

Epreuve de Mathématiques :Série : 1^{re} S

Durée : 3 heures

Exercice 1 : 4 pts Les parties A et B sont indépendantes

A) Calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{3}x^7 - 12x^2 + 29x + 13 \quad (0,75\text{pt}) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{11x^3 - x^2 + 7x - 17}{-5x^2 + 53x - 48} \quad (0,75\text{pt})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} -9x - \sqrt{81x^2 + 8x + 15} \quad (0,75\text{pt}) \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{-4x + \pi} \quad (0,75\text{pt})$$

B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 + 3x + 2|}$ et (C_f) sa courbe représentative. Montre que la droite (D) d'équation $x = \frac{-3}{2}$ est axe de symétrie à la courbe (C_f) . (1 pt)

Exercice :2 6 pts Les parties A, B et C sont indépendantes

A) Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sqrt{9x^2 + 5x + 77} \quad (0,75\text{pt}) \quad 2) g(x) = -9x + 2 + \sqrt{17x^2 + 7x + 19} \quad (0,75 \text{ pt})$$

$$3) l(x) = 7x^5 - 24x^2 - 75x + 9 \quad (0,75\text{pt}) \quad 4) k(x) = \frac{7x^2 - 5x + 3}{x + 4} \quad (0,75 \text{ pt})$$

B) Etudie la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$l(x) = -27x^5 - 2x^3 + 5x ; g(x) = \frac{7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4} ; h(x) = \frac{\cos(5x) + 3}{\sin^2 x} \quad (1,5 \text{ pts})$$

C) Etudie la périodicité de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin\left(7x + \frac{\pi}{5}\right) ; g(x) = \cos(x) \sin(3x) ; h(x) = \frac{\cos(5x) + 3}{\sin(10x)} \quad (1,5 \text{ pts})$$

Problème : 10 points

On donne la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2 - x + 7}{x - 2}$ et (C_g) sa courbe représentative.

1) Trouve l'ensemble de définition de g (D_g). (1pt)

- 2) Calcule les limites aux bornes de (D_g) . En déduire l'équation de l'asymptote verticale. (1pt)
- 3) Trouve trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in D_g$, on a: $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ (1pt)
- 4)a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C_g) . (0,5pt)
- b) Etudie la position relative de (C_g) par rapport à (Δ) . (0,5 pt)
- 5) Montre que le point $I(2;3)$ est un centre de symétrie à (C_g) . (1 pt)
- 6) Calcule la dérivée de g . (1pt)
- 7) Trouve une équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse $x_0 = -2$ (1pt)
- 8) Dresse le tableau de variation de g . (1pt)
- 9) Trace la courbe (C_g) (1 pt)
- 10) Détermine graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation $(E_m) : x^2 + (-m-1)x + 7 + 2m = 0$ (1 pt)

Exo1 A) Calcule les limites

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{3}x^7 - 12x^2 + 29x + 13 = -\infty \quad (0,75)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{11x^3 - x^2 + 7x - 17}{-5x^2 + 53x - 48} = \frac{38}{43} \quad (0,75)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} -9x - \sqrt{81x^2 + 8x + 15} = -\frac{4}{9} \quad (0,75)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{-4x + \pi} = -\frac{1}{4} \quad (0,75)$$

B) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

Montre que la droite $(D): x = -\frac{3}{2}$ est axe de symétrie $\tilde{a}$ (cf)

$f(2a-x) \stackrel{?}{=} f(x)$ avec $a = -\frac{3}{2}$

$$f(-3-x) = \sqrt{(-3-x)^2 + 3(-3-x) + 2} = \sqrt{x^2 + 3x + 2} = f(x) \quad (1)$$

Alors la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est axe de symétrie $\tilde{a}$ (cf)

Exo2 A) Calcule la dérivée

1) $f(x) = \sqrt{9x^2 + 5x + 77}$

$$f'(x) = \frac{18x + 5}{2\sqrt{9x^2 + 5x + 77}} \quad (0,75)$$

2) $g(x) = -9x + 2 + \sqrt{17x^2 + 7x + 19}$

$$g'(x) = -9 + \frac{34x + 7}{2\sqrt{17x^2 + 7x + 19}} \quad (0,75)$$

3) $l(x) = 7x^5 - 24x^2 - 75x + 9$

$$l'(x) = 35x^4 - 48x - 75 \quad (0,75)$$

4) $k(x) = \frac{7x^2 - 5x + 3}{x + 4}$

$$k'(x) = \frac{7x^2 + 56x - 23}{(x+4)^2} \quad (0,75)$$

B) Etudie la parité

* $L(x) = -27x^5 - 2x^3 + 5x \quad (0,5)$

$$L(-x) = 27x^5 + 2x^3 - 5x \neq L(x)$$

$$-L(x) = 27x^5 + 2x^3 - 5x \quad \text{pas paire}$$

on obtient $L(-x) \neq -L(x)$ alors L est impaire

* $g(x) = \frac{7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4} \quad (0,5)$

$$g(-x) = \frac{7x^2 + 5x + 3}{x^2 + 4} \neq g(x)$$

gn'est pas paire.

$$-g(x) = -\frac{7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4}$$

$g(-x) \neq -g(x)$ alors gn'est pas impaire d'où elle est ni paire ni impaire

* $h(x) = \frac{\cos(5x) + 3}{\sin^2 x} \quad (0,5)$

$$h(-x) = \frac{\cos(5x) + 3}{\sin^2 x} = h(x)$$

h est paire.

c) Etudier la périodicité

* $f(x) = \sin(7x + \frac{\pi}{3})$ (0,5)

$a=7 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{7}$

$f(x+T) = f(x + \frac{2\pi}{7}) = \sin[7(x + \frac{2\pi}{7}) + \frac{\pi}{3}]$
 $= \sin(7x + \frac{\pi}{3}) = f(x)$ alors

f est périodique de période $\frac{2\pi}{7}$

* $g(x) = \cos(x) \sin(2x)$ (0,5)

$a = \text{PGCD}(1, 2) = 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$g(x+T) = g(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) \sin(2x+4\pi)$
 $= \cos(x) \sin(2x) = g(x)$ alors

g est périodique de période 2π

* $h(x) = \frac{\cos(5x) + 3}{\sin(10x)}$ (0,5)

$a = \text{PGCD}(5, 10) = 5 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$

$h(x+T) = h(x + \frac{2\pi}{5}) = \frac{\cos[5(x + \frac{2\pi}{5})] + 3}{\sin[10(x + \frac{2\pi}{5})]}$
 $= \frac{\cos(5x) + 3}{\sin(10x)} = h(x)$ alors

h est périodique de période $\frac{2\pi}{5}$

Problème $g(x) = \frac{x^2 - x + 7}{x - 2}$ (0,5)

1) $D_g = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

2) Les limites de g
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (0,25)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$ (0,25)

En déduire l'équation de l'asymptote verticale (0,25)
 $x=2$ est l'équation de l'asymptote verticale.

3) Trouver les réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_g, g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
 On obtient : $a=1, b=1$ et $c=9$ (1)

4) a) Prouver que $(\Delta): y = x+1$ est asymptote oblique à (C_g)
 $(\Delta): y = x+1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9}{x-2} = 0$ (0,5)

Alors $(\Delta): y = x+1$ est asymptote oblique à (C_g) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (C_g) par rapport à (Δ)

$g(x) - y = \frac{9}{x-2}$ (0,5)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x) - y$	$-$		$+$
pos. rel.	(C_g) est en dessous de (Δ)		(C_g) est au dessus de (Δ)

5) Prouver que $I(\frac{2}{3})$ est centre de symétrie à (C_g)
 $g(2a-x) + g(x) = 2b$
 $g(4-x) + g(x) = 6$ Vrai alors
 $I(\frac{2}{3})$ est centre de symétrie à (C_g) (1)

6) Calcule $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} \quad (1)$$

7) Trouve une équation de la tangente à (cg) au pt $x_0 = -2$

(1): $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$$y = g'(-2)(x + 2) + g(-2)$$

$$(1) y = \frac{7}{16}x - \frac{19}{8} \quad (1)$$

8) Dresse le Tableau de Variation de g .

$$\forall x \in \mathbb{R}; (x-2)^2 > 0$$

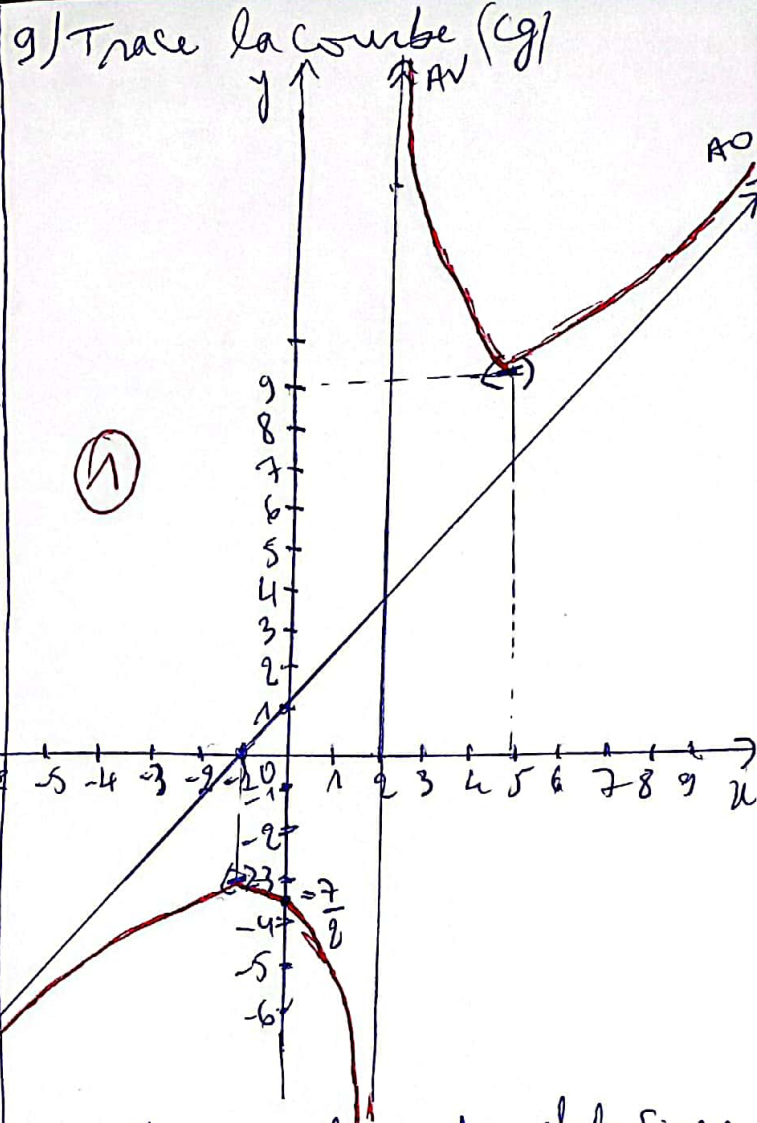
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$b = a + c$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a} = 5$$

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	ϕ	$-$	$-$	ϕ	$+$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$

(1)



10) Détermine le nombre et le signe de l'équation $(E_m): x^2 + (-m-1)x + 7 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow m = f(x) \Leftrightarrow m = g$ (1)

* $\forall m \in]-\infty; -\frac{7}{2}[$ l'équation (E_m) admet deux solutions de signes contraires

* Si $m = -\frac{7}{2}$ l'équation (E_m) admet deux solutions, une nulle et l'autre négative.

* $\forall m \in]-\frac{7}{2}; -3[$ l'équation (E_m) admet deux solutions négatives

* Si $m = -3$ l'équation (E_m) admet une solution négative ($x = -2$)

* $\forall m \in]-3; 9[$ l'équation (E_m) n'admet pas de solutions

* Si $m = 9$ l'équation (E_m) admet une solution positive ($x = 5$)

* $\forall m \in]9; +\infty[$ l'équation (E_m) admet deux solutions positives