

Evaluation sommative n°2 de Mathématiques :Situation 1 :

I. Identifie les applications parmi les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad t : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{3x}{x-2} \quad ; \quad x \mapsto \frac{x+2}{x^2+1} \quad ; \quad x \mapsto \frac{x+3}{x^2-4} \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

II. Soient $f; g$ et h les applications définies par : $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g :]-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $h : \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$
 $x \mapsto x^2 + 4 \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{3-x} \quad$ et $x \mapsto \frac{2x+3}{-x+4}$

- Détermine la nature de l'application f .
- Montre que g et h sont bijectives puis donne leurs bijections réciproques.
- Trouve les images directes par g de $A = \{-1; 2; 4\}$ et $B =]-\infty; 1]$.
- Trouve les images réciproques par h de $C = [1; 2]$ et $D = [3; +\infty[$.
- Détermine $Dgoh$ puis calcule $goh(x)$.

Situation 2 :

- Soit les polynômes $P(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ et $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.
Trouve les réels a et b pour que le polynôme $P(x)$ soit factorisable par $Q(x)$.
- Soit le polynôme $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
 - Trouve les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
 - Déduis-en une factorisation de $f(x)$.
 - Etudie le signe de $f(x)$.
- On donne le polynôme $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$.
 - Calcule $P(\sqrt{3})$ puis détermine le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \sqrt{3}) \times Q(x)$.
 - Calcule $(2 + 3\sqrt{3})^2$
 - Déduis-en les racines de $Q(x)$.

Situation 3 :

- On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 8x^2 + x - 42$.
 - En admettant que les réels a, b et c sont les trois zéros de P , donne la forme factorisée de $P(x)$ en fonction de a, b et c .
 - Donne alors la nouvelle forme développée de $P(x)$, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x dont les coefficients dépendent des réels a, b et c .
 - Par identification, détermine les valeurs de : $a + b + c; ab + ac + bc$ et abc .
 - On pose $a = -7$ et $b = 2$, trouve alors la valeur de c puis vérifie les résultats de 3).
1. Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité : $\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 = x^3$.
 2. Soit le polynôme f défini par : $f(x) = \frac{(x^2-x)^2}{4}$.
 - Calcule $f(n)$ et $f(n+1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Démontre que $f(n+1) - f(n) = n^3$.
 - Démontre que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- La fonction rationnelle g est définie par : $g(x) = \frac{-x-3}{x^2-1}$
 - Détermine le domaine de définition Dg de g .
 - Détermine les réels α et β tels que : $g(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1}$ pour tout $x \in Dg$.