

Exercise :(10pts)

I) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - \frac{x^2}{x+1} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+1} - 2x$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

II) On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$.

- 1) Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
- 2) En déduire la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Problème :(10pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et (C) sa courbe représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
- 2) Déterminer la fonction dérivée f' de f . En déduire le sens de variation de f .
- 3) Dresser le tableau de variation de f et préciser les extrémums de f .
- 4) Déterminer les nombres réels $a; b$ et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - [-1]$,

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) que

l'on précisera. Etudier la position relative de (C) et de (D) .

- 5) Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
 6) Construire (C) .
 7) Résous graphiquement :
 a) $f(x) = -1$; b) $f(x) = 0$.
 8) Démontrer que : $f(x) = m \Leftrightarrow x^2 - mx - m = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$. Donner le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx - m = 0$.

Qui cherche, trouve « Bonne Chance »