

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES 11^{ème} SCIENTIFIQUE

Exercice 1 :

Sur une droite de repère (O, I) on donne les points A et B abscisses respectives -3 et 3

1. Construire les points C et D tels que : $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$
2. Soit J le milieu du segment $[CD]$, vérifier que :
 $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{JC}^2 = \overrightarrow{JD}^2 = \overrightarrow{JA} \times \overrightarrow{JB}$

Exercice 2 :

Soit ABC et A'B'C' deux triangles de centres de gravité respectifs G et G'.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC et A'B'C' aient le même centre de gravité

Application : Soit ABC un triangle et k un nombre réel. On désigne par A', B' et C' les points tels que $\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle .

1. Démontrer qu'il existe un unique point D tel que : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Construire le point D.

2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$
3. Déterminer le point M tel que : $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$.
4. Déterminer le point M tel que : $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

EXERCICE 4:

1-) x, y et z sont des réels positifs, Montrer que :

- a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$; b) $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Quand a-t-on l'égalité ?
- c) En déduire que $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$

Exercice 5 : 1)-Soit $x = \sqrt{5\sqrt{2} + \sqrt{14}}$ et $y = \sqrt{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}$

- a) calculer $x \cdot y$ et $(x + y)^2$; b) écrire plus simplement $\frac{x+y}{x-y}$

2)-Résoudre l'équation ci-contre :

$$x^2 - 74 = \sqrt{54 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{11 - \sqrt{\frac{4\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}}}}}}$$

Exercice 6:

- 1-) a) Donner un encadrement de a, b et c tels que : $|a - 3| \leq 2$; $|b + 4| \leq 1$ et $|2c - 1| \leq 7$
b) En déduire un encadrement de $a + b$; $b - c$; $c - a$; a^2 ; $\frac{a}{b}$; $2a - 3c$ et $a^2 + b^2 + c$.

2-) Trouver un encadrement de $\sqrt{17}$ après avoir calculer $(4, 1)^2$ et $(4, 2)^2$.

3-) Calculer y telque $\sqrt{y + \sqrt{13 + \sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{1}}} = 5$

Exercice 7 :

1. Lorsque $0 \leq u < v$, Comparer :

- a) $2u^2$ et $2v^2$; b) $\frac{1}{u+1}$ et $\frac{1}{v+1}$

En déduire le sens de variation de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x+1}$.

1. Démontrer que la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Est monotone sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$

Exercice 8 : Recopier, puis compléter le tableau suivant :

En termes de :				
Valeur absolue	Distance	Intervalle	Encadrement	Centre c et rayon r
$ x - 3 \leq 1$				
	$d(x; -4) \leq 2$			
			$-3 < x < -1$	
		$x \in]6; 10[$		
			$x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4$	
				$c = \frac{3}{2} \text{ et } r = \frac{1}{4}$

Exercice 9 : On considère la fonction définie par : $f(x) = (3x - 6)^2 + 1$

- 1- Déterminer que f est croissante sur $[2 + \infty[$
- 2- Démontrer que f est décroissante sur $] -\infty, 2]$
- 3- Démontrer que f n'est pas croissant sur $[1; 5]$

Exercice 10:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

1. On suppose $1 \leq x \leq 4$.
 - a. En utilisant les propriétés des inégalités, donner un encadrement de $f(x)$.
 - b. En admettant que f est croissante sur $] -1; +\infty[$ donner un encadrement de $f(x)$.
 - c. Comparer la qualité des encadrements obtenus en a) et b).
2. Même questions si $-5 \leq x \leq -2$. (On admettra que f est encore croissante sur $] -\infty; -1[$