans cet ordre en tournant dans le sens direct ; les arcs  $AB, BC, CD, DA$  (parcourus dans le sens direct) mesurent  $2a, 2b, 2c, 2d$  ( $a, b, c, d > 0$ ,  $a + b + c + d = \pi$ ). Montrer que  $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ .
- $A_1 A_2 \dots A_7$  est un heptagone régulier inscrit dans un cercle de rayon  $R$  ; on note  $\ell = A_1 A_2$ ,  $d_1 = A_1 A_3$  et  $d_2 = A_1 A_4$  (figure).
  - Exprimer  $\ell, d_1$  et  $d_2$  à l'aide de  $R$  et de  $\sin \frac{\pi}{7}, \sin \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{3\pi}{7}$ .
  - En appliquant le théorème de Ptolémée aux quadrilatères  $A_1 A_2 A_3 A_4$  et  $A_1 A_2 A_3 A_5$ , montrer que  $d_1^2 = \ell^2 + \ell d_2$  et  $d_1 d_2 = \ell(d_1 + d_2)$ .
  - En déduire que  $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}$ .



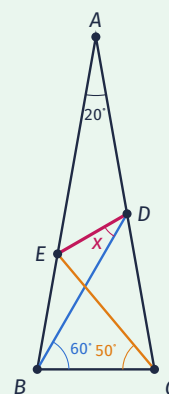
### Exercice 62 Le problème de Langley ★★★★★

corrigé p. 71

Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ , avec  $\widehat{BAC} = 20^\circ$  (donc  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 80^\circ$ ). Le point  $D$  de  $[AC]$  vérifie  $\widehat{DBC} = 60^\circ$  et le point  $E$  de  $[AB]$  vérifie  $\widehat{ECB} = 50^\circ$ . On cherche l'angle  $\widehat{BDE}$  (problème des « angles adventices », Langley, 1922). Les angles sont mesurés en degrés et l'on prend  $BC = 1$ .

1. **Loi des sinus.** Dans un triangle de côtés  $a, b, c$  opposés aux angles  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ , justifier que son aire vaut  $\frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$ , puis montrer que

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$



2. a) Montrer que le triangle  $BCE$  est isocèle et que  $BE = 1$ . b) Calculer  $\widehat{BDC}$ , puis montrer que  $BD = 2 \cos 40^\circ$ .
3. On note  $x$  la mesure de  $\widehat{BDE}$ . a) Montrer que  $\widehat{EBD} = 20^\circ$ ,  $\widehat{BED} = 160^\circ - x$ , puis que  $\sin(160^\circ - x) = 2 \cos 40^\circ \sin x$ .  
b) Vérifier que  $x = 30^\circ$  convient. c) Montrer que  $g(x) = \frac{\sin(160^\circ - x)}{\sin x} = \sin 160^\circ \cotan x - \cos 160^\circ$  est strictement décroissante sur  $]0^\circ, 160^\circ[$ , et conclure.

**Exercice 63 Deux minoration** ★★★★★

corrigé p. 72

1. a) Montrer que, pour tout réel  $x$  :  $\sin 1 = \sin(x+1)\cos x - \cos(x+1)\sin x$ . En déduire que  $|\sin x| + |\sin(x+1)| \geq \sin 1$ .  
b) Pour quels réels  $x$  a-t-on l'égalité ? Quel est le minimum de  $x \mapsto |\sin x| + |\sin(x+1)|$  ?
2. (Concours Putnam, 2003.) Pour  $x$  tel que  $\sin x \cos x \neq 0$ , on pose

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cotan x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

- a) On pose  $s = \sin x + \cos x$ . Montrer que  $s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ,  $s \neq \pm 1$ , et que  $f(x) = s + \frac{2}{s-1}$ .
- b) On pose  $u = s - 1$ . Montrer que  $v + \frac{2}{v} \geq 2\sqrt{2}$  pour tout  $v > 0$ , puis que  $f(x) \geq 1 + 2\sqrt{2}$  si  $u > 0$  et  $f(x) \leq 1 - 2\sqrt{2}$  si  $u < 0$ .
- c) En déduire le minimum de  $|f|$ , et montrer qu'il est atteint.

**Exercice 64 Sommes télescopiques** ★★★★★

corrigé p. 72

1. a) Montrer que, si  $\sin a \neq 0$  :  $\cotan \frac{a}{2} - \cotan a = \frac{1}{\sin a}$ .  
b) Soit  $n \geq 1$  et  $x$  tel que  $\sin(2^k x) \neq 0$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ . Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin(2^k x)} = \cotan \frac{x}{2} - \cotan(2^{n-1} x).$$

- c) Avec  $x = \frac{2\pi}{7}$  et  $n = 3$ , retrouver l'identité de l'exercice 61 (question 4.c).
2. a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x$  tel que  $\tan x \neq 0$  et que  $\tan(kx)$ ,  $\tan((k+1)x)$  soient définis. Montrer que

$$\tan(kx) \tan((k+1)x) = \frac{\tan((k+1)x) - \tan(kx)}{\tan x} - 1.$$

- b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n \tan(kx) \tan((k+1)x) = \frac{\tan((n+1)x)}{\tan x} - (n+1)$  (pour  $x$  convenable).

- c) Calculer  $\sum_{k=1}^{88} \tan k^\circ \tan(k+1)^\circ$  en fonction de  $\tan 1^\circ$ , puis

$$\tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{2\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{3\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5}.$$

**Exercice 65** Quand  $\cos(r\pi)$  est-il rationnel ? ★★★★★

corrigé p. 73

Soit  $r = \frac{a}{b}$  un rationnel ( $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ ) et, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_k = 2 \cos(2^k r \pi)$ . On va montrer que **si**  $\cos(r\pi)$  **est rationnel, alors**  $\cos(r\pi) \in \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\}$  (théorème de Niven).

- Montrer que  $u_{k+1} = u_k^2 - 2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- En notant  $m_k$  le reste de la division euclidienne de  $2^k a$  par  $2b$ , montrer que la suite  $(u_k)$  prend au plus  $2b$  valeurs distinctes.
- On suppose  $u_0$  rationnel :  $u_0 = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  premiers entre eux.
  - On suppose  $q \geq 2$ . Montrer que  $u_1 = \frac{p^2 - 2q^2}{q^2}$  et que cette fraction est irréductible.
  - En déduire que, pour tout  $k$ ,  $u_k$  est une fraction irréductible de dénominateur  $q^{2^k}$ , puis une contradiction.
  - Conclure.
- Applications.**
  - Montrer que, si  $\sin(r\pi)$  est rationnel, alors  $\sin(r\pi) \in \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\}$ .
  - Montrer que, si  $\tan(r\pi)$  est défini et rationnel, alors  $\tan(r\pi) \in \{0, \pm 1\}$  (étudier  $\cos(2r\pi)$ ).
  - Un triangle rectangle a des côtés de longueurs entières (par exemple 3, 4, 5). Montrer que la mesure en degrés de chacun de ses angles aigus est un nombre irrationnel.

**Exercice 66** Périodique ou pas ? ★★★★★

corrigé p. 73

- Soit  $n \geq 3$  un entier.
  - Montrer que, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $t^n \leq t^2$ , avec égalité si et seulement si  $t \in \{0, 1\}$  ( $n$  impair) ou  $t \in \{-1, 0, 1\}$  ( $n$  pair).
  - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sin^n x + \cos^n x = 1$ .
- Soit  $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ .
  - Résoudre  $f(x) = 2$  (on rappelle que  $\sqrt{2}$  est irrationnel).
  - En déduire que  $f$  n'est pas périodique, bien qu'elle soit la somme de deux fonctions périodiques.
- Soit  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $g(x) = \cos(ax) + \cos(bx)$ . Montrer que  $g$  est périodique si et seulement si  $\frac{a}{b}$  est rationnel.
- Déterminer la plus petite période strictement positive de  $h(x) = \cos 2x + \cos 3x$ .

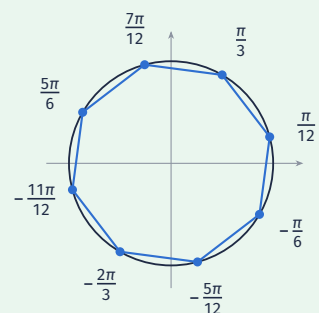
# Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

## 25 Corrigés du niveau I

### ■ Corrigé de l'exercice 1

1.  $(\times \frac{\pi}{180}) : 15^\circ = \boxed{\frac{\pi}{12}}$ ,  $105^\circ = \boxed{\frac{7\pi}{12}}$ ,  $288^\circ = \boxed{\frac{8\pi}{5}}$ ;  $\frac{5\pi}{9} = \boxed{100^\circ}$ ,  $\frac{13\pi}{12} = \boxed{195^\circ}$ .
2. On écrit  $x = x_0 + 2k\pi$  avec  $x_0 \in ]-\pi, \pi]$  :  $\frac{47\pi}{6} = 8\pi - \frac{\pi}{6}$  donne  $\boxed{-\frac{\pi}{6}}$ ;  $-\frac{41\pi}{3} = -14\pi + \frac{\pi}{3}$  donne  $\boxed{\frac{\pi}{3}}$ ;  $\frac{99\pi}{5} = 20\pi - \frac{\pi}{5}$  donne  $\boxed{-\frac{\pi}{5}}$ ;  $1000 = 7 \times 142 + 6$  (142 pair) donne  $\boxed{\frac{6\pi}{7}}$ .
3. Même point  $\iff$  la différence est un multiple de  $2\pi$ . a)  $\frac{25\pi}{6} + \frac{23\pi}{6} = 8\pi$  : **oui**; b)  $\frac{13\pi}{5} + \frac{7\pi}{5} = 4\pi$  : **oui**; c)  $\frac{9\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} = \frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$  : **non**.
4. Les abscisses associées à  $k$  et  $k'$  donnent le même point  $\iff \frac{(k-k')\pi}{4} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff 8$  divise  $k-k'$  : il y a  $\boxed{8 \text{ points}}$  ( $k = 0, \dots, 7$ ), de mesures principales  $-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$ . Deux points consécutifs sont séparés par  $\frac{\pi}{4}$  : c'est un **octogone régulier**.



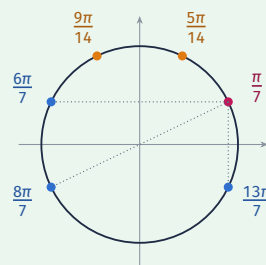
5.  $\ell = R\theta : \theta = \frac{1000}{0,3} = \boxed{\frac{10\,000}{3}} \text{ rad} \approx 3333 \text{ rad}$ , soit  $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{10\,000}{6\pi} \approx 530,5$  tours :  $\boxed{530 \text{ tours complets}}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 2

1.  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57 < 2 < \pi$  :  $\cos 2 < 0$ ,  $\sin 2 > 0$ .  $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \approx 4,71$  :  $\cos 4 < 0$ ,  $\sin 4 < 0$ ,  $\tan 4 > 0$ .  $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \approx 6,28$  :  $\sin 6 < 0$ .
2. a)  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{400}{441} = \frac{841}{441}$  et  $\cos x < 0$  sur  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$  :  $\boxed{\cos x = -\frac{21}{29}}$ , puis  $\sin x = \tan x \cos x = \boxed{\frac{20}{29}}$  et  $\boxed{\cotan x = -\frac{21}{20}}$  (triplet  $20^2 + 21^2 = 29^2$ ).  
b)  $\sin^2 y = 1 - \frac{81}{1681} = \frac{1600}{1681}$  et  $\sin y < 0$  sur  $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$  :  $\boxed{\sin y = -\frac{40}{41}}$ ,  $\boxed{\tan y = \frac{40}{9}}$ ,  $\boxed{\cotan y = \frac{9}{40}}$ .
3.  $\frac{9}{25} + \frac{9}{16} = \frac{369}{400} \neq 1$  : **non**, car on doit avoir  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .
4.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$ ;  $\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x$ ;  $\tan x + \cotan x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$ .

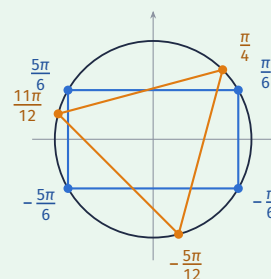
### ■ Corrigé de l'exercice 3

- $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) : \cos \frac{17\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{11\pi}{4} = -4\pi + \frac{5\pi}{4} :$   
 $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{31\pi}{3} = 10\pi + \frac{\pi}{3} : \sqrt{3} ; \cotan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3} ;$   
 $\sin \frac{47\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$  (exercice 1).
- $E(x) = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 ; \tan(\pi - x) = -\tan x$  et  $\cotan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x : F(x) = -2 \tan x$ .
- $\cos \frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} ; \sin \frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} ;$   
 $\cos \frac{13\pi}{7} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \cos \frac{\pi}{7} = \frac{1}{2} ; \sin \frac{5\pi}{14} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos \frac{\pi}{7} = \frac{1}{2} ;$   
 $\cos \frac{9\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$



### ■ Corrigé de l'exercice 4

- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} : x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
  - $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) : x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$  ( $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ).
  - $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) : x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \iff 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi ;$  dans  $]-\pi, \pi] :$   $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$  (un rectangle, en bleu).
  - $2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$  soit  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$  ou  $2x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$  soit  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$  (qui contient la première famille). Dans  $]-\pi, \pi] :$   $-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}$  (un triangle équilatéral, en orange).
  - $-\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$  Ou bien  $x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$  impossible ( $-\frac{2\pi}{3} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ) ; ou bien  $x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$  soit  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi :$   $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$  (points déjà placés en a)).



### ■ Corrigé de l'exercice 5

- $p$  et  $q$  sont aigus :  $\cos p = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$  et  $\sin q = \frac{4}{5}.$  Alors  $\cos(p+q) = \frac{15}{17} \cdot \frac{3}{5} - \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{85},$   
 $\sin(p+q) = \frac{8}{17} \cdot \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \cdot \frac{4}{5} = \frac{84}{85}, \tan(p+q) = \frac{84}{13}, \sin(p-q) = \frac{24-60}{85} = -\frac{36}{85}$  (triplet  $13^2 + 84^2 = 85^2$ ).
- Les termes en  $\sin x \sin \frac{2\pi}{3}$  se compensent :  $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cos x \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos x.$   
 Comme  $x + \frac{4\pi}{3} = \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi,$  la somme demandée vaut  $\cos x - \cos x = 0.$
- Pour  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi : \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}.$  Avec  $t = \tan x : \frac{1+t}{1-t} = 3t \iff$   
 $1+t = 3t - 3t^2 \iff 3t^2 - 2t + 1 = 0,$  de discriminant  $-8 < 0 :$  **aucune solution** (et pour  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$   $\tan x$  n'existe pas).

### ■ Corrigé de l'exercice 6

- $\sin x < 0 : \sin x = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  ;  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$  ;  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{1}{9}$  ;  
 $\tan 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$  ;  $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = \frac{2}{81} - 1 = -\frac{79}{81}$ .
- $\cos 2x = \cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{4}{5}$  ;  $\sin 2x = 2 \tan x \cos^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{3}{5}$  ;  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = -\frac{3}{4}$ .
- $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1 - \cos 4x}{8}$  ;  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x$ .
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x : \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \iff 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi :$   
 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 7

On lit les arcs sur le cercle (en couleur).

a)  $\cos x < \frac{1}{2}$  : points d'abscisse  $< \frac{1}{2}$ , à gauche de la droite

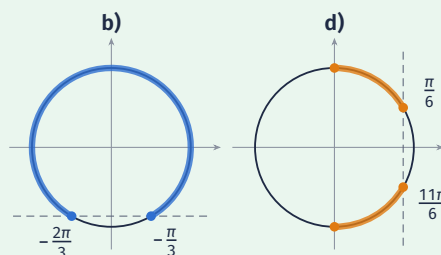
$$x = \frac{1}{2} : S = \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[.$$

b)  $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$  seulement sur l'arc  $\left] -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right[$  (sous la droite  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ) :  $S = \left] -\pi, -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left] -\frac{\pi}{3}, \pi \right[$  (figure de gauche).

c)  $\tan$  est strictement croissante sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et  $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$  :  $S = \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

d)  $\cos x \geq 0$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  et  $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  sur  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$  :

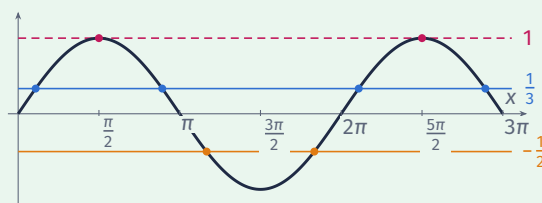
$$S = \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right] \text{ (figure de droite).}$$



### ■ Corrigé de l'exercice 8

- $\cos 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi)$  : période  $\frac{2\pi}{3}$ , paire.  $\sin \frac{x+4\pi}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right)$  : période  $4\pi$ , impaire.  
 $\tan \frac{x+3\pi}{3} = \tan\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$  : période  $3\pi$ , impaire.  $|\sin(x + \pi)| = |-\sin x|$  : période  $\pi$ , paire. En-  
 fin  $\cos \frac{x+12\pi}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right)$  et  $\sin \frac{x+12\pi}{3} = \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right)$  :  $12\pi$  est une période ( $12\pi$  est multiple  
 commun de  $4\pi$  et  $6\pi$ ).

- La droite  $y = \frac{1}{3}$  coupe la courbe **4 fois** (deux fois sur  $[0, \pi]$ , deux fois sur  $[2\pi, 3\pi]$ , jamais sur  $]\pi, 2\pi[$  où  $\sin x \leq 0$ ).  $\sin x = -\frac{1}{2}$  : seule-  
 ment sur  $]\pi, 2\pi[$  :  $x = \frac{7\pi}{6}$  ou  $\frac{11\pi}{6}$  (2 solu-  
 tions).  $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  :  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{5\pi}{2}$ .



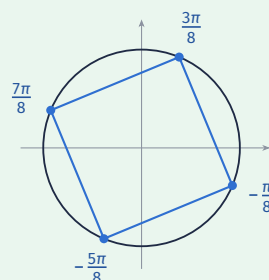
- $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  : la courbe de  $\sin$  est l'image de celle de  $\cos$  par la translation de vecteur  $\frac{\pi}{2} \vec{i}$  ; celle de  $2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ , par la translation de vecteur  $-\frac{\pi}{3} \vec{i} + 2 \vec{j}$ .

26

# Corrigés du niveau 2

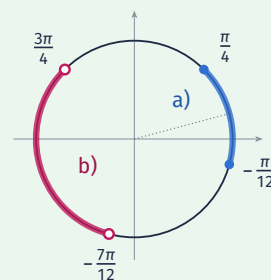
## ■ Corrigé de l'exercice 9

- $\cos 2a = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Avec  $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ,  $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$  et  $a \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  (cosinus et sinus positifs) :  $\cos a = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ,  $\sin a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ . Puis  $\tan a = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ .
- $\tan \frac{5\pi}{8} = \tan\left(\frac{5\pi}{8} - \pi\right) = -\tan a = -1-\sqrt{2}$ ;  $\tan \frac{7\pi}{8} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\tan a} = -(\sqrt{2}-1) = 1-\sqrt{2}$ . La somme de  $1 \pm \sqrt{2}$  vaut 2 et leur produit  $1-2 = -1$  : ce sont les racines de  $X^2 - 2X - 1$ .
- Pour  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , posons  $T = \tan x$  :  $T^2 - 2T - 1 = 0 \iff T = 1+\sqrt{2} = \tan \frac{3\pi}{8}$  ou  $T = 1-\sqrt{2} = \tan \frac{7\pi}{8} = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ , soit  $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ . Dans  $]-\pi, \pi]$  :  $S = \left\{-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$ , quatre points espacés de  $\frac{\pi}{2}$  : un **carré** (ci-contre).
- $T^2 - 2T - 1 < 0 \iff 1-\sqrt{2} < T < 1+\sqrt{2} \iff \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \tan x < \tan \frac{3\pi}{8}$ ;  $\tan$  étant strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :  $S = \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right[$ .
- En multipliant par  $\cos^2 x \neq 0$  :  $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \iff -\cos 2x - \sin 2x = 0$ . Si  $\cos 2x = 0$ , alors  $\sin 2x = \pm 1 \neq 0$  : on peut diviser,  $\tan 2x = -1 \iff 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \iff x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$  (jamais  $\cos x = 0$ ) : ce sont bien les quatre points du carré ✓.



## ■ Corrigé de l'exercice 10

- $2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{12}+2}{2} = \sqrt{3}+1$  et  $2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sqrt{3}-1$ . Donc  $f(x) = 2\sqrt{2}\left(\cos x \cos \frac{\pi}{12} + \sin x \sin \frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ .
- $\max f = 2\sqrt{2}$ , atteint pour  $x - \frac{\pi}{12} = 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$  ;  
 $\min f = -2\sqrt{2}$ , pour  $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ .
- $f(x) = \sqrt{6} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x - \frac{\pi}{12} = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  :  
 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$  ; dans  $]-\pi, \pi]$  :  $-\frac{\pi}{12}$  et  $\frac{\pi}{4}$ .
- On pose  $X = x - \frac{\pi}{12}$ . a)  $\cos X \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff -\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{6}$  (à  $2\pi$  près) :  $S = \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$  (arc bleu).  
 b)  $f(x) < -\sqrt{2} \iff \cos X < -\frac{1}{2} \iff \frac{2\pi}{3} < X < \frac{4\pi}{3}$  (à  $2\pi$  près)  $\iff \frac{3\pi}{4} < x < \frac{17\pi}{12}$  (à  $2\pi$  près). Cet arc contient le point d'abscisse  $\pi$  ; dans  $]-\pi, \pi]$ , avec  $\frac{17\pi}{12} - 2\pi = -\frac{7\pi}{12}$  :  $S = \left]-\pi, -\frac{7\pi}{12}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  (arc rouge).



### ■ Corrigé de l'exercice 11

1.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , donc  $g(x) = \cos x (2 \sin x + \sqrt{2})$ .  $g(x) = 0 \iff \cos x = 0$  ou  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

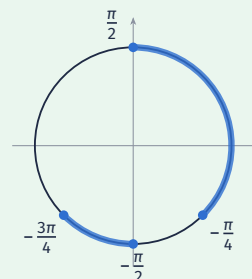
2.  $\cos x > 0$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$  ;  $2 \sin x + \sqrt{2} > 0 \iff \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right[ \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$ .

| $x$                   | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|-----------------------|---|-----------------|------------------|------------------|------------------|--------|
| $\cos x$              | + | 0               | -                | -                | 0                | +      |
| $2 \sin x + \sqrt{2}$ | + | +               | 0                | -                | -                | 0      |
| $g(x)$                | + | 0               | -                | 0                | +                | +      |

$$S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[.$$

3.  $g$  est  $2\pi$ -périodique. On garde  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et on translate de  $-2\pi$  les morceaux de  $] \pi, 2\pi[$  :  $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$  :

$$S = \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (ci-contre).}$$



### ■ Corrigé de l'exercice 12

a) Avec  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  et  $c = \cos x$  :  $2 - 2c^2 - 5c - 4 = 0 \iff 2c^2 + 5c + 2 = 0 \iff c = -\frac{1}{2}$  ou  $c = -2$  (exclu, car  $|c| \leq 1$ ).  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b) Si  $\cos x = 0$ , l'équation devient  $3 \sin^2 x = 3 = 0$  : impossible. On divise par  $\cos^2 x$  :  $3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \iff (\sqrt{3} \tan x - 1)^2 = 0 \iff \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  :  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ . (Ou : l'équation s'écrit  $(\sqrt{3} \sin x - \cos x)^2 = 0$ , soit  $4 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ .)

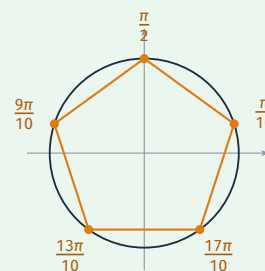
c)  $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$ , d'où  $\cos 2x (2 \cos x - 1) = 0$  :  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  ou  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .

d)  $\cos 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$  :  $3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ , ou  $3x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ . **Piège** :  $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}$ , la seconde famille est contenue dans la première :  $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ . Dans

$[0, 2\pi[$  :  $\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}, \frac{19\pi}{10}$ , sommets d'un **pentagone régulier**.

e) L'équation a un sens si  $\cos x \neq 0$  et  $\cos 2x \neq 0$  (soit  $\tan^2 x \neq 1$ ). Avec  $t = \tan x$  :  $\frac{2t}{1-t^2} = 3t \iff t(2-3+3t^2) = 0 \iff t = 0$  ou  $t^2 = \frac{1}{3}$

(permis) :  $x = k\pi$  ou  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ .



### ■ Corrigé de l'exercice 13

1.  $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{8\pi}{12} + \sin \frac{6\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$  ;  $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

2.  $\cos x + \cos 5x = 2 \cos 3x \cos 2x$ , d'où la factorisation.  $\cos 3x = 0 \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$  ;  $\cos 2x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ . Dans  $[0, \pi]$  :  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ .

3.  $\cos x + \cos 4x = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$  et  $\cos 2x + \cos 3x = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$  ; puis  $\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} =$

$2 \cos x \cos \frac{x}{2}$  : la somme vaut  $4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2}$ . Dans  $[0, 2\pi[$  :  $\cos \frac{x}{2} = 0 \iff x = \pi$  ;  $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  ;  $\cos \frac{5x}{2} = 0 \iff x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} : \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ .  $S = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{5} \right\}$  (7 solutions).

### ■ Corrigé de l'exercice 14

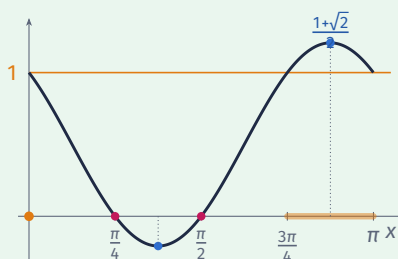
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$  (si  $t^2 \neq 1$ ).
- L'équation impose  $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ .  $\frac{2t}{1+t^2} + t = 2 \iff 2t + t + t^3 = 2 + 2t^2 \iff t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0$ .  $t = 1$  est racine :  $(t-1)(t^2 - t + 2) = 0$ , et  $t^2 - t + 2$  a pour discriminant  $-7 < 0$ . Donc  $t = 1$ ,  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$  :  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .
- Il faut  $1 + \cos x \neq 0$ , donc  $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$  et  $t$  existe.  $1 + \sin x = \frac{(1+t)^2}{1+t^2}$  et  $1 + \cos x = \frac{2}{1+t^2}$  : l'équation devient  $\frac{(1+t)^2}{2} = 2 \iff t = 1$  ou  $t = -3$ .  $t = 1$  :  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .  $t = -3$  :  $\cos x = \frac{1-9}{10} = -\frac{4}{5}$ ,  $\sin x = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$ .  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ou  $x = x_0 + 2k\pi$ , où  $x_0 \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$  vérifie  $\cos x_0 = -\frac{4}{5}$ ,  $\sin x_0 = -\frac{3}{5}$ .
- Si  $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ , la fraction est nulle. Sinon,  $\frac{\sin x}{2 + \cos x} = \frac{2t}{3+t^2}$  et  $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2t}{3+t^2} = \frac{t^2 - 2\sqrt{3}t + 3}{\sqrt{3}(3+t^2)} = \frac{(t-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(3+t^2)} \geq 0$ ,  $\frac{2t}{3+t^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{(t+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(3+t^2)} \geq 0$ .  
Égalités :  $t = \pm\sqrt{3}$ , soit  $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  (contrôle :  $\frac{\sqrt{3}/2}{2-1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ✓).

### ■ Corrigé de l'exercice 15

- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$  et  $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$  :  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x)$ , et  $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  $f$  est  $\pi$ -périodique ;  $\max f = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  pour  $2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$ , soit  $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$  ;  $\min f = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$  pour  $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ .
- Pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $u = 2x + \frac{\pi}{4}$  parcourt  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$  ;  $\cos$  décroît sur  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ , croît sur  $[\pi, 2\pi]$ , décroît sur  $\left[2\pi, \frac{9\pi}{4}\right]$  :  

|     |   |                        |                        |       |
|-----|---|------------------------|------------------------|-------|
| $x$ | 0 | $\frac{3\pi}{8}$       | $\frac{7\pi}{8}$       | $\pi$ |
| $f$ | 1 | $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ | 1     |

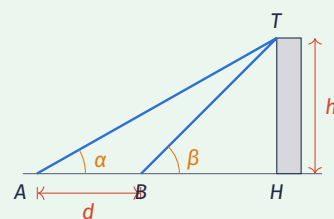
Points utiles :  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
- $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff 2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ . Autrement :  $f(x) = \cos x(\cos x - \sin x) = 0 \iff \cos x = 0$  ou  $\tan x = 1$ .  
1. Dans  $[0, \pi]$  :  $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$ .
- $f(x) \geq 1 \iff \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq k\pi$ . Dans  $[0, \pi]$  :  $S = \{0\} \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  : la courbe n'est au-dessus de la droite  $y = 1$  qu'en 0 et sur  $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  (en orange) ✓.



### ■ Corrigé de l'exercice 16

- Soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $C$  :  $CH = AC \sin A = b \sin A$  (aussi si  $A$  est obtus, car  $\sin(\pi - A) = \sin A$ ), d'où  $S = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}bc \sin A$ . De même  $S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$  ; en divisant  $2S$  par  $abc$  :  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ .
- $a^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .
- $a^2 = 9 + 64 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$  :  $a = 7$ .  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{104}{112} = \frac{13}{14}$ ,  $\sin B = \sqrt{1 - \frac{169}{196}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$  (loi des sinus :  $\frac{3\sin A}{7} \checkmark$ ).  $\cos C = \frac{49 + 9 - 64}{42} = -\frac{1}{7}$  ( $C$  est obtus),  $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ .  $b \cos C + c \cos B = -\frac{3}{7} + \frac{52}{7} = 7 = a \checkmark$ .
- Soit  $H$  le pied de la tour. Dans le triangle  $ABT$ , l'angle en  $A$  vaut  $\alpha$ , l'angle en  $B$  vaut  $\pi - \beta$ , donc  $\hat{ATB} = \beta - \alpha$ . Loi des sinus :  $\frac{BT}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin(\beta - \alpha)}$ . Dans le triangle  $BHT$  rectangle en  $H$  :  

$$h = BT \sin \beta = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$
 Avec  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  :  $h = \frac{20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{3} - 1} = 10(\sqrt{3} + 1) \approx 27,3 \text{ m}$ .



## 27 Corrigés du niveau 3

### ■ Corrigé de l'exercice 17

- Les deux droites forment les angles  $|\theta_2 - \theta_1|$  et  $\pi - |\theta_2 - \theta_1|$ , de tangentes opposées ; l'angle aigu vérifie  $\tan \varphi = |\tan(\theta_2 - \theta_1)| = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ . Si  $m_1 m_2 = -1$  :  $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 (1 + m_1 m_2) = 0$ , les droites sont **perpendiculaires** (c'est aussi  $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0$ ).
- $\tan \varphi = \left| \frac{-3-2}{1-6} \right| = 1$  :  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .
- La verticale  $x = 1$  ne convient pas (tangente  $\frac{1}{3}$ ). Pour une pente  $m$  :  $\left| \frac{m-3}{1+3m} \right| = 1 \iff m - 3 = 1 + 3m$  ou  $m - 3 = -1 - 3m \iff m = -2$  ou  $m = \frac{1}{2}$  :  $y = -2x + 4$  et  $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$  (elles sont perpendiculaires).
- Pentes :  $(OB) : 0$  ;  $(OC) : 1$  ;  $(BC) : -2$ . Les angles sont aigus ( $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 6$ ,  $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = 3$ ,  $\vec{CO} \cdot \vec{CB} = 2$  sont  $> 0$ ) : ce sont les angles aigus des droites,  $\tan O = 1$ ,  $\tan B = 2$ ,  $\tan C = \left| \frac{-2-1}{1-2} \right| = 3$ , et  $1 + 2 + 3 = 6 = 1 \times 2 \times 3 \checkmark$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 18

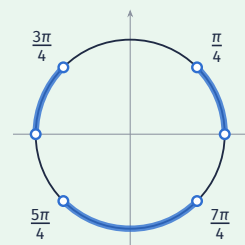
- $4S^2 = b^2 c^2 \sin^2 A = b^2 c^2 - (bc \cos A)^2$  et  $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$ , d'où  $16S^2 = 4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ . Par différence de carrés :  
 $16S^2 = [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] = (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c) = 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - a) \cdot 2p$ ,  
 donc  $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ .
- $p = 21$  :  $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84$ .  $\cos A = \frac{196 + 225 - 169}{420} = \frac{3}{5}$ ,  $\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{168}{210} = \frac{4}{5}$ ,  
 $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{65}{8}$ , hauteur issue de  $B$  :  $\frac{2S}{b} = 12$  (le triangle est formé de deux triangles rectangles 5-12-13 et 9-12-15, et  $5 + 9 = 14$ ).

3.  $1 + \cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$ , d'où  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$ ; de même  $1 - \cos A = \frac{a^2 - (b+c)^2}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$  et  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ . Comme  $\frac{A}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  :  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = bc \cdot \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$  : Héron, à nouveau. Exemple :  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{21 \cdot 8}{210} = \frac{4}{5}$ ,  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{7 \cdot 6}{210} = \frac{1}{5}$ ,  $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 19

1.  $\sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \sin x$ . Sur  $[0, 2\pi[$  :  $\sin x > 0$  sur  $]0, \pi[$ ,  $< 0$  sur  $]\pi, 2\pi[$ ;  $\cos 2x > 0$  sur  $[0, \frac{\pi}{4}[ \cup ]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[ \cup ]\frac{7\pi}{4}, 2\pi[$ ,  $< 0$  sur  $]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[ \cup ]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$ . Le produit est  $> 0$  quand les deux facteurs ont le même signe :

$$S = ]0, \frac{\pi}{4}[ \cup ]\frac{3\pi}{4}, \pi[ \cup ]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[ \quad (\text{ci-contre}).$$



2. Pour  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$  :  $\tan x - 2 \sin x = \frac{\sin x (1 - 2 \cos x)}{\cos x}$ , et  $1 - 2 \cos x > 0 \iff \cos x < \frac{1}{2}$ .

| x              | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------------|--------|------------------|------------------|---|-----------------|-----------------|-------|
| $\sin x$       | -      | -                | -                | 0 | +               | +               | +     |
| $1 - 2 \cos x$ | +      | +                | 0                | - | -               | 0               | +     |
| $\cos x$       | -      |                  | +                | + | +               | +               |       |
| quotient       | +      |                  | -                | 0 | +               | 0               | +     |

$$S = ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{3}, 0[ \cup ]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 20

1.  $MB^2 = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  et  $MA^2 = 2 + 2 \cos \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ , avec  $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :  $MB = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ ,  $MA = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ .
2.  $MA + MB = 2\sqrt{2} \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$  avec  $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , où  $\cos$  varie entre  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et 1 :  $2 \leq MA + MB \leq 2\sqrt{2}$ , maximum pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ( $M(0, 1)$ ), minimum pour  $M = A$  ou  $M = B$ .  
 $MA + 2MB = 2 \cos \frac{\theta}{2} + 4 \sin \frac{\theta}{2} = 2\sqrt{5} \cos(\frac{\theta}{2} - \varphi)$  où  $\varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Le maximum  $2\sqrt{5}$  est atteint pour  $\theta = 2\varphi \in [0, \pi]$  :  $\cos \theta = 2 \cos^2 \varphi - 1 = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin \theta = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{4}{5}$ ,  $M(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  (contrôle :  $MA = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $MB = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ).
3.  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $Q(\cos \theta, 0)$ , et  $S$ , sur la demi-droite d'angle  $\alpha$  à la hauteur  $\sin \theta$ , a pour abscisse  $\frac{\sin \theta \cos \alpha}{\sin \alpha}$ . Donc  $PQ = \sin \theta$  et  $PS = \cos \theta - \frac{\sin \theta \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} > 0$ . Aire :

$$A(\theta) = \frac{\sin \theta \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(2\theta - \alpha) - \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \leq \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2},$$

avec égalité si et seulement si  $\theta = \frac{\alpha}{2}$ .  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  :  $\frac{1}{2}$  (un carré de côté  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ );  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  :  $\frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 21

1. Loi des sinus :  $a = \lambda \sin A$ ,  $b = \lambda \sin B$  ( $\lambda > 0$ ).  $a \cos A = b \cos B \iff \sin 2A = \sin 2B \iff 2A = 2B + 2k\pi$  ou  $2A = \pi - 2B + 2k\pi$ . Or  $2A - 2B \in ]-2\pi, 2\pi[$  et  $2A + 2B \in ]0, 2\pi[$  : donc  $A = B$  (isocèle en C) ou  $A + B = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire  $C = \frac{\pi}{2}$ . La réciproque se lit sur les mêmes équivalences.

2.  $\frac{A+B}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\left| \frac{A-B}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$  :  $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} > 0$ , et le quotient vaut  $\frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cotan \frac{C}{2}$ . L'égalité devient  $2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \iff 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1 \iff \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \boxed{C = \frac{\pi}{2}}$ .
3. Aucun angle n'est droit (tangente non définie), aucun n'a une tangente nulle. Si un angle, disons  $C$ , était obtus :  $z = \tan C \leq -1$ , et  $x = \tan A$ ,  $y = \tan B$  seraient des entiers  $\geq 1$ . L'identité  $x + y + z = xyz$  donne  $z(xy - 1) = x + y$  : si  $xy = 1$ ,  $0 = 2$  ; sinon  $z = \frac{x+y}{xy-1} > 0$  : contradiction. Donc les trois angles sont aigus et  $1 \leq x \leq y \leq z$  (quitte à renommer). Alors  $xyz = x + y + z \leq 3z$ , d'où  $xy \leq 3$  :  $(x, y) = (1, 1)$  donne  $2 + z = z$ , impossible ;  $(1, 3)$  donne  $z = 2 < y$ , exclu ;  $(1, 2)$  donne  $3 + z = 2z$ ,  $z = 3$ . Les tangentes sont  $\boxed{1, 2, 3}$ .
- Existence : si  $B, C \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan B = 2$ ,  $\tan C = 3$ , alors  $\tan(B + C) = \frac{5}{1-6} = -1$  et  $B + C \in ]0, \pi[$ , donc  $B + C = \frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{4} + B + C = \pi$  ; exemple : le triangle  $OBC$  de l'exercice 17.

### ■ Corrigé de l'exercice 22

1.  $\cos(x + a) + \cos x = 2 \cos\left(x + \frac{a}{2}\right) \cos \frac{a}{2}$ . Si  $\cos \frac{a}{2} = 0$ , on obtient  $0 = 1$  : pas de solution. Sinon  $(E_a) \iff \cos\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2 \cos \frac{a}{2}}$ , qui a des solutions si et seulement si  $\left| 2 \cos \frac{a}{2} \right| \geq 1 \iff \left| \cos \frac{a}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq \frac{a}{2} \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \iff \boxed{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq a \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ .
2.  $a = \frac{\pi}{2}$  :  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  :  $\boxed{x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ .  $a = \frac{2\pi}{3}$  :  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$  :  $\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$  (cas limite : une seule famille). 0 est solution  $\iff 1 + \cos a = 1 \iff \boxed{a = \frac{\pi}{2} + k\pi}$  (ces valeurs vérifient bien la condition de 1. :  $\left| \cos \frac{a}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ).
3.  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Quand  $x$  décrit  $[0, \pi]$ ,  $x - \frac{\pi}{3}$  décrit  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  : la fonction croît de 1 (en 0) à 2 (en  $\frac{\pi}{3}$ ), puis décroît jusqu'à -1 (en  $\pi$ ). Elle prend deux fois chaque valeur de  $[1, 2[$  (une fois sur  $[0, \frac{\pi}{3}[$ , une fois sur  $]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ), une seule fois 2 et chaque valeur de  $[-1, 1[$  : exactement deux solutions  $\iff \boxed{m \in [1, 2[}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 23

1. Pour  $\sin u \neq 0$ ,  $\cos u \neq 0$ ,  $\cos 2u \neq 0$  :  $\frac{\tan 2u}{\tan u} = \frac{2}{1 - \tan^2 u} = \frac{2 \cos^2 u}{\cos^2 u - \sin^2 u} = \frac{1 + \cos 2u}{\cos 2u} = 1 + \frac{1}{\cos 2u}$ .
2. Pour  $\sin x \neq 0$  et  $\cos 2^k x \neq 0$  ( $0 \leq k \leq n$ ), c'est-à-dire  $\sin 2^{n+1} x \neq 0$  (car  $\sin 2^{n+1} x = 2^{n+1} \sin x \cos x \cos 2x \cdots \cos 2^n x$ ), le produit télescope :  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\cos 2^k x}\right) = \frac{\tan 2x}{\tan x} \cdot \frac{\tan 4x}{\tan 2x} \cdots \frac{\tan 2^n x}{\tan 2^{n-1} x} = \frac{\tan 2^n x}{\tan x}$ . Avec  $x = \frac{\pi}{12}$ ,  $n = 2$  :  $\frac{\tan \frac{\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = \boxed{3 + 2\sqrt{3}}$  ( $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\tan \frac{5\pi}{12}} = 2 - \sqrt{3}$ , cours) ; directement :  $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(1 + 2) = 3 + 2\sqrt{3}$  ✓.
3.  $1 - \tan^2 u = \frac{2 \tan u}{\tan 2u}$ , d'où par télescopage  $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2 \tan 2^k x}{\tan 2^{k+1} x} = \frac{2^n \tan x}{\tan 2^n x}$ . Avec  $x = \frac{\pi}{12}$ ,  $n = 2$  :  $\frac{4(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{8\sqrt{3} - 12}{3}}$  ; directement :  $\left(1 - (7 - 4\sqrt{3})\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{(4\sqrt{3} - 6)2}{3}$  ✓.

28

## Corrigés du niveau 4

## ■ Corrigé de l'exercice 24

1. Avec  $t = \tan a$  et  $\tan 2a = \frac{2t}{1-t^2}$  :  $\tan 3a = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a \tan a} = \frac{2t + t(1-t^2)}{1-t^2-2t^2} = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ .
2.  $\tan 3a = \sqrt{3} \iff 3a = \frac{\pi}{3} + k\pi \iff a = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$ . Pour ces réels,  $\cos a \neq 0$  et  $1 - 3 \tan^2 a \neq 0$  (sinon  $a \equiv \pm \frac{\pi}{6} [\pi]$ ), donc  $t = \tan a$  vérifie  $3t - t^3 = \sqrt{3}(1 - 3t^2)$ , soit  $P(t) = 0$ . Les valeurs  $\frac{\pi}{9}$ ,  $\frac{4\pi}{9}$ ,  $\frac{7\pi}{9} - \pi = -\frac{2\pi}{9}$  sont distinctes dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , où  $\tan$  est injective :  $t_1 = \tan \frac{\pi}{9}$ ,  $t_2 = \tan \frac{4\pi}{9}$ ,  $t_3 = \tan \frac{7\pi}{9} = -\tan \frac{2\pi}{9}$  sont trois racines distinctes de  $P$ , de degré 3 : ce sont toutes ses racines et  $P(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$ .
3. En développant et en identifiant :  $t_1 + t_2 + t_3 = 3\sqrt{3}$ ,  $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = -3$ ,  $t_1 t_2 t_3 = -\sqrt{3}$ . Donc  $\tan \frac{\pi}{9} - \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{4\pi}{9} = 3\sqrt{3}$  et  $\tan^2 \frac{\pi}{9} + \tan^2 \frac{2\pi}{9} + \tan^2 \frac{4\pi}{9} = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) = 27 + 6 = 33$  (le produit redonne  $\tan \frac{\pi}{9} \tan \frac{2\pi}{9} \tan \frac{4\pi}{9} = \sqrt{3}$ ).
4.  $\tan 3a = 1 \iff a = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$  :  $\tan \frac{\pi}{12}$ ,  $\tan \frac{5\pi}{12}$ ,  $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$  sont les racines de  $3t - t^3 = 1 - 3t^2$ , soit  $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = (t + 1)(t^2 - 4t + 1)$ . Les deux autres racines sont  $2 \pm \sqrt{3}$ , et  $\tan \frac{\pi}{12} < \tan \frac{5\pi}{12}$  :  $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ ,  $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ , comme dans le cours ✓.

## ■ Corrigé de l'exercice 25

1.  $2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin \frac{(2k+1)x}{2} - \sin \frac{(2k-1)x}{2}$  ; en sommant de  $k = 1$  à  $n$ , tout se télescope :  $2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}$ , d'où le résultat en divisant par  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ .
2.  $x = 0$  n'est pas solution (le membre de gauche vaut 11). Pour  $x \in ]0, 2\pi[$ ,  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$  et l'équation équivaut à  $\sin \frac{11x}{2} = 0 \iff x = \frac{2k\pi}{11}$  :  $S = \left\{ \frac{2k\pi}{11}, 1 \leq k \leq 10 \right\}$ , les sommets du hendécagone régulier sauf le point d'abscisse 0.
3. Avec  $x = \frac{2\pi}{2n+1} \notin 2\pi\mathbb{Z}$  :  $\sin \frac{(2n+1)x}{2} = \sin \pi = 0$ , donc  $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = 0$  :  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$ .  
Pour  $n = 5$ , avec  $\cos \frac{6\pi}{11} = -\cos \frac{5\pi}{11}$ ,  $\cos \frac{8\pi}{11} = -\cos \frac{3\pi}{11}$ ,  $\cos \frac{10\pi}{11} = -\cos \frac{\pi}{11}$  :  $\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} - \cos \frac{5\pi}{11} - \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{\pi}{11} = -\frac{1}{2}$ , d'où l'égalité demandée. ( $n = 3$  : voir l'exercice 30.)
4.  $\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right)$ , donc la somme vaut  $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{2n-1}{4}$  (pour  $n = 5$  :  $\frac{9}{4}$ ).

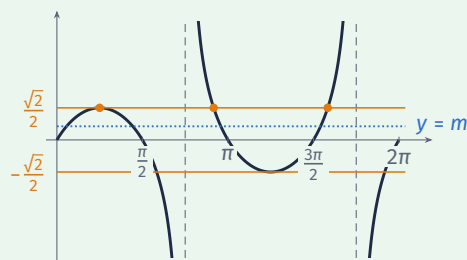
## ■ Corrigé de l'exercice 26

1.  $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ , donc  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ . D'une part  $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  ; d'autre part  $\cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2}$ . En ajoutant :  
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$
Les demi-angles sont dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , leurs sinus sont  $> 0$  : la somme est  $> 1$ .
2.  $s > 0$  et  $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1$  :  $\cos A + \cos B \leq 2s$ , et  $\cos C = 1 - 2s^2$ , d'où  $\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 2s - 2s^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2s-1)^2 \leq \frac{3}{2}$ . Égalité  $\iff \cos \frac{A-B}{2} = 1$  et  $s = \frac{1}{2} \iff A = B$  et  $C = \frac{\pi}{3} \iff$  triangle équilatéral.
3. Par 1. et 2. :  $1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$ , soit  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ . Et  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$  :  $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sum \cos A \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  (égalités pour le triangle équilatéral).

## ■ Corrigé de l'exercice 27

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$  et  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$ .  
 Quand  $x$  décrit  $[0, 2\pi[$ ,  $u = x - \frac{\pi}{4}$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  :  $\cos u = \frac{t_0}{\sqrt{2}}$  a 2 solutions si  $|t_0| < \sqrt{2}$ , et 1 seule si  $t_0 = \pm\sqrt{2}$  ( $x = \frac{\pi}{4}$  ou  $x = \frac{5\pi}{4}$ ).
- $(E_m) \iff t^2 - 1 = mt \iff t^2 - mt - 1 = 0$  ; le produit des racines vaut  $-1 < 0$  :  $t_1 < 0 < t_2$ .  
 Soit  $\varphi(t) = t^2 - mt - 1$ , négatif entre les racines et positif à l'extérieur. Comme  $\sqrt{2} > 0 > t_1$  :  
 $t_2 < \sqrt{2} \iff \varphi(\sqrt{2}) > 0 \iff 1 - m\sqrt{2} > 0 \iff m < \frac{\sqrt{2}}{2}$  ; de même  $t_1 > -\sqrt{2} \iff \varphi(-\sqrt{2}) = 1 + m\sqrt{2} > 0 \iff m > -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (et  $t_2 = \sqrt{2} \iff m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ).
- On compte 2 solutions pour chaque racine de  $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ , 1 pour une racine égale à  $\pm\sqrt{2}$  :
  - $|m| < \frac{\sqrt{2}}{2}$  :  $t_1, t_2$  conviennent : **4 solutions** ;
  - $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$  :  $t_2 = \sqrt{2}$  (1 solution) et  $t_1 = -\frac{1}{t_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (2) : **3** ; de même pour  $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;
  - $|m| > \frac{\sqrt{2}}{2}$  : une seule racine convient (l'autre,  $-\frac{1}{t}$ , est dans  $]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ ) : **2**.

$m = 0$  :  $\sin 2x = 0$  :  $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ .  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$  :  $t = \sqrt{2}$   
 donne  $x = \frac{\pi}{4}$  ;  $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  donne  $\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}$ ,  $x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{2\pi}{3}$  :  $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$ .  
 Graphiquement ( $t = 0$  n'est jamais solution) :  
 $(E_m) \iff g(x) = m$ ,  $g(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}$  ; la droite  $y = m$  coupe la courbe 4, 3 ou 2 fois.

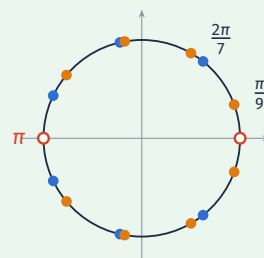


## ■ Corrigé de l'exercice 28

- $(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1 + 2|\sin x \cos x| = 1 + |\sin 2x| \leq 2$ , et  $\sqrt{2} \approx 1,414 < \frac{\pi}{2} \approx 1,571$ .
- $\cos$  est paire :  $\cos(\sin x) = \cos |\sin x|$ . Par 1.,  $0 \leq |\sin x| < \frac{\pi}{2} - |\cos x| \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  :  $\cos |\sin x| > \cos \left( \frac{\pi}{2} - |\cos x| \right) = \sin |\cos x|$ . Enfin  $\cos x \leq |\cos x|$ , deux réels de  $[-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  où  $\sin$  croît :  $\sin |\cos x| \geq \sin(\cos x)$ . Donc  **$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$** .  
 $x \mapsto \cos(\sin x)$  est **paire** ( $\cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$ ),  **$\pi$ -périodique** ( $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ), et,  $\sin x$  décrivant  $[-1, 1]$  et  $\cos$  décroissant sur  $[0, 1]$ , elle prend toutes les valeurs de  **$[\cos 1, 1]$** .
- $\cos(\pi \sin x) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \pi \sin x \right)$ , donc l'équation équivaut à  $\pi \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \sin x + 2k\pi$  ou  $\pi \cos x = \frac{\pi}{2} + \pi \sin x + 2k\pi$ , soit  $\cos x + \sin x = \frac{1}{2} + 2k$  ou  $\cos x - \sin x = \frac{1}{2} + 2k$ . Comme  $|\cos x \pm \sin x| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ , seul  $k = 0$  convient.  $\sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \iff \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} = \cos \alpha \iff x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$  ;  
 $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ . Avec  $\alpha \approx 1,21 \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ , dans  $[0, 2\pi[$  :  
 **$S = \left\{ \alpha - \frac{\pi}{4}, \alpha + \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} - \alpha, \frac{9\pi}{4} - \alpha \right\}$**  ( $\approx 0,42 ; 1,99 ; 4,29 ; 5,86$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 29

- Si  $\sin x = 0$  :  $\cos x = \pm 1$  et  $\cos 2x = \cos 4x = 1$ , le produit vaut  $\pm 1 \neq \frac{1}{8}$ . Pour  $\sin x \neq 0$  :  $8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = 4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin 4x \cos 4x = \sin 8x$  ; en multipliant par  $8 \sin x \neq 0$ , l'équation équivaut à  $\sin 8x = \sin x$ .
- $8x = x + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{2k\pi}{7}$ , ou  $8x = \pi - x + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{(2k+1)\pi}{9}$ . Dans  $[0, 2\pi[$ , on écarte 0 et  $\pi$  ( $\sin x = 0$ ) :  $\frac{2k\pi}{7}$  pour  $1 \leq k \leq 6$  (6 valeurs, en bleu) et  $\frac{(2k+1)\pi}{9}$  pour  $2k+1 \in \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17\}$  (8 valeurs, en orange). Pas de valeur commune ( $18k = 7(2j+1)$  est impossible : pair contre impair) : **14 solutions**.
- Par récurrence,  $2^n \sin x \cos x \cos 2x \dots \cos 2^{n-1}x = \sin 2^n x$ , et  $\sin x = 0$  donne un produit  $\pm 1 \neq \frac{1}{2^n}$  : l'équation équivaut à  $\sin 2^n x = \sin x$ ,  $\sin x \neq 0$ , soit  $x = \frac{2k\pi}{2^n-1}$  ou  $x = \frac{(2k+1)\pi}{2^n+1}$ . Dans  $[0, 2\pi[$  :  $k = 1, \dots, 2^n - 2$  pour la première famille (jamais  $x = \pi$  :  $2^n - 1$  est impair) ; les  $2^n + 1$  impairs  $2k+1 \leq 2^{n+1} - 1$ , sauf  $2^n + 1$  ( $x = \pi$ ), pour la seconde ; pas de valeur commune (parité). Total :  **$2^{n+1} - 2$**  ( $n = 3$  : 14 ✓).



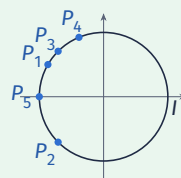
### ■ Corrigé de l'exercice 30

- Comme en 29 :  $8 \sin a \cos a \cos 2a \cos 4a = \sin 8a = \sin(\pi + a) = -\sin a$ , et  $\sin a \neq 0$ , d'où  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ . Contrôle :  $x = \frac{2\pi}{7}$  est solution de l'exercice 29, donc  $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$ , avec  $\cos \frac{8\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}$  ✓.
- $2 \sin a \cos 2a = \sin 3a - \sin a$ ,  $2 \sin a \cos 4a = \sin 5a - \sin 3a$ ,  $2 \sin a \cos 6a = \sin 7a - \sin 5a$ . En ajoutant (télescopage) :  
 $2 \sin a (\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a) = \sin 7a - \sin a = -\sin a$ , d'où  $\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a = -\frac{1}{2}$ .  
 Avec  $\cos 6a = -\cos \frac{\pi}{7}$  et  $\cos 4a = -\cos \frac{3\pi}{7}$  :  $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ .
- $2 \cos 2a \cos 4a = \cos 6a + \cos 2a$  ;  $2 \cos 4a \cos 6a = \cos 10a + \cos 2a = \cos 4a + \cos 2a$  ;  $2 \cos 6a \cos 2a = \cos 8a + \cos 4a = \cos 6a + \cos 4a$  (car  $10a = 2\pi - 4a$  et  $8a = 2\pi - 6a$ ). La somme des trois vaut  $2(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a) = -1$ , d'où  $\sigma_2 = -\frac{1}{2}$ . Et  $\cos 6a = -\cos a$  donne  $\cos 2a \cos 4a \cos 6a = -\cos a \cos 2a \cos 4a = \frac{1}{8}$ . Avec  $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$  (question 2) :  
 $8(x - \cos 2a)(x - \cos 4a)(x - \cos 6a) = 8\left(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \frac{1}{8}\right) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$  :  
 ses racines sont  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  et  $\cos \frac{6\pi}{7}$ .
- Notons  $Q(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 8(x - \cos 2a)(x - \cos 4a)(x - \cos 6a)$ . Alors  
 $\sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{(1 - \cos 2a)(1 - \cos 4a)(1 - \cos 6a)}{8} = \frac{Q(1)}{64} = \frac{8 + 4 - 4 - 1}{64} = \frac{7}{64}$ .  
 Les trois sinus sont positifs et  $\sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7}$  :  $\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$ . En divisant par le produit des cosinus (question 1) :  $\tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7} \tan \frac{4\pi}{7} = -\sqrt{7}$ .

## 29 Corrigés : angles associés

### ■ Corrigé de l'exercice 31

- On multiplie par  $\frac{\pi}{180}$  :  $75^\circ = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$ ,  $252^\circ = \boxed{\frac{7\pi}{5}}$ ,  $-330^\circ = \boxed{-\frac{11\pi}{6}}$ . Et  $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$ ,  $\frac{\pi}{18} = 10^\circ$  :  
 $\frac{13\pi}{10} = \boxed{234^\circ}$ ,  $\frac{11\pi}{18} = \boxed{110^\circ}$ .
- On retire un multiple de  $2\pi$  pour tomber dans  $]-\pi, \pi]$  :  $\frac{53\pi}{6} = 8\pi + \frac{5\pi}{6}$   
donne  $\boxed{\frac{5\pi}{6}}$  (point  $P_1$ ) ;  $-\frac{35\pi}{4} = -8\pi - \frac{3\pi}{4}$  donne  $\boxed{-\frac{3\pi}{4}}$  ( $P_2$ ) ;  $\frac{2027\pi}{4} = 506\pi + \frac{3\pi}{4}$  avec  $506\pi = 253 \times 2\pi$  donne  $\boxed{\frac{3\pi}{4}}$  ( $P_3$ ) ;  $-\frac{59\pi}{8} = -8\pi + \frac{5\pi}{8}$   
donne  $\boxed{\frac{5\pi}{8}}$  ( $P_4$ ) ;  $-45\pi = -46\pi + \pi$  donne  $\boxed{\pi}$  ( $P_5$ ) ; et non  $-\pi$ , exclu de l'intervalle).
- Deux réels repèrent le même point si et seulement si leur différence est un multiple de  $2\pi$ .  
 $\frac{17\pi}{5} - \left(-\frac{23\pi}{5}\right) = 8\pi = 4 \times 2\pi$  : **oui**.  $\frac{7\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = 3\pi$ , qui n'est pas un multiple de  $2\pi$  : **non** (mesures principales  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ ).
- $100 - 2k\pi \in ]-\pi, \pi] \iff \frac{100}{2\pi} - \frac{1}{2} \leq k < \frac{100}{2\pi} + \frac{1}{2}$ . Or  $6,283 < 2\pi < 6,2832$  donne  $15,91 < \frac{100}{2\pi} < 15,92$ , d'où  $\boxed{k = 16}$ . Puis  $100,528 < 32\pi < 100,5312$ , donc  $\alpha = 100 - 32\pi \in ]-0,5312; -0,528[$  : comme  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ , le point est dans le **4<sup>e</sup> quadrant**, et  $\boxed{\cos 100 > 0}$ ,  $\boxed{\sin 100 < 0}$ .
- a) L'aiguille des minutes tourne de  $2\pi$  en 60 min, soit  $\frac{\pi}{30}$  par minute ; celle des heures de  $2\pi$  en 12 h, soit  $\frac{\pi}{360}$  par minute. À 3 h 40 (220 min après midi) : minutes  $\frac{40\pi}{30} = \frac{4\pi}{3}$ , heures  $\frac{220\pi}{360} = \frac{11\pi}{18}$  ; écart  $\frac{24\pi - 11\pi}{18} = \boxed{\frac{13\pi}{18}}$  ( $130^\circ$ ). À 10 h 10 (610 min) : heures  $\frac{61\pi}{36}$ , minutes  $\frac{\pi}{3} = \frac{12\pi}{36}$  ; écart  $\frac{49\pi}{36} > \pi$ , donc l'angle géométrique est  $2\pi - \frac{49\pi}{36} = \boxed{\frac{23\pi}{36}}$  ( $115^\circ$ ).
- b) Après  $t$  minutes :  $\frac{\pi t}{30}$  et  $\frac{\pi t}{360}$ , d'écart  $\delta(t) = \frac{11\pi t}{360}$ . Perpendiculaires  $\iff \delta(t) = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff t = \frac{180(2k+1)}{11}$ . Dans  $[0, 60]$  :  $t = \frac{180}{11} \approx 16,36$  et  $t = \frac{540}{11} \approx 49,09$ , soit  $\boxed{12 \text{ h } 16 \text{ min } 22 \text{ s}}$  et  $\boxed{12 \text{ h } 49 \text{ min } 5 \text{ s}}$  environ.
- c) Superposées  $\iff \delta(t) = 2k\pi \iff t = \frac{720k}{11}$ , et  $0 \leq t < 720 \iff 0 \leq k \leq 10$  :  $\boxed{11 \text{ fois}}$  (et non 12 : environ toutes les 65,45 min).



### ■ Corrigé de l'exercice 32

- On retire des multiples de  $2\pi$ , puis on applique les formules des angles associés.  
 $\cos(3\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$  ;  $\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$  ;  $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos x$ . D'où  $A(x) = -\cos x - \cos x - 3\cos x = \boxed{-5\cos x}$ .  
 $\sin(7\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$  et  $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$  ;  $\cos(x + 9\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x$  et  $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ . D'où  $B(x) = -\sin^2 x - \cos^2 x = \boxed{-1}$ .  
 $C(x)$  est défini si et seulement si  $x$  n'est pas un multiple de  $\frac{\pi}{2}$ . Alors, la tangente et la cotangente étant  $\pi$ -périodiques :  $\tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cotan x$ ,  $\tan(x - 7\pi) = \tan x$ ,

$$\cotan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, \cotan(5\pi - x) = \cotan(\pi - x) = -\cotan x. \text{ D'où } C(x) = -1 + 1 = \boxed{0}.$$

$$2. \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{17\pi}{3} = -6\pi + \frac{\pi}{3}, \frac{29\pi}{4} = 7\pi + \frac{\pi}{4} : U = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \boxed{2}.$$

Pour  $1 \leq k \leq 8$ ,  $\frac{(9-k)\pi}{18} = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{18}$ , donc  $\tan \frac{k\pi}{18} \tan \frac{(9-k)\pi}{18} = \tan \frac{k\pi}{18} \cotan \frac{k\pi}{18} = 1$ . En groupant les facteurs par paires (1 et 8, 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5) :  $P = \boxed{1}$ .

$$3. \cos^2 a = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \text{ et } \cos a < 0 \text{ (2<sup>e</sup> quadrant)} : \cos a = \boxed{-\frac{\sqrt{7}}{4}}, \tan a = \frac{3/4}{-\sqrt{7}/4} = \boxed{-\frac{3\sqrt{7}}{7}}. \text{ Puis}$$

$$\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos a = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}, \quad \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a = \boxed{-\frac{3}{4}},$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cotan a = \boxed{-\frac{\sqrt{7}}{3}}, \quad \sin(-a - 7\pi) = -\sin(a + \pi) = \sin a = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 33

1. Deux réels de la famille donnent le même point si et seulement si leur différence est un multiple de  $2\pi$ .

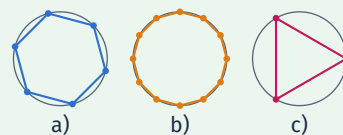
$$a) \frac{(k-k')\pi}{3} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff k-k' \in 6\mathbb{Z} : \boxed{6 \text{ points}} \quad (k = 0, \dots, 5):$$

$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$ , sommets d'un hexagone régulier.

b) Pour  $k = 0, 1, \dots, 11$ , le reste de  $7k$  modulo 12 prend les valeurs 0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5 : toutes les valeurs de 0 à 11, une fois chacune ; et  $k \mapsto k + 12$  ajoute  $14\pi$ . On obtient les  $\boxed{12 \text{ points}}$  d'abscisses  $\frac{j\pi}{6}$  (dodécagone régulier).

$$c) 0, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}, \text{ puis } 4\pi \text{ (retour au départ)} :$$

$$\boxed{3 \text{ points}}, \text{ d'abscisses } 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ (triangle équilatéral)}.$$



$$2. a) \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} : \text{ les deux familles donnent } \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{6} + \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ d'où } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$b) \frac{6\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + \pi : \boxed{x = \frac{\pi}{5} + k\pi}. \quad c) \frac{k\pi}{2} = \frac{2k\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{4} : \boxed{x = \frac{k\pi}{4}}.$$

$$d) \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{7\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} : \text{ les trois familles sont } -\frac{\pi}{12} + \frac{3k\pi}{3}, -\frac{\pi}{12} + \frac{(3k+1)\pi}{3}, -\frac{\pi}{12} + \frac{(3k+2)\pi}{3}, \text{ d'où } \boxed{x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}}.$$

$$3. \text{ On multiplie par } \frac{6}{\pi} : \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = \frac{m\pi}{3} \iff 1 + 3k = 2m. \text{ Il faut } 1 + 3k \text{ pair, donc } k \text{ impair, } k = 2j + 1, \text{ et alors } m = 3j + 2 \text{ convient. Les réels communs sont } \frac{\pi}{6} + \frac{(2j+1)\pi}{2} : \boxed{x = \frac{2\pi}{3} + j\pi, j \in \mathbb{Z}}.$$

En multipliant par  $\frac{12}{\pi} : \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{3} \iff 2 + 6k = 3 + 4m \iff 6k - 4m = 1$ , impossible (pair = impair) : **aucun réel commun**.

$$4. -\pi \leq \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{3} \leq 4\pi \iff -\frac{6}{5} \leq \frac{2k}{3} \leq \frac{19}{5} \iff -\frac{9}{5} \leq k \leq \frac{57}{10} \iff k \in \{-1, 0, \dots, 5\} : \boxed{7 \text{ réels}},$$

$$-\frac{7\pi}{15}, \quad \frac{\pi}{5}, \quad \frac{13\pi}{15}, \quad \frac{23\pi}{15}, \quad \frac{11\pi}{5}, \quad \frac{43\pi}{15}, \quad \frac{53\pi}{15}.$$

## ■ Corrigé de l'exercice 34

1. Pour  $n = 0$ , c'est clair. Si  $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$ , alors  $\cos(x + (n+1)\pi) = \cos((x + n\pi) + \pi) = -\cos(x + n\pi) = (-1)^{n+1} \cos x$ ; de même pour le sinus. Pour  $n = -p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ), on applique le résultat à  $y = x - p\pi$ :  $\cos x = \cos(y + p\pi) = (-1)^p \cos y$ , d'où  $\cos(x - p\pi) = (-1)^p \cos x = (-1)^{-p} \cos x$ ; de même pour le sinus. Enfin  $\tan(x + n\pi) = \frac{(-1)^n \sin x}{(-1)^n \cos x} = \tan x$ .
2. On écrit  $n = 4q + r$  avec  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ :  $x + \frac{n\pi}{2} = x + \frac{r\pi}{2} + 2q\pi$ , d'où le tableau (angles associés  $\frac{\pi}{2} + x, \pi + x, \frac{3\pi}{2} + x$ ):

| reste $r$                             | 0        | 1         | 2         | 3         |
|---------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ | $\cos x$ | $-\sin x$ | $-\cos x$ | $\sin x$  |
| $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ | $\sin x$ | $\cos x$  | $-\sin x$ | $-\cos x$ |

3.  $S_1 = \cos x \sum_{k=0}^{2026} (-1)^k$ : les 2026 premiers termes s'annulent deux à deux et il reste  $(-1)^{2026} = 1$ :  
 $S_1 = \cos x$ .

$\cos \frac{k\pi}{2}$  vaut 0, -1, 0, 1 pour  $k \equiv 1, 2, 3, 0$  modulo 4: la somme de quatre termes consécutifs est nulle. Comme  $2024 = 4 \times 506$ , il reste  $S_2 = \cos \frac{2025\pi}{2} + \cos \frac{2026\pi}{2} = 0 + (-1) = -1$ .

$\sin \frac{k\pi}{2}$  est nul pour  $k$  pair, vaut 1 si  $k = 4j + 1$  et -1 si  $k = 4j + 3$ . Donc  $S_3 = \sum_{j=0}^{24} [(4j+1) - (4j+3)] = 25 \times (-2) = -50$ .

4.  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = (-1)^k \cos \frac{\pi}{3} = \frac{(-1)^k}{2}$ , d'où  $P_n = \frac{(-1)^{1+2+\dots+n}}{2^n} = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$ . Ainsi  $P_n > 0$  si et seulement si  $\frac{n(n+1)}{2}$  est pair. Si  $n = 4q$ :  $\frac{n(n+1)}{2} = 2q(4q+1)$  pair;  $n = 4q+1$ :  $(4q+1)(2q+1)$  impair;  $n = 4q+2$ :  $(2q+1)(4q+3)$  impair;  $n = 4q+3$ :  $(4q+3)(2q+2)$  pair.  $P_n > 0 \iff n \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod{4}$  ( $P_3 = \frac{1}{8}$ ,  $P_4 = \frac{1}{16}$ ,  $P_5 = -\frac{1}{32}$ ).

## ■ Corrigé de l'exercice 35

1.  $A_1(c, s)$ ;  $A_2(s, c)$ : symétrie d'axe  $y = x$ ;  $A_3(-s, c)$ : rotation de centre  $O$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ;  $A_4(-c, s)$ : symétrie d'axe  $(Oy)$ ;  $A_5(-c, -s)$ : symétrie de centre  $O$ ;  $A_6(-s, -c)$ : symétrie d'axe  $y = -x$ ;  $A_7(s, -c)$ : rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ ;  $A_8(c, -s)$ : symétrie d'axe  $(Ox)$ .
2. Comme  $0 < a < \frac{\pi}{4}$ :  $a < \frac{\pi}{2} - a < \frac{\pi}{2} + a < \pi - a < \pi + a < \frac{3\pi}{2} - a < \frac{3\pi}{2} + a < 2\pi - a < 2\pi + a$ : les sommets se suivent dans cet ordre, et les écarts successifs valent  $\frac{\pi}{2} - 2a, 2a, \frac{\pi}{2} - 2a, 2a, \dots$ , le dernier étant  $(2\pi + a) - (2\pi - a) = 2a$ . Chaque arc est inférieur à  $\pi$ : l'octogone est la réunion des huit triangles  $OA_i A_{i+1}$ , d'aires  $\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = \frac{1}{2} \cos 2a$  (quatre fois) et  $\frac{1}{2} \sin 2a$  (quatre fois):  $A(a) = 2(\cos 2a + \sin 2a)$ .
3.  $\cos 2a + \sin 2a = \sqrt{2} \left( \cos 2a \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2a \sin \frac{\pi}{4} \right)$ , donc  $A(a) = 2\sqrt{2} \cos\left(2a - \frac{\pi}{4}\right)$ . Comme  $2a - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ , l'aire est maximale si et seulement si  $2a - \frac{\pi}{4} = 0$ , soit  $a = \frac{\pi}{8}$ , et vaut  $2\sqrt{2}$ . Alors  $\frac{\pi}{2} - 2a = 2a = \frac{\pi}{4}$ : les huit arcs sont égaux, donc les huit côtés (cordes de même arc) et les huit angles aussi: l'octogone est régulier.
4. Si  $\widehat{MON} = \theta$ , la hauteur issue de  $O$  du triangle isocèle  $OMN$  est aussi médiane et bissectrice:  $MN = 2 \times OM \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ . Les quatre côtés qui interceptent un arc  $\frac{\pi}{2} - 2a$  mesurent  $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ ,

les quatre autres  $2 \sin a : p(a) = 8 \left( \sin a + \sin \left( \frac{\pi}{4} - a \right) \right)$ . Avec  $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} :$

$p(a) = 16 \sin \frac{\pi}{8} \cos \left( a - \frac{\pi}{8} \right)$ . Comme  $a - \frac{\pi}{8} \in \left] -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right[$ ,  $p$  est maximal pour  $a = \frac{\pi}{8} : p_{\max} = 16 \sin \frac{\pi}{8} =$

$8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 6,12$  ( $< 2\pi$ , périmètre du cercle). **Conclusion :** parmi les octogones  $O_a$ , l'octogone régulier a à la fois la plus grande aire et le plus grand périmètre.

5.  $A(a) = 1 + \sqrt{3} \iff \cos \left( 2a - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos \frac{\pi}{12}$ . Avec  $2a - \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ : 2a - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{12}$ , soit

$a = \frac{\pi}{6}$  ou  $a = \frac{\pi}{12}$  (contrôle :  $2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + 1$  ✓).

Les sommets de  $O_a$  sont les points  $\pm a + \frac{k\pi}{2}$  ; en les tournant de  $\frac{\pi}{4}$ , on obtient les points  $\pm \left( \frac{\pi}{4} - a \right) + \frac{k'\pi}{2}$ , sommets de  $O_{\frac{\pi}{4}-a}$ . Les octogones  $O_{\pi/12}$  et  $O_{\pi/6}$  ( $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ ) se déduisent l'un de l'autre par la rotation de centre  $O$  d'angle  $\frac{\pi}{4}$  : ils ont la même aire.

### ■ Corrigé de l'exercice 36

1. a) Avec  $p = 2\theta - x$  et  $q = x : \frac{p+q}{2} = \theta$  et  $\frac{p-q}{2} = \theta - x$ . Les formules somme  $\rightarrow$  produit donnent

$$\cos x + \cos(2\theta - x) = 2 \cos \theta \cos(\theta - x), \quad \sin x + \sin(2\theta - x) = 2 \sin \theta \cos(\theta - x),$$

$$\cos(2\theta - x) - \cos x = -2 \sin \theta \sin(\theta - x), \quad \sin(2\theta - x) - \sin x = 2 \cos \theta \sin(\theta - x).$$

Les deux premières donnent  $\vec{OI} = \cos(\theta - x)(\cos \theta, \sin \theta) = \cos(\theta - x) \vec{OM}(\theta)$ , les deux dernières  $M(\vec{x})N = 2 \sin(\theta - x) \vec{v}$ .

b) Le point  $I$  est sur  $D_\theta$ , et  $\vec{v} \cdot \vec{OM}(\theta) = -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta = 0$ . Si  $\sin(\theta - x) \neq 0$ , la droite  $(M(x)N)$  est perpendiculaire à  $D_\theta$  en le milieu  $I$  :  $D_\theta$  est la médiatrice de  $[M(x)N]$ . Si  $\sin(\theta - x) = 0$ , alors  $N = M(x)$ , point de  $D_\theta$ . Dans les deux cas,  $s_\theta(M(x)) = M(2\theta - x)$ .

2.  $\theta = 0$  :  $s_0$  est la symétrie d'axe  $(Ox)$ ,  $(u, v) \mapsto (u, -v)$ , donc  $M(-x) = (\cos x, -\sin x) : \cos(-x) = \cos x$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$ .  $\theta = \frac{\pi}{2}$  : axe  $(Oy)$ ,  $M(\pi - x) = (-\cos x, \sin x)$ .  $\theta = \frac{\pi}{4}$  : axe  $y = x$ ,  $(u, v) \mapsto (v, u)$ ,  $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (\sin x, \cos x)$ .  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  : axe  $y = -x$ ,  $(u, v) \mapsto (-v, -u)$ , donc  $M\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = (-\sin x, -\cos x) :$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

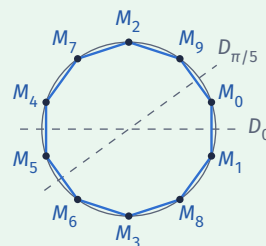
3.  $s_{\theta_1}(M(x)) = M(2\theta_1 - x)$ , puis  $s_{\theta_2}(M(2\theta_1 - x)) = M(2\theta_2 - 2\theta_1 + x)$  : la composée est la rotation de centre  $O$  d'angle  $2(\theta_2 - \theta_1)$ . Pour  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) : (u, v) \mapsto (u, -v) \mapsto (-u, -v)$ , symétrie centrale, d'où  $M(x + \pi) = (-\cos x, -\sin x)$ . Pour  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) : (u, v) \mapsto (u, -v) \mapsto (-v, u)$ , quart de tour, d'où  $M\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (-\sin x, \cos x)$ .

4. a) Récurrence sur  $k$  : vrai pour  $M_0$ . Si  $M_{2k} = M\left(x_0 + \frac{2k\pi}{5}\right)$ , alors  $(2k \text{ pair}) M_{2k+1} = s_0(M_{2k}) = M\left(-x_0 - \frac{2k\pi}{5}\right)$ , puis  $(2k + 1 \text{ impair}) M_{2k+2} = s_{\pi/5}(M_{2k+1}) = M\left(\frac{2\pi}{5} + x_0 + \frac{2k\pi}{5}\right) = M\left(x_0 + \frac{2(k+1)\pi}{5}\right)$ .

b) Les points  $M\left(x_0 + \frac{2k\pi}{5}\right)$  sont 5 points distincts (ils ne dépendent que du reste de  $k$  modulo 5) ; de même pour les points  $M\left(-x_0 - \frac{2m\pi}{5}\right)$ . Un point de la première famille est dans la seconde si et seulement si  $2x_0 + \frac{2(k+m)\pi}{5} \in 2\pi\mathbb{Z}$ , soit  $x_0 + \frac{(k+m)\pi}{5} \in \pi\mathbb{Z}$ . Si  $x_0 \notin \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$ , c'est impossible :

10 points. Si  $x_0 = \frac{j\pi}{5}$ , pour chaque  $m$  on choisit  $k$  tel que  $j + k + m$  soit multiple de 5 : les deux familles coïncident, 5 points.

c)  $x_0 = \frac{\pi}{10} \notin \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$  : 10 points, d'abscisses  $\pm \frac{(1+4k)\pi}{10}$ , soit  $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}$  et  $\frac{19\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}$  modulo  $2\pi$  : ce sont les 10 multiples impairs de  $\frac{\pi}{10}$ , régulièrement espacés de  $\frac{\pi}{5}$  : **décagone régulier** (figure :  $M_0, \dots, M_9$  et les axes  $D_0, D_{\pi/5}$ ).



30

## Corrigés : addition et duplication

### ■ Corrigé de l'exercice 37

$$1. \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \text{ et } \sin x < 0 \text{ sur } ]\pi, \frac{3\pi}{2}[ : \sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \tan x = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \boxed{\sqrt{15}}. \text{ Puis}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{45}}{8} = \boxed{-\frac{1+3\sqrt{5}}{8}}.$$

$$2. \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \boxed{-\frac{7}{8}}, \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{-\sqrt{15}}{4} \times \frac{-1}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{8}}, \tan 2x = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{7}}.$$

Comme  $\cos 2x < 0 < \sin 2x$ , le point d'abscisse  $2x$  est dans le **2<sup>e</sup> quadrant** (en accord avec  $2x \in ]2\pi, 3\pi[$ ).

$$3. \cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \frac{7}{32} + \frac{15}{32} = \boxed{\frac{11}{16}} \text{ (contrôle : } 4 \cos^3 x - 3 \cos x = -\frac{1}{16} + \frac{3}{4} = \frac{11}{16} \checkmark).$$

$$4. \frac{x}{2} \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[, \text{ donc } \cos \frac{x}{2} < 0 < \sin \frac{x}{2}. \text{ Avec } \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{3}{8} \text{ et } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{5}{8} :$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{3}{8}} = \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{4}}, \quad \sin \frac{x}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{4}}, \quad \tan \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{5}{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{3}}.$$

$$\text{Contrôle : } 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = -\frac{2\sqrt{60}}{16} = -\frac{\sqrt{15}}{4} = \sin x \checkmark.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 38

$$a) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) \text{ et } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) ; \text{ la différence vaut } \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \sin x = \sqrt{2} \sin x.$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) + \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = \sqrt{3} \cos x.$$

$$c) \text{ L'expression a un sens si et seulement si } x + \frac{\pi}{4} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \text{ et } x - \frac{\pi}{4} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \text{ soit } \boxed{x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}. \text{ Avec } y = x + \frac{\pi}{4} : \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos y}{\sin y} = -\cotan y, \text{ donc le produit vaut } -\tan y \cotan y = -1.$$

$$d) \text{ Sens si et seulement si } \sin x \cos x \neq 0, \text{ soit } \boxed{x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}. \text{ Au même dénominateur, le membre de gauche vaut } \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2.$$

$$e) \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) : \text{ sens si et seulement si } \boxed{x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}$$

(et alors  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0$ ). Au même dénominateur :

$$\frac{(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{4 \sin x \cos x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = 2 \tan 2x.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 39

1.  $\cos a \cos b \neq 0$ , et  $\cos(a+b) = \cos a \cos b (1 - \tan a \tan b)$ ,  $\sin(a+b) = \cos a \cos b (\tan a + \tan b)$ . Comme  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ , on obtient  $\tan a + \tan b = 1 - \tan a \tan b$ , soit  $1 + \tan a + \tan b + \tan a \tan b = 2$  :  $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$ .
2. Posons  $p = \tan a \geq 0$  et  $q = \tan b \geq 0$  : l'hypothèse s'écrit  $p + q = 1 - pq$ . Si  $pq = 1$ , alors  $p + q = 0$ , d'où  $p = q = 0$  et  $pq = 0$  : absurde. Donc  $\cos(a+b) = \cos a \cos b (1 - pq) \neq 0$  et  $\tan(a+b) = \frac{p+q}{1-pq} = 1$ . Or  $a + b \in [0, \pi[$ , et le seul réel de  $[0, \pi[$  de tangente 1 est  $\frac{\pi}{4}$  :  $a + b = \frac{\pi}{4}$ .
3.  $\frac{\pi}{20} + \frac{4\pi}{20} = \frac{2\pi}{20} + \frac{3\pi}{20} = \frac{\pi}{4}$ , et  $1 + \tan \frac{5\pi}{20} = 1 + \tan \frac{\pi}{4} = 2$ . Par la question 1 :  $P = 2 \times 2 \times 2 = 8$ .
4. Pour  $1 \leq k \leq 22$ ,  $\frac{k\pi}{180} + \frac{(45-k)\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$  : les facteurs d'indices  $k$  et  $45 - k$  (22 paires, 45 -  $k$  allant de 44 à 23) ont un produit égal à 2, et le facteur d'indice 45 vaut  $1 + \tan \frac{\pi}{4} = 2$ . Donc  $Q = 2^{22} \times 2 = 2^{23} = 8\,388\,608$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 40

1. Comme  $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  et que  $\varphi, \frac{\pi}{3}, \varphi + \frac{\pi}{3}$  sont hors de  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , la formule d'addition donne  $\tan\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \varphi + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \varphi} = f(\tan \varphi)$  (le dénominateur est non nul).
2.  $f(0) = \sqrt{3}$ ,  $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$ ,  $f(-\sqrt{3}) = \frac{0}{4} = 0$  : on revient à  $0$  en trois étapes ( $\tan 0, \tan \frac{\pi}{3}, \tan \frac{2\pi}{3}, \tan \pi$ ).  
$$f(2) = \frac{(2+\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})} = \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}$$
; puis, avec  $u = f(2)$  :  $u + \sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}-8}{11}$  et  $1 - \sqrt{3}u = \frac{26+8\sqrt{3}}{11}$ ,  
d'où  $f(f(2)) = \frac{3\sqrt{3}-4}{13+4\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3}-4)(13-4\sqrt{3})}{121} = \frac{5\sqrt{3}-8}{11}$ ; enfin, avec  $v = f(f(2))$  :  $v + \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}-8}{11}$  et  $1 - \sqrt{3}v = \frac{8\sqrt{3}-4}{11}$ , d'où  $f(f(f(2))) = 2$ .
3. Écrivons  $u = \tan \theta$  avec  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  ; l'hypothèse signifie  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{6}$ . Par la question 1 :
  - $\varphi = \theta$  :  $\theta + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2}$  (car  $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ ), donc  $f(u) = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ ;
  - $\varphi = \theta + \frac{\pi}{3}$  :  $\theta + \frac{2\pi}{3} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  (car  $\theta \neq -\frac{\pi}{6}$ ), donc  $f(f(u)) = \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ ;
  - $\varphi = \theta + \frac{2\pi}{3}$  :  $\theta + \pi \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , donc  $f(f(f(u))) = \tan(\theta + \pi) = \tan \theta = u$ .
 Pour  $u = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  ( $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ) :  $f(u) = \frac{2\sqrt{3}/3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , et  $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  n'existe pas : la composée n'est pas définie.
4. a)  $g_1(u) = \frac{u+1}{1-u}$ , et  $g_1(u) \neq 1 \iff u \neq 0$ . Alors  $g_1(g_1(u)) = \frac{\frac{2}{1-u}}{\frac{-2u}{1-u}} = -\frac{1}{u}$ . Si  $u \notin \{-1, 0, 1\}$ , alors  $v = -\frac{1}{u} \notin \{0, 1\}$ , et  $g_1(g_1(v)) = -\frac{1}{v} = u$ . ( $g_1$  ajoute  $\frac{\pi}{4}$  à l'angle : quatre fois, on ajoute  $\pi$ .)

b) Soit  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan \alpha = a$ . Comme en 1,  $g_a(\tan \varphi) = \tan(\varphi + \alpha)$  dès que  $\varphi$  et  $\varphi + \alpha$  sont hors de  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . Si  $a$  convient, choisissons  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha, \varphi + 3\alpha$  soient hors de  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  (tous les  $\varphi$  sauf un nombre fini) :  $\tan(\varphi + 3\alpha) = \tan \varphi$ , donc  $3\alpha \in \pi\mathbb{Z}$ . Or  $3\alpha \in ]0, \frac{3\pi}{2}[$  :  $3\alpha = \pi, \alpha = \frac{\pi}{3}$ . Réciproquement,  $a = \sqrt{3}$  convient (question 3) :  $a = \sqrt{3}$  seulement.

### ■ Corrigé de l'exercice 41

1. Pour  $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ,  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \neq 0$  et  $\cotan x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \cotan 2x$ .

2. a)  $\frac{1}{t} - t = 2 \cotan \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$ , soit  $t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$ , de racines  $-\sqrt{3} \pm 2$  ; comme  $t > 0$  :  $t = 2 - \sqrt{3}$ , et  $\cotan \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ .

b)  $\frac{1}{u} - u = 2 \cotan \frac{\pi}{12} = 2(2 + \sqrt{3})$ , soit  $u^2 + 2(2 + \sqrt{3})u - 1 = 0$ . Le produit des racines vaut  $-1$  : une seule racine est positive, c'est  $u = \tan \frac{\pi}{24} > 0$ . Le discriminant réduit vaut  $(2 + \sqrt{3})^2 + 1 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$  (car  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2$ ). Donc

$$\tan \frac{\pi}{24} = -\left(2 + \sqrt{3}\right) + \sqrt{6} + \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 \approx 0,1317.$$

c)  $\cotan \frac{\pi}{24} = u + 2(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2$ . Contrôle :  $u + \frac{1}{u} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ , et  $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{8}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  ✓.

3.  $\frac{1}{v} - v = 2 \cotan \frac{5\pi}{12} = 2 \tan \frac{\pi}{12} = 2(2 - \sqrt{3})$ , d'où  $v^2 + 2(2 - \sqrt{3})v - 1 = 0$ , de discriminant réduit  $(2 - \sqrt{3})^2 + 1 = 8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ . La racine positive est  $\tan \frac{5\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 \approx 0,7673$ .

4.  $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}$  et  $\frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ , donc  $S = (\tan + \cotan) \frac{\pi}{24} + (\tan + \cotan) \frac{5\pi}{24}$ .

Première façon ( $\tan x + \cotan x = \frac{2}{\sin 2x}$ ) :  $S = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{12}} + \frac{2}{\sin \frac{5\pi}{12}} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \frac{8}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 4\sqrt{6}$ .

Seconde façon (valeurs) :  $\cotan \frac{5\pi}{24} = v + 2(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2$ , d'où  $(\tan + \cotan) \frac{5\pi}{24} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$  ; avec c),  $S = (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) + (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{6} \approx 9,798$  ✓.

### ■ Corrigé de l'exercice 42

1. Pour  $n = 0$  :  $u_0 = \tan \theta$ , sans condition. Supposons le résultat vrai au rang  $n$ . Le terme  $u_{n+1}$  est défini si et seulement si  $u_n$  l'est et  $\tan(2^n \theta) \neq \pm 1$ . Or  $\tan(2^n \theta) = \pm 1 \iff 2^n \theta \in \pm \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \iff 2^{n+1} \theta \in \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . D'où la condition au rang  $n+1$  ; et alors, par la formule de duplication (valable puisque  $2^n \theta$  et  $2^{n+1} \theta$  sont hors de  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ) :

$$u_{n+1} = \frac{2 \tan(2^n \theta)}{1 - \tan^2(2^n \theta)} = \tan(2^{n+1} \theta).$$

2. a)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  :  $u_1 = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3} = \tan \frac{2\pi}{3}$ , puis  $u_2 = \sqrt{3}$  : la suite alterne  $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \dots$  (période 2).

b)  $u_1 = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(7-4\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$  : ici  $\theta = \frac{\pi}{12}$ , et  $u_2 = \sqrt{3}$ ,  $u_3 = -\sqrt{3}$ ,  $u_4 = \sqrt{3} \dots$  : la suite est **périodique à partir du rang 2**.

c)  $u_1 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = 1$  : la suite **s'arrête**,  $u_2$  n'est pas défini ( $\theta = \frac{\pi}{8}$  et  $4\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

3. a) Si  $\theta = \frac{j\pi}{7}$  et  $2^k\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$  ( $k \geq 1$ ), alors  $2^{k+1}j = 7(2m+1)$  : un nombre pair égal à un nombre impair, absurde. Par la question 1, tous les  $u_n$  sont définis.

b) Si  $u_3$  est défini et  $u_3 = u_0$  :  $\tan 8\theta = \tan \theta$ , donc  $8\theta - \theta \in \pi\mathbb{Z}$ , soit  $7\theta \in \pi\mathbb{Z}$ . Réciproquement, si  $7\theta \in \pi\mathbb{Z}$ , tous les termes sont définis (a) et  $\tan 8\theta = \tan(\theta + 7\theta) = \tan \theta$ .

c)  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $7\theta \in \pi\mathbb{Z}$  :  $\theta = \frac{k\pi}{7}$ ,  $-3 \leq k \leq 3$ . En écartant  $\theta = 0$  : **6 valeurs**  $u_0 = \tan \frac{k\pi}{7}$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  (distinctes,  $\tan$  étant strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ). Pour  $\theta = \frac{\pi}{7}$  :  $u_1 = \tan \frac{2\pi}{7}$ ,  $u_2 = \tan \frac{4\pi}{7} = -\tan \frac{3\pi}{7}$ ,  $u_3 = \tan \frac{8\pi}{7} = \tan \frac{\pi}{7}$  : cycle  $\{\tan \frac{\pi}{7}, \tan \frac{2\pi}{7}, -\tan \frac{3\pi}{7}\}$ . Comme  $u_0 \mapsto -u_0$  change chaque terme en son opposé, l'autre cycle est  $\{-\tan \frac{\pi}{7}, -\tan \frac{2\pi}{7}, \tan \frac{3\pi}{7}\}$ .

4. Comme en 3 :  $u_4 = u_0$  (suite définie)  $\iff 16\theta - \theta \in \pi\mathbb{Z} \iff \theta = \frac{j\pi}{15}$ ,  $-7 \leq j \leq 7$  (15 valeurs ; tous les termes sont définis car  $2^{k+1}j = 15(2m+1)$  est impossible). Parmi elles,  $u_2 = u_0 \iff 3\theta \in \pi\mathbb{Z} \iff \theta \in \{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}\}$ . Il reste **12 valeurs** de  $u_0$  ; en suivant  $j \mapsto 2j$  modulo 15, elles forment trois cycles de quatre valeurs :  $j \in \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $\{3, 6, 12, 9\}$  et  $\{7, 14, 13, 11\}$  (avec  $\tan \frac{j\pi}{15} = \tan \frac{(j-15)\pi}{15}$ ).

31

## Corrigés : transformations

### ■ Corrigé de l'exercice 43

1.  $A(x) = 2 \cos 5x \cos 2x$  ;  $B(x) = 2 \cos 3x \sin x$  ;  $C(x) = -2 \sin 3x \sin(-2x) = 2 \sin 3x \sin 2x$  ;  
 $E(x) = (1 + \cos 4x) + 2 \cos 2x = 2 \cos^2 2x + 2 \cos 2x = 2 \cos 2x (1 + \cos 2x) = 4 \cos^2 x \cos 2x$ .

Le quotient est défini si et seulement si  $B(x) \neq 0$ , c'est-à-dire  $\cos 3x \neq 0$  et  $\sin x \neq 0$  :  $x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$  et  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ . Alors, avec  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  :  $\frac{C(x)}{B(x)} = \frac{2 \sin 3x \times 2 \sin x \cos x}{2 \cos 3x \sin x} = 2 \cos x \tan 3x$ .

2.  $\cos x + \cos 7x = 2 \cos 4x \cos 3x$  et  $\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos 4x \cos x$ , d'où  $D(x) = 2 \cos 4x (\cos 3x - \cos x) = -4 \sin x \sin 2x \cos 4x$  (car  $\cos 3x - \cos x = -2 \sin 2x \sin x$ ).

Sur  $[0, \pi]$  :  $\sin x = 0$  pour  $x = 0, \pi$  ;  $\sin 2x = 0$  pour  $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  ;  $\cos 4x = 0 \iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ , soit  $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ . En ne comptant qu'une fois 0 et  $\pi$  : **7 solutions**  $0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi$ .

3.  $\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{7\pi}{18} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{18}$  et  $\sin \frac{\pi}{18} + \sin \frac{5\pi}{18} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{7\pi}{18}$  (en degrés :  $\cos 50^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$  et  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ$ ).

### ■ Corrigé de l'exercice 44

- $2 \sin 3x \cos x = \boxed{\sin 4x + \sin 2x}$  ;  $2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x + \cos \frac{\pi}{2} = \boxed{\cos 2x}$ .  
 $2 \sin x \sin 3x = \cos 2x - \cos 4x$ , donc  $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 4x = \sin 4x - (\sin 6x - \sin 2x) = \boxed{\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x}$ .  
 $2 \cos x \cos 3x = \cos 4x + \cos 2x$ , donc  $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 2 \cos 2x \cos 4x + 2 \cos^2 2x$ , soit  $\boxed{1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}$ .
- $\cos \frac{7\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\frac{1 + \sqrt{2}}{4}}$  et  $\sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \boxed{\frac{\sqrt{2} - 1}{4}}$ .  
 Par quotient :  $\tan \frac{7\pi}{24} \tan \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2} - 1)^2 = \boxed{3 - 2\sqrt{2}}$ .
- $0,9397 \times 0,6428 = \cos 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2}(\cos 70^\circ + \cos 30^\circ) = \frac{0,3420+0,8660}{2} = \boxed{0,6040}$  ; le calcul direct donne 0,60404 ...  
 $0,9848 \times 0,3420 = \cos 10^\circ \cos 70^\circ = \frac{1}{2}(\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{0,1736+0,5}{2} = \boxed{0,3368}$  ; le calcul direct donne 0,33680 ...  
 Une addition et une division par 2 remplacent la multiplication ; la précision est celle de la table.

### ■ Corrigé de l'exercice 45

- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$  et  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ , d'où
 
$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\cos \frac{x-y}{2}} \times \frac{\cos \frac{x+y}{2}}{\sin \frac{x+y}{2}} = \frac{\tan \frac{x-y}{2}}{\tan \frac{x+y}{2}}.$$
- Soit  $k$  la valeur commune des rapports de la loi des sinus :  $a = k \sin A$ ,  $b = k \sin B$ . Dans un triangle,  $\frac{A+B}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\frac{A-B}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  : toutes les tangentes sont définies,  $\tan \frac{A+B}{2} > 0$  et  $\sin A + \sin B > 0$ . Comme  $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ ,  $\tan \frac{A+B}{2} = \cotan \frac{C}{2}$ , et la question 1 donne
 
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\cotan \frac{C}{2}} = \boxed{\tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}}.$$
- $\frac{a-b}{a+b} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\tan \frac{C}{2} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , donc  $\tan \frac{A-B}{2} = 1$  ; avec  $\frac{A-B}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :  $A-B = \frac{\pi}{2}$ . Comme  $A+B = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  :  $A = \frac{7\pi}{12}$ ,  $B = \frac{\pi}{12}$ . Al-Kashi :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (4 + 2\sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3}) - 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 6$ ,  
 $\boxed{c = \sqrt{6}}$ .
- $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$ , car  $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \neq 0$ . Vérification :  $\frac{a+b}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$  et  $\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \sqrt{2}$  ✓.

### ■ Corrigé de l'exercice 46

1.  $\sin A = \sin(\pi - (B + C)) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ . Donc  $\sin A = 2 \sin B \cos C \iff \cos B \sin C - \sin B \cos C = 0 \iff \sin(C - B) = 0$ . Comme  $C - B \in ]-\pi, \pi[$ , cela équivaut à  $B = C$ .

2.  $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B) \sin(A - B) = \sin C \sin(A - B)$ . Comme  $\sin C > 0$  :

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \iff \sin C \sin(A - B) = \sin^2 C \iff \sin(A - B) = \sin C = \sin(A + B).$$

Or  $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$  avec  $\sin B > 0$  : la condition équivaut à  $\cos A = 0$ , soit  $A = \frac{\pi}{2}$ . C'est la réciproque du théorème de Pythagore, via la loi des sinus.

3. a) Par linéarisation,  $\cos^2 A + \cos^2 B = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) = 1 + \cos(A+B) \cos(A-B) = 1 - \cos C \cos(A-B)$ . Puis, en remplaçant  $\cos C$  par  $-\cos(A+B)$  dans l'un des facteurs de  $\cos^2 C = \cos C \times \cos C$  :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos C (\cos(A+B) + \cos(A-B)) = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

b) La somme vaut 1 si et seulement si l'un des cosinus est nul, c'est-à-dire si un angle est droit. Elle dépasse 1 si et seulement si  $\cos A \cos B \cos C < 0$ , donc si un nombre impair de cosinus sont négatifs ; or un triangle a au plus un angle obtus : cela équivaut à « un angle est obtus ».

4. Par 1,  $B = C$  ; par 3, le triangle est rectangle, et l'angle droit n'est ni  $B$  ni  $C$  (sinon  $B = C = \frac{\pi}{2}$ ).

Donc  $A = \frac{\pi}{2}, B = C = \frac{\pi}{4}$  (contrôle :  $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 1 = \sin A$  ✓).

### ■ Corrigé de l'exercice 47

1. Ce sont les formules somme  $\rightarrow$  produit. Avec  $s = \frac{x+y}{2}$  et  $d = \frac{x-y}{2}$  :  $a^2 + b^2 = 4 \cos^2 d (\cos^2 s + \sin^2 s) = 4 \cos^2 d = 2 + 2 \cos 2d$ , soit  $a^2 + b^2 = 2 + 2 \cos(x - y)$ .

2.  $K = a^2 + b^2 = 4 \cos^2 d \neq 0$ . Alors  $a^2 - b^2 = 4 \cos^2 d (\cos^2 s - \sin^2 s) = K \cos 2s$  et  $2ab = 8 \cos^2 d \sin s \cos s = K \sin 2s$  ; comme  $2s = x + y$  :  $\cos(x + y) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ,  $\sin(x + y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ .

3. Ici  $a^2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$ ,  $b^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$  :  $a^2 + b^2 = 2$ ,  $a^2 - b^2 = \sqrt{3}$ ,  $2ab = \frac{2(3-1)}{4} = 1$ . Conditions nécessaires :  $\cos(x - y) = \frac{a^2 - b^2}{2} - 1 = 0$ ,  $\cos(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$ , d'où

$$x + y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{et} \quad x - y = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}), \quad \text{soit} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi + \frac{m\pi}{2}, \quad y = -\frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{m\pi}{2}.$$

Tri des cas (les entiers  $k + j$  et  $k - j$  ont même parité) :

- $m = 2j$  :  $x = \frac{\pi}{3} + (k+j)\pi$ ,  $y = -\frac{\pi}{6} + (k-j)\pi$ . Si  $k+j$  et  $k-j$  sont pairs :  $(x, y) \equiv (\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$ , qui convient ( $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$  ✓). S'ils sont impairs :  $\cos x + \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -a$  : non.
- $m = 2j + 1$  :  $x = \frac{5\pi}{6} + (k+j)\pi$ ,  $y = -\frac{2\pi}{3} + (k-j)\pi$ . Pairs :  $\cos x + \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$  : non. Impairs :  $(x, y) \equiv (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ , qui convient.

Les solutions sont les couples  $(\frac{\pi}{3} + 2p\pi, -\frac{\pi}{6} + 2q\pi)$  et  $(-\frac{\pi}{6} + 2p\pi, \frac{\pi}{3} + 2q\pi)$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

4.  $a = b = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff \cos \frac{x-y}{2} = 0 \iff x - y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Le milieu  $I$  de  $[M(x)M(y)]$  a pour coordonnées  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \cos d (\cos s, \sin s)$  :  $OI = |\cos d|$ , et  $I = O$  si et seulement si  $M(x)$

et  $M(y)$  sont **diamétralement opposés**. Sinon, la droite  $(OI)$  fait l'angle  $s = \frac{x+y}{2}$  (à  $\pi$  près) avec l'axe des abscisses : la question 2 donne le cosinus et le sinus du double de cet angle.

### ■ Corrigé de l'exercice 48

- $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  : les tangentes sont définies et strictement positives. Comme  $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan \frac{A+B}{2} = \cotan \frac{C}{2} = \frac{1}{z}$  ; de plus  $\cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} (1 - xy) > 0$ , donc  $1 - xy \neq 0$  et  $\frac{x+y}{1-xy} = \frac{1}{z}$ , soit  $z(x+y) = 1 - xy$  :  $xy + yz + zx = 1$ .
- a)  $2(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) = (u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $u = v = w$ .  
b)  $(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu) \geq 3(uv + vw + wu)$ . En appliquant a) à  $uv, vw, wu$  :  $(uv)^2 + (vw)^2 + (wu)^2 \geq uv \cdot vw + vw \cdot wu + wu \cdot uv = uvw(u+v+w)$ , d'où  $(uv + vw + wu)^2 = \sum (uv)^2 + 2uvw(u+v+w) \geq 3uvw(u+v+w)$ .
- Avec  $xy + yz + zx = 1$  :  $(x+y+z)^2 \geq 3$ , donc (positivité)  $x+y+z \geq \sqrt{3}$  ; puis  $1 \geq 3xyz(x+y+z) \geq 3\sqrt{3}xyz$ , donc  $xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ . L'égalité  $x+y+z = \sqrt{3}$  impose  $x = y = z$ , soit  $A = B = C$  (tan est strictement croissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ) ; l'égalité  $xyz = \frac{\sqrt{3}}{9}$  impose  $x+y+z = \sqrt{3}$ , donc aussi un triangle équilatéral. Réciproquement, si  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$  :  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , de somme  $\sqrt{3}$  et de produit  $\frac{\sqrt{3}}{9}$  ✓.
- a)  $(x+y)(x+z) = x^2 + (xy + xz + yz) = x^2 + 1$ . Avec la formule en  $\tan \frac{A}{2}$  :  $\cos A = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{2}{(x+y)(x+z)} - 1$ .  
b) De même pour  $\cos B$  et  $\cos C$ . En réduisant au dénominateur commun  $(x+y)(y+z)(z+x)$  :  
$$\cos A + \cos C - 2 \cos B = \frac{2(y+z) + 2(x+y) - 4(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2(2y - x - z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$
  
Le dénominateur étant non nul,  $\cos A + \cos C = 2 \cos B \iff x+z = 2y$  :  $\cos A, \cos B, \cos C$  sont en progression arithmétique si et seulement si  $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$  le sont.

32

## Corrigés : équations

### ■ Corrigé de l'exercice 49

- $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \iff x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dans  $[0, 2\pi[$  :  $k = 1$  dans la première famille,  $k = 0$  dans la seconde :  $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ .

- $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \iff 3x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $3x = -x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ , soit

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Dans  $[0, \pi[$  :  $\frac{\pi}{8}$  ( $k = 0$ ) ;  $0 \leq -\frac{1}{16} + \frac{k}{2} < 1 \iff \frac{1}{8} \leq k < \frac{17}{8} \iff k \in \{1, 2\}$ .  $S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}\right\}$ .

3. Domaine :  $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , soit  $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ .  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{3} \iff 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \iff$   
 $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  (valeurs du domaine). Dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :  $-\frac{1}{2} < \frac{7}{24} + \frac{k}{2} < \frac{1}{2} \iff -\frac{19}{12} < k < \frac{5}{12}$ ,  
 $k \in \{-1, 0\}$  :  $S = \left\{-\frac{5\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right\}$ .

4. On transforme le cosinus en sinus :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$ . Donc

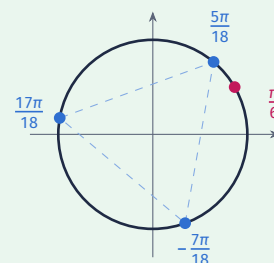
$$\sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \iff 2x = \frac{5\pi}{6} - x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{\pi}{6} + x + 2k\pi,$$

$$\text{soit } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dans  $]-\pi, \pi]$  :  $-1 < \frac{5}{18} + \frac{2k}{3} \leq 1 \iff -\frac{23}{12} < k \leq \frac{13}{12}, k \in \{-1, 0, 1\}$ , plus  $\frac{\pi}{6}$  :

$$S = \left\{-\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}.$$

Les trois solutions de la première famille ( $-70^\circ, 50^\circ, 170^\circ$ ) forment un triangle équilatéral : le pas  $\frac{2\pi}{3}$  partage le cercle en trois.

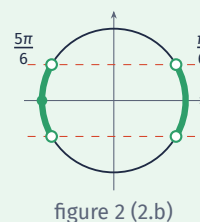
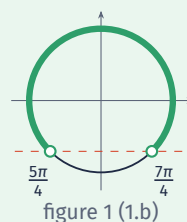


### ■ Corrigé de l'exercice 50

1. a)  $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  en  $\frac{5\pi}{6}$  et  $\frac{7\pi}{6}$ , et l'arc où l'abscisse est la plus petite va de l'un à l'autre en passant par  $\pi$  :  $S = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ .

- b)  $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  en  $\frac{5\pi}{4}$  et  $\frac{7\pi}{4}$ , et  $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  sur l'arc « du bas »  $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ . On garde le reste de  $[0, 2\pi[$  (figure 1) :

$$S = \left[0, \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left] \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right[.$$



2. a) Sur  $]-\pi, \pi]$  :  $2 \cos x - 1 > 0 \iff x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$  et  $\sin x > 0 \iff x \in ]0, \pi[$ .

| $x$            | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
|----------------|--------|------------------|-----|-----------------|-------|
| $2 \cos x - 1$ | -      | 0                | +   | 0               | -     |
| $\sin x$       | -      | -                | 0   | +               | 0     |
| produit        | +      | 0                | -   | 0               | -     |

$$S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left]0, \frac{\pi}{3}\right[ \quad (x = \pi \text{ est exclu : le produit } y \text{ est nul}).$$

- b)  $|2 \sin x| < 1 \iff -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$  : on garde les points du cercle situés strictement entre les droites  $y = -\frac{1}{2}$  et  $y = \frac{1}{2}$  (figure 2), soit deux arcs, autour de 0 et autour de  $\pi$ . Dans  $]-\pi, \pi]$ , l'arc autour de  $\pi$  se coupe en deux morceaux :

$$S = \left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[ \cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 51

1. On pose  $X = \sin x \in [-1, 1]$  :  $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$ ,  $\Delta = (2 - \sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ , d'où  $X = \frac{-(2-\sqrt{3}) \pm (2+\sqrt{3})}{4}$  :  $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $X = -1$  (deux valeurs acceptables). Dans  $]-\pi, \pi]$ ,  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  donne  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\sin x = -1$  donne  $-\frac{\pi}{2}$  :  $S = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ .

2.  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  : l'équation devient  $2c^2 - 3c + 1 = 0$  avec  $c = \cos x$ , soit  $(c-1)(2c-1) = 0$ .  $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$  ;  $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  :  $x = 2k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. a) Si  $\cos x = 0$ , alors  $\sin^2 x = 1$  et le premier membre vaut  $\sqrt{3} \neq 0$  : ces  $x$  ne sont pas solutions. On peut donc diviser par  $\cos^2 x$  :  $\sqrt{3}\tan^2 x + 2\tan x - \sqrt{3} = 0$ ,  $\Delta' = 1 + 3 = 4$ ,  $\tan x = \frac{-1 \pm 2}{\sqrt{3}}$  :  $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ou  $\tan x = -\sqrt{3}$ , soit  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

b) Comme  $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$  et  $2\sin x \cos x = \sin 2x$  :

$$\sqrt{3}(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2\sin x \cos x = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

(formule d'addition, avec  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ). L'équation équivaut à  $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$ , soit

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Les deux écritures décrivent le même ensemble :  $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$  donne  $\frac{\pi}{6} + k\pi$  ( $k$  pair) et  $\frac{2\pi}{3} + k\pi = -\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi$  ( $k$  impair) : quatre points du cercle, sommets d'un carré.

4. Domaine :  $\sin x \neq 0$  et  $\cos x \neq 0$ , soit  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ . Alors  $\tan x + \cotan x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$ , et l'équation équivaut à  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  :  $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ , soit (toutes ces valeurs sont dans le domaine)

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 52

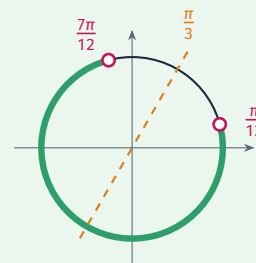
1.  $r = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$  et  $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ , donc

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 2\sqrt{3}\left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

2.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \iff x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  :

$$x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sur le cercle : deux points symétriques par rapport à la droite d'angle  $\frac{\pi}{3}$  (en pointillés), à  $\pm\frac{\pi}{4}$  de part et d'autre.



3. On pose  $X = x - \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ . Sur cet intervalle,  $\cos X \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ , soit  $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ . L'inéquation stricte  $\cos X < \frac{\sqrt{2}}{2}$  donne le complémentaire dans  $]-\pi, \pi]$  (arc vert) :

$$S = \left]-\pi, \frac{\pi}{12}\right[ \cup \left]\frac{7\pi}{12}, \pi\right]$$

4. Le couple  $(m, m+1)$  n'est jamais  $(0, 0)$  :  $r = \sqrt{m^2 + (m+1)^2} > 0$  et il existe  $\varphi$  tel que  $m \cos x + (m+1) \sin x = r \cos(x - \varphi)$ . Donc  $(E_m) \iff \cos(x - \varphi) = \frac{1}{r}$ , qui a des solutions si et seulement si  $\frac{1}{r} \leq 1$ , c'est-à-dire

$$r^2 \geq 1 \iff 2m^2 + 2m \geq 0 \iff m(m+1) \geq 0 \iff m \leq -1 \text{ ou } m \geq 0.$$

Pour  $-1 < m < 0$ , le premier membre ne dépasse jamais  $r < 1$ .  $(E_0) : \sin x = 1, \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$  ;  
 $(E_{-1}) : -\cos x = 1, \boxed{x = \pi + 2k\pi} (k \in \mathbb{Z})$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 53

1.  $\sin 4x + \sin 2x = 2 \sin 3x \cos x$ , donc  $\sin 2x + \sin 4x - \sin 3x = \sin 3x (2 \cos x - 1)$ . L'équation équivaut à  $\sin 3x = 0$  ou  $\cos x = \frac{1}{2}$  :  $x = \frac{k\pi}{3}$  ou  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ . Or  $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}$  est déjà de la forme  $\frac{k'\pi}{3}$  : **la seconde famille est absorbée** et  $\boxed{S = \left\{ \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}}$ . (Si  $\cos x = \frac{1}{2}$ , alors  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = -1$ , donc  $\sin 3x = 0$  : le facteur  $2 \cos x - 1$  ne s'annule qu'en des zéros de  $\sin 3x$ .)
2. On linéarise :  $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1 \iff \cos 2x + \cos 6x = 0 \iff 2 \cos 4x \cos 2x = 0$ .  
 $\cos 4x = 0 \iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$  ;  $\cos 2x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ . Dans  $[0, \pi[$  :  
 $\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8} \right\}}$  (six solutions).
3.  $\cos x - \cos 3x = -2 \sin 2x \sin(-x) = 2 \sin 2x \sin x$  : l'inéquation équivaut à  $2 \sin 2x \sin x - \sin 2x > 0$ , soit  $\sin 2x (2 \sin x - 1) > 0$ . Sur  $[0, \pi]$  :

| $x$            | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|----------------|---|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $\sin 2x$      | 0 | +               | 0               | -                | 0     |
| $2 \sin x - 1$ | - | 0               | +               | 0                | -     |
| produit        | 0 | -               | 0               | -                | 0     |

$$\boxed{S = \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{5\pi}{6}, \pi \right[}$$

### ■ Corrigé de l'exercice 54

1. Pour  $x \in ]-\pi, \pi[$ ,  $\frac{x}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  (cours). Donc
- $$\cos x + t - 1 = \frac{1-t^2 + (t-1)(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2 + t + t^3 - 1 - t^2}{1+t^2} = \frac{t^3 - 2t^2 + t}{1+t^2} = \frac{t(t-1)^2}{1+t^2}.$$
2. L'équation équivaut à  $t(t-1)^2 = 0$ , soit  $t = 0$  ou  $t = 1$ . Comme  $\frac{x}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  :  $\tan \frac{x}{2} = 0 \iff x = 0$  et  $\tan \frac{x}{2} = 1 \iff \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{2}$ . Dans  $]-\pi, \pi[$  :  $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ . L'équation n'a de sens que pour  $x \neq \pi + 2k\pi$  et son premier membre est  $2\pi$ -périodique :

$$\boxed{x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}.$$

Inéquation :  $1 + t^2 > 0$  et  $(t-1)^2 \geq 0$ , donc  $\cos x + \tan \frac{x}{2} > 1 \iff t > 0$  et  $t \neq 1 \iff \frac{x}{2} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  et  $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4}$  :

$$\boxed{S = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[}$$

En  $\frac{\pi}{2}$  (racine double en  $t$ ), le premier membre *touche* 1 sans le traverser.

3.  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cos \frac{x+y}{2}$ . La seconde équation équivaut à  $\cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}$  :

$$\frac{x+y}{2} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff x+y = \pm \frac{4\pi}{3} + 4k\pi.$$

Avec  $x - y = \frac{\pi}{3}$  (demi-somme et demi-différence) :  $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  et  $y = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  :

$$(x, y) = \left( \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \text{ ou } (x, y) = \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

**Piège** : écrire  $x + y = \pm \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$  ajouterait des couples faux, comme  $\left( \frac{11\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right)$ , pour lequel  $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Contrôle :  $\cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \checkmark$ .

33

## Corrigés : courbes, extremums

### ■ Corrigé de l'exercice 55

- a)  $f(x + \pi) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = f(x)$ . b)  $\cos \frac{x+6\pi}{3} = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{x}{3}$ . c)  $\tan 2x$  est définie si  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  : ce domaine est stable par  $x \mapsto x \pm \frac{\pi}{2}$ , et  $\tan(2x + \pi) = \tan 2x$ . d)  $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$  et  $\cos(2x + 2\pi) = \cos 2x$  (ou :  $\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2$ ).
- Les domaines sont symétriques par rapport à 0 ( $\mathbb{R}$ , ou  $\mathbb{R}$  privé des  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  pour c).  
a)  $\sin(-x) \cos(-2x) = -\sin x \cos 2x$  : **impaire**. b)  $\cos(-x) + (-x) \sin(-x) = \cos x + x \sin x$  : **paire**. c)  $\tan(-x) - \sin(-x) = -(\tan x - \sin x)$  : **impaire**. d) Pour  $u(x) = \sin x + \cos x$  :  $u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$  et  $u\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$ , qui n'est ni  $\sqrt{2}$  ni  $-\sqrt{2}$  : **ni paire, ni impaire** (un seul contre-exemple suffit).
- a) La droite  $x = a$  est un axe de symétrie si  $f(2a - x) = f(x)$  ; le point  $I(a, b)$  est un centre si  $f(2a - x) = 2b - f(x)$  :

$$f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6} - 2x\right) = \sin\left(\pi - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = f(x) \checkmark, \quad f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -f(x) \checkmark.$$

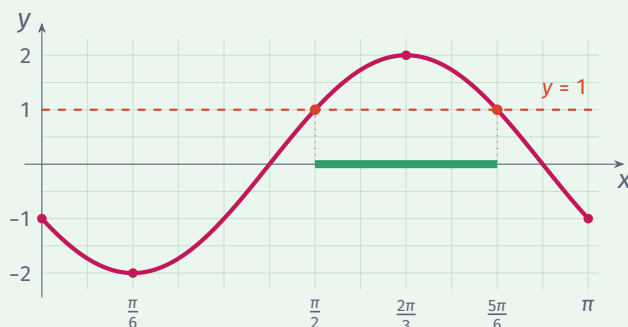
b) La symétrie d'axe  $x = \frac{\pi}{3}$  complète la courbe sur  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}\right]$ , puis la symétrie de centre  $I$  (qui échange  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  et  $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ ) donne la courbe sur  $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ , intervalle de longueur  $\pi$  (une période) ; les translations de vecteurs  $k\pi\vec{i}$  font le reste. On étudie donc  $f$  sur un **quart de période**.

### ■ Corrigé de l'exercice 56

- $f(x + \pi) = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = f(x)$ . Comme  $\sin(\theta - \pi) = -\sin \theta$  :  $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} - \pi\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)\right)$ .  
À partir de  $y = \sin x$  : contraction horizontale de rapport  $\frac{1}{2}$  ( $y = \sin 2x$ ), translation de vecteur  $\frac{5\pi}{12}\vec{i}$ , puis dilatation verticale de rapport 2.
- $f(0) = -2 \sin \frac{\pi}{6} = -1$  et  $f(\pi) = f(0) = -1$ . Maximum 2 :  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \iff x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ , soit  $x = \frac{2\pi}{3}$  dans  $[0, \pi]$ . Minimum -2 :  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{6}$ . Zéros :  $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \iff x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ , soit  $\frac{5\pi}{12}$  et  $\frac{11\pi}{12}$ .

3. Quand  $x$  croît de 0 à  $\pi$ ,  $u = 2x + \frac{\pi}{6}$  croît de  $\frac{\pi}{6}$  à  $\frac{13\pi}{6}$ . Le sinus croît sur  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ , décroît sur  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  et croît sur  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}]$ ; à cause du facteur  $-2$ ,  $f$  fait l'inverse :

| $x$    | 0  | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ |
|--------|----|-----------------|------------------|-------|
| $f(x)$ | -1 | -2              | 2                | -1    |



4. Graphiquement (figure) : la courbe coupe la droite  $y = 1$  en deux points, et est au-dessus entre eux. Par le calcul :  $f(x) = 1 \iff \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \iff 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ , soit  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  : dans  $[0, \pi]$ ,  $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ .

$$f(x) \geq 1 \iff \sin u \leq -\frac{1}{2} \text{ avec } u = 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right] \iff u \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right] \iff x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \text{ (segment vert).}$$

### ■ Corrigé de l'exercice 57

1. La courbe oscille entre  $-2$  et  $2$  :  $A = 2$ . Deux maximums consécutifs sont atteints en  $t = \frac{1}{3}$  et  $t = \frac{7}{3}$  :  $T = 2$  s, et  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$  (rad/s).
2.  $y(0) = 1$  et le premier maximum est en  $t = \frac{1}{3}$  :  $y$  est maximal quand  $\pi t + \varphi \equiv 0 [2\pi]$ , donc  $\frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi$  ; dans  $]-\pi, \pi]$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ . Contrôle :  $y(0) = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1$  ✓. Puis

$$y(t) = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos(\pi t) \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\pi t) \sin \frac{\pi}{3} = \cos(\pi t) + \sqrt{3} \sin(\pi t).$$

3.  $\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \iff \pi t - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff t = 1 + 2k$  ou  $t = -\frac{1}{3} + 2k$ . Dans  $[0, 4]$  :  $t \in \left\{1, \frac{5}{3}, 3, \frac{11}{3}\right\}$  : la courbe coupe quatre fois la droite  $y = -1$ , de part et d'autre des minimums  $t = \frac{4}{3}$  et  $t = \frac{10}{3}$  ✓.

4. Sur une période,  $\theta = \pi t - \frac{\pi}{3}$  parcourt un intervalle de longueur  $2\pi$ , et  $|\cos \theta| \geq \frac{1}{2}$  sur  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$  et  $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$  (à  $2\pi$  près), de longueur totale  $\frac{4\pi}{3}$  : fraction  $\frac{4\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3}$ . Sur  $[0, 2[$  :  $t \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{3}\right]$ , soit  $\frac{4}{3}$  s sur 2 s.

### ■ Corrigé de l'exercice 58

1.  $g(x) = 1 - 2X^2 + 2X = \frac{3}{2} - 2\left(X - \frac{1}{2}\right)^2$  avec  $X = \sin x \in [-1, 1]$ . **Maximum**  $\frac{3}{2}$  pour  $X = \frac{1}{2}$  :  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ . **Minimum** quand  $\left|X - \frac{1}{2}\right|$  est maximal sur  $[-1, 1]$ , c'est-à-dire pour  $X = -1$  (distance  $\frac{3}{2}$ , contre  $\frac{1}{2}$  pour  $X = 1$ ) :  $g = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -3$ , en  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .
2.  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$  :  $k(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

**Maximum**  $\boxed{\frac{3}{4}}$  pour  $2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ; **minimum**  $\boxed{-\frac{1}{4}}$  pour  $2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ .

3.  $s = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  prend toutes les valeurs de  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , et  $s^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ , d'où  $\sin x \cos x = \frac{s^2 - 1}{2}$  et

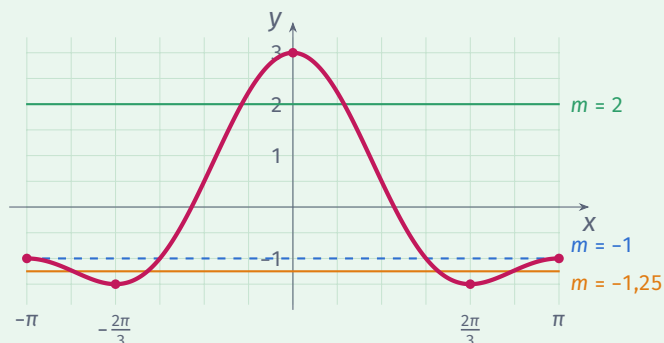
$$h(x) = \frac{s^2 - 1}{2} + s = \frac{(s + 1)^2 - 2}{2}.$$

Pour  $s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  :  $s + 1 \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$  et  $|1 - \sqrt{2}| < 1 + \sqrt{2}$ , donc  $0 \leq (s + 1)^2 \leq (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ .

**Maximum**  $\boxed{\frac{1}{2} + \sqrt{2}}$  pour  $s = \sqrt{2}$ , soit  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ; **minimum**  $\boxed{-1}$  pour  $s = -1$  :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , soit  $x = \pi + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 59

- $\cos(-2x) + 2 \cos(-x) = f(x)$  et  $f(x + 2\pi) = f(x)$  ;  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  donne  $f(x) = 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = \phi(\cos x)$ .
- $\phi(c) = 2\left(c + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$  :  $\phi$  décroît sur  $[-1, -\frac{1}{2}]$  et croît sur  $[-\frac{1}{2}, 1]$  ;  $\phi(-1) = -1$ ,  $\phi(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$ ,  $\phi(1) = 3$ .  
 $\cos$  décroît sur  $[0, \pi]$  et  $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ . Si  $0 \leq x < x' \leq \frac{2\pi}{3}$  :  $1 \geq \cos x > \cos x' \geq -\frac{1}{2}$  et  $\phi$  croît sur  $[-\frac{1}{2}, 1]$ , donc  $f(x) > f(x')$ . Si  $\frac{2\pi}{3} \leq x < x' \leq \pi$  :  $-\frac{1}{2} \geq \cos x > \cos x' \geq -1$  et  $\phi$  décroît sur  $[-1, -\frac{1}{2}]$ , donc  $f(x) < f(x')$ . D'où :  $f(0) = 3 \searrow f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \nearrow f(\pi) = -1$  ; la courbe sur  $[-\pi, 0]$  s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



Sur la figure, on compte les points d'intersection avec  $y = m$  sur  $]-\pi, \pi]$  (une période) : 2 pour  $m = 2$ , 4 pour  $m = -1,25$ , 3 pour  $m = -1$  ( $x = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $x = \pi$ ).

- Comme  $\cos$  est une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ , le nombre de solutions dans  $[0, \pi]$  est le nombre de racines  $c \in [-1, 1]$  de  $2c^2 + 2c - 1 - m = 0$ , de discriminant réduit  $\Delta' = 3 + 2m$ .  
 •  $m < -\frac{3}{2}$  : aucune racine. •  $m = -\frac{3}{2}$  :  $c = -\frac{1}{2}$  ( $x = \frac{2\pi}{3}$ ). •  $m > -\frac{3}{2}$  :  $c_1 = \frac{-1 - \sqrt{3 + 2m}}{2} < -\frac{1}{2} < c_2 = \frac{-1 + \sqrt{3 + 2m}}{2}$  ;  $c_2 \leq 1 \iff \sqrt{3 + 2m} \leq 3 \iff m \leq 3$ , et  $c_1 \geq -1 \iff \sqrt{3 + 2m} \leq 1 \iff m \leq -1$ .  
 Dans  $[0, 2\pi[$  :  $f(2\pi - x) = f(x)$ , donc chaque solution de  $]0, \pi[$  en donne deux ; 0 ( $c = 1$ ,  $m = 3$ ) et  $\pi$  ( $c = -1$ ,  $m = -1$ ) ne comptent qu'une fois.

| $m$              | $m < -\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $]-\frac{3}{2}, -1[$ | $-1$ | $] -1, 3[$ | $3$ | $m > 3$ |
|------------------|--------------------|----------------|----------------------|------|------------|-----|---------|
| dans $[0, \pi]$  | 0                  | 1              | 2                    | 2    | 1          | 1   | 0       |
| dans $[0, 2\pi[$ | 0                  | 2              | 4                    | 3    | 2          | 1   | 0       |

- $(E_{-1})$  :  $2c^2 + 2c = 0 \iff c = 0$  ou  $c = -1$ , d'où  $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$  : trois solutions, comme annoncé ✓.

## ■ Corrigé de l'exercice 60

1.  $\cos(x + \varphi) = \cos x \cos \varphi - \sin x \sin \varphi$  donne  $s(x) = p \cos x - q \sin x$  avec  $p = a + b \cos \varphi$ ,  $q = b \sin \varphi$ .  
Soit  $A = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Si  $A > 0$ ,  $\left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{A}\right)^2 = 1$  : il existe  $\psi$  tel que  $\cos \psi = \frac{p}{A}$ ,  $\sin \psi = \frac{q}{A}$ , et  
 $s(x) = A(\cos x \cos \psi - \sin x \sin \psi) = A \cos(x + \psi)$  (si  $A = 0$ ,  $s = 0$  et tout  $\psi$  convient). Puis

$$A^2 = a^2 + 2ab \cos \varphi + b^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \boxed{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}.$$

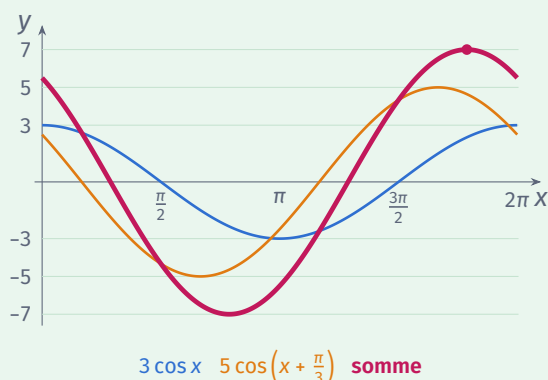
Comme  $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$  :  $(a - b)^2 \leq A^2 \leq (a + b)^2$ , d'où  $|a - b| \leq A \leq a + b$ .  $A = a + b \iff \cos \varphi = 1$  (vibrations **en phase**) ;  $A = 0 \iff A^2 = (a - b)^2 + 2ab(1 + \cos \varphi) = 0 \iff a = b$  et  $\cos \varphi = -1$  (**opposition de phase** : les vibrations s'annulent).

2. a)  $p = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$ ,  $q = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,  $A^2 = 9 + 25 + 15 = 49$  :  $\boxed{A = 7}$ ,  $\cos \psi = \frac{11}{14}$ ,  $\sin \psi = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ . Le maximum de  $s$  est 7 (en  $x = -\psi + 2k\pi$ ), son minimum  $-7$ .

b)  $s(x) = 0 \iff 11 \cos x = 5\sqrt{3} \sin x$ . Si  $\cos x = 0$ , alors  $\sin x = 0$  : impossible. Donc  $\cos x \neq 0$  et  
 $s(x) = 0 \iff \tan x = \frac{11}{5\sqrt{3}} = \boxed{\frac{11\sqrt{3}}{15}}$ .

c)  $A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi$  est le carré de la longueur de la somme de deux vecteurs de longueurs  $a$  et  $b$  formant l'angle  $\varphi$  (construction de Fresnel). Avec 3, 5 et l'angle  $\frac{\pi}{3}$ , on obtient un triangle de côtés 3, 5, 7 dont l'angle opposé au côté 7 vaut  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  : Al-Kashi,  $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos \frac{2\pi}{3} = 49$  ✓.

d) Figure ci-contre : les maximums des deux composantes (3 en 0 et  $2\pi$ , 5 en  $\frac{5\pi}{3}$ ) ne coïncident pas, d'où une amplitude  $7 < 3 + 5$  ; le maximum de la somme est atteint en  $2\pi - \psi \approx 5,62$ , et ses zéros sont  $\frac{\pi}{2} - \psi \approx 0,90$  et  $\frac{3\pi}{2} - \psi \approx 4,05$  (où  $\tan x = \frac{11\sqrt{3}}{15}$  ✓).



3. Ici  $a = b = 1$  :  $A^2 = 2 + 2 \cos \varphi$ .  $A = 1 \iff \cos \varphi = -\frac{1}{2} \iff \boxed{\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}}$  ;  $A = \sqrt{3} \iff \cos \varphi = \frac{1}{2} \iff \boxed{\varphi = \pm \frac{\pi}{3}}$  ;  $A = 0 \iff \cos \varphi = -1 \iff \boxed{\varphi = \pi}$ .

34

## Corrigés : défis de concours

## ■ Corrigé de l'exercice 61

1. Avec  $2 \sin p \sin q = \cos(p - q) - \cos(p + q)$  :

$$\begin{aligned} 2 \sin a \sin c + 2 \sin b \sin(a + b + c) &= [\cos(a - c) - \cos(a + c)] + [\cos(a + c) - \cos(a + 2b + c)] \\ &= \cos(a - c) - \cos(a + 2b + c) = 2 \sin(a + b) \sin(b + c). \end{aligned}$$

2.  $MN^2 = R^2 [2 - 2(\cos(\theta + 2u) \cos \theta + \sin(\theta + 2u) \sin \theta)] = 2R^2(1 - \cos 2u) = 4R^2 \sin^2 u$  ; comme  $u \in [0, \pi]$ ,  $\sin u \geq 0$  :  $MN = 2R \sin u$  (une corde vaut  $2R$  fois le sinus de la moitié de l'arc).

3. D'après 2 :  $AB = 2R \sin a$ ,  $BC = 2R \sin b$ ,  $CD = 2R \sin c$ ,  $DA = 2R \sin d = 2R \sin(a + b + c)$  (car  $d = \pi - (a + b + c)$ ), et, les arcs  $AC$  et  $BD$  mesurant  $2(a + b)$  et  $2(b + c)$  :  $AC = 2R \sin(a + b)$ ,  $BD = 2R \sin(b + c)$ . D'après 1 :

$$AC \times BD = 4R^2 [\sin a \sin c + \sin b \sin(a + b + c)] = AB \times CD + BC \times DA.$$

(Pour un rectangle,  $AC = BD = 2R$  et l'on retrouve Pythagore :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ .)

4. a) Deux sommets consécutifs sont séparés par un arc de  $\frac{2\pi}{7}$  :  $\ell = 2R \sin \frac{\pi}{7}$ ,  $d_1 = 2R \sin \frac{2\pi}{7}$ ,  $d_2 = 2R \sin \frac{3\pi}{7}$ , et  $A_1A_5 = 2R \sin \frac{4\pi}{7} = d_2$ .

b) Dans  $A_1A_2A_3A_4$  :  $A_1A_3 = A_2A_4 = d_1$ ,  $A_1A_4 = d_2$ , les trois autres côtés valent  $\ell$  :  $d_1 \cdot d_1 = \ell \cdot \ell + d_2 \cdot \ell$ , soit  $d_1^2 = \ell^2 + \ell d_2$ . Dans  $A_1A_2A_3A_5$  :  $A_1A_3 = A_3A_5 = d_1$ ,  $A_2A_5 = A_5A_1 = d_2$  :  $d_1 d_2 = \ell d_1 + d_2 \ell$ , soit  $d_1 d_2 = \ell (d_1 + d_2)$ .

- c) On divise par  $\ell d_1 d_2$  :  $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$ , puis on simplifie par  $\frac{1}{2R}$  ( $2,3048 \approx 1,2790 + 1,0257$  ✓) :

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

### ■ Corrigé de l'exercice 62

1. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  :  $CH = AC \sin \hat{A} = b \sin \hat{A}$  (si  $\hat{A}$  est obtus,  $\sin(180^\circ - \hat{A}) = \sin \hat{A}$ ). L'aire vaut  $\frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ , et de même  $\frac{1}{2} ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ . En divisant  $bc \sin \hat{A} = ca \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C}$  par  $abc$  :  $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$ .
2. a) Dans  $BCE$  :  $\hat{EBC} = 80^\circ$ ,  $\hat{ECB} = 50^\circ$ , donc  $\hat{BEC} = 50^\circ = \hat{ECB}$  :  $BCE$  est isocèle en  $B$  et  $BE = BC = 1$ .
- b) Dans  $BCD$  :  $\hat{BDC} = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ . Loi des sinus :  $\frac{BD}{\sin 80^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ}$ , d'où  $BD = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 2 \cos 40^\circ$ .
3. a) La demi-droite  $[BD)$  est entre  $[BA)$  et  $[BC)$  :  $\hat{EBD} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ , puis, dans  $BDE$ ,  $\hat{BED} = 180^\circ - 20^\circ - x = 160^\circ - x$ . Loi des sinus dans  $BDE$  :  $\frac{BE}{\sin x} = \frac{BD}{\sin(160^\circ - x)}$ , d'où  $\sin(160^\circ - x) = 2 \cos 40^\circ \sin x$ .
- b)  $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$  et  $2 \cos 40^\circ \sin 30^\circ = \cos 40^\circ$  ✓.
- c)  $\sin(160^\circ - x) = \sin 160^\circ \cos x - \cos 160^\circ \sin x$ , d'où  $g(x) = \sin 160^\circ \cotan x - \cos 160^\circ$ . Comme  $\sin 160^\circ > 0$  et que  $\cotan$  est strictement décroissante sur  $]0^\circ, 180^\circ[$ ,  $g$  est strictement décroissante sur  $]0^\circ, 160^\circ[$  : l'équation  $g(x) = 2 \cos 40^\circ$  a au plus une solution. Donc  $\hat{BDE} = 30^\circ$ .

**Remarque.** Les solutions purement géométriques de ce problème demandent une construction astucieuse ; la loi des sinus et la monotonie de  $\cotan$  donnent une méthode systématique.

## ■ Corrigé de l'exercice 63

1. a)  $\sin 1 = \sin((x+1) - x) = \sin(x+1)\cos x - \cos(x+1)\sin x$ , donc, comme  $|\cos| \leq 1$  :

$$\sin 1 \leq |\sin(x+1)| |\cos x| + |\cos(x+1)| |\sin x| \leq |\sin(x+1)| + |\sin x|.$$

b) En cas d'égalité, la seconde inégalité est une égalité :  $|\sin(x+1)|(1 - |\cos x|) + |\sin x|(1 - |\cos(x+1)|) = 0$ , somme de deux termes positifs, tous deux nuls. Si  $\sin x = 0$  :  $x = k\pi$ . Sinon  $|\cos(x+1)| = 1$ , donc  $\sin(x+1) = 0$  et  $x = -1 + k\pi$ . Réciproquement, pour  $x = k\pi$  ou  $x = -1 + k\pi$ , la somme vaut  $0 + \sin 1$  ✓. Égalité  $\iff x \in \{k\pi\} \cup \{k\pi - 1\}$  ; le minimum est  $\boxed{\sin 1}$ .

2. a)  $s = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  et  $\sin x \cos x = \frac{s^2-1}{2} \neq 0$ , donc  $s \neq \pm 1$ . Puis  $\tan x + \cotan x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{s^2-1}$  et  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{s}{\sin x \cos x} = \frac{2s}{s^2-1}$  :

$$f(x) = s + \frac{2(1+s)}{(s-1)(s+1)} = s + \frac{2}{s-1}.$$

b)  $v + \frac{2}{v} - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{v} - \sqrt{2/v}\right)^2 \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $v = \sqrt{2}$ . On a  $f(x) = u + 1 + \frac{2}{u}$  : si  $u > 0$ ,  $f(x) \geq 1 + 2\sqrt{2}$  ; si  $u < 0$ , avec  $v = -u > 0$  :  $f(x) = 1 - \left(v + \frac{2}{v}\right) \leq 1 - 2\sqrt{2}$ .

c) Dans les deux cas  $|f(x)| \geq 2\sqrt{2} - 1$  (car  $1 + 2\sqrt{2} > 2\sqrt{2} - 1$ ), avec égalité si et seulement si  $u = -\sqrt{2}$ , c'est-à-dire  $s = 1 - \sqrt{2}$ . Cette valeur est dans  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  et différente de  $\pm 1$  :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \in [-1, 1]$  a des solutions, pour lesquelles  $\sin x \cos x = \frac{s^2-1}{2} = 1 - \sqrt{2} \neq 0$ . Le minimum de  $|f|$  est  $\boxed{2\sqrt{2} - 1 \approx 1,83}$ .

## ■ Corrigé de l'exercice 64

1. a)  $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \neq 0$ , donc  $\sin \frac{a}{2} \neq 0$ , et

$$\cotan \frac{a}{2} - \cotan a = \frac{\sin a \cos \frac{a}{2} - \cos a \sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2} \sin a} = \frac{\sin\left(a - \frac{a}{2}\right)}{\sin \frac{a}{2} \sin a} = \frac{1}{\sin a}.$$

b) Avec  $a = 2^k x$  :  $\frac{1}{\sin(2^k x)} = \cotan(2^{k-1} x) - \cotan(2^k x)$  ; la somme de  $k = 0$  à  $n-1$  est télescopique et vaut  $\cotan \frac{x}{2} - \cotan(2^{n-1} x)$ .

c)  $x = \frac{2\pi}{7}$ ,  $n = 3$  ( $\cotan$  est  $\pi$ -périodique) :

$$\frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{8\pi}{7}} = \cotan \frac{\pi}{7} - \cotan \frac{8\pi}{7} = 0.$$

Or  $\sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7}$  et  $\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$  : on retrouve l'identité de l'exercice 61.

2. a)  $\tan x = \tan((k+1)x - kx) = \frac{\tan(k+1)x - \tan kx}{1 + \tan kx \tan(k+1)x}$  (le dénominateur vaut  $\frac{\cos x}{\cos kx \cos(k+1)x} \neq 0$ ) ; on isole  $1 + \tan kx \tan(k+1)x$  et on divise par  $\tan x \neq 0$ .

b) La somme des quotients est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \tan kx \tan(k+1)x = \frac{\tan(n+1)x - \tan x}{\tan x} - n = \boxed{\frac{\tan(n+1)x}{\tan x} - (n+1)}.$$

c)  $x = 1^\circ$ ,  $n = 88$  (les  $\cos k^\circ$ ,  $1 \leq k \leq 89$ , sont non nuls) et  $\tan 89^\circ = \cotan 1^\circ$  :

$$\sum_{k=1}^{88} \tan k^\circ \tan(k+1)^\circ = \frac{1}{\tan^2 1^\circ} - 89 \approx 3193,14.$$

$x = \frac{\pi}{5}$ ,  $n = 4$  : la somme des quatre termes vaut  $\frac{\tan \pi}{\tan \frac{\pi}{5}} - 5 = -5$  et le quatrième,  $\tan \frac{4\pi}{5} \tan \pi$ , est nul : la somme demandée vaut  $\boxed{-5}$ .

### ■ Corrigé de l'exercice 65

1. Avec  $\theta = 2^k r\pi$  :  $u_{k+1} = 2 \cos 2\theta = 2(2 \cos^2 \theta - 1) = (2 \cos \theta)^2 - 2 = u_k^2 - 2$ .
2.  $2^k a = 2b q_k + m_k$  avec  $0 \leq m_k < 2b$ , donc  $2^k r\pi = \frac{2^k a}{b} \pi = 2q_k \pi + \frac{m_k \pi}{b}$  et  $u_k = 2 \cos \frac{m_k \pi}{b}$  : au plus  $2b$  valeurs.
3. a)  $u_1 = \frac{p^2}{q^2} - 2 = \frac{p^2 - 2q^2}{q^2}$ . Si un nombre premier  $\ell$  divise  $q^2$  et  $p^2 - 2q^2$ , il divise  $q$ , puis  $p^2 = (p^2 - 2q^2) + 2q^2$ , donc  $p$  : contradiction avec  $p \wedge q = 1$ . La fraction est irréductible.  
b) Récurrence : vrai pour  $k = 0$  ; si  $u_k = \frac{p_k}{q^{2^k}}$  est irréductible, avec  $q^{2^k} \geq 2$ , le a) appliqué à  $u_k$  montre que

$$u_{k+1} = \frac{p_k^2 - 2q^{2^{k+1}}}{q^{2^{k+1}}} \text{ est irréductible.}$$

Deux fractions irréductibles égales ont le même dénominateur ; or  $q < q^2 < q^4 < \dots$  : les  $u_k$  sont deux à deux distincts, en nombre infini, ce qui contredit 2.

- c) Donc  $q = 1$  :  $u_0 = 2 \cos(r\pi)$  est un entier de  $[-2, 2]$ , et  $\cos(r\pi) \in \left\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\right\}$  (valeurs atteintes pour  $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1$ ).
4. a)  $\sin(r\pi) = \cos\left(\left(\frac{1}{2} - r\right)\pi\right)$  et  $\frac{1}{2} - r$  est rationnel.  
b) Soit  $t = \tan(r\pi) \in \mathbb{Q}$  :  $c = \cos(2r\pi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  est rationnel, donc  $c \in \left\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\right\}$  ;  $c = -1$  est impossible ( $1 - t^2 = -1 - t^2$ ), et  $t^2 = \frac{1-c}{1+c} \in \left\{0, \frac{1}{3}, 1, 3\right\}$ . Comme  $\sqrt{3}$  est irrationnel,  $t^2 \neq \frac{1}{3}$  et  $t^2 \neq 3$  :  $t \in \{0, \pm 1\}$ .  
c) Si l'angle aigu  $\alpha$  mesurait un nombre rationnel  $\rho$  de degrés, alors  $\alpha = r\pi$  avec  $r = \frac{\rho}{180} \in \mathbb{Q}$ . Or  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  sont des quotients d'entiers (côté adjacent ou opposé sur hypoténuse), donc  $\cos \alpha \in \left\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\right\} \cap ]0, 1[$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 60^\circ$  et  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  irrationnel : contradiction. (Pour 3, 4, 5 :  $\alpha \approx 36,87^\circ$  et  $53,13^\circ$ .)

### ■ Corrigé de l'exercice 66

1. a)  $t^n \leq |t|^n = t^2 |t|^{n-2} \leq t^2$  car  $|t| \leq 1$ . Égalité dans la seconde inégalité  $\iff t = 0$  ou  $|t| = 1$  ; dans la première  $\iff t^n \geq 0$  : d'où  $t \in \{0, 1\}$  si  $n$  est impair,  $t \in \{-1, 0, 1\}$  si  $n$  est pair.  
b)  $\sin^n x + \cos^n x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , avec égalité si et seulement si  $t = \sin x$  et  $t = \cos x$  réalisent tous deux l'égalité du a).  $n$  pair :  $\sin x, \cos x \in \{-1, 0, 1\}$ , soit  $x = \frac{k\pi}{2}$ .  $n$  impair :  $\sin x, \cos x \in \{0, 1\}$  et  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , donc  $(\sin x, \cos x) = (0, 1)$  ou  $(1, 0)$  :  $x = 2k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .
2. a) Comme  $\cos \leq 1$  :  $f(x) = 2 \iff \cos x = 1$  et  $\cos(\sqrt{2}x) = 1 \iff x = 2k\pi$  et  $\sqrt{2}x = 2m\pi$  ( $k, m \in \mathbb{Z}$ ). Si  $k \neq 0$ ,  $\sqrt{2} = \frac{m}{k}$  serait rationnel : donc  $k = 0$  et  $S = \{0\}$ .

- b) Si  $T > 0$  était une période, on aurait  $f(T) = f(0) = 2$ , donc  $T = 0$  : contradiction.  $f$  n'est pas périodique.
3. Si  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}^*$ ),  $T = \frac{2p\pi}{a} = \frac{2q\pi}{b} > 0$  et  $g(x + T) = \cos(ax + 2p\pi) + \cos(bx + 2q\pi) = g(x)$ . Réciproquement, si  $T > 0$  est une période,  $g(T) = g(0) = 2$  impose  $\cos aT = \cos bT = 1$  :  $aT = 2p\pi$  et  $bT = 2q\pi$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , d'où  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ .
4.  $2\pi$  est une période. Si  $T > 0$  est une période :  $h(T) = h(0) = 2$ , donc  $\cos 2T = \cos 3T = 1$  :  $T = p\pi$  et  $3T = 2q\pi$ , d'où  $3p = 2q$ ,  $p$  pair, et  $T \in 2\pi\mathbb{N}^*$ . La plus petite période est  $\boxed{2\pi}$ .

**Remarque.** Les sommes comme  $\cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ , de périodes « incommensurables », ressemblent à des fonctions périodiques sans en être : H. Bohr (1924) les a appelées fonctions *presque périodiques*.

# Mon bilan sur le chapitre

## Partie B · Le parcours en 4 niveaux

| Niveau                           | Exercices | Réussis seul(e) | À refaire |
|----------------------------------|-----------|-----------------|-----------|
| Niveau 1 · Bases ★               | 1 à 8     | / 8             |           |
| Niveau 2 · Bac ★★                | 9 à 16    | / 8             |           |
| Niveau 3 · Approfondissement ★★★ | 17 à 23   | / 7             |           |
| Niveau 4 · Concours ★★★★         | 24 à 30   | / 7             |           |

## Partie C · La banque d'exercices

| Thème                                           | Exercices | Réussis seul(e) | À refaire |
|-------------------------------------------------|-----------|-----------------|-----------|
| Thème A · Cercle et angles associés             | 31 à 36   | / 6             |           |
| Thème B · Formules d'addition et de duplication | 37 à 42   | / 6             |           |
| Thème C · Transformations et identités          | 43 à 48   | / 6             |           |
| Thème D · Équations et inéquations              | 49 à 54   | / 6             |           |
| Thème E · Courbes et extremums                  | 55 à 60   | / 6             |           |
| Thème F · Défis de concours                     | 61 à 66   | / 6             |           |

*Conseil* : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Et maintenant : les devoirs surveillés de 1<sup>re</sup> Bac SM

Maths Olympiad