

Epreuve de Mathématiques :

Série : 11 è S

Durée : 3 heures

Exercice :1 (5pts) les parties A) et B) sont indépendantesA) On donne le polynôme P défini par $P(x) = -343x^3 + 98x^2 + 7x - 2$ 1- Trouve les réelles a ; b et c tels que pour tout réel x

$$P(x) = a(-7x + 2)^3 + b(-7x + 2)^2 + c(-7x + 2) \quad (1,5 \text{ pts})$$

2- Déduis-en la factorisation de $P(x)$ sous forme de produits de binômes du premier degré. (0,75 pt)3- Déduis une résolution de l'équation $P(x) = 0$ puis celle de l'inéquation $P(x) \leq 0$ (1 pt)4- Résous dans l'équation $P(x) = -2$ puis l'inéquation $P(x) \leq -2$ (1 pt)B) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = x - 5$ cm et $AC = x - 3$ cm.1- Détermine l'aire $f(x)$ en cm^2 de ce triangle (0,25 pt)2- Mettre $f(x)$ sous forme canonique (0,25 pt)3- Détermine x lorsque l'aire de ABC est égale à 15 cm^2 . (0,25 pt)**Exercice :2 (5pts) les parties A) ; B) et C) sont indépendantes**A) Trouve les nombres réels a et b tels que le polynôme f soit divisible par le polynôme g avec $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 - 3x + b$ et $g(x) = x^2 - 7x + 12$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1,5 pts)B) Trouve le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme f par le polynôme g

$$f(x) = \frac{5}{4}x^7 + 4x^5 + x^3 + 2x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 - x^2 + 2 \quad (1,5 \text{ pts})$$

C) Soit la fonction k définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{2x^3 - 19x^2 + 65x - 77}{(x-3)^2}$ 1- Trouve D_k (0,5 pt)2- Trouve quatre nombres réels a ; b ; c et d tels que : $k(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{(x-3)^2}$ (1,5 pts)**Problème : (10 pts) les parties A) et B) sont indépendantes**A) On considère la fonction paramétrique g_m définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$g_m(x) = (m-5)x^2 + (-2m+3)x + m+1 \quad \text{avec } m \text{ un paramètre réel.}$$

1- Détermine si possible les valeurs de m pour que g_m admet :

a) Une racine double (0,75 pt)

b) Deux racines distinctes de signes contraires (0, 75 pt)

c) Deux racines distinctes positives (0, 75 pt)

2-Détermine m pour que :

a) g_m soit un trinôme du second degré (0, 75 pt)

b) g_m soit un trinôme du second degré toujours négative (0, 75 pt)

c) g_m soit une fonction affine (0, 75 pt)

3-Détermine m pour que g_m admet deux racines distinctes. Trouve une relation indépendante de m entre les deux racines x_1 et x_2 (1 pt)

4-Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{g_5(x)}{x+2}$. Trouve l'image directe par h de l'intervalle $[6; +\infty[$ (0,5 pt)

B) On considère la fonction paramétrique f_m :

$$f_m(x) = (m^2 + 6m - 7)x^2 + (m - 1)(m - 2)x + 2m^2 + m - 3 \text{ avec } m \text{ un paramètre réel.}$$

1-Détermine suivant les valeurs de m le nombre et le signe des racines de f_m . (2pts)

2-Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_m) : $f_m(x) = 0$ (2 pts)

Correction du devoir n°2 / 11^e S / 2023/24

Exercice 1.

A) $P(x) = -343x^3 + 98x^2 + 7x - 2$

1) les reels a, b, c :

$$P(x) = a(-7x+2)^3 + b(-7x+2)^2 + c(-7x+2)$$

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

2) Factorisation de $P(x)$

$$P(x) = (-7x+2)(-7x+1)(7x+1)$$

3) Resolution

$$* P(x) = 0 \Leftrightarrow S_R = \left\{ \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7} \right\}$$

$$* P(x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$+\infty$
$7x+2$	+	+	+	0	-
$-7x+1$	-	-	0	+	+
$7x+1$	-	0	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	+

$$S_R = \left[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7} \right] \cup \left[\frac{2}{7}, +\infty \right[$$

4) Resolution:

$$* P(x) = -2 \Leftrightarrow -343x^3 + 98x^2 + 7x = 2$$

$$\Leftrightarrow S_R = \left\{ 0, \frac{1-\sqrt{2}}{7}, \frac{1+\sqrt{2}}{7} \right\}$$

$$* P(x) \leq -2 \Leftrightarrow -343x^3 + 98x^2 + 7x \leq 2$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{2}}{7}$	0	$\frac{1+\sqrt{2}}{7}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$-343x^3 + 98x^2 + 7x$	-	0	+	+	0
$P(x) + 2$	+	0	-	0	-

$$S_R = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{7}, 0 \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{7}, +\infty \right[$$

B) ABC est un triangle rectangle en A:

$$AB = (x-5) \text{ cm et } AC = (x-3) \text{ cm}$$

1) L'aire $f(x)$:

ABC est rectangle en A alors

$$f(x) = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 8x + 15) \text{ cm}^2$$

2) Forme canonique de $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2} [(x-4)^2 - 4^2 + 15]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} [(x-4)^2 - 1] \text{ ou}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x-4)^2 - \frac{1}{2}$$

3) $x \in \mathbb{R}$ $x = ?$ si $2 \times f(x) = 15 \text{ cm}^2$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{2} [(x-4)^2 - 1] = 15$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 4 \text{ ou } x-4 = -4 \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 8$$

$$AB = x - 5 > 0 \quad \text{et} \quad AC = x - 3 > 0$$

$$\text{donc } \boxed{x = 8} \quad (0,25)$$

Exercice 2:

$$A.) f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 - 3x + 6$$

$$g(x) = x^2 - 7x + 12.$$

* les zéros de g : 0,5

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3 \text{ ou } x = 4}$$

* $f(x)$ est divisible par $g(x)$ si

$$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + b = -126 \\ 16a + b = -372 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{246}{7}; b = \frac{1332}{7}}$$

(1)

B/ le quotient et le reste:

$$f(x) = \frac{5}{4}x^7 + 4x^5 + x^3 + 2x - 6$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 - x^2 + 2$$

* le quotient $Q(x)$:

$$Q(x) = \frac{15}{8}x^2 - \frac{315}{16}x + \frac{6807}{32}$$

(0,75)

* le reste $R(x)$:

$$R(x) = -\frac{47589}{32}x^4 - \frac{299}{16}x^3 + \frac{6687}{32}x^2 + \frac{331}{8}x - \frac{6903}{16}$$

(0,75)

$$c.) k(x) = \frac{2x^3 - 19x^2 + 65x - 77}{(x-3)^2}$$

$$1.) D_k = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad (0,5)$$

2.) les réels a, b, c et d :

$$\begin{aligned} k(x) &= ax + b + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{(x-3)^2} \\ &= \frac{ax(x-3)^2 + b(x-3)^2 + c(x-3) + d}{(x-3)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (b-6a)x^2 + (9a-6b+c)x + 9b-3c+d}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Par identification

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 6a = -19 \\ 9a - 6b + c = 65 \\ 9b - 3c + d = -77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 5 \\ d = 1 \end{cases}$$

(45)

$$k(x) = 2x - 7 + \frac{5}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

Problème: $m \in \mathbb{R}$.

$$A.) g_m(x) = (m-5)x^2 + (-2m+3)x + m+1$$

1.) déterminer si $m \neq 3$

$$\Delta = 4m + 29 \quad (0,25)$$

$$P = \frac{m+1}{m-5} \quad \text{et} \quad S = \frac{2m-3}{m-5}$$

(0,25)

(0,25)

m	$-\infty$	$-\frac{29}{4}$	-1	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$
Δ	-	0	+	+	+	+
P	+	+	0	-	-	+
S	+	+	+	0	-	+

(0,25)

2/4

2.) Déterminons m pour que g_m admette:

a) une racine double
 $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{29}{4}} \quad (0,5)$

b) Deux racines distinctes de signes contraires:

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m \in]-1; 5[} \quad (0,5)$

c) Deux racines distinctes positives:

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ p > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m \in]-\frac{29}{4}; -2[\cup]5; +\infty[} \quad (0,5)$

2.) a) g_m soit un trinôme du second degré:

$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m \in \mathbb{R} \setminus]5; \frac{3}{2}]} \quad (0,5)$

b) g_m soit un trinôme du second degré toujours négative: 0,75

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m \in]-\infty; -\frac{29}{4}[} \quad (0,75)$

m	$-\infty$	$-\frac{29}{4}$	5	$+\infty$
a	-	-	0	+
Δ	-	0	+	+

c) g_m soit une fonction affine:

$a = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = 5} \quad (0,75)$

3) g_m admet deux racines distinctes:

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m \in]-\frac{29}{4}; +\infty[\setminus \{5\}} \quad (0,5)$

* une relation indépendante de m entre x_1 et x_2 :

Pour $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, x_1 et x_2 existent: $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$

$$P = \frac{m+1}{m-5} \Leftrightarrow m = \frac{5P+1}{P-1}$$

$$S = \frac{2m-3}{m-5} \Leftrightarrow m = \frac{5S-3}{S-2}$$

$$m = m \Leftrightarrow 6S - 7P - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{6(x_1+x_2) - 7x_1x_2 - 5 = 0} \quad (0,5)$$

$$4) h(x) = \frac{g_5(x)}{x+2} = \frac{-7x+6}{x+2} = -7 + \frac{20}{x+2}$$

$$h([6; +\infty[) = ?$$

$$x \in [6; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq x < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq x+2 < +\infty+2$$

$$\Rightarrow 8 \leq x+2 < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{h([6; +\infty[) =]-7; -\frac{9}{2}] \quad (0,5) \quad \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$5) f_m(x) = (m^2 + 6m - 7)x^2 + (m-1)(m-2)x + 2m^2 + m - 3$$

1) le nombre et le signe des racines de f_m .

$$a = m^2 + 6m - 7 \quad | \quad b = (m-1)(m-2) \quad | \quad c = 2m^2 + m - 3$$

$$= (m-1)(m+7) \quad | \quad c = 2(m-1)(m+\frac{3}{2})$$

$$= (m-1)(2m+3)$$

1^{er} cas: $a=0 \Leftrightarrow m \in \{1, -7\}$.

* Pour $m=1 \Rightarrow f_1(x)=0$ donc f_1 admet une infinité de racines. (0,25)

* Pour $m=-7 \Rightarrow f_{-7}(x) = 72x + 88$ et $72x + 88 = 0 \Rightarrow x = -\frac{72}{88} = -\frac{11}{9}$
donc f_{-7} admet une solution simple négative. (0,25)

2^{es} cas: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -7\}$, supposons $x_1 < x_2$.

$$\Delta = (m-1)^2(-7m^2 - 72m - 88) \quad ; \quad p = \frac{2m+3}{m+7} \quad ; \quad s = \frac{-m+2}{m+7}$$

m	$-\infty$	$\frac{-36-4\sqrt{46}}{7}$	-7	$-\frac{3}{2}$	$\frac{-36+4\sqrt{46}}{7}$	1	2	$+\infty$
Δ	-	0	+	+	0	-	-	-
p	+	+	-	0	+	+	+	+
s	-	-	+	+	+	+	0	-
Nombre et signe des racines de f_m	Pas de racine	$x_1 \neq x_2$ $x_1 < x_2 < 0$ $x_1 = x_2 < 0$	$x_1 \neq x_2$ $x_1 < 0 < x_2$ $ x_1 < x_2 $ $x_1 = 0$ $x_2 > 0$	$x_1 \neq x_2$ $0 < x_1 < x_2$ $x_1 = x_2 > 0$	Pas de racine	Pas de racine	Pas de racine	Pas de racine

2) Résolution dans $\mathbb{R}_1(E_m): f_m(x) = 0$.

1^{er} cas: $a=0 \Leftrightarrow m \in \{1, -7\}$. (0,5)

* Pour $m=1; (E_1): f_1(x)=0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

* Pour $m=-7; (E_{-7}): 72x + 88 = 0$
 $S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{11}{9}\}$ (0,5)

2^{es} cas: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -7\}$

* Pour $m \in]-\infty; \frac{-36-4\sqrt{46}}{7}[\cup]\frac{-36+4\sqrt{46}}{7}; +\infty[$

$\Delta < 0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ (0,25)

* Pour $m \in [\frac{-36-4\sqrt{46}}{7}; \frac{-36+4\sqrt{46}}{7}]$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-m+2}{2(m+7)}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-m+2}{2m+14} \right\}$$

* Pour $m \in]\frac{-36-4\sqrt{46}}{7}; \frac{-36+4\sqrt{46}}{7}[\setminus \{-7\}$

$\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-(m-1)(m-2) - \sqrt{(m-1)^2(-7m^2-72m-88)}}{2(m-1)(m+7)}$$

$$x_2 = \frac{-(m-1)(m-2) + \sqrt{(m-1)^2(-7m^2-72m-88)}}{2(m-1)(m+7)}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{x_1, x_2\}$$