

Exercice 1 :(10pts)

1. Rappelle les formules de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$.

a. En utilisant ces formules ci-dessus, en déduis celles de $\cos a \cos b$ et $\sin a \sin b$.

b. On pose $p = a + b$ et $q = a - b$, démontre que $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2. Simplifie les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(\pi - x) - \cos(-x) + \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$B(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$C(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Détermine $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$ sachant que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. En déduis $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 2 :(10pts)

1. Exprime $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ puis démontre que :

a. $\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x = 4 \sin x \cos x (1 + \cos x)$

b. $\cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos 2x (1 + \cos x)$

2. Vérifie que : $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et résous dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

3. En utilisant la question précédente, en déduis :

a. La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E): $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

b. La résolution dans $] -\pi ; \pi]$ de l'inéquation (I) : $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$