

*Lycée les Castors*

Devoir N°6 de Mathématiques			
Classe : 11^{ème} Sc	24 Février 2023	Durée : 3 heures	Coef : 04

Le sujet est composé de trois exercices tous obligatoires. Il comprend deux pages.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[7,5 points]

Calcule les limites suivantes. (10 × 0,75 pt = 7,5 pts)

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} -2x + 3 - \frac{7}{(x-1)^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}}{-3x^2 + 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{2 - \sqrt{x^2 - x + 2}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 7x + 1} - 5x + 2}{-2 + \sqrt{x^2 - x + 4}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-10} + 2}{6 - 3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - 3 \cos x + 2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \times \tan 5x}{1 - \cos 7x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos x}{\sin 3x + \sin 9x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{\sqrt{3} + 2 \sin x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(\tan 2x)}.$$

Exercice 2 : -----[7,5 points]

A. Calcule les limites suivantes. (8 × 0,75 pt = 6 pts)

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^{13} + 3x^5 + 50);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 9x + 207}{-x^3 + 17x^2 + 45};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 3 - \frac{7}{(x-1)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x + 5 + \sqrt{4x^2 - 13});$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5 + \sqrt{3x^2 - 13})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x + 1)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - \sin x}{5x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x \cos 7x + 1}{6x^2 + 5}.$$

B. 1. Démontre que $\forall x \in [1; +\infty[; \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$. (0,5 pt)

2. Déduis-en les limites suivantes (1 pt) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)\sqrt{x}}$

Exercice 3 :-----[5 points]

A. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f . **(0,75 pt)**
2. f est-elle continue en 0 et en 2 ? justifie ta réponse. **(1 pt)**
3. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui précise son prolongement g en 0. **(0,75 pt)**
4. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui précise son prolongement h en 1. **(0,5 pt)**

B. On considère la fonction P définie par :
$$\begin{cases} P(x) = ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \in]-\infty; 2[\\ P(x) = ax + b & \text{si } x \in]2; +\infty[\\ P(2) = a - 3b + 2 \end{cases}$$

Détermine les réels a et b pour que P soit continue en $x_0 = 2$. **(1 pt)**

C. Détermine le réel m pour que la fonction q définie ci-dessous soit continue en -1 :

$$\begin{cases} q(x) = \frac{\sqrt{7x^2+9} + \sqrt{2x^2+7} - 7}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq -1 \\ q(-1) = \frac{24m+5}{24} \end{cases} \quad \textbf{(1 pt)}$$