

1^{ère} PERIODE - DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES : 11S - DUREE : 03HEURES - 29/11/2023Exercice 1 :(6 points)

1) Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ admettant trois racines $a ; b$ et c non nuls .

2) Détermine sans calculer ses racines les valeurs de : $a + b + c ; ab + ac + bc ; abc ; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} ; a^2 + b^2 + c^2 ; a^3 + b^3 + c^3$ et $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

3) Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 5}{x^2 - x - 2}$.

a. Détermine l'ensemble de définition de f .

b. Détermine les réels $a ; b$ et c tels que :

$$x^3 + 4x^2 + x - 5 = (x + 3)(ax^2 + bx + c) + 1 .$$

c. Détermine les réels $a ; b ; c$ et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - x - 2}$.

d. Détermine les réels $\alpha ; \beta ; \gamma$ et δ tels que : $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 2} + \frac{\delta}{x + 1}$.

Exercice 2 :(6 points)

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$.

1. Vérifie que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)$.

2. Montre que si α est racine du polynôme $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$.

3. Vérifie que 2 est racine du polynôme $P(x)$.

4. En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$. Trouve un polynôme $q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 2) \times q(x)$.

5. Calcule $q\left(\frac{1}{2}\right)$. Trouve les réels $a ; b$ et c tels que :

$$q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) (ax^2 + bx + c) .$$

6. En déduis une factorisation du polynôme $P(x)$ en polynômes de premier degré .

T.S.V.P

Problème : (8 points)

On considère l'équation paramétrique $(E_m) : (m + 1)x^2 - (2m - 1)x + m = 0$.

1. Donne les conditions de m pour que l'équation (E_m) soit du second degré.
2. On suppose que $m \neq -1$. Montre que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta_m = -8m + 1$.
3. Dresse le tableau de signe de Δ_m suivant les valeurs de m .
4. Détermine les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet :
 - a. Deux solutions réelles distinctes.
 - b. Une solution double
 - c. Aucune solution.
5. On suppose que l'équation (E_m) admet deux solutions réelles distinctes.
 - a. Détermine en fonction de m l'expression du produit P et de la somme S des solutions l'équation (E_m) .
 - b. En déduis les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet :
 - Deux solutions de signe contraire.
 - Deux solutions distinctes de même signe et précise ce signe.
6. Trouve une relation indépendante du paramètre m entre les solutions de l'équation (E_m) .

a) $f(x) = x + 3 + \frac{8x + 5}{x^2 - x - 2}$

BONNE CHANCE

b) $x^3 + 6x^2 + x - 5 = (x+3)(x^2 + x - 2) + 4$